



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Análisis de bifurcaciones de sistemas cuadráticos con
frontera

T E S I S

Que para obtener el título de:

Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Presenta:

Jocelyn Anaid Castro Echeverría

Director de Tesis: Dr. Fernando Verduzco González

Hermosillo, Sonora, México, 30 de marzo de 2022

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

SINODALES

Dr. Fernando Verduzco González
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Baltazar Aguirre Hernández
Universidad Autónoma Metropolitana, Ciudad de México, México

Dr. José Manuel Islas Hernández
Universidad Autónoma Metropolitana, Ciudad de México, México

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Juan Andres Castillo Valenzuela
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Agradecimientos

La presente tesis está dedicada a mi familia, lo más importante y valioso en mi vida, gracias por ser mi principal apoyo siempre: gracias mamá Bertha Alicia Echeverría Romero, te agradeceré por siempre, siempre estás en mi corazón y soy lo que soy por ti; gracias papá Roberto Castro Moreno, y gracias hermanos Danya Fabiola Castro Echeverría y Roberto Castro Echeverría, por caminar siempre a mi lado, enfrentando todo juntos de la mano.

Muchas gracias a mi director Dr. Fernando Verduzco González por siempre motivarme a seguir adelante con su ejemplo y con su dedicación, nada hubiera sido posible sin su invaluable apoyo y enseñanzas, desde el día uno y hasta hoy, gracias por ser un gran ser humano.

Me permito extender también mi agradecimiento a mis sinodales: Dr. Baltazar Aguirre Hernández, Dr. José Manuel Islas Hernández, Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro y Dr. Juan Andres Castillo Valenzuela, por el tiempo dedicado a la revisión exhaustiva de esta tesis, compartiendo sus observaciones y correcciones, gracias por su contribución. Asimismo, agradezco a todos mis profesores del doctorado por su dedicada labor en mi formación académica.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo recibido, sin el cual no habría sido posible la realización y culminación del Doctorado en Ciencias (Matemáticas) en la Universidad de Sonora, así como la realización de esta tesis.

Jocelyn Anaid Castro Echeverría
Marzo 2022

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	5
2.1. Bifurcación Takens-Bogdanov transcítica	5
3. Sistemas cuadráticos con frontera	13
3.1. Puntos de tangencia de un sistema cuadrático con frontera	14
3.2. Forma Normal	18
3.2.1. Clasificación de puntos de tangencia cuadrática bajo la forma normal	21
3.3. Colisión de dos puntos de tangencia del mismo tipo	24
4. Análisis de bifurcaciones	29
4.1. Bifurcaciones estacionarias en sistemas cuadráticos con frontera	29
4.2. Bifurcación Takens-Bogdanov transcítica con frontera	40
4.3. Ejemplos	50
4.3.1. Aplicación: Sistema activador-inhibidor (Gierer-Meinhardt) con frontera	50
4.3.2. Ejemplo Académico: Bifurcación Takens-Bogdanov transcítica con frontera	56
5. Conclusiones y perspectivas	59

Capítulo 1

Introducción

Dado un sistema cuadrático de ecuaciones diferenciales en el plano, delimitado por una línea recta como frontera, estamos interesados en estudiar los fenómenos de bifurcación que surgen en una vecindad de dicha frontera cuando se utilizan las posiciones de sus puntos de tangencia como parámetros de bifurcación. Recientemente en [3] se demostró que la colisión de dos puntos de tangencia de dos sistemas lineales distintos, con una recta como variedad de conmutación, puede generar la aparición de ciclos límite de cruce. Por otro lado, para sistemas Filippov (ver [7, 9]), se menciona en [17] que para una familia uni-paramétrica en el plano, dos puntos de tangencia cuadrática del mismo campo vectorial no pueden colisionar si ambos son de la misma naturaleza, es decir, si ambos son visibles o ambos son invisibles. Analizaremos bajo que condiciones es posible realizar dicha colisión de puntos de tangencia del mismo tipo, esta vez en un sistema bi-paramétrico cuadrático con frontera, donde hemos encontrado que de hecho, estos colisionan de manera genérica, en un equilibrio hiperbólico. En contraste, cuando los puntos de tangencia tienen naturaleza distinta, uno visible y uno invisible, hemos encontrado que el manipular sus posiciones genera la aparición de las bifurcaciones estacionarias: silla-nodo, transcítica y horquilla. Por último, al considerar la interacción y colisión entre un punto de tangencia y un equilibrio frontera estaremos generando lo que se conoce como la bifurcación Takens-Bogdanov Transcítica, ver [5, 14, 18]).

Es importante mencionar que diferentes autores han estudiado la estabilidad estructural de sistemas con frontera en el plano, ver [23], [24] y [25]. Todos ellos se enfocaron en describir bifurcaciones genéricas de campos vectoriales definidos en variedades compactas con frontera, en dos dimensiones. Más aún, algunos de estos resultados han sido recientemente utilizados en el estudio de sistemas Filippov, los cuales han cobrado gran relevancia en los últimos años por sus diversas aplicaciones en áreas como Ingeniería, Teoría de control, Biología, Física, Química, Medicina e incluso Economía (ver [13, 15, 16, 19, 26]). A diferencia de ellos, nuestro objetivo es generar bifurcaciones utilizando la colisión de puntos de tangencia como mecanismo. Nuestro análisis nos permitirá generar tanto las bifurcaciones estacionarias, como la bifurcación Takens-Bogdanov transcítica, en una vecindad de la frontera. Así como los trabajos de Peixoto, Sotoma-

yor y Teixeira han sido de gran utilidad en el estudio de sistemas Filippov, los resultados obtenidos en nuestro análisis en una vecindad de la frontera, nos permitirán generar nuevos escenarios en los sistemas Filippov, por ejemplo, las bifurcaciones de equilibrios frontera (ver [6]) para familias dos paramétricas, e incluso bifurcaciones propias de los sistemas suaves por pedazos (ver [8, 20]), por ejemplo al analizar una singularidad tipo doblez-cúspide (ver [2, 11]), involucrando bifurcaciones entre ciclos límite, como lo son la bifurcación pseudo-Hopf (ver [3]) y la bifurcación ciclo crítico de cruce (CCC), ver [10].

Comenzaremos con el capítulo de Preliminares, haciendo un análisis detallado de la bifurcación Takens-Bogdanov transcritical (TBT), la cual es una variación no-genérica de la bifurcación Takens-Bogdanov usual, donde en vez de la bifurcación silla-nodo, el punto de equilibrio experimenta la bifurcación transcritical, preservando las bifurcaciones Hopf y homoclínica. Se determinarán las condiciones que deben cumplirse para que ésta ocurra, así como todos los posibles diagramas de bifurcación que pueden presentarse. Este análisis será aplicado posteriormente en la Sección 4.2 donde para una subfamilia de sistemas cuadráticos con frontera, provocaremos dicha bifurcación a partir de un punto de tangencia y un equilibrio frontera. Ya que nuestro objetivo principal es generar bifurcaciones utilizando la colisión de puntos de tangencia como mecanismo, en el Capítulo 3, bajo condiciones genéricas, encontraremos una familia dos-paramétrica de sistemas cuadráticos con frontera con al menos un punto de tangencia. Posteriormente, encontraremos una forma normal para dicha familia parametrizada. Adicionalmente, daremos respuesta a la afirmación de Kuznetsov et al. acerca de la colisión de dos puntos de tangencia del mismo tipo enfocada a nuestra familia dos-paramétrica, donde la colisión se da en un equilibrio hiperbólico. Finalmente, en el Capítulo 4 estudiaremos dos subfamilias, una de ellas caracterizada por la existencia de dos puntos de tangencia de diferente tipo, mientras que la otra familia estará caracterizada por la existencia de un punto de tangencia y un equilibrio frontera. En este capítulo establecemos los dos teoremas principales de esta tesis, donde daremos condiciones suficientes para la existencia de las bifurcaciones estacionarias en la primer familia, mientras que para la segunda, probaremos la existencia de la bifurcación Takens-Bogdanov transcritical. Ambos resultados serán ilustrados con ejemplos, donde el primero de ellos hace referencia a un sistema activador-inhibidor con frontera, ver [21] y [22], donde se presentan las bifurcaciones estacionarias. Cerramos incluyendo un capítulo con las conclusiones principales de nuestro estudio.

Consideramos que los mecanismos empleados en esta tesis, pueden resultar en herramientas para el futuro desarrollo y estudio de nuevos fenómenos de bifurcación en sistemas suaves por pedazos, o bien, para dar respuesta a ciertos problemas de aplicación,

así como lo han sido otros hallazgos en el área en los últimos años.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo, hacemos un amplio análisis de la bifurcación Takens-Bogdanov transcritical (TBT), incluyendo las condiciones que deben cumplirse para que ésta ocurra, así como todos los posibles diagramas de bifurcación que pueden presentarse. Este análisis será aplicado posteriormente en la Sección 4.2 a los sistemas cuadráticos con frontera.

2.1. Bifurcación Takens-Bogdanov transcritical

La bifurcación Takens-Bogdanov transcritical (TBT), ver [5], [14], y [18], es una variación no-genérica de la bifurcación Takens-Bogdanov usual, donde en vez de la bifurcación silla-nodo, el punto de equilibrio experimenta la bifurcación transcritical, preservando las bifurcaciones Hopf y homoclínica. A continuación se muestra un análisis detallado de esta bifurcación.

Considere el siguiente sistema en el plano $\dot{x} = f(x)$, donde

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ax_1^2 + bx_1 x_2,\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde β_1 y β_2 son parámetros reales y $ab \neq 0$ son constantes reales.

Podemos observar directamente, que el sistema (2.1) tiene dos puntos de equilibrio, estos son, $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = \left(-\frac{\beta_1}{a}, 0\right)$. De modo que, si $\beta_1 = 0$ estos dos equilibrios se colapsan, siendo el origen el único punto de equilibrio, lo cual implica que la curva de bifurcación transcritical en el plano β_1 - β_2 es el eje β_2 , es decir

$$\mathcal{C}_{Trans} = \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 = 0\}.\tag{2.2}$$

Busquemos ahora la curva de bifurcación Hopf. Para ello, primero calculamos la matriz Jacobiana del sistema (2.1), ésta es

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2ax_1 + bx_2 + \beta_1 & bx_1 + \beta_2 \end{pmatrix},\tag{2.3}$$

por lo que al evaluarla en cada uno de los puntos P_1 y P_2 , resulta

$$Df(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad Df(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta_1 & \beta_2 - \frac{b}{a}\beta_1 \end{pmatrix}$$

así, sus correspondientes traza y determinante, son

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Df(P_1)) &= \beta_2 & \text{Tr}(Df(P_2)) &= \beta_2 - \frac{b}{a}\beta_1 \\ |Df(P_1)| &= -\beta_1 & |Df(P_2)| &= \beta_1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

la bifurcación de Hopf ocurre al presentarse un cambio de estabilidad de un equilibrio tipo foco, generando la aparición de un ciclo límite, es decir, cuando la parte real de sus valores propios complejos cambia de signo. Dicho de otro modo, el ciclo límite aparece, o desaparece, cuando la traza de la matriz Jacobiana es cero y su determinante es positivo, dando como resultado, valores propios complejos puros. Por lo tanto, las siguientes dos, son las dos curvas de bifurcación Hopf para P_1 y P_2 , respectivamente,

$$\mathcal{C}_{Hopf^-} = \{(\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 < 0, \beta_2 = 0\} \quad (2.5)$$

$$\mathcal{C}_{Hopf^+} = \left\{ (\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 > 0, \beta_2 = \frac{b}{a}\beta_1 \right\}. \quad (2.6)$$

Para calcular el primer coeficiente de Lyapunov, definido en [12] y el cual indica la estabilidad del ciclo límite, cuando éste existe, es necesario hacer una transformación del sistema (2.1), con cada uno de los equilibrios individualmente, para llevarlo a la forma

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} g_1(y_1, y_2) \\ g_2(y_1, y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{21}(y_1, y_2) \\ g_{22}(y_1, y_2) \end{pmatrix},$$

donde ω es la parte imaginaria (positiva) del valor propio imaginario puro, que se obtiene al estar sobre la curva de bifurcación Hopf. Para el punto P_1 con $\beta_1 < 0$ y $\beta_2 = 0$, la transformación anteriormente mencionada se logra mediante el cambio de coordenadas $y = P^{-1}x$, donde $P = (p_1 \ p_2)$ con $p_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{-\beta_1}}, 1\right)^T$ y $p_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{-\beta_1}}, 1\right)^T$, obteniendo $\omega = \sqrt{-\beta_1}$ y

$$g_{21}(y_1, y_2) = g_{22}(y_1, y_2) = \left(\frac{a\sqrt{-\beta_1} + b\beta_1}{2(-\beta_1)^{3/2}}\right) y_1^2 + \frac{a}{\beta_1} y_1 y_2 + \left(\frac{a\sqrt{-\beta_1} - b\beta_1}{2(-\beta_1)^{3/2}}\right) y_2^2$$

de donde finalmente podemos calcular el coeficiente de Lyapunov para P_1 , como

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{16} [g_{1y_1y_1y_1} + g_{1y_1y_2y_2} + g_{2y_1y_1y_2} + g_{2y_2y_2y_2}] + \frac{1}{16\omega} [g_{1y_1y_2} (g_{1y_1y_1} + g_{1y_2y_2}) \\ &\quad - g_{2y_1y_2} (g_{2y_1y_1} + g_{2y_2y_2}) - g_{1y_1y_1}g_{2y_1y_1} + g_{1y_2y_2}g_{2y_2y_2}] \\ &= \frac{ab}{4\beta_1^2}. \end{aligned}$$

Similarmente, para el punto P_2 con $\beta_1 > 0$ y $\beta_2 = \frac{b}{a}\beta_1$, tomamos el cambio de coordenadas $y = P^{-1}(x - P_2)$, con $P = (p_1 \ p_2)$, $p_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{\beta_1}}, 1\right)^T$ y $p_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}}, 1\right)^T$, en este caso $\omega = \sqrt{\beta_1}$ y el coeficiente de Lyapunov es nuevamente $l_2 = \frac{ab}{4\beta_1^2}$. Lo anterior significa que en ambos casos, el ciclo es inestable si $ab > 0$ o estable si $ab < 0$.

El sistema (2.1) además experimenta la bifurcación homoclínica, en esta última parte nos dispondremos a encontrar una aproximación a su curva de bifurcación. Con este propósito en mente, consideremos el siguiente cambio de coordenadas tipo “blowing-up”:

$$\begin{aligned} x_1 &= \epsilon^2 u & \beta_1 &= a\epsilon^2 \nu_1 & t &= \tau/\epsilon \\ x_2 &= \epsilon^3 v & \beta_2 &= b\epsilon^2 \nu_2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

para algún $\epsilon > 0$. Como resultado,

$$\begin{aligned} u' &= \frac{du}{d\tau} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\epsilon^2} \dot{x}_1 \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^3} x_2, \\ v' &= \frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\epsilon^3} \dot{x}_2 \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^4} (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ax_1^2 + bx_1 x_2), \end{aligned}$$

por lo que el sistema (2.1) es transformado en

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= au^2 + a\nu_1 u + \epsilon(b\nu v + b\nu_2 v). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para encontrar la aproximación a la curva de bifurcación homoclínica del sistema (2.8), utilizaremos el Método de Melnikov (ver [12]). Primero, fijaremos nuestra atención por un momento, en el siguiente sistema Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} u' &= \tilde{f}_1(u, v) = v \\ v' &= \tilde{f}_2(u, v) = au^2 + a\nu_1 u, \end{aligned} \quad (2.9)$$

cuyo Hamiltoniano está dado por la función $H(u, v) = \frac{1}{2}v^2 - a\left(\frac{u^3}{3} + \nu_1\frac{u^2}{2}\right)$. Los puntos de equilibrio del sistema (2.9) son $q_1 = (0, 0)$ y $q_2 = (-\nu_1, 0)$ y si denotamos $\tilde{f} = (\tilde{f}_1(u, v), \tilde{f}_2(u, v))^T$, su matriz Jacobiana es

$$D\tilde{f}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2au + a\nu_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

cuyos determinantes evaluados en q_1 y q_2 son $|D\tilde{f}(q_1)| = -a\nu_1$ y $|D\tilde{f}(q_2)| = a\nu_1$. Por consiguiente, podemos distinguir entre dos casos distintos de acuerdo con el signo de $a\nu_1$. Para el caso $a\nu_1 > 0$, el cual es equivalente a $\beta_1 > 0$, el origen q_1 es un punto silla, mientras que q_2 es un centro. La solución que pasa por el origen, dada por el Hamiltoniano, es en este caso la curva homoclínica, ésta es

$$v^2 = au^2 \left(\frac{2}{3}u + \nu_1 \right).$$

Notemos que sobre el eje horizontal, $v = 0$, la curva homoclínica corta en los puntos $(0, 0)$ y $(-\frac{3}{2}\nu_1, 0)$, considerando este hecho y utilizando como auxiliar a la función $\text{sech}(t)$, la cual tiene al uno como valor máximo y converge a cero para $t \rightarrow \pm\infty$, una parametrización para la curva homoclínica es $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, donde

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= -\frac{3}{2}\nu_1 \text{sech}^2(t) \\ \gamma_2(t) &= \frac{3}{2}\sqrt{a\nu_1^3} \text{sech}^2(t) \tanh(t). \end{aligned}$$

La Figura 2.1 muestra la curva homoclínica para el caso $a\nu_1 > 0$. Notemos que si $\nu_1 < 0$ el equilibrio q_2 se encuentra en el semi-plano derecho, o bien, en el semi-plano izquierdo para $\nu_1 > 0$.

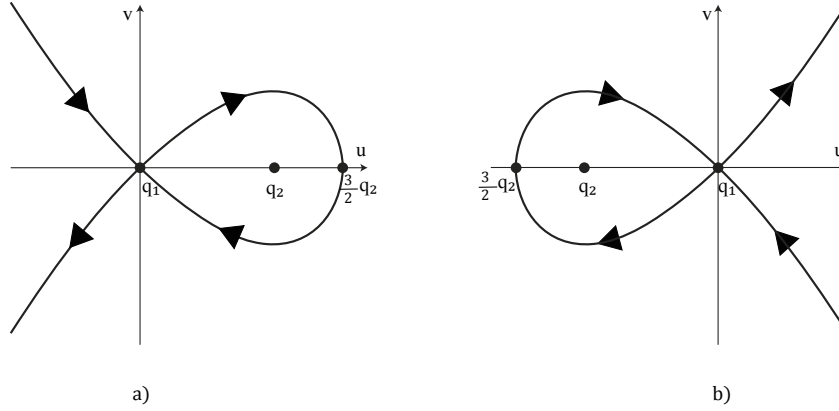


Figura 2.1: a) $a < 0$, $\nu_1 < 0$. b) $a > 0$, $\nu_1 > 0$.

Ahora calculamos la Integral de Melnikov, obteniendo como resultado,

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_2(t)^2 (\gamma_1(t) + \nu_2) dt = \frac{3}{35} a \nu_1^3 (7\nu_2 - 6\nu_1),$$

finalmente igualamos a cero esta integral para obtener la curva de bifurcación homoclínica del sistema (2.8). Por consiguiente, la curva de bifurcación homoclínica del sistema (2.1) cuando $\beta_1 > 0$, teniendo al origen como punto silla, es

$$\mathcal{C}_{Homo^+} = \left\{ (\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 > 0, \beta_2 = \frac{6b}{7a} \beta_1 \right\}. \quad (2.11)$$

Un análisis similar se sigue para el caso $a\nu_1 < 0$, el cual equivale a $\beta_1 < 0$ y para el cual, el punto de equilibrio q_1 es ahora el centro y q_2 , el punto silla. En este caso, la curva homoclínica dada por el Hamiltoniano es,

$$v^2 = \frac{2}{3} a u^3 + a \nu_1 u^2 - \frac{1}{3} a \nu_1^3,$$

la cual corta al eje $v = 0$, en los puntos $(-\nu_1, 0)$ y $(\frac{\nu_1}{2}, 0)$ y puede ser parametrizada como, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, donde

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \frac{3}{2} \nu_1 \operatorname{sech}^2(t) - \nu_1 \\ \gamma_2(t) &= \frac{3}{2} \sqrt{-a \nu_1^3} \operatorname{sech}^2(t) \tanh(t), \end{aligned}$$

obteniendo así la siguiente integral de Melnikov,

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_2(t)^2 (\gamma_1(t) + \nu_2) dt = \frac{3}{35} a \nu_1^3 (\nu_1 - 7\nu_2),$$

dicha integral se anula para $\nu_1 - 7\nu_2 = 0$. Por lo tanto, para el sistema (2.1), donde el origen es un foco, la curva de bifurcación homoclínica es

$$\mathcal{C}_{Homo^-} = \left\{ (\beta_1, \beta_2) \mid \beta_1 < 0, \beta_2 = \frac{b}{7a} \beta_1 \right\}. \quad (2.12)$$

Todo este análisis se resume en los siguientes cuatro diagramas de bifurcación, presentados en las Figuras 2.2-2.5.

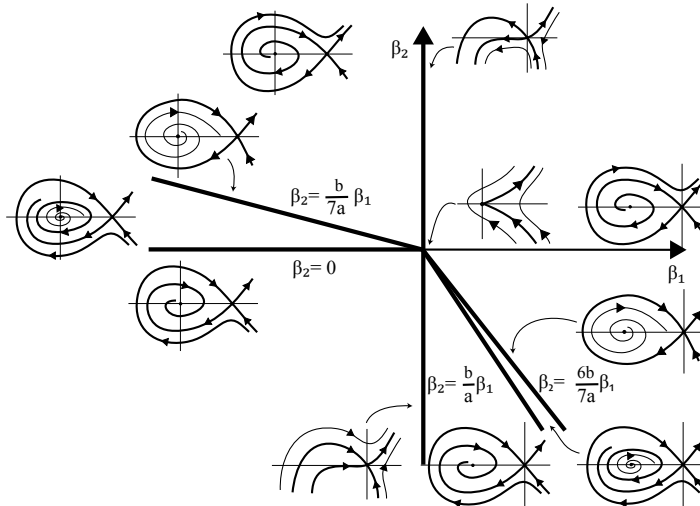


Figura 2.2: Diagrama de bifurcación y retratos fase del sistema (2.1). $a > 0$, $b < 0$.

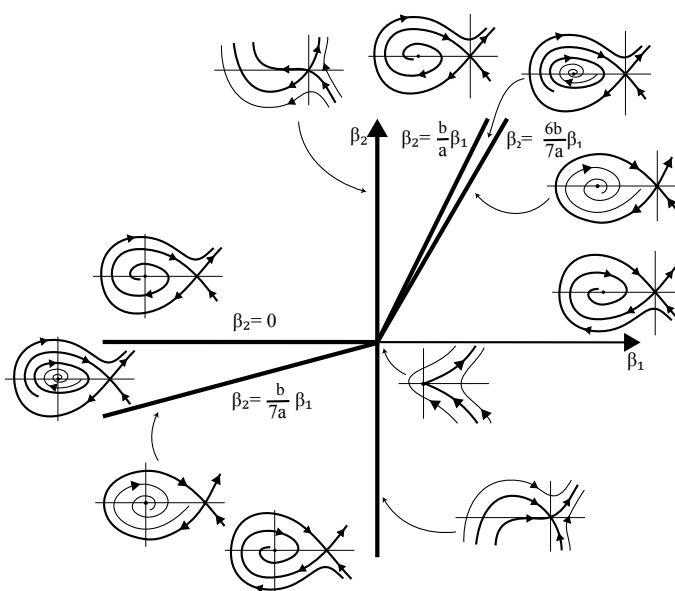


Figura 2.3: Diagrama de bifurcación y retratos fase del sistema (2.1). $a > 0$, $b > 0$.

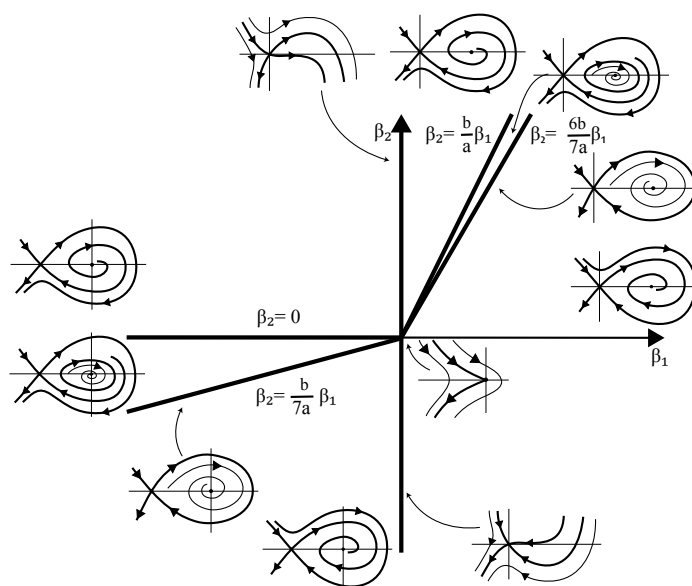


Figura 2.4: Diagrama de bifurcación y retratos fase del sistema (2.1). $a < 0$, $b < 0$.

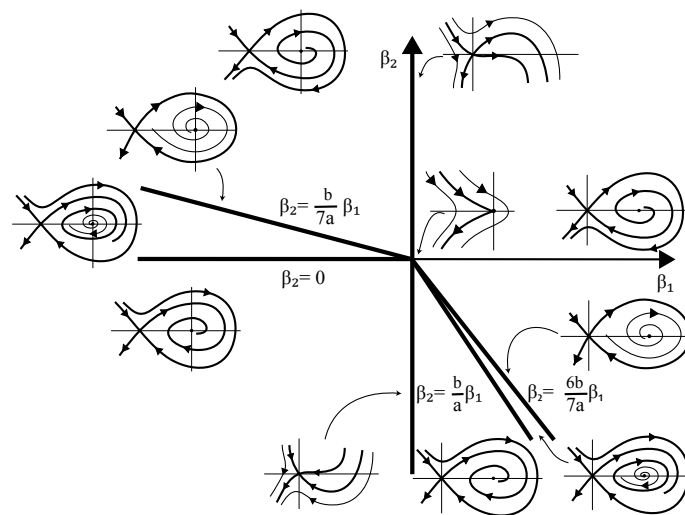


Figura 2.5: Diagrama de bifurcación y retratos fase del sistema (2.1). $a < 0$, $b > 0$.

Capítulo 3

Sistemas cuadráticos con frontera

En este capítulo analizaremos sistemas diferenciales cuadráticos, en el plano, delimitados por una línea recta como frontera, estamos interesados en estudiar los fenómenos de bifurcación que se presentan cuando las posiciones de los puntos de tangencia sobre la frontera son considerados como los parámetros de bifurcación. Recientemente en [3], se ha probado que la colisión de puntos de tangencia de sistemas diferenciales lineales por pedazos, con una línea recta como variedad de conmutación, puede generar ciclos límites de cruce.

Por otro lado, en [17] se menciona que para una familia Filippov uno-paramétrica en el plano, dos puntos de tangencia cuadrática del mismo campo vectorial no pueden colisionar si estos son de la misma naturaleza, es decir, ambos visibles o ambos invisibles. Para el caso de los sistemas cuadráticos con frontera en el plano, estudiaremos bajo qué condiciones dos puntos de tangencia cuadrática del mismo tipo pueden colisionar, mostraremos que de hecho, la colisión puede darse de manera genérica en un equilibrio frontera hiperbólico.

Con los objetivos planteados previamente, primero, bajo condiciones genéricas, encontraremos una familia dos-paramétrica de sistemas diferenciales cuadráticos con al menos un punto de tangencia, haciendo una clasificación de los mismos. Asimismo, encontraremos una forma normal para esta familia parametrizada y daremos respuesta a lo planteado en [17] respecto a la colisión de puntos de tangencia cuadrática del mismo tipo. Más aún, dicha forma normal será utilizada posteriormente en el Capítulo 4, tanto para generar las bifurcaciones estacionarias: silla-nodo, transcítica y horquilla, a partir de la colisión de puntos de tangencia de doblez de distinto tipo, así como para generar la bifurcación Takens-Bogdanov transcítica, ver [5], [14] y [18], generada a partir de la colisión de un punto de tangencia de doblez y un equilibrio frontera.

Es importante mencionar que diferentes autores han estudiado la estabilidad estructural de sistemas con frontera en el plano, ver [23], [24] y [25]. Todos ellos se enfocaron en describir bifurcaciones genéricas de campos vectoriales definidos en variedades com-

pactas con frontera, en dos dimensiones. Más aún, algunos de estos resultados han sido recientemente utilizados en el estudio de sistemas Filippov. A diferencia de ellos, nuestro objetivo es generar bifurcaciones utilizando la colisión de puntos de tangencia como mecanismo. Así como los trabajos de Peixoto, Sotomayor y Teixeira han sido de gran utilidad en el estudio de sistemas Filippov, esperamos que los resultados obtenidos en nuestro análisis en una vecindad de la frontera, puedan generar nuevos escenarios en los sistemas Filippov, por ejemplo, las bifurcaciones de equilibrios frontera para familias dos paramétricas.

3.1. Puntos de tangencia de un sistema cuadrático con frontera

Considere el siguiente sistema cuadrático en el plano, delimitado por la recta $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma(x) = c^T x - c_0 = 0, \|c\| = 1\}$,

$$\dot{x} = f(x) = b + Ax + f_2(x), \text{ si } \sigma(x) \geq 0, \quad (3.1)$$

donde $b \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y $f_2(x)$ es un vector en dos dimensiones cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado dos, ver Figura 3.1.

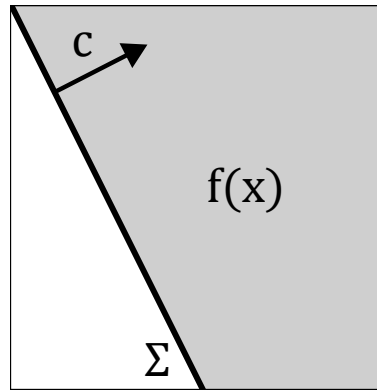


Figura 3.1: Sistema diferencial cuadrático con frontera (3.1).

Al existir una frontera, resulta interesante analizar el comportamiento de dicho sistema en una vecindad de la misma. Para ello introducimos las siguientes definiciones.

Definición 1.

- (i) Un punto $q \in \mathbb{R}^2$ es un punto de equilibrio de (3.1) si $f(q) = 0$ y $\sigma(q) > 0$. El equilibrio es virtual si $\sigma(q) < 0$.
- (ii) Un punto $q \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio frontera de (3.1) si $f(q) = 0$ y $\sigma(q) = 0$.

Definición 2. El sistema (3.1) tiene un punto de tangencia en $q \in \Sigma$ si $c^T f(q) = 0$.

- (i) El punto de tangencia es un punto de doblez (fold point) o punto de tangencia cuadrática si $c^T Df(q)f(q) \neq 0$.
- (ii) El punto de tangencia es un punto cúspide (cusp point) o punto de tangencia cúbica si $c^T Df(q)f(q) = 0$, y

$$c^T ((Df(q))^2 + f^T(q)D^2f(q)) f(q) \neq 0.$$

Observación 1. Notemos que un equilibrio frontera es un caso particular de punto de tangencia.

Definición 3.

- (i) Un punto de tangencia cuadrática q es visible para el sistema (3.1) si

$$r = c^T Df(q)f(q) > 0.$$

- (ii) Un punto de tangencia cuadrática q es invisible para el sistema (3.1) si

$$r = c^T Df(q)f(q) < 0.$$

Dado que nos encontramos estudiando sistemas con frontera, los puntos de tangencia adquieren gran relevancia. Con el fin de caracterizar aquellos sistemas cuadráticos (3.1) con al menos un punto de tangencia, definiremos la siguiente función real $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$N(q) = (c^T Df(q)v)^2 - 4c^T f(q)c^T f_2(v), \quad (3.2)$$

donde $v \in \mathbb{R}^2$ es un vector ortonormal al vector c y $c^T f_2(v) \neq 0$.

Proposición 1. $N(q)$ es una función constante.

Demostración. Para cada $p_1, p_2 \in \Sigma$, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $p_2 = p_1 + \beta v$. Luego, si $f_2(x) = x^T D x$ se tiene que $Df(x) = A + 2x^T D$. Entonces

$$\begin{aligned}
N(p_2) &= N(p_1 + \beta v) \\
&= (c^T Df(p_1 + \beta v)v)^2 - 4c^T f(p_1 + \beta v)c^T f_2(v) \\
&= \left(c^T \left(A + 2(p_1 + \beta v)^T D \right) v \right)^2 - 4c^T (b + A(p_1 + \beta v) + (p_1 + \beta v)^T D(p_1 + \beta v)) c^T f_2(v) \\
&= (c^T Df(p_1)v + 2\beta c^T f_2(v))^2 - 4(c^T f(p_1) + c^T Df(p_1)v\beta + c^T f_2(v)\beta^2) c^T f_2(v) \\
&= (c^T Df(p_1)v)^2 - 4c^T f(p_1)c^T f_2(v) \\
&= N(p_1).
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.

- (i) Si $N(q) < 0$, el sistema (3.1) no tiene puntos de tangencia.
- (ii) Si $N(q) = 0$, el sistema (3.1) tiene solo un punto de tangencia: un punto de tangencia cúbica o un equilibrio frontera.
- (iii) Si $N(q) > 0$, el sistema (3.1) tiene dos puntos de tangencia: dos puntos de tangencia cuadrática, dos equilibrios frontera, o un punto de tangencia cuadrática y un equilibrio frontera.

Demostración. Para cualquier punto $x \in \Sigma$, y algún $q \in \Sigma$ fijo, podemos escribir

$$x = q + \beta v,$$

para algún real β , entonces si $f_2(x) = x^T D x$,

$$\begin{aligned}
c^T f(x) |_{\Sigma} &= c^T [b + A(q + \beta v) + f_2(q + \beta v)] \\
&= c^T \left[b + A(q + \beta v) + (q + \beta v)^T D (q + \beta v) \right] \\
&= c^T f(q) + c^T Df(q)v\beta + c^T f_2(v)\beta^2 \\
&\equiv 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Observemos que la ecuación cuadrática (3.3) tiene por discriminante a la función $N(q)$, es decir, solo existirán soluciones β de (3.3), y por lo tanto puntos de tangencia, si $N(q) \geq 0$.

- Si $N(q) = 0$, entonces el sistema (3.1) tiene solo un punto de tangencia. Suponga ahora que q es el punto de tangencia. Claramente si $f(q) = 0$, entonces q es un equilibrio frontera. Consideremos ahora $f(q) \neq 0$, probaremos que q es un punto de tangencia cúbica. $N(q) = (c^T Df(q)v)^2 - 4c^T f(q)c^T f_2(v) = 0$, implica que $c^T Df(q)v = 0$, pues $c^T f(q) = 0$. Además, dado que $c^T f(q) = 0$ y $f(q) \neq 0$, se tiene que c y $f(q)$ son ortogonales, de modo que existe $k_1 \neq 0$, tal que $f(q) = k_1 v$, ya que c y v también son ortogonales. Entonces

$$c^T Df(q)f(q) = k_1 c^T Df(q)v = 0.$$

Luego, como $c^T Df(q)v = 0$, existe k_2 tal que $Df(q)v = k_2 v$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} c^T ((Df(q))^2 + f^T(q)D^2 f(q)) f(q) &= k_1 c^T ((Df(q))^2 + k_1 v^T D^2 f(q)) v \\ &= k_1 c^T (Df(q) (Df(q)v) + k_1 v^T Dv) \\ &= k_1 c^T (k_2 Df(q)v + k_1 f_2(v)) \\ &= k_1 c^T (k_2^2 v + k_1 f_2(v)) \\ &= k_1^2 c^T f_2(v) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

En consecuencia q es un punto de tangencia cúbica.

- Si $N(q) > 0$, entonces el sistema (3.1) tiene dos puntos de tangencia: q_1 y q_2 . Observe que $N(q_i) > 0$, para $i = 1, 2$, implica $c^T Df(q_i)v \neq 0$. Suponga que $f(q_i) \neq 0$, entonces existe $k_i \neq 0$, tal que $f(q_i) = k_i v$, así

$$c^T Df(q_i)f(q_i) = k_i c^T Df(q_i)v \neq 0.$$

Por lo tanto q_i es un punto de tangencia cuadrática. Si para alguna $i = 1, 2$, $f(q_i) = 0$ entonces q_i es un equilibrio frontera.

□

Nuestro objetivo principal es estudiar las bifurcaciones que pueden ocurrir con la interacción de dos puntos de tangencia y particularmente su colisión. Con este objetivo, consideraremos las siguientes hipótesis:

H1) $N(q) \geq 0$.

La hipótesis H1) nos permite asegurar que el sistema (3.1) tiene uno o dos puntos de tangencia, los cuales escribiremos como $q_i = q + \mu_i v$, para $i = 1, 2$ y algún q fijo sobre Σ , así, de (3.3) tenemos

$$c^T f(q) + c^T Df(q)v\beta + c^T f_2(v)\beta^2 \equiv c^T f_2(v) (\beta - \mu_1) (\beta - \mu_2), \quad (3.4)$$

Por lo tanto, $N(q) > 0$ implica que $\mu_1 \neq \mu_2$, mientras que para $N(q) = 0$, se tiene que $\mu_1 = \mu_2$.

Como consecuencia de (3.4) al igualar coeficientes, se desprenden las siguientes propiedades:

Propiedades 1.

$$P1) \quad c^T f(q) = c^T f_2(v)\mu_1\mu_2,$$

$$P2) \quad c^T Df(q)v = -c^T f_2(v)(\mu_1 + \mu_2).$$

Observación 2. Notemos que μ_i nos indica la distancia entre el punto de tangencia q_i y el punto fijo q pues $\|q_i - q\| = \|(q + \mu_i v) - q\| = |\mu_i| \|v\| = |\mu_i|$.

Esta observación será importante más adelante pues estaremos utilizando estas distancias como parámetros para provocar bifurcaciones en una vecindad de la frontera.

3.2. Forma Normal

Con la finalidad de analizar los sistemas cuadráticos con frontera con al menos un punto de tangencia de una manera más sencilla, en esta sección encontraremos una forma normal para la familia de sistemas (3.1) que satisfacen $H1$). Esta forma normal es tal que transforma la frontera Σ en el eje vertical $y_1 = 0$ y el punto fijo $q \in \Sigma$ en el origen, además nos permite ubicar a los puntos de tangencia de forma simple, así como identificar de qué tipo son (ver Figura 3.2). Dicha forma normal se establece en la siguiente proposición:

Proposición 3. *Suponga que el sistema (3.1) satisface $H1$). Entonces, para cualquier punto fijo $q \in \Sigma$, el cambio de coordenadas*

$$y = \Gamma(x - q), \quad \text{si } \sigma(x) \geq 0, \quad (3.5)$$

donde $\Gamma = \begin{pmatrix} c^T \\ v^T \end{pmatrix}$, y las propiedades $P1) - P2)$, transforman (3.1) en la familia dos-paramétrica $\dot{y} = G(y, \mu)$, con $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ y

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= g_1(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2) = d_{13} (y_2 - \mu_1) (y_2 - \mu_2) + a_{11}y_1 + d_{11}y_1^2 + 2d_{12}y_1y_2, \\ \dot{y}_2 &= g_2(y_1, y_2) = b_2 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + d_{21}y_1^2 + 2d_{22}y_1y_2 + d_{23}y_2^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

para $y_1 \geq 0$, donde

$$\begin{aligned} b_2 &= v^T f(q), & a_{11} &= c^T Df(q)c, & a_{21} &= v^T Df(q)c, & a_{22} &= v^T Df(q)v, \\ d_{11} &= c^T f_2(c), & d_{12} &= \frac{1}{2}c^T (c^T D^2 f(q)v), & d_{13} &= c^T f_2(v), & d_{21} &= v^T f_2(c), \\ d_{23} &= v^T f_2(v), & d_{22} &= \frac{1}{2}v^T (c^T D^2 f(q)v). \end{aligned}$$

Demostración. Para cualquier $x \in \Sigma$ y un punto fijo $q \in \Sigma$ el cambio de coordenadas 3.5 transforma Σ en el eje $y_1 = 0$, esto debido a que si escribimos $x = q + \beta v$, entonces

$$y = \Gamma(x - q) = \Gamma((q + \beta v) - q) = \begin{pmatrix} c^T \\ v^T \end{pmatrix} (\beta v) = \begin{pmatrix} \beta c^T v \\ \beta v^T v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Para $\sigma(x) > 0$, tenemos $y = \Gamma(x - q)$, lo cual implica que $x = \Gamma^{-1}y + q$ y $\dot{y} = \Gamma\dot{x}$. Notemos además que $\Gamma(\Gamma^T) = I$, esto es $\Gamma^{-1} = \Gamma^T$, pues

$$\Gamma(\Gamma^T) = \begin{pmatrix} c^T \\ v^T \end{pmatrix} (c, v) = \begin{pmatrix} c^T c & c^T v \\ v^T c & v^T v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, si $f_2(x) = x^T Df(x)$, se sigue que

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_2(\Gamma^T y + q) \\ &= (\Gamma^T y + q)^T D(\Gamma^T y + q) \\ &= f_2(q) + 2q^T D\Gamma^T y + y^T (\Gamma D\Gamma^T) y, \end{aligned} \tag{3.7}$$

en consecuencia, de (3.1) y (3.7) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}|_{\Gamma^T y + q} &= f(\Gamma^T y + q) \\ &= b + A(\Gamma^T y + q) + f_2(\Gamma^T y + q) \\ &= f(q) + Df(q)\Gamma^T y + y^T (\Gamma D\Gamma^T) y, \end{aligned} \tag{3.8}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= \Gamma \dot{x}|_{\Gamma^T y+q} \\
 &= \Gamma (f(q) + Df(q)\Gamma^T y + y^T (\Gamma D\Gamma^T) y) \\
 &= \begin{pmatrix} c^T f(q) + c^T Df(q) (c \ v) y + y^T \begin{pmatrix} c^T f_2(c) & \frac{1}{2}c^T (c^T D^2 f(q)v) \\ \frac{1}{2}c^T (c^T D^2 f(q)v) & c^T f_2(v) \end{pmatrix} y \\ v^T f(q) + v^T Df(q) (c \ v) y + y^T \begin{pmatrix} v^T f_2(c) & \frac{1}{2}v^T (c^T D^2 f(q)v) \\ \frac{1}{2}v^T (c^T D^2 f(q)v) & v^T f_2(v) \end{pmatrix} y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c^T f(q) + c^T Df(q)cy_1 + c^T Df(q)vy_2 + c^T f_2(c)y_1^2 + c^T (c^T D^2 f(q)v) y_1 y_2 \\ + c^T f_2(v)y_2^2 \\ v^T f(q) + v^T Df(q)cy_1 + v^T Df(q)vy_2 + v^T f_2(c)y_1^2 + v^T (c^T D^2 f(q)v) y_1 y_2 \\ + v^T f_2(v)y_2^2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Haciendo uso de las propiedades *P1*) y *P2*) podemos reescribir el sistema (3.9) como se muestra en (3.6). \square

Todo el análisis realizado en las siguientes secciones se hará partiendo de la forma normal (3.6), para la cual estaremos considerando a μ_1 y μ_2 como parámetros de bifurcación, ya que estos determinan las posiciones de los puntos de tangencia.

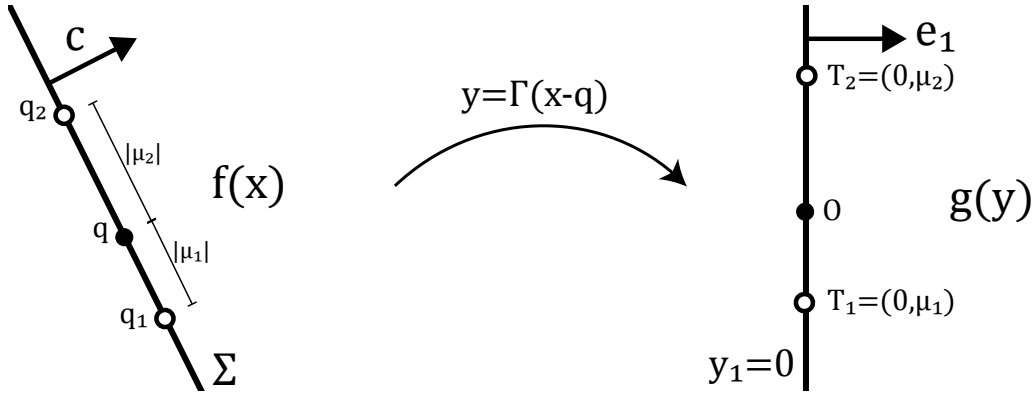


Figura 3.2: Transformación del sistema (3.1) bajo el cambio de coordenadas 3.5.

3.2.1. Clasificación de puntos de tangencia cuadrática bajo la forma normal

Dada la importancia de los puntos de tangencia en nuestro análisis, es prudente hacer una clasificación de los mismos para nuestro caso de estudio, para ello observemos lo siguiente:

Observación 3. *Bajo el cambio de coordenadas (3.5), los puntos de tangencia q_i del sistema (3.1) son transformados en los puntos $T_i = (0, \mu_i)^T$, $i = 1, 2$, para el sistema (3.6), puesto que*

$$T_i = T(q_i - q) = T((q + \mu_i v) - q) = \begin{pmatrix} c^T \\ v^T \end{pmatrix} \mu_i v,$$

ver Figura 3.2.

Para conocer la naturaleza de un punto de tangencia cuadrática dada por la Definición 3 es necesario calcular, para cada punto de tangencia, el valor de $r = c^T Df(q)f(q)$. Notemos que el vector normal a la frontera es ahora el vector canónico $e_1 = (1, 0)^T$. Por lo que podemos concluir lo siguiente

Observación 4. *Para los puntos de tangencia cuadrática del sistema (3.6),*

$$\begin{aligned} r_1 &= d_{13}(\mu_1 - \mu_2)g_2(0, \mu_1), \\ r_2 &= -d_{13}(\mu_1 - \mu_2)g_2(0, \mu_2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

ya que,

$$\begin{aligned} r_i &= e_1^T Dg(T_i)g(T_i) \\ &= (1, 0) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(0, \mu_i) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(0, \mu_i) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(0, \mu_i) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(0, \mu_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(0, \mu_i) \\ g_2(0, \mu_i) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial y_1}(0, \mu_i), \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(0, \mu_i) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ g_2(0, \mu_i) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(0, \mu_i)g_2(0, \mu_i) \\ &= d_{13}(2\mu_i - (\mu_1 + \mu_2))g_2(0, \mu_i). \end{aligned}$$

Notemos que $g_2(0, \mu_i)$ nos indica la dirección vertical del sistema en los puntos de tangencia, además si consideramos $\mu_1 < \mu_2$, de acuerdo con los signos de d_{13} y $g_2(0, \mu_i)$, para $i = 1, 2$, obtenemos la siguiente clasificación para dos puntos de tangencia cuadrática (ver Figura 3.3):

(i) Si $d_{13} > 0$,

- a) para $g_2(0, \mu_1) > 0$ y $g_2(0, \mu_2) > 0$ entonces T_1 invisible y T_2 es visible.
- b) para $g_2(0, \mu_1) > 0$ y $g_2(0, \mu_2) < 0$ entonces T_1 invisible y T_2 es invisible.
- c) para $g_2(0, \mu_1) < 0$ y $g_2(0, \mu_2) > 0$ entonces T_1 visible y T_2 es visible.
- d) para $g_2(0, \mu_1) < 0$ y $g_2(0, \mu_2) < 0$ entonces T_1 visible y T_2 es invisible.

(ii) Si $d_{13} < 0$,

- a) para $g_2(0, \mu_1) > 0$ y $g_2(0, \mu_2) > 0$ entonces T_1 visible y T_2 es invisible.
- b) para $g_2(0, \mu_1) > 0$ y $g_2(0, \mu_2) < 0$ entonces T_1 visible y T_2 es visible.
- c) para $g_2(0, \mu_1) < 0$ y $g_2(0, \mu_2) > 0$ entonces T_1 invisible y T_2 es invisible.
- d) para $g_2(0, \mu_1) < 0$ y $g_2(0, \mu_2) < 0$ entonces T_1 invisible y T_2 es visible.

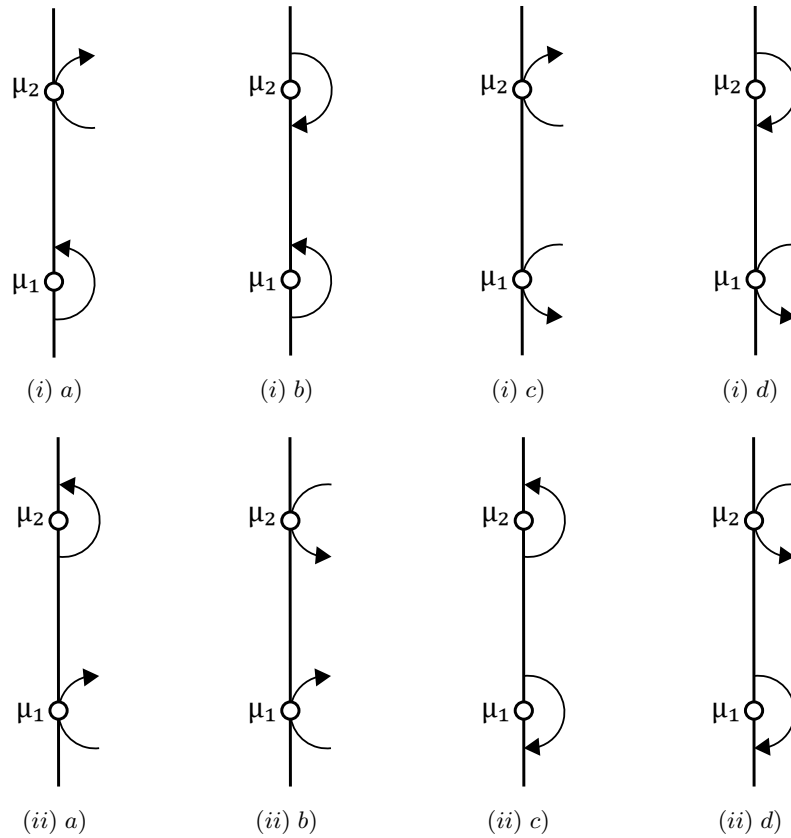


Figura 3.3: Clasificación de puntos de tangencia para el sistema (3.6).

En síntesis, dos puntos de tangencia cuadrática serán del mismo tipo, ambos visibles o ambos invisibles, si $g_2(0, \mu_1)g_2(0, \mu_2) < 0$; o uno visible y uno invisible si $g_2(0, \mu_1)g_2(0, \mu_2) > 0$. Por lo cual, el cambio de signo en la función $g_2(0, y_2)$, que no depende de los parámetros μ_1 y μ_2 , se vuelve un factor determinante. Notemos que sólo se pueden obtener puntos de tangencia del mismo tipo si la curva $g_2(y_1, y_2) = 0$ atraviesa el eje vertical en algún punto de manera transversal y considerando los parámetros μ_1 y μ_2 antes y después de este punto, respectivamente, para que sea posible el cambio de signo, ver Figura 3.4 a). En caso contrario, solo tendremos puntos de tangencia de distinto tipo como se muestra en la Figura 3.4 b) y c).

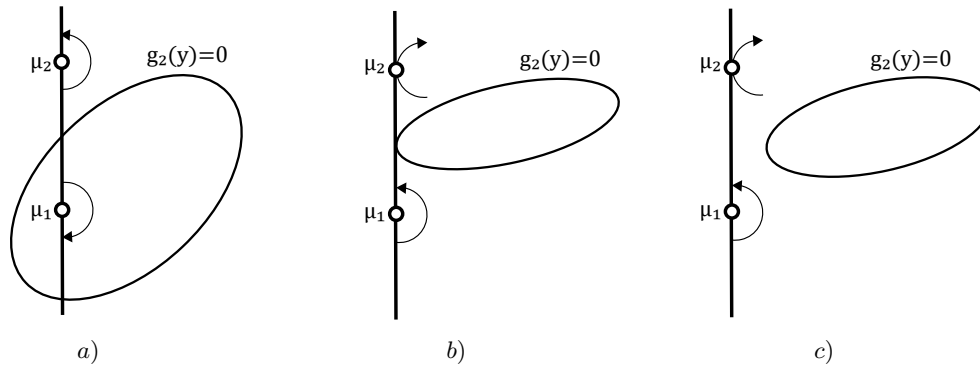


Figura 3.4: a) $g_2(0, \mu_1)g_2(0, \mu_2) < 0$, b) $g_2(0, \mu_1)g_2(0, \mu_2) > 0$ y c) $g_2(0, \mu_1)g_2(0, \mu_2) > 0$.

El movimiento de los puntos de tangencia determinará la aparición de diferentes escenarios muy interesantes, particularmente en la siguiente sección, analizaremos la colisión de dos puntos de tangencia cuadrática del mismo tipo, Figura 3.4 a), mientras que en el Capítulo 4, estudiaremos la colisión de dos puntos de tangencia cuadrática de diferente naturaleza, para el caso de la Figura 3.4 b), las cuales darán pie a la ocurrencia de las bifurcaciones estacionarias y la bifurcación Takens-Bogdanov transcítica, todo ocurriendo en la frontera, por lo cual cobra sentido la elección de μ_1 y μ_2 como nuestros parámetros de bifurcación. Para el caso presentado en la Figura 3.4 c) nuevamente se tienen dos puntos de tangencia cuadrática de distinto tipo, sin embargo resulta ser el menos interesante, pues no hay ningún tipo de bifurcación al no haber equilibrios cercanos a la frontera, en este caso la colisión de dos puntos de tangencia cuadráticos da lugar a un punto de tangencia cúbico, debido a su simplicidad, se omite su análisis.

3.3. Colisión de dos puntos de tangencia del mismo tipo

Analizaremos el efecto que tiene el colisionar dos puntos de tangencia cuadrática del mismo tipo, dos visibles o dos invisibles, dicho fenómeno cobra relevancia pues en [17], Kuznetsov menciona que para una familia uno-paramétrica de sistemas Filippov en el plano, dos puntos de tangencia de la misma naturaleza no pueden colisionar, sin embargo, probaremos que para una familia de sistemas cuadráticos bi-paramétricos con frontera, esto sí ocurre, pero dicha colisión conlleva una colisión de un equilibrio frontera con los puntos de tangencia.

Para que lo anterior ocurra, como ya se expresó previamente, debemos poner atención al signo de la función g_2 en (3.6) evaluada en los puntos de tangencia. Existirá un cambio de signo para $g_2(y_1, y_2)$ sobre el eje vertical si y sólo si la curva $g_2(y_1, y_2) = 0$ corta al eje vertical $y_1 = 0$ de manera transversal en algún punto $p_0 = (0, \mu_0)$, ver Figura 3.5, es decir, es necesario que exista una solución a la ecuación

$$g_2(p_0) = b_2 + a_{22}\mu_0 + d_{23}\mu_0^2 = 0, \quad (3.11)$$

tal que $\frac{\partial g_2}{\partial y_2}(p_0) \neq 0$. Las soluciones de la ecuación (3.11) con $d_{23} \neq 0$ son

$$\mu_0 = \frac{-a_{22} \pm \sqrt{D}}{2d_{23}},$$

donde $D = a_{22}^2 - 4b_2d_{23}$ es el discriminante de (3.11), notemos que si $D = 0$ entonces existiría una única solución $\mu_0 = -\frac{a_{22}}{2d_{23}}$, lo cual provocaría que $\frac{\partial g_2}{\partial y_2}(p_0) = 0$, lo cual no queremos, por lo tanto $D > 0$. Lo anterior significa que al haber cambio de signo en g_2 siempre existen dos posibles valores para μ_0 .

En consideración a lo anterior, para dos puntos de tangencia cuadrática del mismo tipo se establece la siguiente proposición:

Proposición 4. *Los puntos de tangencia T_1 y T_2 , ambos visibles o ambos invisibles, colisionan en un punto de equilibrio frontera $p_0 = (0, \mu_0)^T$. El punto de equilibrio es hiperbólico si $\frac{\partial g_1}{\partial y_1}(p_0, \mu_0, \mu_0) \neq 0$.*

Demostración. De (3.10) y la clasificación para los puntos de tangencia realizada en la sección anterior, se sigue que dos puntos de tangencia son del mismo tipo si $r_1 r_2 > 0$, es decir, $g_2(0, \mu_1)g_2(0, \mu_2) < 0$, por lo cual debe existir un valor μ_0 , tal que $\mu_1 < \mu_0 < \mu_2$, y $p_0 = (0, \mu_0)^T$, tal que $g_2(p_0) = 0$ y $\frac{\partial g_2}{\partial y_2}(p_0) \neq 0$. Entonces la única posibilidad para

que los puntos de tangencia del mismo tipo colisionen es en p_0 , esto es $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, este punto será entonces un equilibrio frontera pues g_1 se anula directamente en los puntos de tangencia y g_2 se anula en p_0 . Ver Figura 3.5.

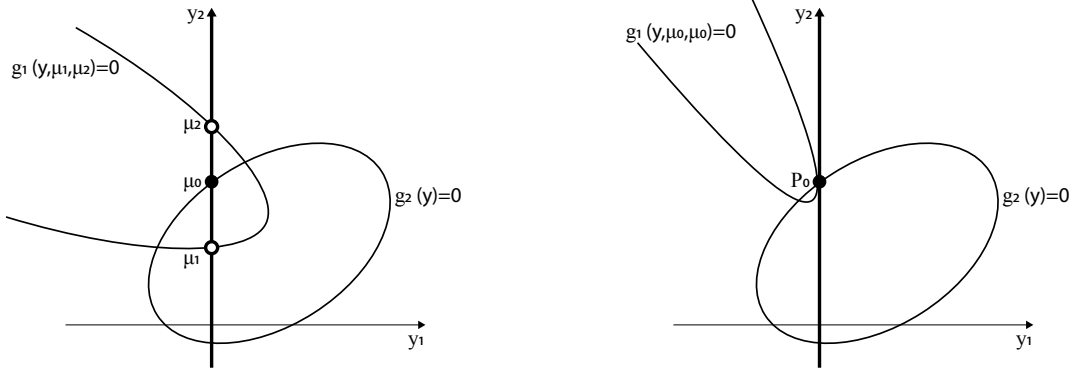


Figura 3.5: Colisión de dos puntos de tangencia cuadrática del mismo tipo en un equilibrio frontera.

Analicemos ahora la matriz Jacobiana del sistema (3.6),

$$DG(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(y_1, y_2) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(y_1, y_2) \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2) &= a_{11} + 2d_{11}y_1 + 2d_{12}y_2, \\ \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2) &= d_{13}(2y_2 - (\mu_1 + \mu_2)) + 2d_{12}y_1, \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(y_1, y_2) &= a_{21} + 2d_{21}y_1 + 2d_{22}y_2, \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(y_1, y_2) &= a_{22} + 2d_{22}y_1 + 2d_{23}y_2, \end{aligned}$$

Notemos que $\frac{\partial g_1}{\partial y_2}(p_0, \mu_0, \mu_0) = 0$, por lo que si $\frac{\partial g_1}{\partial y_1}(p_0, \mu_0, \mu_0) = 0$, entonces

$$\nabla g_1(p_0, \mu_0, \mu_0) = 0,$$

lo cual implica que el equilibrio frontera es no hiperbólico y además la cónica

$$g_1(y, \mu_0, \mu_0) = 0$$

es degenerada. En caso contrario, dado que estamos considerando $\frac{\partial g_2}{\partial y_2}(p_0) \neq 0$, p_0 es hiperbólico. \square

Corolario 1. Si T_1 y T_2 son puntos de tangencia del sistema (3.6), ambos visibles o ambos invisibles, entonces existe un punto de equilibrio hiperbólico $p(\mu_1, \mu_2)$ (admisibile o virtual) cercano a la frontera, con $\mu_1 \leq \mu_0 \leq \mu_2$, donde $p(\mu_0, \mu_0) = p_0$ y $G(p_0, \mu_0, \mu_0) = 0$ siempre que $\frac{\partial g_1}{\partial y_1}(p_0, \mu_0, \mu_0) \neq 0$. El punto de equilibrio p es punto silla si

$$(a_{11} + 2d_{12}\mu_0)(a_{22} + 2d_{23}\mu_0) < 0,$$

o en caso contrario, un nodo: estable si ambos factores son negativos o inestable si ambos son positivos.

Demostración. Sea $\dot{y} = G(y, \mu)$ la forma normal (3.6), dado que

$$G(p_0, \mu_0, \mu_0) = 0 \quad y \quad |DG(p_0, \mu_0, \mu_0)| \neq 0,$$

por el Teorema de la función implícita existe una vecindad de p_0 y μ_0 tal que podemos despejar $y = p(\mu_1, \mu_2)$ con $p(\mu_0, \mu_0) = p_0$ y $G(p(\mu_1, \mu_2), \mu_1, \mu_2) = 0$. Los signos de los valores propios de $DG(p_0, \mu_0, \mu_0)$, los cuales coinciden con los elementos de la diagonal principal al ser una matriz triangular, se mantienen en una vecindad de p_0 y μ_0 por continuidad. \square

Ejemplo 1. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= g_1(y, \mu) = (y_2 - \mu_1)(y_2 - \mu_2) + 3y_1 \\ \dot{y}_2 &= g_2(y) = y_2(y_2 - 2) - 2y_1, \end{aligned} \quad (3.13)$$

claramente la función $g_2(0, y_2)$ se anula tanto en el origen como en $(0, 2)$, cualquiera de estos dos puntos puede ser utilizado si buscamos el colapso de dos puntos de tangencia del mismo tipo. En este caso por simplicidad, seleccionaremos $\mu_1 < 0 < \mu_2 < 2$. Bajo esta consideración, de (3.10) obtenemos

$$\begin{aligned} r_1 &= d_{13}(\mu_1 - \mu_2)g_2(0, \mu_1) = (\mu_1 - \mu_2)\mu_1(\mu_1 - 2) < 0, \\ r_2 &= -d_{13}(\mu_1 - \mu_2)g_2(0, \mu_2) = -(\mu_1 - \mu_2)\mu_2(\mu_2 - 2) < 0, \end{aligned}$$

por lo que ambos puntos de tangencia son invisibles. Luego, la matriz Jacobiana del sistema evaluada en el origen es

$$DG(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

por lo que el origen es un punto de equilibrio tipo silla cuando $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Lo cual significa que en una vecindad del origen, tanto para los parámetros como los estados, coexisten dos puntos de tangencia cuadrática invisibles y un punto de equilibrio tipo silla, los cuales colisionan en un equilibrio frontera. En la Figura 3.6 se muestra la simulación del sistema (3.13) antes y después de la colisión.

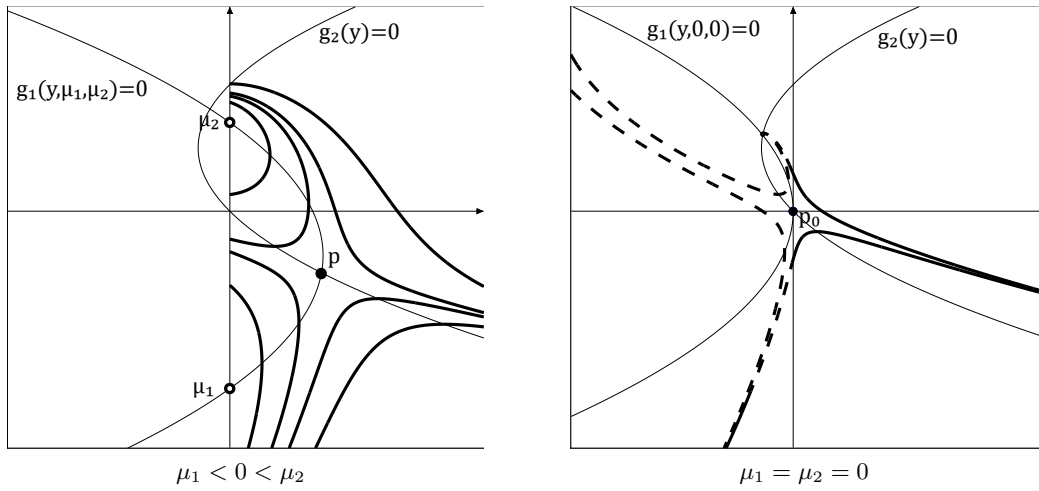


Figura 3.6: Colisión de puntos de tangencia del mismo tipo para el sistema (3.13).

Capítulo 4

Análisis de bifurcaciones

En este capítulo analizaremos dos sub-familias de sistemas cuadráticos en el plano, con una recta como frontera, dadas por la forma normal (3.6) presentada en el capítulo anterior, una de estas sub-familias caracterizada por la existencia de dos puntos de tangencia cuadrática de distinta naturaleza, uno visible y uno invisible; y la otra caracterizada por la existencia de un punto de tangencia cuadrática y un equilibrio frontera. En este capítulo establecemos los dos teoremas principales de esta tesis, para la primer sub-familia estableceremos condiciones suficientes para la existencia de las bifurcaciones estacionarias: silla-nodo, transcritical y horquilla, mientras que para la segunda sub-familia, se probará la existencia de la bifurcación llamada Takens-Bogdanov transcritical (TBT), ver [5], [14] y [18]. Por último, ilustraremos ambos resultados con dos ejemplos, donde el primero de ellos hace referencia a un sistema activador-inhibidor con frontera, ver [21] y [22], donde se presentan las bifurcaciones estacionarias.

4.1. Bifurcaciones estacionarias en sistemas cuadráticos con frontera

En esta sección estudiaremos el caso en el que el sistema (3.6) tiene dos puntos de tangencia cuadrática de distinta naturaleza, esto es, uno invisible y el otro visible, ver Figura 3.4 b). El movimiento de los puntos de tangencia será el mecanismo utilizado para generar las bifurcaciones estacionarias: silla-Nodo, transcritical y horquilla. Para ello, es necesario establecer algunas condiciones:

Nuestra primera hipótesis implica que la curva cónica $g_2(y_1, y_2) = 0$ y el eje vertical se intersecan tangencialmente en un único punto $(0, \mu_0)$, como se muestra en la Figura 4.1. Lo anterior se traduce en $g_2(0, \mu_0) = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial y_1}(0, \mu_0) \neq 0$ y $\frac{\partial g_2}{\partial y_2}(0, \mu_0) = 0$, esto es, un gradiente horizontal en el punto de intersección, lo cual implica a su vez que la cónica debe ser no degenerada. Notemos que $\frac{\partial g_2}{\partial y_2}(0, \mu_0) = a_{22} + 2d_{23}\mu_0 = 0$ si y

solo si $\mu_0 = -\frac{a_{22}}{2d_{23}}$, con $d_{23} \neq 0$. Ahora, si sustituimos μ_0 en $g_2(0, \mu_0)$, obtenemos que $g_2(0, \mu_0) = 0$ si y solo si $b_2 - \frac{a_{22}^2}{4d_{23}} = 0$, de donde obtenemos la siguiente hipótesis:

H2) $a_{22}^2 - 4b_2d_{23} = 0$, $d_{23} \neq 0$.

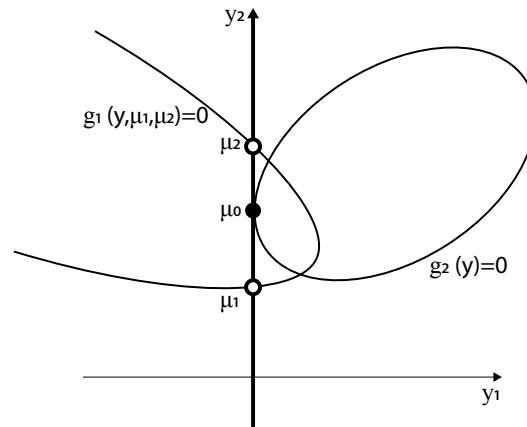
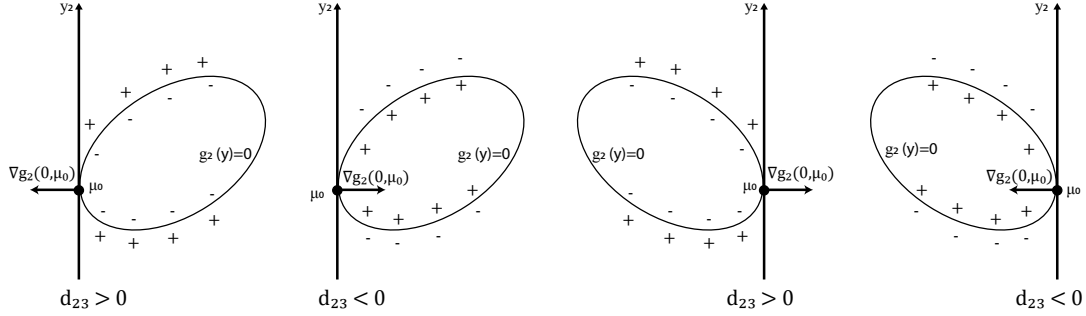


Figura 4.1: Caso de estudio: $g_2(y) = 0$ interseca tangencialmente al eje $y_1 = 0$.

La siguiente condición nos permite asegurar que las bifurcaciones ocurrirán en la región admisible de estudio, recordemos que nos encontramos en un sistema con frontera, por lo tanto, los equilibrios involucrados deben pertenecer al semi-plano derecho, requerimos entonces que la curva $g_2(y) = 0$ se encuentre contenida en esta región. Bajo la hipótesis *H2*) podemos escribir $g_2(0, y_2) = d_{23}(y_2 - \mu_0)^2$, esto implica que el signo de la función $g_2(y_1, y_2)$ es positivo a lo largo del eje vertical si $d_{23} > 0$ y negativo en caso contrario; recordemos además que el gradiente de $g_2(y_1, y_2)$ es horizontal en el punto $(0, \mu_0)$ y que éste apunta a la dirección de máximo crecimiento, obteniendo así las siguientes cuatro configuraciones posibles mostradas en la Figura 4.2.

Figura 4.2: Condición $H3$).

Claramente los escenarios favorables son aquellos tales que $d_{23} \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(0, \mu_0) < 0$, esto es $d_{23} \left(a_{21} + 2d_{22} \left(-\frac{a_{22}}{2d_{23}} \right) \right) < 0$, estableciendo la siguiente hipótesis:

H3) $a_{22}d_{22} - a_{21}d_{23} > 0$.

Finalmente, la siguiente hipótesis garantiza que la familia de cónicas $g_1(y_1, y_2, \mu_1, \mu_2) = 0$ es genérica para cada $\mu_{1,2} \approx \mu_0$, esto ocurre cuando $\nabla g_1(0, \mu_0, \mu_0, \mu_0) \neq 0$. Nuevamente el gradiente de $g_1(y, \mu)$ es horizontal en el punto de colapso, por lo que solo es necesario que $\frac{\partial g_1}{\partial y_1}(0, \mu_0, \mu_0, \mu_0) = a_{11} + 2d_{12} \left(-\frac{a_{22}}{2d_{23}} \right) \neq 0$, es decir:

H4) $a_{11}d_{23} - a_{22}d_{12} \neq 0$.

Una vez establecidas las condiciones, para simplificar el análisis es necesario que hagamos una traslación, tanto del punto $(0, \mu_0)$ en el espacio de estados, como de (μ_0, μ_0) , en el espacio de parámetros, por ello enunciamos el siguiente Lema.

Lema 1. *Suponga que la familia parametrizada (3.6) satisface las condiciones $H2$ – $H4$), entonces existe un cambio de coordenadas y parámetros tal que el sistema (3.6) se transforma en el sistema:*

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= d_{13}(y_2 - \mu_1)(y_2 - \mu_2) + \bar{a}_{11}y_1 + d_{11}y_1^2 + 2d_{12}y_1y_2, \\ \dot{y}_2 &= \bar{a}_{21}y_1 + d_{21}y_1^2 + 2d_{22}y_1y_2 + d_{23}y_2^2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

para $y_1 \geq 0$, donde $\bar{a}_{11} = \frac{a_{11}d_{23} - a_{22}d_{12}}{d_{23}}$, y $\bar{a}_{21} = \frac{a_{21}d_{23} - a_{22}d_{22}}{d_{23}}$.

Demostración. Observe que bajo $H2$), $\mu_0 = -\frac{a_{22}}{2d_{23}}$. Hagamos el cambio de coordenadas $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 + \frac{a_{22}}{2d_{23}}$ y $\nu_i = \mu_i + \frac{a_{22}}{2d_{23}}$, para $i = 1, 2$. Así, transformamos el sistema (3.6) en

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{y}_1 \\ &= d_{13} \left(\left(z_2 - \frac{a_{22}}{2d_{23}} \right) - \left(\nu_1 - \frac{a_{22}}{2d_{23}} \right) \right) \left(\left(z_2 - \frac{a_{22}}{2d_{23}} \right) - \left(\nu_2 - \frac{a_{22}}{2d_{23}} \right) \right) + a_{11}z_1 \\ &\quad + d_{11}z_1^2 + 2d_{12}z_1 \left(z_2 - \frac{a_{22}}{2d_{23}} \right), \\ &= d_{13} (z_2 - \nu_1) (z_2 - \nu_2) + \left(\frac{a_{11}d_{23} - a_{22}d_{12}}{d_{23}} \right) z_1 + d_{11}z_1^2 + 2d_{12}z_1z_2, \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\dot{z}_2 = \left(\frac{a_{21}d_{23} - a_{22}d_{22}}{d_{23}} \right) z_1 + d_{21}z_1^2 + 2d_{22}z_1z_2 + d_{23}z_2^2,$$

Por último, solo renombramos nuevamente a $z_i \rightarrow y_i$ y $\nu_i \rightarrow \mu_i$ para $i = 1, 2$. \square

Observación 5. De $H3$) y $H4$) se sigue que $\bar{a}_{11}\bar{a}_{21} \neq 0$.

Con esta configuración tenemos los siguientes escenarios para los puntos de tangencia:

Lema 2. Considere los puntos de tangencia $T_i = (0, \mu_i)^T$ del sistema (4.1), para $i = 1, 2$.

- (a) Si $\mu_i = 0$, entonces T_i es un equilibrio frontera.
- (b) Si $\mu_1\mu_2 \neq 0$ y $\mu_1 \neq \mu_2$, entonces T_1 y T_2 son puntos de tangencia cuadrática, uno invisible y el otro visible.
- (c) Si $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$, entonces $T_1 = T_2$ es un punto de tangencia cúbica.

Demostración. Se sigue de (3.10), como estudiamos en la clasificación de puntos de tangencia cuadrática (Sección 3.2.1), y la Proposición 2, ya que la función $g_2(0, y_2)$ no cambia de signo y solo se anula en el origen, mientras que $g_1(0, y_2)$ siempre se anula en los puntos de tangencia. Ver Figura 4.3. \square

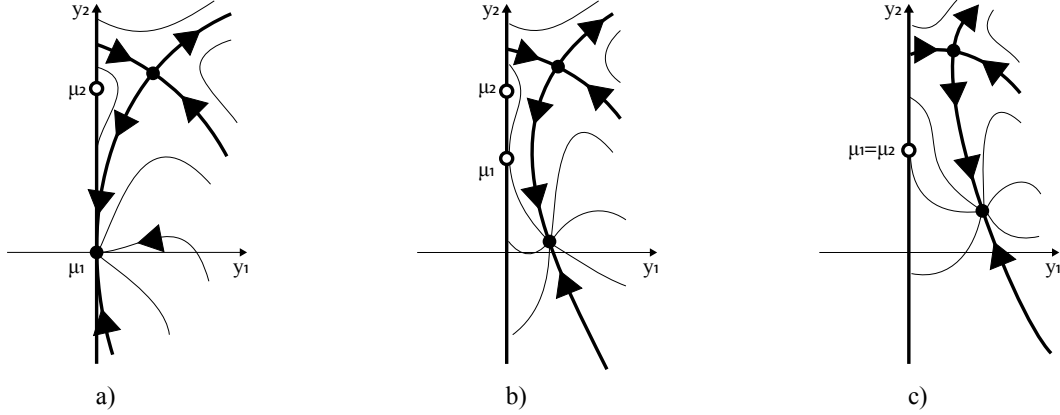


Figura 4.3: Escenarios para los puntos de tangencia del sistema (4.1), dados por el Lema 2.

Como se mencionó anteriormente, nuestro principal objetivo en esta sección es provocar las bifurcaciones estacionarias: silla-nodo, transcritical y horquilla en una vecindad de la frontera, mismas que surgen al cambiar la posición de los puntos de tangencia alrededor del punto de intersección de la cónica $g_2(y) = 0$ con la frontera $y_1 = 0$, así como al colisionarlos. A continuación estableceremos el teorema principal de esta sección.

Teorema 1. *Considere el sistema dos-paramétrico (4.1). Definamos las constantes*

$$\begin{aligned} d_1 &= \bar{a}_{11}d_{23} - \bar{a}_{21}d_{13}, \\ d_2 &= \bar{a}_{11}d_{22} - \bar{a}_{21}d_{12}, \end{aligned}$$

las superficies

$$\begin{aligned} H_1(\mu_1, \mu_2) &= \bar{a}_{21}d_{13} (\bar{a}_{21}d_{13}\mu_1^2 + 2(2d_1 + \bar{a}_{21}d_{13})\mu_1\mu_2 + \bar{a}_{21}d_{13}\mu_2^2) + \mathcal{O}(|\mu|^3), \\ H_2(\mu_1, \mu_2) &= \bar{a}_{11}\bar{a}_{21}d_2 (\mu_1 + \mu_2)^3 + \mathcal{O}(|\mu|^4), \end{aligned}$$

y las regiones en el plano de parámetros

$$\begin{aligned} R_i^+ &= \{(\mu_1, \mu_2) \mid H_i(\mu_1, \mu_2) > 0\} \cap \Omega_0, \\ R_i^0 &= \{(\mu_1, \mu_2) \mid H_i(\mu_1, \mu_2) = 0\} \cap \Omega_0, \\ R_i^- &= \{(\mu_1, \mu_2) \mid H_i(\mu_1, \mu_2) < 0\} \cap \Omega_0, \end{aligned}$$

con $i = 1, 2$ y donde Ω_0 es una vecindad del origen, suficientemente pequeña. Entonces se siguen las siguientes afirmaciones:

- (i) Si $\bar{a}_{11}d_{23}d_1 > 0$,
- (a) para $\mu_0 \in R_1^0 - \{0\}$, existe un punto de equilibrio $p_0(\mu_0) \neq 0$ donde el sistema (4.1) experimenta la bifurcación silla-nodo cuando (μ_1, μ_2) cruza transversalmente de R_1^+ a R_1^- a través de μ_0 .
 - (b) El sistema (4.1) experimenta la bifurcación silla-nodo en el origen cuando (μ_1, μ_2) cruza de R_1^+ a R_1^- a través de $\mu_0 = 0$.
 - (c) El sistema (4.1) experimenta la bifurcación transcítica en el origen cuando (μ_1, μ_2) cruza transversalmente de R_1^+ a R_1^+ a través de $\mu_0 = 0$.
- (ii) Si $\bar{a}_{11}d_{23}d_1 < 0$, el sistema (4.1) experimenta la bifurcación transcítica en el origen cuando $\mu_0 = 0$.
- (iii) Si $d_1 = 0$ y $d_2 \neq 0$,
- (a) para $\mu_0 \in R_2^0 - \{0\}$, existe un punto de equilibrio $p_0(\mu_0)$ donde el sistema (4.1) experimenta la bifurcación silla-nodo cuando (μ_1, μ_2) cruza transversalmente de R_2^+ a R_2^- a través de μ_0 .
 - (b) El sistema (4.1) experimenta la bifurcación horquilla en el origen cuando (μ_1, μ_2) cruza de R_2^+ a R_2^- a través de $\mu_0 = 0$.

Ver Figuras 4.4 y 4.5 para los casos (i) y (iii), respectivamente. Para el caso (ii) la bifurcación transcítica ocurre sin importar como nos movamos en el plano de los parámetros solo con atravesar por $\mu_0 = 0$, es por ello que no se incluye un diagrama de bifurcación.

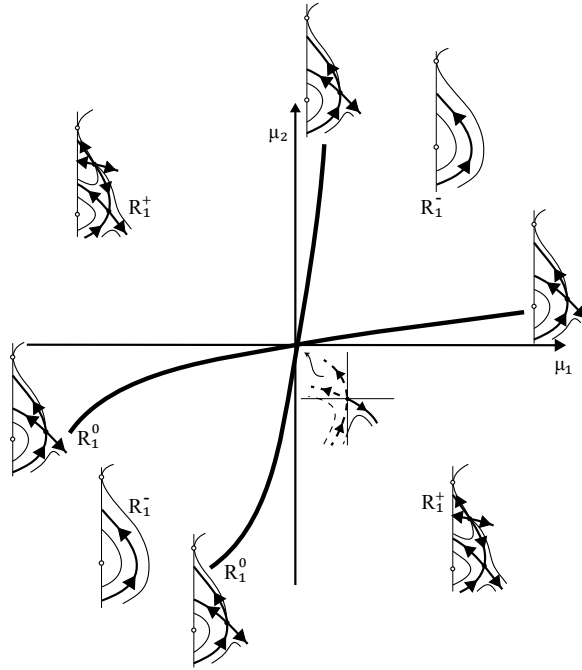
Demostración. Reescribamos la familia (4.1) como:

$$\dot{y} = G(y, \mu) = d(\mu) + B(\mu)y + G_2(y), \quad (4.2)$$

donde

$$\begin{aligned} d(\mu) &= \begin{pmatrix} d_{13}\mu_1\mu_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ B(\mu) &= B_0 + \alpha(\mu)B_1, \\ G_2(y) &= \begin{pmatrix} g_{21}(y) \\ g_{22}(y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con $B_0 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & 0 \\ \bar{a}_{21} & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha(\mu) = -d_{13}(\mu_1 + \mu_2)$,
y $g_{2i}(y) = d_{i1}y_1^2 + 2d_{i2}y_1y_2 + d_{i3}y_2^2$, para $i = 1, 2$.

Figura 4.4: Diagrama de bifurcación para $d_1 \neq 0$.

Observemos que $G(0, 0) = 0$ y

$$DG(y, \mu) = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} + 2d_{11}y_1 + 2d_{12}y_2 & d_{13}(2y_2 - (\mu_1 + \mu_2)) + 2d_{12}y_1 \\ \bar{a}_{21} + 2d_{21}y_1 + 2d_{22}y_2 & 2d_{23}y_2 + 2d_{22}y_1 \end{pmatrix},$$

por lo que, $DG(0, 0) = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & 0 \\ \bar{a}_{21} & 0 \end{pmatrix} = B_0$. Sean $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = \bar{a}_{11}$ los valores propios de la matriz Jacobiana $DG(0, 0)$ con $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \end{pmatrix}$ sus respectivos vectores propios. Entonces, el cambio de coordenadas $z = P^{-1}y$, donde $P = (v_1 \ v_2)$, transforma el sistema (4.2) en

$$\dot{z} = J_0 z + \alpha(\mu) J_1 z + \bar{d}(\mu) + \bar{G}_2(z), \quad (4.3)$$

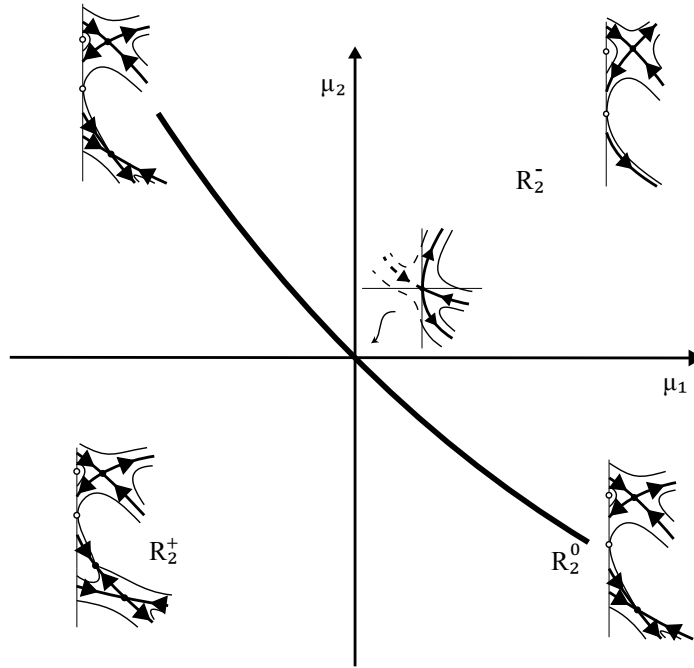


Figura 4.5: Diagrama de bifurcación para $d_1 = 0$ y $d_2 \neq 0$.

donde

$$\begin{aligned}
 J_0 &= P^{-1}B_0P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{a}_{11} \end{pmatrix}, \\
 J_1 &= P^{-1}B_1P = \frac{1}{\bar{a}_{11}} \begin{pmatrix} -\bar{a}_{21} & -\bar{a}_{21}^2 \\ 1 & \bar{a}_{21} \end{pmatrix}, \\
 \bar{d}(\mu) &= P^{-1}d(\mu) = \frac{d_{13}\mu_1\mu_2}{\bar{a}_{11}} \begin{pmatrix} -\bar{a}_{21} \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 \bar{G}_2(z) &= \begin{pmatrix} \bar{g}_{21}(z) \\ \bar{g}_{22}(z) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 \bar{g}_{21}(z) &= \frac{1}{\bar{a}_{11}} \left(-d_1 z_1^2 + 2(\bar{a}_{11}d_1 - \bar{a}_{21}d_1)z_1z_2 + (\bar{a}_{11}g_{22}(\bar{a}_{11}, \bar{a}_{21}) - \bar{a}_{21}g_{21}(\bar{a}_{11}, \bar{a}_{21}))z_2^2 \right), \\
 \bar{g}_{22}(z) &= \frac{1}{\bar{a}_{11}} \left(d_{13}z_1^2 + 2(\bar{a}_{11}d_{12} + \bar{a}_{21}d_{13})z_1z_2 + g_{21}(\bar{a}_{11}, \bar{a}_{21})z_2^2 \right).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema suspendido está dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{\mu}_1 \\ \dot{\mu}_2 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\bar{a}_{21}d_{13}}{\bar{a}_{11}}\mu_1\mu_2 + \bar{a}_{21}g_0(z, \mu) + \bar{g}_{21}(z) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{d_{13}}{\bar{a}_{11}}\mu_1\mu_2 - g_0(z, \mu) + \bar{g}_{22}(z) \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

donde $g_0(z, \mu) = \frac{d_{13}}{\bar{a}_{11}}(\mu_1 + \mu_2)(z_1 + \bar{a}_{21}z_2)$. Buscaremos la variedad central del sistema (4.4), para ello proponemos la curva

$$z_2 = h(z_1, \mu_1, \mu_2) = \alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 \mu_1 z_1 + \alpha_3 \mu_2 z_1 + \alpha_4 \mu_1 \mu_2 + \alpha_5 \mu_1^2 + \alpha_6 \mu_2^2 + \mathcal{O}(|\mu, z_1|^3),$$

la cual debe satisfacer la ecuación homológica $\dot{z}_2 = \frac{\partial h(z_1, \mu_1, \mu_2)}{\partial z_1} \dot{z}_1$. Después de algunos cálculos, obtenemos entonces que la variedad central es

$$z_2 = h(z_1, \mu_1, \mu_2) = -\frac{d_{13}}{\bar{a}_{11}^2}(z_1 - \mu_1)(z_1 - \mu_2) + \mathcal{O}(|\mu, z_1|^3),$$

cuya dinámica queda determinada por

$$\dot{z}_1 = h_0(\mu) + h_1(\mu)z_1 + \left(\frac{d_1}{\bar{a}_{11}} + h_2(\mu)\right)z_1^2 + \beta_1 z_1^3 + \mathcal{O}(|\mu, z_1|^4), \quad (4.5)$$

donde $\beta_1 = -\frac{2d_{13}}{\bar{a}_{11}^3}(\bar{a}_{21}d_1 + \bar{a}_{11}d_2)$, $\beta_2 = \frac{\bar{a}_{21}d_{13}}{\bar{a}_{11}}$, y

$$\begin{aligned} h_0(\mu) &= -\beta_2 \mu_1 \mu_2 - \frac{\beta_2^2}{\bar{a}_{11}} \mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2), \\ h_1(\mu) &= \beta_2 (\mu_1 + \mu_2) + \frac{\beta_2^2}{\bar{a}_{11}} (\mu_1 + \mu_2)^2 + \beta_1 \mu_1 \mu_2, \\ h_2(\mu) &= -\left(\beta_1 + \frac{\beta_2^2}{\bar{a}_{11}}\right) (\mu_1 + \mu_2). \end{aligned}$$

Si $d_1 \neq 0$, podemos truncar la dinámica (4.5) hasta orden dos, entonces

$$\dot{z}_1 = -\beta_2 \mu_1 \mu_2 + \beta_2 (\mu_1 + \mu_2) z_1 + \frac{d_1}{\bar{a}_{11}} z_1^2 + \mathcal{O}(|\mu, z_1|^3), \quad (4.6)$$

así, la aproximación de la curva de bifurcación silla-nodo estará dada por la ecuación $D(\mu) = 0$, donde $D(\mu)$ es el discriminante de la dinámica (4.6) hasta orden dos igualada

a cero, pues éste determina el número de puntos de equilibrio, dicho discriminante es:

$$\begin{aligned} D(\mu) &= (\beta_2(\mu_1 + \mu_2))^2 - 4(-\beta_2\mu_1\mu_2) \left(\frac{d_1}{\bar{a}_{11}} \right) \\ &= \frac{\bar{a}_{21}d_{13}}{\bar{a}_{11}^2} (\bar{a}_{21}d_{13}\mu_1^2 + 2(2d_1 + \bar{a}_{21}d_{13})\mu_1\mu_2 + \bar{a}_{21}d_{13}\mu_2^2). \end{aligned}$$

Observemos que la superficie $D(\mu)$ satisface $D(0) = 0$ y $\nabla D(0) = 0$, esto significa que $\mu = 0$ es un punto crítico de la función $D(\mu)$. Luego, el determinante de la matriz Hessiana en $\mu = 0$ es

$$\det(Hess(0)) = -16 \left(\frac{\bar{a}_{21}d_{13}}{\bar{a}_{11}} \right)^2 \frac{d_{23}d_1}{\bar{a}_{11}},$$

de modo que, si $\bar{a}_{11}d_{23}d_1 > 0$, el punto crítico es un punto silla, es decir, la función $D(\mu)$ toma tanto valores positivos, como negativos en una vecindad del $\mu = 0$, provocando que haya un cambio en el número de equilibrios, dos en la región positiva y ninguno en la negativa; en consecuencia $D(\mu) = 0$ es la aproximación a la curva de bifurcación silla-nodo; además podemos provocar la bifurcación transcítica al pasar de una región positiva a otra positiva a través de $\mu = 0$. Por el contrario, si $\bar{a}_{11}d_{23}d_1 < 0$ el punto crítico es un mínimo local, lo cual implica que en una vecindad del origen $D(\mu) > 0$, así existirán dos puntos de equilibrio que pueden colapsar en uno cuando $\mu = 0$, generando la bifurcación transcítica, (ver Figura 4.4).

Ahora bien, si $d_1 = 0$ y $d_2 \neq 0$, truncamos la dinámica (4.5) hasta orden tres, entonces

$$\dot{z}_1 = h_0(\mu) + h_1(\mu)z_1 + h_2(\mu)z_1^2 + \beta_1z_1^3 + \mathcal{O}(|\mu, z_1|^4),$$

seguimos ahora las fórmulas de Cardano's para resolver la ecuación cúbica, obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned} \Delta &= -4\beta_1\beta_2^3(\mu_1 + \mu_2)^3 + \mathcal{O}(|\mu|^4), \\ p &= \frac{\beta_2}{\beta_1}(\mu_1 + \mu_2) + (\bar{a}_{11}\beta_1\beta_2^2 - \bar{a}_{11}^2\beta_1^2 - \beta_2^4)(\mu_1 + \mu_2)^2 + \mu_1\mu_2 + \mathcal{O}(|\mu|^3), \\ q &= \frac{\beta_2(\bar{a}_{11}\beta_1 + \beta_2^2)}{3\bar{a}_{11}\beta_1^2}(\mu_1 + \mu_2)^2 - \beta_2\mu_1\mu_2 + \frac{\bar{a}_{11}\beta_1 - 2\beta_2^2}{3\bar{a}_{11}\beta_1}\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2) \\ &\quad + \frac{(\bar{a}_{11}\beta_1 + \beta_2^2)(5\bar{a}_{11}\beta_1\beta_2^2 - 2\bar{a}_{11}\beta_1^2 - 2\beta_2^4)}{27\bar{a}_{11}^3\beta_1^3}(\mu_1 + \mu_2)^3 + \mathcal{O}(|\mu|^4). \end{aligned}$$

La función Δ es en este caso el discriminante de la ecuación cúbica, por lo que tendremos tres equilibrios si $\Delta > 0$ y solo uno cuando $\Delta < 0$, de modo que las bifurcaciones

ocurrirán aproximadamente sobre la curva $\Delta = 0$. Si $\Delta = p = q = 0$, entonces los tres equilibrios se encuentran colapsados en uno solo, esto ocurre cuando $\mu_1 = \mu_2 = 0$, provocando la bifurcación tipo horquilla. Por otro lado, si $\Delta = 0$ y $pq \neq 0$, entonces dos de los tres equilibrios se encuentran colapsados, lo cual se tiene para la curva $\mu_1 + \mu_2 \approx 0$ con $\mu_1\mu_2 \neq 0$, es decir, fuera del origen, generando la bifurcación silla-nodo, (ver Figura 4.5). \square

Corolario 2. *Supongamos que $d_1 = 0$, $d_2 \neq 0$, y $\mu \approx 0$, entonces el sistema (4.1) experimenta la bifurcación horquilla en el origen cuando μ pasa a través de cero como sigue:*

- (i) *Para $d_2 > 0$, en una vecindad del origen,*
 - (a) *si $\bar{a}_{11}\bar{a}_{21}(\mu_1 + \mu_2) \leq 0$ entonces, existe solamente un punto de equilibrio, el cual es de tipo nodo;*
 - (b) *si $\bar{a}_{11}\bar{a}_{21}(\mu_1 + \mu_2) > 0$ entonces, existen tres puntos de equilibrio: dos nodos con una silla entre ellos.*
- (ii) *Para $d_2 < 0$, en una vecindad del origen,*
 - (a) *si $\bar{a}_{11}\bar{a}_{21}(\mu_1 + \mu_2) \geq 0$ entonces, existe solamente un punto de equilibrio, el cual es de tipo silla;*
 - (b) *si $\bar{a}_{11}\bar{a}_{21}(\mu_1 + \mu_2) < 0$ entonces, existen tres puntos de equilibrio: dos sillas con un nodo entre ellas.*

Los nodos son estables si $\bar{a}_{11} < 0$ o inestables si $\bar{a}_{11} > 0$.

Demostración. Consideremos el caso $\mu_2 = 0$, notemos que el origen es un punto de equilibrio del sistema (4.1) independientemente del valor de μ_1 . El determinante de la matriz Jacobiana evaluada en este punto es

$$|DG(0, 0, \mu_1, 0)| = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & -d_{13}\mu_1 \\ \bar{a}_{21} & 0 \end{vmatrix} = \bar{a}_{21}d_{13}\mu_1.$$

Luego, de la hipótesis *H3*) y la definición para \bar{a}_{21} en (4.1) tenemos que $\bar{a}_{21}d_{13} < 0$. Además, como $d_1 = 0$ también se cumple que $\bar{a}_{11}d_{13} < 0$, es decir \bar{a}_{11} y d_{13} tienen signos opuestos. Así, el origen será un punto silla si $\bar{a}_{11}\bar{a}_{21}\mu_1 > 0$, o bien, un nodo (estable para $\bar{a}_{11} < 0$ o inestable para $\bar{a}_{11} > 0$) si $\bar{a}_{11}\bar{a}_{21}\mu_1 < 0$, ya que la traza de la matriz Jacobiana $Tr(DG(0, 0, \mu_1, 0)) = \bar{a}_{11}$ y el discriminante de su polinomio característico $\bar{a}_{11}^2 - 4\bar{a}_{21}d_{13}\mu_1 \approx \bar{a}_{11}^2 > 0$ cuando μ_1 es cercano a cero.

Estudiemos ahora los otros dos puntos de equilibrio $p_i(\mu_1) = (y_{1i}(\mu_1), y_{2i}(\mu_1))$, para $i = 1, 2$. Comenzamos calculando mediante el Método del Resultante, ver [1], la aproximación de la coordenada y_{1i} para cada uno de los equilibrios. Calculamos el Resultante de las funciones $g_1(y, \mu)$ y $g_2(y)$ del sistema (4.1) respecto a y_2 y tomamos los términos de primer orden, obteniendo así $y_{1i}(\mu_1) \approx -\frac{\bar{a}_{21}d_{13}\mu_1}{2d_2}$, lo cual nos indica que p_1 y p_2 aparecen solo cuando $\bar{a}_{11}\bar{a}_{21}\mu_1d_2 > 0$, ya que y_{1i} debe ser positivo. Para obtener la aproximación de la coordenada y_{2i} calculamos la solución de la ecuación $g_2(y_{1i}, y_{2i}) = 0$, ésta es $y_{2i} \approx \pm \sqrt{\frac{\bar{a}_{11}\bar{a}_{21}\mu_1}{2d_2}}$. Finalmente, el determinante de la matriz Jacobiana evaluada en cada punto de equilibrio p_i , para $i = 1, 2$, así como su traza, son

$$\begin{aligned} |Df(y_{1i}(\mu_1), y_{2i}(\mu_1), \mu_1, 0)| &\approx -2\bar{a}_{21}d_{13}\mu_1, \\ \text{Tr}(Df(y_{1i}(\mu_1), y_{2i}(\mu_1), \mu_1, 0)) &\approx \bar{a}_{11}, \end{aligned}$$

además, el discriminante de su polinomio característico es aproximadamente \bar{a}_{11}^2 . Por lo tanto, estos dos equilibrios serán tipo silla si $\bar{a}_{11}\bar{a}_{21}\mu_1 < 0$ y nodos cuando $\bar{a}_{11}\bar{a}_{21}\mu_1 > 0$, estables si $\bar{a}_{11} < 0$ o inestables si $\bar{a}_{11} > 0$.

Notemos que si $\mu_1 \neq 0$ cada equilibrio existente es hiperbólico, entonces por continuidad, este mismo comportamiento puede extenderse a las regiones R_2^- y R_2^+ dadas por el Teorema 1.

Para $\mu_1 = \mu_2 = 0$, la matriz Jacobiana $|DG(0, 0)|$ tiene por valores propios a $\lambda_1 = \bar{a}_{11}$ y $\lambda_2 = 0$, por lo que el origen tiene una variedad central, ésta es $y_1 = -\frac{d_{13}}{\bar{a}_{11}}y_2^2 + \frac{2d_{12}d_{13}}{\bar{a}_{11}^2}y_2^3 + \dots$, cuya dinámica está dada por la ecuación $\dot{y}_2 = -\frac{2d_{13}d_2}{\bar{a}_{11}^2}y_2^3 + \dots$, esto implica que si $d_2 > 0$, entonces el origen es un nodo (estable para $\bar{a}_{11} < 0$ o inestable para $\bar{a}_{11} > 0$). Si $d_2 < 0$ el origen es una silla.

□

4.2. Bifurcación Takens-Bogdanov transcítica con frontera

En esta sección estudiaremos una subfamilia del sistema (3.6), la cual tiene la característica de tener siempre un punto de equilibrio frontera. Probaremos que su interacción con un punto de tangencia cuadrática puede generar la bifurcación Takens-Bogdanov transcítica (TBT), la cual ocurre en la región admisible, cercana a la frontera. Para mayor detalle respecto a la bifurcación TBT, ver el capítulo Preliminares, Sección 2.1.

Considere la sub-familia del sistema (3.6),

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= d_{13}(y_2 - \mu_1)(y_2 - \mu_2) + a_{11}y_1 + d_{11}y_1^2 + 2d_{12}y_1y_2 \\ \dot{y}_2 &= b_2(\mu_1) + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + d_{21}y_1^2 + 2d_{22}y_1y_2 + d_{23}y_2^2,\end{aligned}\quad (4.7)$$

donde $b_2(\mu_1) = -\mu_1(a_{22} + d_{23}\mu_1)$ y $y_1 \geq 0$. Claramente, el punto $p = (0, \mu_1)$ es siempre un punto de equilibrio del sistema (4.7) para cada μ_1 .

En el siguiente lema, se verifica que el sistema (4.7) cumple con las condiciones de no-hiperbolicidad, necesarias para que ocurra la bifurcación TBT.

Lema 3. *Considere el sistema cuadrático con frontera $\dot{y} = G(y, \mu)$, dado por (4.7). Entonces, para el punto $p_0 = (0, a_0)$ y el parámetro $\mu_0 = (a_0, b_0)$, el sistema satisface las siguientes hipótesis de no-hiperbolicidad:*

$$G_1) \quad G(p_0, \mu_0) = 0,$$

$$G_2) \quad DG(p_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} -r_1 & r_2 \\ r_3 & r_1 \end{pmatrix} \sim J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}a_0 &= -\frac{a_{11} + a_{22}}{2(d_{12} + d_{23})}, & r_1 &= a_{22} + 2a_0d_{23}, \\ b_0 &= a_0 - \frac{r_2}{d_{13}}, & r_2 &= -\frac{r_1^2}{r_3}, \\ & & r_3 &= a_{21} + 2a_0d_{22},\end{aligned}$$

y $r_3d_{13}(d_{12} + d_{23}) \neq 0$.

Demostración. La condición $G_1)$ se cumple directamente, pues $\mu_1 = a_0$. Para probar la condición $G_2)$, calculamos primero la matriz Jacobiana del sistema (4.7), ésta es

$$DG(p_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_0d_{12} & d_{13}(a_0 - b_0) \\ a_{21} + 2a_0d_{22} & a_{22} + 2a_0d_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 & r_2 \\ r_3 & r_1 \end{pmatrix},$$

para obtener la equivalencia $-r_1$ en la primer entrada de la matriz, basta con despejar a_{11} en la definición de a_0 y sustituir directamente. Similarmente para la segunda entrada, despejamos r_2 de la definición para b_0 . Por último, para probar que la matriz Jacobiana $DG(p_0, \mu_0)$ es similar a la matriz nilpotente J_0 , puede verificarse fácilmente que $J_0 = P^{-1}DG(p_0, \mu_0)P$, donde $P = (p_1 \ p_2)$ con $p_1 = (r_2, r_1)^T$ y $p_2 = (0, 1)^T$. \square

Es bien conocido que cualquier sistema, con frontera o no, que satisface las condiciones $G_1) - G_2)$ tiene forma normal, truncada hasta orden dos,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= ax_1^2 + bx_1x_2.\end{aligned}\quad (4.8)$$

donde, si $P = (p_1 \ p_2)$, con $P^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix}$, satisfacen $P^{-1}DG(p_0, \mu_0)P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2}w_2^T \cdot D^2G(x_0, \mu_0)(p_1, p_1), \\ b &= w_1^T \cdot D^2G(x_0, \mu_0)(p_1, p_1) + w_2^T \cdot D^2G(x_0, \mu_0)(p_1, p_2).\end{aligned}\quad (4.9)$$

Por otra parte, si $ab \neq 0$, un desdoblamiento para la bifurcación TBT está dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + ax_1^2 + bx_1x_2.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Ver Preliminares, Sección 2.1 para el análisis de bifurcación completo del sistema (4.10).

El teorema principal de esta sección establece que existe un difeomorfismo entre las dinámicas de (4.7) y (4.10), con el cambio de parámetros

$$\beta = Q^{-1}(\mu - \mu_0) = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix} (\mu - \mu_0), \quad (4.11)$$

donde

$$\begin{aligned}v_1 &= \left(\frac{2d_{23}r_1r_2 + 2d_{22}r_2^2 - d_{13}r_1^2 - 2d_{12}r_1r_2}{r_2}, \frac{d_{13}r_1^2}{r_2} \right)^T, \\ v_2 &= 2(d_{12} + d_{23}, 0)^T.\end{aligned}$$

A continuación, establecemos el teorema principal de esta sección, el cual describe bajo qué condiciones se presenta la bifurcación TBT, en una vecindad de la frontera, para nuestra sub-familia de estudio.

Teorema 2. *Considere el sistema diferencial cuadrático con frontera, $\dot{y} = G(y, \mu)$, dado por (4.7), que satisface las hipótesis de no-hiperbolicidad $G_1) - G_2)$. Entonces, si*

$$G_3) \quad ab \neq 0, \quad \text{hipótesis de no-degeneracidad,}$$

$$G_4) \quad \beta_1 = v_1^T(\mu - \mu_0) \geq 0, \text{ y } ar_2 < 0, \quad \text{hipótesis de admisibilidad,}$$

el sistema (4.7) experimenta la bifurcación Takens-Bogdanov transcítica dentro de la región admisible, en el punto $p_0 = (0, a_0)$ cuando $(\mu_1, \mu_2) \approx (a_0, b_0)$.

Si $Q = (q_{ij})$, las curvas de bifurcación del sistema (4.7) en una vecindad de μ_0 , suficientemente pequeña, están dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{Trans} &= \left\{ \mu_2 = \frac{q_{22}}{q_{12}} (\mu_1 - a_0) + b_0 \right\}, \\ \mathcal{C}_{Hopf} &= \left\{ \mu_2 = \frac{aq_{21} + bq_{22}}{bq_{12}} (\mu_1 - a_0) + b_0, \beta_1 > 0 \right\}, \\ \mathcal{C}_{Homo} &= \left\{ \mu_2 = \frac{7aq_{21} + 6bq_{22}}{6bq_{12}} (\mu_1 - a_0) + b_0, \beta_1 > 0 \right\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde el primer coeficiente de Lyapunov es $l_1 = \frac{ab}{4\beta_1^2}$, entonces la estabilidad del ciclo límite queda determinada por el signo de ab . Los distintos diagramas de bifurcación del sistema (4.7) se muestran en las Figuras 4.6-4.9.

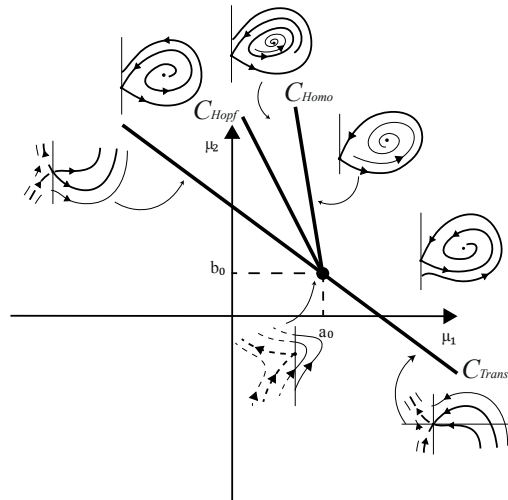


Figura 4.6: Diagrama de bifurcación y retratos fase del sistema (4.7): $a > 0$, $b > 0$, $r_2 < 0$.

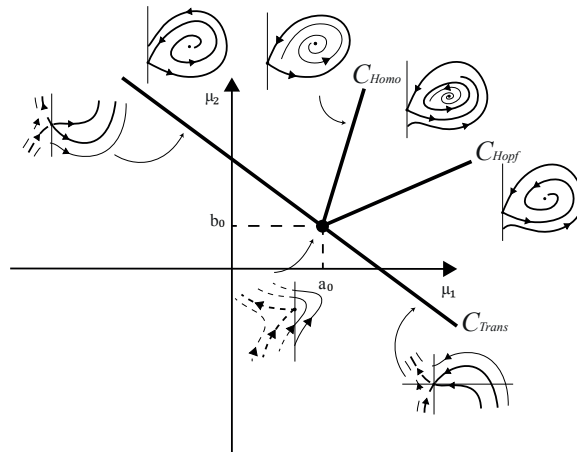


Figura 4.7: Diagrama de bifurcación y retratos fase del sistema (4.7): $a > 0$, $b < 0$, $r_2 < 0$.

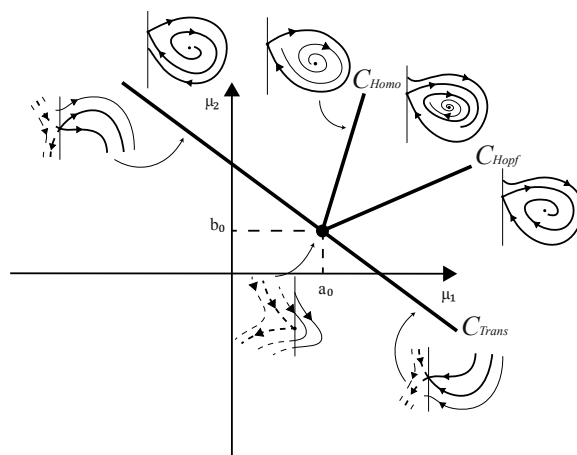


Figura 4.8: Diagrama de bifurcación y retratos fase del sistema (4.7): $a < 0$, $b > 0$, $r_2 > 0$.

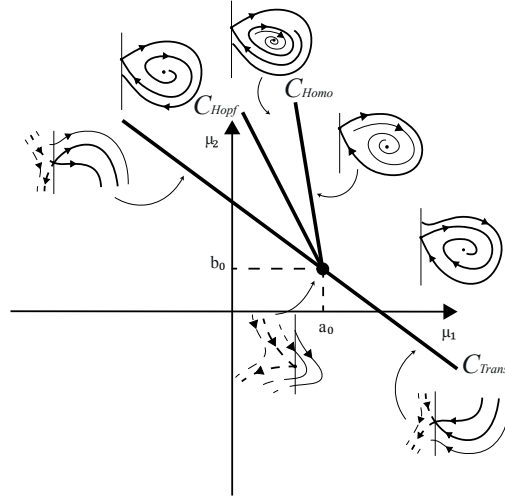


Figura 4.9: Diagrama de bifurcación y retratos fase del sistema (4.7): $a < 0$, $b < 0$, $r_2 > 0$.

Demostración. El sistema (4.7), cercano a $p_0 = (0, a_0)$ y $\mu_0 = (a_0, b_0)$, puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \dot{y} = G(y, \mu) = & A_0(y - p_0) + B_0(\mu - \mu_0) + \frac{1}{2}(y - p_0)^T \mathcal{D}_1(y - p_0) \\ & + (\mu - \mu_0)^T \mathcal{D}_2(y - p_0) + \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)^T \mathcal{D}_3(\mu - \mu_0), \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde

$$\begin{aligned} A_0 = DG(p_0, \mu_0), & \quad B_0 = G_\mu(p_0, \mu_0), & \quad \mathcal{D}_1 = D^2G(p_0, \mu_0), \\ \mathcal{D}_2 = G_{\mu y}(p_0, \mu_0), & \quad \mathcal{D}_3 = G_{\mu\mu}(p_0, \mu_0). \end{aligned}$$

Ahora, antes de establecer el siguiente lema necesario para esta demostración, se requiere introducir la siguiente notación.

Definición 4. Consideremos $\nu \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_{n_1} \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_r^T \end{pmatrix}$ con $q_j \in \mathbb{R}^{n_1}$ para

$$j = 1, \dots, r, \text{ y } \mathcal{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{n_1} \end{pmatrix} \text{ con } R_i \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}.$$

$$(a) \nu \bullet \mathcal{R} = \sum_{i=1}^{n_1} \nu_i R_i \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}.$$

$$(b) Q \bullet \mathcal{R} = \begin{pmatrix} q_1 \bullet \mathcal{R} \\ \vdots \\ q_r \bullet \mathcal{R} \end{pmatrix}.$$

$$(c) \text{ Para } U \in \mathbb{R}^{m_1 \times k_1}, V \in \mathbb{R}^{m_2 \times k_2}, \mathcal{R}(U, V) = U^T \mathcal{R} V = \begin{pmatrix} U^T R_1 V \\ \vdots \\ U^T R_{n_1} V \end{pmatrix}.$$

Observación 6. Haciendo uso de esta notación, reescribimos a, b en (4.9) como

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} (w_2 \bullet \mathcal{D}_1) (p_1, p_1), \\ b &= (w_1 \bullet \mathcal{D}_1) (p_1, p_1) + (w_2 \bullet \mathcal{D}_1) (p_1, p_2). \end{aligned}$$

Así, enunciamos el siguiente lema, cuya prueba se obtiene directamente al hacer los cálculos correspondientes.

Lema 4. Sea $P = (p_1 \ p_2)$, donde $p_1 = (r_2, r_1)^T$, $p_2 = (0, 1)^T$ y $Q \in \mathbb{M}_{2 \times 2}$. El cambio de coordenadas $z = P^{-1}(y - p_0)$, $\beta = Q^{-1}(\mu - \mu_0)$, transforma el sistema (4.13) en

$$\dot{z} = J_0 z + \bar{B}_0 \beta + \frac{1}{2} z^T \bar{\mathcal{D}}_1 z + \beta^T \bar{\mathcal{D}}_2 z + \frac{1}{2} \beta^T \bar{\mathcal{D}}_3 \beta, \quad (4.14)$$

donde

$$\begin{aligned} J_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \bar{B}_0 &= P^{-1} B_0 Q, & \bar{\mathcal{D}}_1 &= P^T (P^{-1} \bullet \mathcal{D}_1) P, \\ \bar{\mathcal{D}}_2 &= Q^T (P^{-1} \bullet \mathcal{D}_2) P, & \bar{\mathcal{D}}_3 &= Q^T (P^{-1} \bullet \mathcal{D}_3) Q. \end{aligned}$$

Observación 7. El cambio $z = P^{-1}(y - p_0)$, donde $P^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix}$ con $w_1^T = \left(\frac{1}{r_2}, 0\right)$

y $w_2^T = \left(-\frac{r_1}{r_2}, 1\right)$, implica que $z_1 = \left(\frac{1}{r_2}\right) y_1$, lo cual significa que el cambio de coordenadas transforma la frontera $y_1 = 0$ en la recta $z_1 = 0$ y, al semi-plano $y_1 > 0$ en $z_1 > 0$, si $r_2 > 0$; o $z_1 < 0$ si $r_2 < 0$. Ver Figura (4.10).

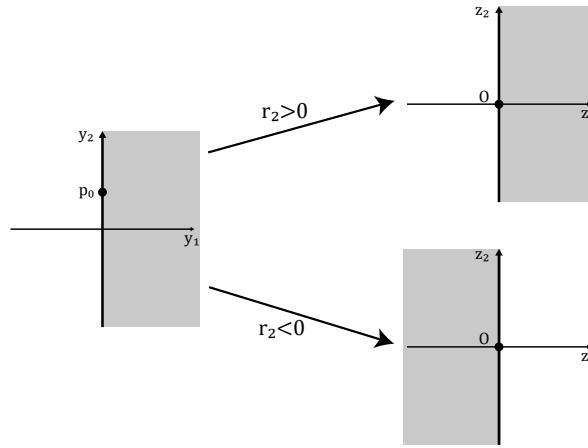


Figura 4.10: Cambio de coordenadas, Lema (4).

Considere ahora el cambio de coordenadas, cercano a la identidad

$$z = h(x, \beta) = x + L\beta + \frac{1}{2}x^T \mathcal{L}_1 x + \beta^T \mathcal{L}_2 x + \frac{1}{2}\beta^T \mathcal{L}_3 \beta, \quad (4.15)$$

donde $\beta = (\beta_1, \beta_2)^T$, $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}$, $\mathcal{L}_i = \begin{pmatrix} L_{i1} \\ L_{i2} \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, 3$, y $L_{ij} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}$. Este cambio de coordenadas debe ser tal que cualquier punto $x = (0, a)$ debe transformarse en algún punto $z = (0, b)$:

$$z = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^T L_{11} x \\ x^T L_{12} x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta^T L_{21} x \\ \beta^T L_{22} x \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta^T L_{31} x \\ \beta^T L_{32} x \end{pmatrix},$$

para lo cual tomamos

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}, & L_{11} &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & 0 \end{pmatrix}, \\ L_{21} &= \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ \gamma_{13} & 0 \end{pmatrix}, & L_{31} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, con el objetivo de encontrar la dinámica del sistema (4.14) bajo el cambio de coordenadas (4.15), primero calculamos

$$\dot{z}|_{h(x,\beta)} = J_0 x + \tilde{B}_0 \beta + \frac{1}{2} x^T \tilde{\mathcal{D}}_1 x + \beta^T \tilde{\mathcal{D}}_2 x + \frac{1}{2} \beta^T \tilde{\mathcal{D}}_3 \beta + \dots, \quad (4.16)$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{B}_0 &= \bar{B}_0 + J_0 L, & \tilde{\mathcal{D}}_1 &= \bar{\mathcal{D}}_1 + \bar{\mathcal{L}}_1, \\ \tilde{\mathcal{D}}_2 &= \bar{\mathcal{D}}_2 + L^T \bar{\mathcal{D}}_1 + \bar{\mathcal{L}}_2, & \tilde{\mathcal{D}}_3 &= \bar{\mathcal{D}}_3 + 2\bar{\mathcal{D}}_2 L + L^T \bar{\mathcal{D}}_1 L + \bar{\mathcal{L}}_3, \\ \bar{\mathcal{L}}_i &= \begin{pmatrix} L_{i2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Notemos que

$$B_0 = G_\mu(p_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} d_{13}(b_0 - a_0) & 0 \\ -a_{22} - 2d_{23}a_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_2 & 0 \\ -r_1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y } P^{-1} = \frac{1}{r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r_1 & r_2 \end{pmatrix},$$

de modo que si $Q = (q_{ij})$, podemos elegir $l_{21} = q_{11}$ y $l_{22} = q_{12}$, haciendo así $\tilde{B}_0 = 0$. Por lo tanto, la dinámica del sistema (4.14) bajo (4.15) se calcula como sigue

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (I + x^T \mathcal{L}_1 + \beta^T \mathcal{L}_2)^{-1} \dot{z} \\ &= (I - x^T \mathcal{L}_1 - \beta^T \mathcal{L}_2 + \dots) \left(J_0 x + \frac{1}{2} x^T \tilde{\mathcal{D}}_1 x + \beta^T \tilde{\mathcal{D}}_2 x + \frac{1}{2} \beta^T \tilde{\mathcal{D}}_3 \beta + \dots \right) \\ &= J_0 x + \frac{1}{2} x^T \hat{\mathcal{D}}_1 x + \beta^T \hat{\mathcal{D}}_2 x + \frac{1}{2} \beta^T \tilde{\mathcal{D}}_3 \beta + \dots, \quad (4.17)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{D}}_1 &= \tilde{\mathcal{D}}_1 - 2\mathcal{L}_1 J_0 = \bar{\mathcal{D}}_1 + \bar{\mathcal{L}}_1 - 2\mathcal{L}_1 J_0, \\ \hat{\mathcal{D}}_2 &= \tilde{\mathcal{D}}_2 - \mathcal{L}_2 J_0 = \bar{\mathcal{D}}_2 + L^T \bar{\mathcal{D}}_1 + \bar{\mathcal{L}}_2 - \mathcal{L}_2 J_0.\end{aligned}$$

Comenzaremos, simplificando el término $\frac{1}{2} x^T \hat{\mathcal{D}}_1 x$.

$$\hat{\mathcal{D}}_1 = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{D}}_{11} \\ \hat{\mathcal{D}}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{D}}_{11} \\ \bar{\mathcal{D}}_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{12} \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} L_{11} J_0 \\ L_{12} J_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{D}}_{11} + L_{12} - 2L_{11} J_0 \\ \bar{\mathcal{D}}_{12} - 2L_{12} J_0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $x^T \hat{\mathcal{D}}_{11} x = 0 \Leftrightarrow \hat{\mathcal{D}}_{11} + \hat{\mathcal{D}}_{11}^T = 0 \Leftrightarrow \bar{\mathcal{D}}_{11} + L_{12} - L_{11} J_0 - J_0^T L_{11} = 0$, por lo que tomamos $L_{12} = L_{11} J_0 + J_0^T L_{11} - \bar{\mathcal{D}}_{11}$. Así,

$$\hat{\mathcal{D}}_{12} = \bar{\mathcal{D}}_{12} - 2L_{12} J_0 = \bar{\mathcal{D}}_{12} + 2\bar{\mathcal{D}}_{11} J_0 - 2J_0^T L_{11} J_0,$$

luego $\bar{\mathcal{D}}_{11} = P^T (w_1 \bullet \mathcal{D}_1) P$ y $\bar{\mathcal{D}}_{12} = P^T (w_2 \bullet \mathcal{D}_1) P$, entonces

$$\hat{\mathcal{D}}_{12} = \begin{pmatrix} (w_2 \bullet \mathcal{D}_1)(p_1, p_1) & (w_2 \bullet \mathcal{D}_1)(p_1, p_2) + 2(w_1 \bullet \mathcal{D}_1)(p_1, p_1) \\ (w_2 \bullet \mathcal{D}_1)(p_2, p_1) & -2\alpha_{11} + (w_2 \bullet \mathcal{D}_1)(p_2, p_2) + 2(w_1 \bullet \mathcal{D}_1)(p_2, p_1) \end{pmatrix},$$

de modo que, si hacemos $\alpha_{11} = \frac{1}{2}((w_2 \bullet \mathcal{D}_1)(p_2, p_2) + 2(w_1 \bullet \mathcal{D}_1)(p_2, p_1))$, obtenemos $\frac{1}{2}x^T \hat{\mathcal{D}}_{12}x = ax_1^2 + bx_1x_2$. Ahora, simplificaremos el término $\beta^T \hat{\mathcal{D}}_2x$.

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}_2 &= \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{D}}_{21} \\ \hat{\mathcal{D}}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{D}}_{21} \\ \bar{\mathcal{D}}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L^T \bar{\mathcal{D}}_{11} \\ L^T \bar{\mathcal{D}}_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{22} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_{21} J_0 \\ L_{22} J_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{D}}_{21} + L^T \bar{\mathcal{D}}_{11} + L_{22} - L_{21} J_0 \\ \bar{\mathcal{D}}_{22} + L^T \bar{\mathcal{D}}_{12} - L_{22} J_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En este caso, $\hat{\mathcal{D}}_{21} = 0 \Leftrightarrow L_{22} = L_{21} J_0 - \bar{\mathcal{D}}_{21} - L^T \bar{\mathcal{D}}_{11}$, y entonces $\hat{\mathcal{D}}_{22} = \bar{\mathcal{D}}_{22} + \bar{\mathcal{D}}_{21} J_0 + L^T(\bar{\mathcal{D}}_{12} + \bar{\mathcal{D}}_{11} J_0)$. La idea es ahora encontrar Q tal que $\hat{\mathcal{D}}_{22} = I$, la matriz identidad. Por otro lado, tenemos $\bar{\mathcal{D}}_{21} = Q^T(w_1 \bullet \mathcal{D}_2)P$, $\bar{\mathcal{D}}_{22} = Q^T(w_2 \bullet \mathcal{D}_2)P$, y $L^T = Q^T J_0$, obteniendo como resultado

$$\hat{\mathcal{D}}_{22} = Q^T((w_2 \bullet \mathcal{D}_2)P + (w_1 \bullet \mathcal{D}_2)PJ_0 + J_0(\bar{\mathcal{D}}_{12} + \bar{\mathcal{D}}_{11}J_0)).$$

Definamos la matriz

$$M_0 = (w_2 \bullet \mathcal{D}_2)P + (w_1 \bullet \mathcal{D}_2)PJ_0 + J_0(\bar{\mathcal{D}}_{12} + \bar{\mathcal{D}}_{11}J_0),$$

después de algunos cálculos obtenemos que, $\det(M_0) = -\frac{2d_{13}(d_{12} + d_{23})r_1^2}{r_2} \neq 0$, por lo que la matriz M_0 es invertible. Definimos entonces $Q = (M_0^{-1})^T$, y así logramos que $\hat{\mathcal{D}}_{22} = I$. Finalmente, simplificamos el término $\beta^T \tilde{\mathcal{D}}_3\beta$.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_3 &= \bar{\mathcal{D}}_3 + 2\bar{\mathcal{D}}_2L + L^T\bar{\mathcal{D}}_1L + \bar{\mathcal{L}}_3 \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{D}}_{31} + 2\bar{\mathcal{D}}_{21}L + L^T\bar{\mathcal{D}}_{11}L + L_{32} \\ \bar{\mathcal{D}}_{32} + 2\bar{\mathcal{D}}_{22}L + L^T\bar{\mathcal{D}}_{12}L \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\beta^T \tilde{\mathcal{D}}_{31}\beta = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{31} + \tilde{\mathcal{D}}_{31}^T = 0 \Leftrightarrow L_{32} = -(\bar{\mathcal{D}}_{31} + L^T\bar{\mathcal{D}}_{11}L + \bar{\mathcal{D}}_{21}L + L^T\bar{\mathcal{D}}_{21}^T).$$

Mientras que,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_{32} &= \bar{\mathcal{D}}_{32} + 2\bar{\mathcal{D}}_{22}L + L^T\bar{\mathcal{D}}_{12}L \\ &= Q^T(w_2 \bullet \mathcal{D}_3)Q + 2Q^T(w_2 \bullet \mathcal{D}_2)PL + L^T P^T(w_2 \bullet \mathcal{D}_1)PL \\ &= Q^T(w_2 \bullet \mathcal{D}_3 + 2(w_2 \bullet \mathcal{D}_2)PJ_0^T + J_0 P^T(w_2 \bullet \mathcal{D}_1)PJ_0^T)Q, \end{aligned}$$

pues $L = J_0^T Q$. Definamos por último

$$K_0 = w_2 \bullet \mathcal{D}_3 + 2(w_2 \bullet \mathcal{D}_2)PJ_0^T + J_0 P^T(w_2 \bullet \mathcal{D}_1)PJ_0^T,$$

al realizar los cálculos pertinentes, dicha matriz queda simplificada como,

$$K_0 = \frac{d_{13}r_1}{r_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

esta matriz es antisimétrica, esto es, $K_0 + K_0^T = 0$, en consecuencia, $\tilde{D}_{32} = Q^T K_0 Q$ es también antisimétrica, por lo tanto $\beta^T \tilde{D}_{32} \beta = 0$.

Es así como hemos transformado el sistema (4.7) en el sistema (4.10). Los distintos escenarios para los diagramas de bifurcación, así como las expresiones para las curvas de bifurcación, se obtienen directamente del análisis de bifurcación de la TBT, descrito en Preliminares, Sección 2.1. En principio, debemos ubicar aquellos escenarios para los cuales tenemos una silla en el origen del retrato fase, esto ocurre solo para $\beta_1 \geq 0$. Ahora bien, recordemos que el signo de r_2 tiene un efecto en el cambio de coordenadas enunciado en el Lema 4, por lo que los escenarios admisibles son aquellos donde el ciclo aparece del lado derecho si $r_2 > 0$ o bien, del lado izquierdo si $r_2 < 0$, lo cual ocurre cuando $ar_2 < 0$ siendo ésta la hipótesis de admisibilidad, concluyendo entonces que la bifurcación ocurre en la región deseada. \square

4.3. Ejemplos

4.3.1. Aplicación: Sistema activador-inhibidor (Gierer-Meinhardt) con frontera

En esta sección analizaremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, el cual describe la interacción en una reacción química autocatalítica entre una sustancia activadora y una inhibidora. El activador estimula su propia producción y a su vez, la producción del inhibidor. Esta formulación matemática es comúnmente usada para estudiar la formación de patrones en la naturaleza, ver [22],[21]. Aún cuando este ejemplo no es cuadrático, resulta útil para aplicar el Teorema 1.

Considere el siguiente sistema activador-inhibidor, delimitado por la línea recta

$$\Sigma : \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma(x) = -65(x_1 - 2) + 16x_2 = 0 \},$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \rho + \frac{x_1^2}{x_2(1+kx_1^2)} - x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - \gamma x_2, \end{aligned} \tag{4.18}$$

para $\sigma(x) > 0$, donde $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ son las concentraciones del activador e inhibidor, respectivamente. El parámetro ρ representa una pequeña producción base del

activador, γ es una tasa de decrecimiento del inhibidor, mientras que el término $\frac{x_1^2}{(1+kx_1^2)}$ indica una saturación de la producción del activador. Suponga (x_1, x_2) y (γ, ρ, k) en una vecindad de $(x_{10}, x_{20}) = (4, \frac{65}{8})$ y $(\gamma_0, \rho_0, k_0) = (\frac{128}{65}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{208})$, respectivamente.

Con el objetivo de encontrar bifurcaciones del sistema (4.18), tomamos su aproximación cuadrática en Serie de Taylor, obteniendo el sistema

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \alpha_2 - \frac{416}{5}\alpha_3 + \frac{10816}{5}\alpha_3^2 + \left(\frac{8}{5} - \frac{676}{5}\alpha_3\right)w_1 - \left(\frac{128}{325} - \frac{256}{25}\alpha_3\right)w_2 \\ &\quad + \frac{91}{80}w_1^2 - \frac{8}{25}w_1w_2 + \frac{1024}{21125}w_2^2, \\ \dot{w}_2 &= -\frac{65}{8}\alpha_1 + 8w_1 - \left(\frac{128}{65} + \alpha_1\right)w_2 + w_2^2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde $w_1 = x_1 - x_{10}$, $w_2 = x_2 - x_{20}$, $\alpha_1 = \gamma - \gamma_0$, $\alpha_2 = \rho - \rho_0$ y $\alpha_3 = k - k_0$, delimitada por $\bar{\Sigma}: c^T w = 0$ con $c = \alpha_0(-1, \frac{16}{65})$ y $\alpha_0 = \frac{65}{\sqrt{4481}}$.

Notemos que si quisiéramos encontrar la bifurcación horquilla para el sistema (4.18), utilizando su aproximación (4.19), el resultado no sería correcto, puesto que no estamos tomando en consideración los términos de tercer grado en la Serie de Taylor, por lo que solo nos encontramos en la búsqueda de las bifurcaciones silla-nodo o transcítica.

Para el sistema (4.19), la función (3.2), es $N(q) = N(0) = \alpha_0^4 \bar{N}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, donde

$$\begin{aligned} \bar{N}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= -\frac{52096}{274625}\alpha_1 - \frac{26048}{274625}\alpha_2 + \frac{833536}{105625}\alpha_3 + \frac{256}{4225}\alpha_1^2 - \frac{18432}{1625}\alpha_1\alpha_3 \\ &\quad + \frac{2646016}{8125}\alpha_3^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

En consecuencia, la condición $H1$) es equivalente a $\bar{N}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \geq 0$. En este caso, los puntos de tangencia del sistema (4.19) son $q_i = \nu_i v$, con $i = 1, 2$, $v = \alpha_0(\frac{16}{65}, 1)$ y

$$\begin{aligned} \nu_{1,2} &= -\frac{65}{1628\alpha_0} (130\alpha_1 - 12168\alpha_3 \\ &\quad \pm \sqrt{13(-4070\alpha_1 - 2035\alpha_2 + 169312\alpha_3 + 1300\alpha_1^2 - 243360\alpha_1\alpha_3 + 6987136\alpha_3^2)}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Luego, bajo la hipótesis $H1$), el sistema (4.19) puede ser transformado en la forma normal dada por la Proposición 3,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= d_{13}(z_2 - \nu_1)(z_2 - \nu_2) + a_{11}z_1 + d_{11}z_1^2 + 2d_{12}z_1z_2, \\ \dot{z}_2 &= b_2 + a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + d_{21}z_1^2 + 2d_{22}z_1z_2 + d_{23}z_2^2, \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde

$$\begin{aligned}
b_2 &= \left(-\frac{65}{8}\alpha_1 + \frac{16}{65}\alpha_2 - \frac{512}{25}\alpha_3 + \frac{13312}{25}\alpha_3^2 \right) \alpha_0, & d_{11} &= -\frac{1389567579}{1428050000}\alpha_0^3, & d_{21} &= \frac{7542540704}{5801453125}\alpha_0^3, \\
a_{11} &= -\frac{4(26886 + 4160\alpha_1 + 9455381\alpha_3)}{274625}\alpha_0^2, & d_{12} &= \frac{78503}{1373125}\alpha_0^3, & d_{22} &= -\frac{24557248}{89253125}\alpha_0^3, \\
a_{21} &= -\frac{8}{1373125}(1528021 + 42250\alpha_1 - 5818696\alpha_3)\alpha_0^2, & d_{13} &= -\frac{6512}{274625}\alpha_0^3, & d_{23} &= \frac{96256}{1373125}\alpha_0^3. \\
a_{22} &= -\left(\alpha_1 + \frac{9216}{1625}\alpha_3 \right) \alpha_0^2.
\end{aligned}$$

Puede verificarse directamente que $d_{23} \neq 0$ y que además, para $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \approx 0$, se cumple que $a_{22}d_{22} - a_{21}d_{23} > 0$, y $a_{11}d_{23} - a_{22}d_{12} \neq 0$. Por otro lado, $a_{22}^2 - 4b_2d_{23} = 0$ si

$$\alpha_2 = \frac{13(78208000\alpha_1 + 197132288\alpha_3 + 34328125\alpha_1^2 + 389376000\alpha_1\alpha_3 - 4021288960\alpha_3^2)}{30801920}. \quad (4.23)$$

Considerando (4.23), el sistema (4.22) satisface las hipótesis $H2)$ y $H3)$. Por lo tanto, por el Lema 1, este sistema puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= d_{13}(y_2 - \mu_1)(y_2 - \mu_2) + \bar{a}_{11}y_1 + d_{11}y_1^2 + 2d_{12}y_1y_2 \\
\dot{y}_2 &= d_{23}y_2^2 + \bar{a}_{21}y_1 + d_{21}y_1^2 + 2d_{22}y_1y_2,
\end{aligned} \quad (4.24)$$

con $\bar{a}_{11} = \frac{-2310144 + 4453735\alpha_1 - 785155072\alpha_3}{6256640}$, $\bar{a}_{21} = -\frac{4102912 + 1922375\alpha_1 - 5364736\alpha_3}{488800}$ y $\mu_i = \nu_i + \frac{a_{22}}{2d_{23}}$. De lo anterior, se obtiene que $d_{11}\bar{a}_{11}d_{23} \approx 0.005 > 0$. Así, por el Teorema 1, la curva de bifurcación silla-nodo en el plano μ_1 - μ_2 es

$$h_1(\mu_1, \mu_2) = 138787\mu_1^2 - 349766\mu_1\mu_2 + 138787\mu_2^2 + \dots, \quad (4.25)$$

(ver Figura 4.11). La bifurcación transcítica ocurre cuando $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

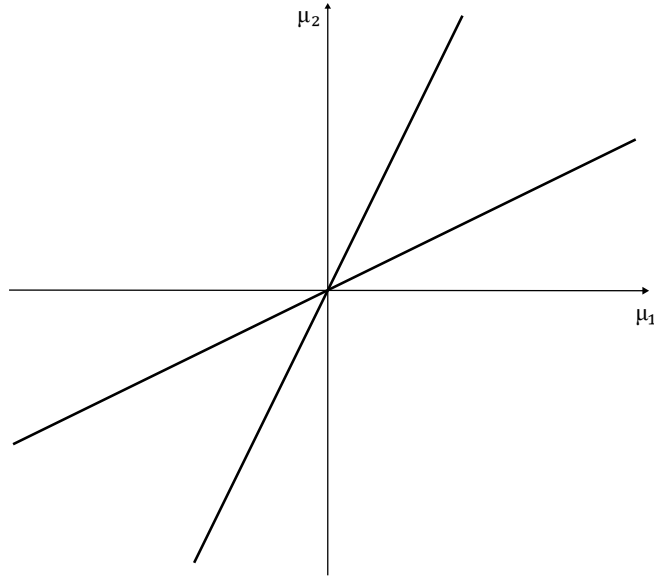


Figura 4.11: Curva de bifurcación en el plano μ_1 - μ_2 .

Finalmente, sustituimos (4.21) en (4.25) para obtener la curva de bifurcación $h_2(\alpha_1, \alpha_3) = 0$, donde

$$h_2(\alpha_1, \alpha_3) = 8422400\alpha_1 + 3431675\alpha_1^2 + 61102080\alpha_1\alpha_3 - 1104150528\alpha_3^2 + \dots, \quad (4.26)$$

o bien, en los parámetros originales, la curva $h(\gamma, k) = 0$, con

$$h(\gamma, k) = 88510464 + 47116160\gamma + 2254307328k - 44611775\gamma^2 - 794327040\gamma k + 14353956864k^2 + \dots, \quad (4.27)$$

mientras que, la función \bar{N} dada por (4.20), en los parámetros originales, es transformada en

$$\tilde{N}(\gamma, k) = 88510464 + 35565440\gamma + 2254307328k - 38746175\gamma^2 - 794327040\gamma k + 14353956864k^2 + \dots. \quad (4.28)$$

De hecho, $h(\gamma, k) = 0$ pertenece a la región donde $\tilde{N}(\gamma, k) \geq 0$, es decir, la región donde se cumple la condición para la existencia de puntos de tangencia $H1$), en los parámetros originales. Además, debido a la elección para α_2 obtenemos

$$\rho(\gamma, k) = \frac{1}{30801920} (-455143424 - 619216000\gamma - 9918611456k + 446265625\gamma^2 + 5061888000\gamma k - 52276756480k^2). \quad (4.29)$$

El diagrama de bifurcación se muestra en la Figura 4.12, donde $\tilde{N} = 0$ es representada a lo largo de la curva punteada, con la región $\tilde{N} > 0$ del lado izquierdo, claramente la curva de bifurcación $h = 0$, mostrada en línea continua, pertenece a esta misma región.

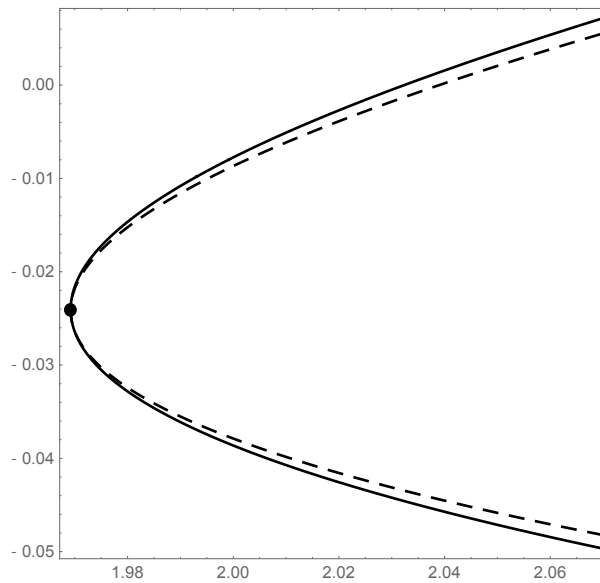


Figura 4.12: Curva de bifurcación $h = 0$, con $1.96 \leq \gamma \leq 2.35$ y $-0.07 \leq k \leq 0$.

Algunas simulaciones del sistema original (4.18) se presentan en las siguientes figuras. La Figura 4.13 ha sido simulada utilizando parámetros sobre la curva $\tilde{N} = 0$, por lo que el sistema (4.18) tiene un punto de tangencia cúbica, o punto cúspide, y ningún punto de equilibrio. Mientras que la Figura 4.14, simulada en la región $h > 0$, muestra dos puntos de equilibrio, acompañados de dos puntos de tangencia cuadrática.

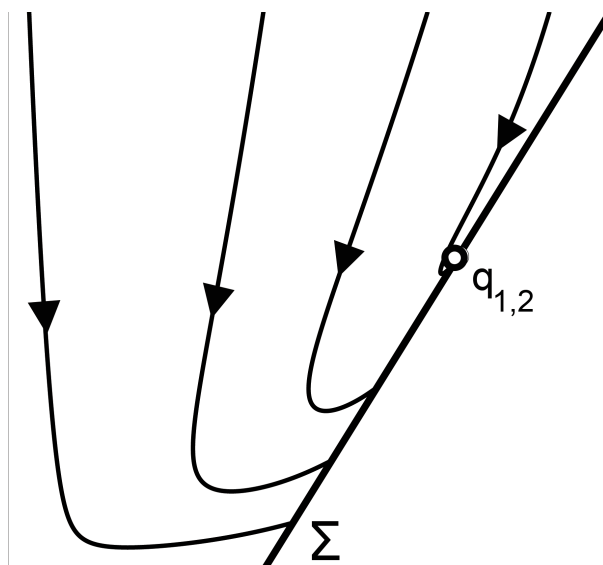


Figura 4.13: Retrato fase del sistema 4.18 simulado con $\gamma = 1.9716$, $k = -0.028$, $0 \leq x_1 \leq 5$ y $0 \leq x_2 \leq 11$.

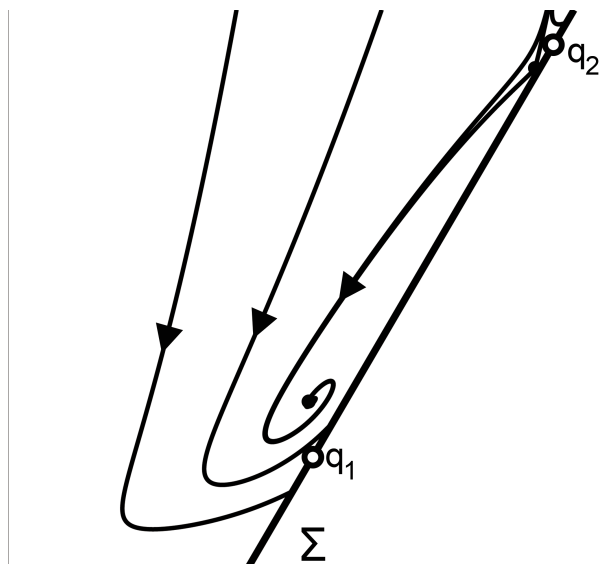


Figura 4.14: Retrato fase del sistema 4.18 simulado con $\gamma = 1.96$, $k = -0.028$, $0 \leq x_1 \leq 5$ y $0 \leq x_2 \leq 11$.

4.3.2. Ejemplo Académico: Bifurcación Takens-Bogdanov transcítica con frontera

Para cerrar este capítulo, presentamos este sencillo ejemplo que nos permite ilustrar el Teorema 2, pues experimenta la bifurcación Takens-Bogdanov transcítica.

Considere el sistema cuadrático delimitado por el eje vertical $y_1 = 0$,

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \frac{1}{2}(y_2 - \mu_1)(y_2 - \mu_2) + \frac{1}{3}y_1 + \frac{13}{9}y_1^2 \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{3}\mu_1(5 - 2\mu_1) - 2y_1 - \frac{5}{3}y_2 + \frac{10}{3}y_1^2 + \frac{20}{9}y_1y_2 + \frac{2}{3}y_2^2,\end{aligned}\quad (4.30)$$

definido para $y_1 \geq 0$.

Notemos que el punto $p_0 = (0, 1)^T$, es un equilibrio del sistema (4.30) cuando $\mu_0 = (1, 2)^T$. Además, la matriz Jacobiana evaluada en este punto es,

$$DG(p_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (4.31)$$

pues $J_0 = P^{-1}DG(p_0, \mu_0)P$, para $P = (p_1 \ p_2)$, donde $p_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})^T$ y $p_2 = (0, 1)^T$. Por lo tanto, el sistema (4.30) satisface, en el punto (p_0, μ_0) , las hipótesis de no-hiperbolicidad $G_1) - G_2)$ del Teorema 2. Luego, de (4.9), obtenemos $a = 1$, y $b = -1$, por lo que se satisface la hipótesis de no-degeneracidad $G_3)$. Mientras que, de 4.31 obtenemos $r_2 = -\frac{1}{2}$, cumpliéndose la hipótesis de admisibilidad $G_4)$, pues $ar_2 < 0$.

Finalmente, de (4.11) se tiene $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$, esto es, $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ -9 & -\frac{39}{4} \end{pmatrix}$.

Así, de (4.12), las curvas de bifurcación del sistema (4.30) quedan determinadas por:

$$\mathcal{C}_{Trans} : \mu_2 = -13\mu_1 + 15, \quad \mathcal{C}_{Hopf} : \mu_2 = -\mu_1 + 3, \quad \mathcal{C}_{Homo} : \mu_2 = \mu_1 + 1.$$

Ver Figura 4.15. Más aún, el primer coeficiente de Lyapunov $l_1 = \frac{ab}{4\beta_1^2}$ es negativo, pues $\beta_1 > 0$, por lo tanto el ciclo límite, cuando exista, será estable. Observemos que este ejemplo se corresponde con el caso mostrado en la Figura 4.7.

Por último, la Figura 4.16 muestra una simulación del sistema (4.30) en presencia de oscilaciones.

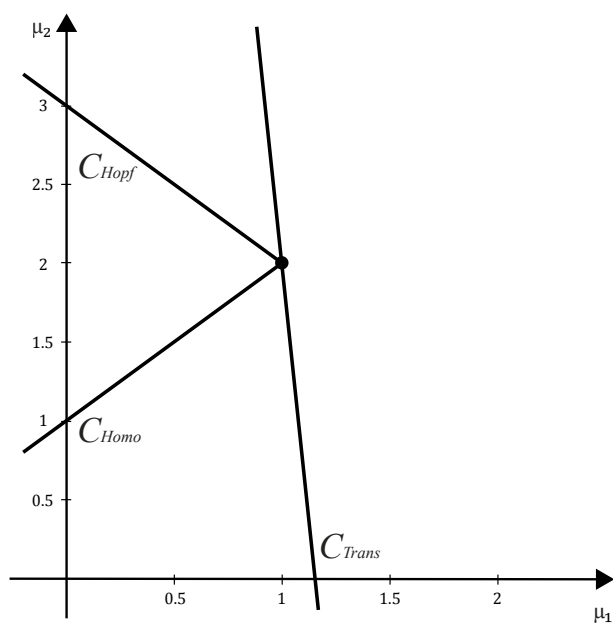


Figura 4.15: Curvas de bifurcación del sistema (4.30).

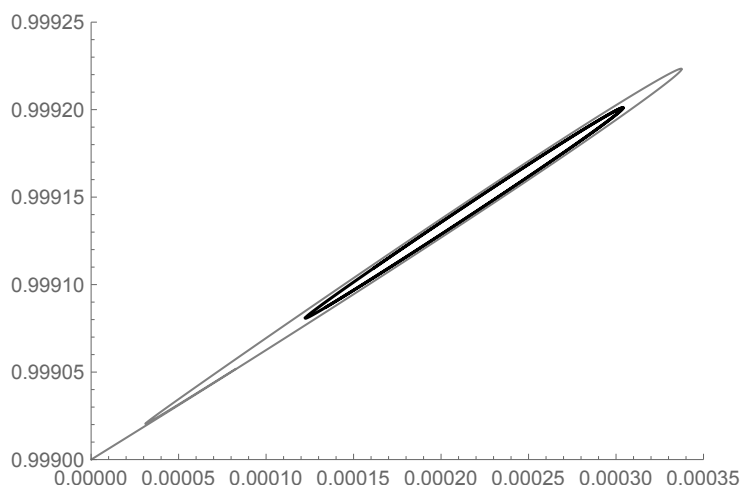


Figura 4.16: Simulación del sistema (4.30) para $\mu_1 = 0.999$ y $\mu_2 = 2.009$.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

Para sistemas cuadráticos en el plano con frontera, empleamos cambios en las posiciones de puntos de tangencia y la colisión entre ellos como mecanismo para generar bifurcaciones. Se analizaron las condiciones para asegurar la existencia de al menos un punto de tangencia y se encontró una forma normal para esta familia de sistemas. Por medio de nuestro análisis pudimos probar que a diferencia de una familia Filippov uniparamétrica en el plano, donde dos puntos de tangencia del mismo campo vectorial no pueden colisionar si ambos son de la misma naturaleza, ver [17], en el caso de sistemas dos-paramétrico cuadráticos con frontera, esto no solo es posible sino que además ocurre en un equilibrio hiperbólico. Al considerar las posiciones de los puntos de tangencia como parámetros de bifurcación, estudiamos dos casos: la interacción de dos puntos de tangencia cuadrática de distinta naturaleza y la interacción de un punto de tangencia cuadrática con un equilibrio frontera. En el primer caso probamos la existencia de las bifurcaciones estacionarias: silla-nodo, transcítica y horquilla, mientras que en el segundo caso, se probó que esta interacción provoca la bifurcación Takens-Bogdanov transcítica.

Como hemos mencionado anteriormente, los sistemas Filippov han cobrado gran relevancia en los últimos años por sus diversas aplicaciones, al igual que los resultados presentados en [23], [24] y [25], han sido retomados, aplicados en sistemas Filippov, estamos interesados en utilizar los mecanismos empleados en nuestro análisis para sistemas cuadráticos con frontera, fijando nuestra atención en los puntos de tangencia, ahora para sistemas Filippov esperando provocar diversos escenarios de bifurcación propios de estos sistemas.

Los principales resultados de esta tesis han sido publicados en el siguiente artículo:

Castro, J. A. & Verduzco, F. [2020] “Bifurcation Analysis in Planar Quadratic Differential Systems with Boundary”. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, **Vol. 30 (7)**, pp. 2030017.

Bibliografía

- [1] Ackermann, J. [2002]. *Robust control: The Parameter Space Approach*. Springer-Verlag London.
- [2] Buzzi, C.A., Carvalho, T. & Teixeira, M. A. [2012] “On 3-Parameter Families of Piecewise Smooth Vector Fields in the Plane”. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **Vol. 11 (4)**, pp. 1402–1424.
- [3] Castillo, J. A., Llibre, J. & Verduzco, F. [2017] “The pseudo-Hopf bifurcation for planar discontinuous piecewise linear differential systems,” *Nonlinear Dynamics* **90**, pp 1829–1840.
- [4] Castro, J. A. & Verduzco, F. [2020] “Bifurcation Analysis in Planar Quadratic Differential Systems with Boundary”. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, **Vol. 30 (7)**, pp. 2030017.
- [5] Chow, S.N. & Hale, J. K. [1982] *Methods of Bifurcation Theory*. Springer Verlag.
- [6] Dercole, F., Della Rossa, F., Colombo, A. & Kuznetsov, Y. [2011] “Two Degenerate Boundary Equilibrium Bifurcations in Planar Filippov Systems,” *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **Vol. 10 (4)**, pp 1525–1553.
- [7] Di Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A.R. & Kowalczyk, P. [2008]. *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Springer-Verlag London.
- [8] Di Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A.R., Kowalczyk, P., Nordmark, A., Ollivar, G. & Piiroinen, P. [2008] “Bifurcations in Nonsmooth Dynamical Systems”. *SIAM Review* **Vol. 50 (4)**, pp. 629–1424.
- [9] Filippov, A.F. [1988] *Differential equations with discontinuous right-hand sides: control systems*. Mathematics and its Applications (Soviet Series). Springer Netherlands.
- [10] Freire, E., Ponce, E. & Torres, F. [2015] “On the critical crossing cycle bifurcation in planar Filippov systems”. *J. of Differential Equations* **Vol. 259 (12)**, pp. 7086–7107.

- [11] Guardia, M., Seara, T.M. & Teixeira, M. A. [2011] “Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov Systems”. *J. of Differential Equations* **Vol. 250** (4), pp. 1967–2023.
- [12] Guckenheimer, J. & Holmes, P. [1983] *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 42. Springer-Verlag).
- [13] Henry, C. [1972] “Differential equations with discontinuous right-hand side for planning procedures,” *Journal of Economic Theory* **4**(3), pp 545–551.
- [14] Hirshberg, P. & Knobloch, E. [1991] “An unfolding of the Takens-Bogdanov singularity”. *Quarterly of Applied Mathematics*. Vol. XLIX, No. 2, pp 281–287.
- [15] Ibrahim, R.A. [1994] “Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chao - part II: dynamics and modeling”, *Applied Mechanics Reviews*, **47**(7), pp. 227–253.
- [16] Ito, T. [1979] “A Filippov solution of a system of differential equations with discontinuous right-hand sides,” *Economics Letters* **4**, pp. 349–354.
- [17] Kuznetsov, Y. A., Rinaldi, S. & Gragnani, A. [2003] “One parameter bifurcations in planar Filippov systems”. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, **13**, pp. 2157–2188.
- [18] Lari-Lavassani, A. Langford, W. F., Huseyin, K. & Gatermann, K. [1999] “Steady-state mode interactions for D_3 and D_4 symmetric system”. *Discrete and Impulsive Systems* **6**, pp. 169–209.
- [19] Leine, R.I. & van de Wouw, N. [2008] *Stability and Convergence of Mechanical Systems with Unilateral Constraints*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol. 36. Springer-Verlag, Berlin.
- [20] Makarenkov, O. & Lamb, J.S. [2006] “Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems: A survey”. *Physica D* **241**, pp. 1826–1844.
- [21] Meinhardt, H. [1982] *Models of biological pattern formation*. Academic Press.
- [22] Meinhardt, H. [2009] *The algorithmic beauty of sea shells*. Springer.
- [23] Peixoto, M. C. & Peixoto, M. M. [1959] “Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions”, *An. Acad. Bras. Ciencias*, **31**.
- [24] Sotomayor, J. [1974] “Structural stability of manifolds with boundary”, *Global analysis and its applications*, **Vol. III**, International Atomic Energy Agency, Vienna.

-
- [25] Teixeira, M. A. [1977] “Generic bifurcation in manifolds with boundary”. *J. of Differential Equations* **Vol. 25**, pp. 65–89.
- [26] Thota, P. & Dankowicz, H. [2006] “Continuous and discontinuous grazing bifurcations in impacting oscillators”. *Physica D* **214**, pp. 187–197.