"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Posgrado en Matemáticas

La Geometría de Poisson de los Sistemas Dinámicos Sesqui-Producto y un Enfoque Hamiltoniano Perturbativo

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Doctor en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Guillermo Dávila Rascón

Director de Tesis: Dr. Yuri M. Vorobiev

Hermosillo, Sonora, México, 3 de Octubre de 2008.

SINODALES

Dr. Rubén Flores Espinoza
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Xavier Gómez-Mont Ávalos
Centro de Investigación en Matemáticas, A. C., Guanajuato, México.

Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Carlos Villegas Blas
Instituto de Matemáticas, UNAM, Cuernavaca, México.

Dr. Yuri Mihailovich Vorobiev
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Resumen

En este trabajo se presenta un enfoque geométrico-diferencial para el estudio de sistemas dinámicos sesqui-producto (o sistemas dinámicos proyectables) en espacios fibrados triviales, en el contexto de la dinámica Hamiltoniana y la teoría Hamiltoniana de perturbaciones. La dinámica proyectable surge en varios problemas de la teoría de sistemas Hamiltonianos tales como sistemas con simetrías y la reconstrucción de fases, la linealización de sistemas Hamiltonianos, el método de los promedios y las formas normales. En esta situación, presentamos dos tipos de resultados:

(I) Se formula un criterio sobre la existencia de estructuras Hamiltonianas para una clase amplia de sistemas dinámicos, los sistemas sesqui-producto, en un espacio fase del tipo (*variedad simpléctica*) $\times$ (*variedad de Poisson*), en términos de la solubilidad de una ecuación lineal no-homogénea (ecuación homológica), con respecto a una familia de estructuras de Poisson no-lineales (degeneradas), parametrizadas por 1-formas con valores vectoriales. Se da una interpretación geométrica de esta ecuación por medio de conexiones de Ehresmann invariantes en un haz fibrado trivial, de Poisson. La familia de estructuras de Poisson (no-lineales) que se introducen, representa una clase especial en el contexto del llamado acoplamiento de Poisson. Aplicamos a esta clase de corchetes de Poisson el procedimiento de acoplamiento mínimo para derivar una familia 1-paramétrica de estructuras Hamiltonianas. Se establece la equivalencia entre estas estructuras de Poisson por medio de una versión contravariante del método de homotopía de Moser. Estos resultados se aplican a la construcción de estructuras Hamiltonianas para una clase importante de sistemas sesqui-producto asociadas con familias de sistemas de Lie periódicos.

(II) Se desarrolla un nuevo enfoque perturbativo para una clase de sistemas Hamiltonianos perturbados en espacios fase cuya estructura de Poisson depende, de manera singular, de un parámetro pequeño. La característica típica en esta situación es que los sistemas no-perturbados asociados, los cuales son sistemas sesqui-producto, no son Hamiltonianos relativos a la estructura de Poisson en el espacio fase original. Aquí, la aplicación de métodos estándar tales como la técnica de la función generadora o el de la transformada de Lie no son apropiados. Además, en el contexto de los sistemas casi-integrables, se estudia con bastante detalle una clase de sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad sobre cilindros de órbitas y se derivan dos tipos distintos de normalización para este tipo de sistemas. Finalmente, los resultados generales que se obtienen los aplicamos a las ecuaciones de Euler en $\mathfrak{so}(4)$ para derivar la propiedad de casi-integrabilidad de estos sistemas alrededor de órbitas co-adjuntas singulares.

Abstract

We present a differential-geometric approach for the study of skew-product dynamical systems (or projectable systems) on trivial fibered spaces, in the framework of the Hamiltonian dynamics and the theory of Hamiltonian perturbations. The projectable dynamics appears in various problems of the theory of Hamiltonian systems, for example, systems with symmetries and the reconstruction of phases, the linearization of Hamiltonian systems, averaging methods and normal forms. In this context, two kind of results are presented:

(I) A criterion for the existence of Hamiltonian structures is formulated for a wide class of (nonlinear) dynamical systems, the so called skew-product systems, on a phase space of the type (*symplectic manifold*) $\times$ (*Poisson manifold*), as the solvability of a linear non-homogeneous equation (homological equation), relative to a family of (degenerate) nonlinear Poisson structures parametrized by vector valued 1-forms. We provide a geometric interpretation of this equation in terms of invariant Ehresmann connections on a Poisson fiber bundle. The introduced family of Poisson structures represents a special class of nonlinear coupling Poisson structures. The minimal coupling procedure is applied to this class of Poisson brackets in order to derive a 1-parameter family of Hamiltonian structures. The equivalence between these Poisson structures is stated by using a contravariant version of Moser's homotopy method. These results are applied in order to construct Hamiltonian structures for an important class of skew-product systems associated with families of periodic Lie systems.

(II) A new perturbative approach is developed for a class of perturbed Hamiltonian systems on phase spaces whose Poisson structure has a singular dependence on a small parameter. The typical feature in this situation is that, the associated unperturbed systems, which are skew-product systems, are not Hamiltonian relative to the original phase space Poisson structure. Here the application of standard methods such as the generating function technique or Lie transform method are not effective. Moreover, in the context of near-integrable systems, we thoroughly study a class of two degrees of freedom Hamiltonian systems over orbit cylinders and derive two different types of normalization for this kind of systems. Finally, we apply the obtained general results to the case of Euler equations on $\mathfrak{so}(4)$ in order to derive the near-integrability property of these systems in the neighborhood of a singular co-adjoint orbit.

Contenido

Introducción

El objetivo general de este trabajo es presentar un enfoque unificado sobre la formulación Hamiltoniana de los sistemas dinámicos proyectables en haces fibrados triviales, en términos geométrico-diferenciales. Al mismo tiempo, se verá la utilidad de este enfoque con algunas aplicaciones a la teoría Hamiltoniana de perturbaciones y las formas normales. Para tal fin, utilizaremos las modernas herramientas que nos proporciona la geometría de Poisson.

De esta manera, debido a los métodos utilizados, este trabajo se relaciona con varias áreas importantes de investigación actual en la teoría de sistemas dinámicos y la física–matemática, tales como la mecánica Hamiltoniana, la teoría de sistemas completamente integrables, la teoría de perturbaciones, los sistemas casi-integrables y la teoría KAM. En todas estas áreas, las principales herramientas de estudio provienen de la geometría simpléctica y, más generalmente, de la geometría de Poisson. Por sí misma, ésta última ha sido una área de investigación intensa durante los últimos 35 años y también debido a sus múltiples conexiones con una diversidad de otros campos, tanto de las propias matemáticas como de la física.

Podemos decir que los orígenes de la geometría de Poisson se remontan hacia principios del siglo XIX cuando el corchete de Poisson clásico

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial q}, \tag{1}$$

fue introducido por Poisson en su estudio de las ecuaciones de movimiento de la mecánica celeste. Unos treinta años más tarde, Jacobi pudo reconocer la importancia de estos corchetes y al estudiar sus propiedades algebraicas descubrió su famosa "identidad de Jacobi". Alrededor de 1833, Hamilton observó que usando los corchetes de Poisson, las ecuaciones de movimiento para varios sistemas de la mecánica y de la óptica podían escribirse en la forma

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{2}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{3}$$

donde H es una función suave que, en la mayoría de los casos, representa la energía total del sistema. Un sistema de $2n$ ecuaciones expresado en la forma (2), (3), se llama un sistema Hamiltoniano y una de las ventajas de esta formulación es que la función H es una integral de movimiento del sistema. En este caso, el corchete en (1) es no-degenerado y proviene, esencialmente, de una estructura simpléctica canónica en un espacio vectorial. Sin embargo, en el caso general, el formalismo Hamiltoniano tiene lugar en variedades de Poisson cuya estructura está definida por un corchete de Poisson que es, usualmente, degenerado.

Un paso importante en el estudio de este tipo de estructuras fue dado por Lie alrededor de 1890, ya que fue el primero en investigar corchetes de Poisson degenerados y estudiar su geometría. Lie consideró en sus investigaciones el caso más simple, a saber, el de las estructuras lineales de Poisson; es decir, corchetes de Poisson en un espacio vectorial para los cuales el corchete de las funciones coordenadas resulta ser una función lineal. Estas son las famosas estructuras de Lie–Poisson, redescubiertas por Berezin en los 1960s. Posteriormente y durante las tres últimas décadas, la geometría de Poisson ha llegado a ser un activo campo de investigación que ha incidido en varias áreas, por ejemplo, las álgebras de Lie infinito-dimensionales (Kirillov [1976]); la mecánica de partículas y medios continuos (Arnold, Kozlov y Neĭshtadt [1993], Lichnerowicz [1977], Marsden y Weinstein [1982]); la teoría de singularidades (Varchenko y Givental [1982]); sistemas completamente integrables (Gelfand y Dikii [1978], Kostant [1979]); cuantización semiclásica (Karasev y Maslov [1993]), etcétera.

En términos algebraicos, un corchete de Poisson en una variedad suave M se define como un corchete de Lie $\{\,,\}$ en el espacio de funciones $C^\infty(M)$, que satisface la regla de Leibniz. El campo vectorial Hamiltoniano X_H de una función $H \in C^\infty(M)$ está unívocamente determinado por la condición: La derivada de Lie a lo largo de X_H es igual al operador adjunto $\{H,\cdot\}$. El sistema dinámico que corresponde al campo vectorial X_H da lugar a la dinámica Hamiltoniana en M y el par $(M,\{\,,\})$ es llamado una variedad de Poisson, terminología que fue acuñada por Lichnerowicz [1977]. Una definición equivalente a la anterior, pero en términos geométricos, es la siguiente: Una estructura de Poisson es un par (M,Ψ) que consiste de una variedad suave M y un campo de bi-vectores Ψ en M tal que se satisface la identidad de Jacobi para el corchete de Schouten, $[\Psi,\Psi] = 0$. En este caso, Ψ es llamado un tensor de Poisson o también se le denomina la estructura de Poisson en la variedad M. La relación entre el tensor de Poisson Ψ y el corchete de Poisson $\{\,,\}$ está dada por $\{F,G\} = \Psi(\mathrm{d}F,\mathrm{d}G)$. Por lo tanto, la identidad de Jacobi puede interpretarse como una ecuación diferencial no-lineal de primer orden para Ψ:

$$\underset{(I,J,L)}{\mathfrak{S}}\, \Psi^{KI}(y)\frac{\partial \Psi^{JL}}{\partial y^K}(y) = 0. \tag{4}$$

El tensor de Poisson es degenerado si el rango de Ψ es menor que la dimensión de M, $\dim(M)$. Un punto singular de la estructura de Poisson Ψ está determinado por la siguiente condición: El rango de Ψ no es localmente constante alrededor de dicho punto. En consecuencia, una variedad de Poisson es, usualmente, degenerada y admite puntos singulares. Tales variedades de Poisson generales ocurren como los espacios fase para las ecuaciones de movimiento de las partículas clásicas y también son relevantes para las álgebras de observables en la mecánica cuántica, al igual que para álgebras no-conmutativas más generales. La motivación para este formalismo se debe, en parte, al descubrimiento de muchos modelos físicos que provienen de los sistemas mecánicos, especialmente, sistemas que admiten grupos de simetrías o sistemas con restricciones.

Es en este contexto de la geometría de Poisson en el que formulamos uno de los problemas principales que abordamos en este trabajo y que usualmente se le conoce como el problema de Hamiltonización, el cual está relacionado con la siguiente pregunta: ¿Son las ecuaciones de movimiento de un sistema, Hamiltonianas en algún sentido? En otras palabras, dado un sistema arbitrario de ecuaciones diferenciales ordinarias, ¿admite este sistema una formulación Hamiltoniana? Más precisamente, si (M, X) es un sistema dinámico, el problema de Hamiltonización consiste en tratar de encontrar un par (Ψ, H) formado por una estructura de Poisson Ψ en M y una función $H \in C^{\infty}(M)$ tal que el campo vectorial X sea Hamiltoniano con respecto a Ψ, con función Hamiltoniana H, es decir,

$$X = X_H \equiv -\Psi^{JI} \frac{\partial H}{\partial y^I} \frac{\partial}{\partial y^J}. \tag{5}$$

Por lo tanto, desde un punto de vista analítico, el problema de Hamiltoniazación se reduce a la solubilidad del conjunto de ecuaciones diferenciales no-lineales (4) para Ψ, junto con la condición de compatibilidad (5) en la cual, la incógnita es la función H para un campo vectorial X, dado de antemano. Notemos que localmente, en una vecindad de un punto no-singular de X, la solubilidad de (4) y (5) se sigue del teorema de rectificación. Sin embargo, en el planteamiento semi-local, alrededor de una subvariedad invariante de X, de dimensión distinta de cero, la pregunta sobre la Hamitonización de X resulta ser no-trivial. Por otro lado, el problema de Hamiltonización, en su formulación global, viene a ser bastante complicado debido a que su naturaleza geométrica está relacionada a la foliación simpléctica singular de la estructura de Poisson Ψ y a la topología del espacio de órbitas de X.

El problema de dar una formulación Hamiltoniana para un sistema arbitrario de n ecuaciones diferenciales de primer orden es bastante antiguo y desde Lie [1877] se sabe que, al menos localmente, el problema de Hamiltonización tiene una respuesta afirmativa. Posteriormente, Koenigs [1895] obtiene resultados análogos a los de Lie y los métodos de ambos se basan en el conocimiento previo de n integrales de movimiento, las cuales forman un conjunto completo de soluciones del sistema. Sus resultados se resumen en el Teorema de Lie-Koenigs, llamado así por Whittaker [1937]. Sin embargo, una formulación Hamiltoniana no-global resulta ser de poca utilidad práctica y, salvo por algunas aplicaciones a la mecánica (Kerner [1965]), el problema permaneció olvidado durante bastante tempo. Perlick [1992] investiga el problema desde una perspectiva geométrico-diferencial global y establece que un sistema dinámico admite una formulación Hamiltoniana si el espacio fase está equipado con una estructura simpléctica, asumiendo que el campo vectorial que define el sistema es completo. Otra respuesta al problema de Hamiltonización es presentada por Hojman [1996] y su método requiere de la existencia de un campo vectorial adicional (una simetría) y de una integral de movimiento del sistema, que se relacionan por medio de ciertas ecuaciones con el campo asociado al sistema dinámico. Sin embargo, el planteamiento presentado por Hojman no es global y Alvarado-Flores et al. [2006] generalizan sus resultados por medio de técnicas geométrico-diferenciables, lo que también les permite obtener respuestas en los planteamientos de Lie-Koenigs y de Perlick.

Por otro lado, un problema que es ampliamente conocido en la mecánica clásica, consiste en establecer una equivalencia entre las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana. En el caso de Lagrangianos degenerados, la derivación de una formulación Hamiltoniana lleva a un problema no-trivial sobre la relación entre estructuras pre-simplécticas y de Poisson (Gotay et al. [1980], Dubrovin et al. [1993]). En este contexto, otra pregunta interesante es acerca de la construcción de una estructura Hamiltoniana a partir de una ya dada. Para sistemas completamente integrables, esta cuestión ha sido estudiada por Bogoyavlensky [1983]. Aparte de su interés intrínseco, otra motivación para el problema de Hamitoniazación es la formulación Hamiltoniana de un buen número de ecuaciones bastante conocidas de la física-matemática, por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell-Vlasov (Marsden y Weinstein [1982]); las ecuaciones de Wong para una partícula clásica en una campo de Yang–Mills (Montgomery [1984]); las ecuaciones covariantes BMT para una partícula relativista cargada, con spin (Bette [1993]); el movimiento del cuerpo rígido (Kozlov [1996], Borisov y Mamaev [1999]); sistemas de Ermakov (Haas [2001]), etcétera.

Para un sistema dinámico (M, X) dado, una solución del problema de Hamiltonización puede no ser única. Un planteamiento razonable para tratar de obtener soluciones de este problema es considerar una clase de sistemas dinámicos en espacios fase con ciertas características específicas, fijadas de antemano, y tratar de buscar estructuras Hamiltonianas en una clase adecuada de estructuras de Poisson que puedan ser compatibles. En este sentido, una clase importante de sistemas está dado por la dinámica proyectable en el espacio total M de una haz fibrado de Poisson $\pi : M \to B$. Un campo vectorial proyectable X en M está determinado por la siguiente condición: X desciende a un campo vectorial v en la base B bajo la proyección π. En las aplicaciones, tales sistemas dinámicos proyectables usualmente aparecen como aproximaciones a las ecuaciones reales de movimiento (por ejemplo, dinámica de spin y movimiento del cuerpo rígido). Más aún, la dinámica proyectable es un ingrediente del método de reducción para sistemas Hamiltonianos con simetrías (Marsden, Montgomery y Ratiu [1990]). Un mecanismo en el que aparecen los sistemas proyectables en haces vectoriales simplécticos o de Poisson son los llamados sistemas de primera variación, los cuales están determinados por el procedimiento de linealización para la dinámica Hamiltoniana en subvariedades invariantes. En el caso simpléctico, enfoques geométricos para la Hamitonización de sistemas de primera variación, basados en la teoría de conexiones lineales simplécticas, han sido desarrollados en varios artículos: (Marsden, Ratiu y Raugel [1991], Karasev y Vorobiev [1998], Vorobiev [2000], Flores-Espinoza y Vorobiev

[2000]).

En el presente trabajo, abordamos el problema de Hamitonización para sistemas sesqui-producto (no-lineales) que representan la dinámica proyectable en haces de Poisson triviales en los que la base es simpléctica. En este caso partimos de una variedad $M = B \times P$ la cual es el producto de una variedad simpléctica $(B, \{\,,\}_B)$ y una variedad de Poisson $(P, \{\,,\}_P)$ y consideramos un sistema sesqui-producto en M, esto es un sistema que se expresa en la forma

$$\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} = \{f, \xi^i\}_B, \tag{6}$$
$$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} = \{F_\xi, x^\alpha\}_P, \tag{7}$$

donde $\xi = (\xi^i) \in B$, $x = (x^\alpha) \in P$, $f : B \to \mathbb{R}$, $F : M \to \mathbb{R}$ son funciones suaves dadas y $F_\xi(x) = F(\xi, x)$. El campo vectorial $\mathcal{V}$ de (6), (7), es proyectable bajo la proyección canónica $\pi : B \times P \to B$ y desciende al campo vectorial Hamiltoniano v_f de f en B. El mecanismo sesqui-producto nos proporciona una relación entre la dinámica dependiente del tiempo y el sistema autónomo. Fijando una trayectoria $\xi(t)$ de v_f, el sistema (7) viene a ser un un sistema Hamiltoniano dependiente del tiempo en la fibra $(P, \{\,,\}_P)$ con Hamiltoniano dependiente del tiempo $F_{\xi(t)}$. Por lo tanto, uno puede asociar a (6), (7) una familia generalizada de sistemas Hamiltonianos dependientes del tiempo, los cuales están parametrizados por los elementos del espacio de órbitas de v_f.

Una primera observación que debemos señalar en el contexto del problema de Hamiltonización es que el sistema (6), (7) no es Hamiltoniano con respecto a la estructura natural de Poisson Π_0 en M, la cual está determinada por el producto directo de los corchetes $\{\,,\}_B$ y $\{\,,\}_P$, excepto para el caso trivial cuando el campo vectorial Hamiltoniano de F_ξ en $(P, \{\,,\}_P)$ es independiente de ξ. Sin embargo, al mismo tiempo, el flujo de $\mathcal{V}$ respeta la foliación simpléctica de la estructura producto de Poisson en M, la cual consiste de la unión de las variedades producto $B \times \mathcal{O}$, donde $\mathcal{O}$ representa cualesquiera de las hojas simplécticas de $(P, \{\,,\}_P)$. Cada subvariedad $B \times \mathcal{O}$ es invariante bajo el flujo del sistema (6), (7). De esta manera, nuestro objetivo es buscar un “nuevo” corchete de Poisson $\{\,,\}_M$ en el espacio total M de tal manera que esta estructura nos proporcione una formulación Hamiltoniana para el sistema (6), (7),

$$\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} = \{H, \xi^i\}_M, \tag{8}$$
$$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} = \{H, x^\alpha\}_M, \tag{9}$$

De acuerdo con las características descritas del sistema (6), (7), es natural buscar el corchete $\{\,,\}_M$ en una clase de estructuras de Poisson que sean compatibles con la foliación $B \times \mathcal{O}$. Decimos que un corchete de Poisson $\{\,,\}_M$ en M es compatible si su tensor de Poisson Ψ admite una descomposisción

$$\Pi = \widehat{\Pi} + \Psi, \tag{10}$$

donde Ψ es el tensor de Poisson de $\{\,,\}_P$ y $\widehat{\Pi}$ es un campo de bi-vectores en M que satisface las condiciones

$$\det\big[\,\widehat{\Pi}(d\xi^i, d\xi^j)\,\big] \neq 0, \tag{11}$$

$$\operatorname{rank}\widehat{\Pi} = \dim B \tag{12}$$

De esta manera, cada estructura compatible de Poisson es tangente a la foliación $B \times \mathcal{O}$. Claramente, la estructura de Poisson producto Π_0 en M pertenece a la clase de estructuras compatibles, donde el primer factor $\widehat{\Pi}$ en (10) es el "*pull-back*" bajo π de la estructura de Poisson no-degenerada $\{\,,\}_B$. Por lo tanto, las estructuras de Poisson compatibles pueden considerarse como "deformaciones" de Π_0 que preservan la foliación característica $B \times \mathcal{O}$.

La naturaleza geométrica de las estructuras de Poisson compatibles se puede explicar en el contexto del método de acoplamiento de Poisson (Vorobiev [2001]). Este método presenta una manera geométrica de cómo construir estructuras de Poisson (i.e. cómo resolver la identidad de Jacobi) en el espacio total de un haz fibrado de Poisson a partir de algunos datos geométricos que incluyen una conexión de Ehresmann y una estructura de Poisson por fibras. Tales estructuras son llamadas estructuras de acoplamiento de Poisson, y en general, tienen singularidades que provienen de los efectos de la curvatura. Aplicando el procedimiento de acoplamiento se obtiene una factorización de la identidad de Jacobi, la cual se descompone en una serie de ecuaciones lineales para los datos geométricos, las llamadas condiciones de integrabilidad.

En el caso de los haces simplécticos, el método de acoplamiento fue introducido por Sternberg [1977] y posteriormente desarrollado por Guillemin, Lerman y Sternberg [1996]. El procedimiento de acoplamiento fue extendido para haces vectoriales de Poisson especiales (haces co-adjuntos asociados con haces G-principales) por Montgomery, Marsden y Ratiu [1984] en el contexto de la formulación Hamiltoniana de las ecuaciones de Wong. Para haces de Poisson generales, el método de acoplamiento fue desarrollado por Vorobiev [2001] para la geometría de Poisson semilocal alrededor de una hoja simpléctica. Finalmente, Vaisman [2004] ha observado que la noción de la estructura de acoplamiento de Poisson también se puede introducir para las variedades foliadas.

El punto importante aquí es que todo tensor de Poisson Ψ, compatible con Π en (10) es una estructura de acoplamiento de Poisson en el haz trivial de Poisson $\pi : B \times P \to B$, cuya conexión de Ehresmann intrínseca Γ está determinada de manera única por el campo de bi-vectores $\widehat{\Pi}$. Al variar Γ se obtienen varias estructuras de Poisson compatibles en M. Sin embargo, de acuerdo con las condiciones de integrabilidad, la conexión Γ no es arbitraria y debe, particularmente, respetar la estructura de Poisson Ψ, en cada fibra. La idea aquí es elegir Γ de una manera específica, de forma tal que satisfaga las condiciones de integrabilidad automáticamente. En este trabajo, y siguiendo este argumento, introducimos una nueva clase de estructuras de Poisson compatibles Π_Q en M las cuales están parametrizadas por 1-formas horizontales arbitrarias Q en M; estas nuevas estructuras son llamadas Q-estructuras de Poisson. La conexión intrínseca Γ de Π_Q está definida precisamente por Q. Usando el cálculo diferencial en variedades producto, damos una derivación directa de las Q-estructuras de Poisson, la cual es independiente de las condiciones de integrabilidad. Formulamos un criterio para la Hamiltonización de los sistemas sesqui-producto (8), (9) en la clase de Q-estructuras de Poisson y discutimos su significado geométrico. Estos resultados proporcionan una generalización no-lineal del criterio de Hamiltonización para ecuaciones lineales de Euler en haces triviales de Lie–Poisson obtenidos en Vorobiev [2005].

Una de las motivaciones del problema de Hamiltonización para los sistemas sesqui-producto (8), (9) está relacionado con la formualción perturbativa no-estándar siguiente: Consideremos la variedad producto $M = B \times P$ equipada con una estructura de Poisson dependiente de un parámetro Π_0^ε que corresponde al producto directo de $\{\,,\}_B$ y el corchete de Poisson reescalado $\frac{1}{\varepsilon}\{\,,\}_P$ en P. En el espacio fase (M, Π_0^ε) estudiamos un sistema Hamiltoniano con Hamiltoniano de la forma

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\xi, x) = f(\xi) + \varepsilon F(\xi, x) + O(\varepsilon^2), \tag{13}$$

para valores pequeños de un parámetro $\varepsilon > 0$. En el límite cuando $\varepsilon \to 0$, la dinámica Hamiltoniana que corresponde a $\mathcal{H}_\varepsilon$,

$$\dot{\xi}^i = \{f, \xi^i\}_B + \varepsilon\{F, \xi^i\}_B + O(\varepsilon^2), \tag{14}$$

$$\dot{x}^\alpha = \{F, x^\alpha\}_P + O(\varepsilon), \tag{15}$$

coincide precisamente con el sistema sesqui-producto (8), (9). Por lo tanto, el campo vectorial Hamiltoniano $X_{\mathcal{H}_\varepsilon}$ de (14), (15) es una perturbación del campo vectorial $\mathcal{V}$ del sistema sesqui-producto. En este caso trabajamos con un modelo Hamiltoniano cuyo sistema límite no es Hamiltoniano con respecto a la estructura original de Poisson. Este efecto proviene de la dependencia singular de la estructura de Poisson Π_0^ε en $\varepsilon = 0$. Podemos trasladar esta singularidad al Hamiltoniano por medio del reescalamiento $(\mathcal{H}_\varepsilon, \Pi_0^\varepsilon) \mapsto (\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{H}_\varepsilon, \varepsilon\Pi_0^\varepsilon)$ el cual preserva al sistema Hamiltoniano (14), (15). Físicamente, para $f \neq$ const, esta situación corresponde a la dinámica de variables lentas $\xi \in B$ y variables rápidas $x \in P$ en los niveles altos de la energía (o, para una evolución larga en el tiempo). En el caso cuando no se tienen dinámicas en la base ($v_f = 0$), se llega a la situación adiabática (Karasev [1990]).

Estos modelos perturbados fueron estudiados en Vorobiev [2005] en el caso en que $P = \mathfrak{g}^*$ es el espacio de Lie–Poisson de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y el sistema sesqui-producto es un sistema lineal de Euler en el haz trivial $B \times \mathfrak{g}^*$ (F es una función lineal en las variables rápidas x). En este trabajo consideramos cualquier tipo de estructuras de Poisson (no-lineales) Ψ, que admiten puntos singulares y funciones F con dependencia no-lineal en x. Nuestro objetivo es escribir el sistema (14), (15) en una formulación Hamiltoniana perturbativa. La idea es separar este problema en dos etapas. En la primera de ellas, consideramos una versión del problema de

Hamiltonización para (6), (7), que depende de un parámetro, introduciendo una familia de Q-estructuras de Poisson Π_Q^ε que dependen de ε. Aquí usamos la idea de acoplamiento débil (Guillemin, Lerman y Sternberg [1996], Dávila–Rascón y Vorobiev [2008]), lo cual nos permite reducir los efectos de la curvatura y definir la estructura de Poisson Π_Q^ε en todo el espacio M para ε suficientemente pequeño y asumiendo propiedades topológicas adecuadas para M. En la segunda etapa, considerando el sistema sesqui-producto (6), (7) como un sistema Hamiltoniano con respecto a la Q-estructura de Poisson Π_Q^ε, buscamos una transformación cercana a la identidad $\Phi_\varepsilon : M \to M$ la cual nos proporciona un isomorfismo de Poisson

$$(\Phi_\varepsilon)^* \Pi_0^\varepsilon = \Pi_Q^\varepsilon, \tag{16}$$

para $\varepsilon \ll 1$. La construcción de Φ_ε se obtiene por medio de una versión contravariante del método de homotopía de Moser para estructuras de Poisson (Vorobiev [2001], [2005]) y que está basado en la siguiente propiedad: los campos de bi-vectores Π_0^ε y Π_Q^ε se pueden conectar por medio de una curva en el conjunto de estructuras de Poisson compatibles en M. Como consecuencia de esto, obtenemos que el sistema perturbado transformado $(\Phi_\varepsilon)^* X_{\mathcal{H}_\varepsilon}$ y el sistema sesqui-producto $\mathcal{V}$ son Hamiltonianos con respecto a la misma estructura de Poisson Π_Q^ε, donde $\mathcal{V}$ juega el papel de un sistema no-perturbado $(\Phi_\varepsilon)^* X_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \mathcal{V} + O(\varepsilon)$. Podemos llamar a Φ_ε una transformación de normalización no-canónica para el sistema (14), (15). Si el sistema Hamiltoniano no-perturbado $(M, \Pi_Q^\varepsilon, \mathcal{V})$ es integrable, entonces podemos aplicar los resultados de tipo KAM (Broer, Huitema y Sevryuk [1996]) para obtener información del sistema original (14), (15) cuando $\varepsilon \to 0$. Este enfoque perturbativo nos permite extender los resultados obtenidos por (Vorobiev [2005]) para haces vectoriales de Lie–Poisson $B \times \mathfrak{g}^*$, en haces triviales de Poisson en general.

Hasta aquí hemos discutido el contexto general en el cual se ubica este trabajo. Más concretamente, presentamos resultados en las siguientes direcciones:

1. Conexiones invariantes para la dinámica proyectable (no-lineal) en haces fibrados triviales.

2. Reducibilidad de sistemas sesqui-producto.

3. Derivación de Q-estructuras de Poisson en $M = B \times P$.

4. Criterios de existencia para estructuras Hamiltonianas de sistemas sesqui-producto (6), (7) en la clase de Q-estructuras de Poisson y su significado geométrico.

5. Estructuras Hamiltonianas para sistemas sesqui-producto asociados con familias de sistemas Hamiltonianos periódicos dependientes del tiempo en una variedad de Poisson.

6. Estructuras Hamiltonianas para sistemas de Lie sobre un 2-cilindro.

7. Equivalencia de Q-estructuras de Poisson por medio del método de homotopía (versiones semilocal y débil).

8. Construcción de una transformación de normalización, no-canónica, para sistemas Hamiltonianos de la forma (14), (15).

9. Normalización de la dinámica Hamiltoniana con dos grados de libertad con variables lentas y rápidas para evolución en tiempos largos.

10. Formas normales de primer orden para sistemas de Euler en $\mathfrak{so}(4)^*$ alrededor de órbitas co-adjuntas degeneradas.

Describimos a continuación la forma en la cual se ha organizado este trabajo.

En el Capítulo 1 recordamos las nociones básicas de la teoría de variedades de Poisson y se introducen las principales herramientas de esta teoría que utilizaremos en los capítulos subsiguientes. Asimismo, se presentan varias de las fórmulas básicas del cálculo con corchetes de Schouten que serán necesarias para el desarrollo de algunos aspectos del presente trabajo. El material aquí presentado se puede consultar en la mayoría de los textos en los que se estudia la geometría de Poisson, entre los cuales citamos los siguientes: Dufour y Zung [2005], Karasev y Maslov [1993], Marsden y Ratiu [1994] y Vaisman [1994].

En el Capítulo 2 se introducen los conceptos básicos de la teoría de conexiones de Ehresmann ya que uno de nuestros objetivos en esta parte es estudiar el problema de la existencia de conexiones invariantes de Ehresmann para la dinámica proyectable en haces fibrados triviales. Más aún, de especial interés es el caso de la invarianza de una conexión de Poisson en un haz trivial $\pi : B \times P \to B$, donde P está equipada con una estructura de Poisson. Debemos señalar que las conexiones invariantes son una de las principales herramientas geométricas para estudiar la dinámica proyectable en el contexto Hamiltoniano.

Los principales resultados que presentamos en este capítulo son el Teorema 2.13 y la Proposición 2.18, los cuales nos proporcionan criterios de invarianza para una conexión de Poisson y de reducibilidad de sistemas de Lie, respectivamente. Por otra parte, para investigar la invarianza de conexiones de Ehresmann utilizamos los llamados campos de Higgs que inducen una conexión de Ehresmann y un campo vectorial proyectable. La noción de campo de Higgs fue utilizada por Mason y Woodhouse [1996] para el caso de haces vectoriales en el contexto de la teoría de los sistemas integrables. Este concepto nos sirve para caracterizar una conexión invariante (Lema 2.7) ya que el campo de Higgs asociado a una conexión es una obstrucción para su invarianza. Más aún, fijando una conexión, a través de su campo de Higgs podemos plantear el problema de la existencia de conexiones invariantes para un campo vectorial proyectable en términos de la solubilidad de ciertas ecuaciones lineales no-homogéneas y obtener todas las conexiones invariantes que admite esa dinámica proyectable. Esto se demuestra en el Lema 2.9. Sin embargo, si la conexión es plana, en la Proposición 2.11 se prueba que las ecuaciones lineales mencionadas toman la forma de una ecuación generalizada de tipo Lax y las conexiones que admite el campo vectorial proyectable se expresan de una forma particular. En el caso de una conexión de Poisson, se demuestra en la Proposición 2.13 que la existencia de conexiones invariantes para la dinámica proyectable, en una clase especial de campos vectoriales proyectable, está caracterizada por la existencia de formas horizontales que satisfacen una ecuación lineal no-homogénea, módulo una 1-forma que toma valores en el conjunto de las funciones de Casimir del corchete de Poisson.

Otras de las nociones importantes que se presentan en este capítulo son las de transformación gauge Hamiltoniana y reducibilidad (no-lineal) de sistemas sesqui-producto. Éstas tienen implicaciones relevantes para los sistemas de Lie en una variedad producto $B \times P$ ya que, bajo ciertas condiciones, es posible probar que este tipo de sistemas es reducible, es decir, por medio de una transformación gauge Hamiltoniana tales sistemas se reducen a una forma constante. Este es precisamente el contenido de la Proposición 2.18.

En el Capítulo 3 se establecen varios de los principales resultados de este trabajo ya que es en esta parte donde se estudia el problema de Hamiltonización para la dinámica proyectable en haces fibrados triviales $\pi : M \to B$, donde el espacio total es de la forma $M = B \times P$, con (B, ω) una variedad simpléctica y (P, Ψ) una variedad de Poisson. Aquí, los resultados más relevantes se enuncian en el Teorema 3.1, en el Teorema 3.6 y en el Teorema 3.7.

Para estudiar el problema de Hamiltonización en el contexto descrito anteriormente se introduce la noción de Q-estructura de Poisson en el espacio fase M, la cual está determinada por un campo de bi-vectores Π_Q, parametrizado por una 1-forma horizontal Q en M. En el Teorema 3.1 se demuestra que Π_Q es un tensor de Poisson que coincide con una estructura de Poisson en un dominio adecuado de M, la cual está definida por un corchete $\{\,,\}_M$, que a su vez, está determinado por los datos geométricos (ω, Ψ, Q). Aquí, la idea principal es resolver la identidad de Jacobi para Π_Q.

Por medio de estas estructuras y utilizando el método de acoplamiento de Poisson formulamos en el Teorema 3.6 un criterio para la Hamiltonización de los sistemas sesqui-producto en M, en términos de soluciones para una cierta ecuación lineal no-homogénea. Usando los resultados del Capítulo 2 se ve en el Teorema 3.7 que estas soluciones son 1-formas horizontales Q en M que inducen conexiones de Ehresmann invariantes para el campo vectorial proyectable de un sistema dinámico sesqui-producto. Lo anterior nos permite resolver el problema de Hamiltonización para estos sistemas en algunos casos concretos: Si $M = B \times \mathfrak{g}^*$, la dinámica proyectable correspondiente está dada por un sistema de Euler lineal sobre B y para soluciones Q en una clase especial de 1-formas horizontales se obtienen Q-estructuras de Poisson Π_Q tales que este tipo de sistemas resultan ser Hamiltonianos (Proposición 3.8). Igualmente en el caso de las Q-estructuras de Poisson Π_Q^ε que se obtienen del acoplamiento débil al reescalar los datos geométricos $(Q, \Psi) \mapsto (\varepsilon Q, \varepsilon^{-1}\Psi)$ por medio del parámetro $\varepsilon \neq 0$. En esta situación, el Teorema 3.10 nos da un criterio para el problema de Hamiltonización de la dinámica proyectable. Finalmente, también se discuten algunos casos especiales con respecto a la solubilidad de la ecuación lineal no-homogénea del Teorema 3.6, para los cuales es posible obtener soluciones explícitas que nos proporcionan estructuras de Poisson específicas que resuelven el problema de Hamiltonización. Tal es el caso de familias de sistemas Hamiltonianos que dependen del tiempo, en el caso general (Proposición 3.21) y en el caso periódico (Proposición 3.26), y familias de sistemas de Lie periódicos (Teorema 3.27).

En el Capítulo 4, los resultados principales vienen dados en los Teoremas 4.9, 4.13 y 4.14. En esta parte se introduce una versión contravariante del método de homotopía de Moser [1965] para Q-estructuras de Poisson, la cual ha sido propuesta en Vorobiev [2001], [2005], [2005] y es una herramienta importante en varias partes de este trabajo.

Si M es una variedad suave en la que están definidos dos campos suaves de bi-vectores, digamos Π y $\widetilde{\Pi}$, y asumiendo que es posible conectar estos dos campos tensoriales por medio de una familia Π_λ de campos de bi-vectores en M, el método de homotopía consiste en encontrar un difeomorfismo ϕ en M tal que $\phi^*\widetilde{\Pi} = \Pi$. En la Proposición 4.1 se prueba que tal difeomorfismo viene dado por el flujo a tiempo 1 de un campo vectorial dependiente del tiempo en M que satisface cierta ecuación homológica. Este resultado es utilizado para estudiar el problema de la equivalencia de Q-estructuras de Poisson, dependientes de un parámetro ε, en una variedad producto $M = B \times P$ para un tensor de Poisson en P reescalado, $\varepsilon^{-1}\Psi$. En esta situación, dadas dos estructuras de Poisson Π^ε_Q y $\Pi^\varepsilon_{\widetilde{Q}}$ en M que se conectan por una trayectoria suave de Q-estructuras de Poisson ε-dependientes en M, queremos encontrar un difeomorfismo $\Phi : M \to M$ tal que $\Phi^*\Pi^\varepsilon_{\widetilde{Q}} = \Pi^\varepsilon_Q$. Este problema se resuelve en el Teorema 4.9 para el caso cuando M es compacta, usando el método de homotopía (acoplamiento débil). Así, el difeomorfismo Φ es el flujo a tiempo 1 de un campo vectorial dependiente del tiempo en M: $\Phi = \Phi^1_\varepsilon$. Más aún, Φ^1_ε tiene la propiedad de ser una transformación cercana a la identidad.

En el caso semi-local, resolvemos el problema suponiendo que la estructura de Poisson Ψ en P es singular en un punto $x^0 \in P$ y que las formas horizontales Q y $\widetilde{Q}$ se anulan en $B \times \{x^0\}$. Además, las Q-estructuras Π_Q y $\widetilde{\Pi}_Q$ son independientes de ε y sus restricciones a $B \times \{x^0\}$ coinciden con la estructura de Poisson no-degenerada en (B, ω). En esta situación, el Teorema 4.13 muestra la equivalencia de las estructuras de Poisson Π_Q y $\Pi_{\widetilde{Q}}$ en vecindades de $B \times \{x^0\}$. Lo anterior lo relacionamos con la teoría de perturbaciones, de la siguiente manera: Consideremos el tensor de Poisson Π^ε_0 en M que corresponde a la estructura producto con reescalamiento en la fibra P por medio de $\varepsilon^{-1}\Psi$. El sistema Hamiltoniano $(M, \Pi^\varepsilon_0, \mathcal{H}_\varepsilon)$ con $\mathcal{H}_\varepsilon = f(\xi) + \varepsilon F(\xi, x) + O(\varepsilon^2)$, para funciones suaves f y F, define un campo vectorial Hamiltoniano $X_\varepsilon = (\Pi^\varepsilon_0)^\sharp \mathrm{d}\mathcal{H}_\varepsilon$ pero con una singularidad en $\varepsilon = 0$ para Π^ε_0. Sin embargo, el campo X_ε admite el límite cuando $\varepsilon \to 0$ y obtenemos un campo vectorial proyectable X_0 el cual define un sistema no-perturbado que no es Hamiltoniano en (M, Π^ε_0). Por lo tanto, buscamos una Q-estructura de Poisson Π_Q^ε y un difeomorfismo Φ que transforme el campo X_ε en un sistema perturbado $\widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon = \Phi^*\mathcal{H}_\varepsilon = H_\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, donde H_ε es el Hamiltoniano del campo vectorial X_0. Más aún, ambos sistemas, el perturbado y el no-perturbado, son Hamiltonianos con respecto a la estructura de Poisson Π_Q^ε. Esta discusión se resume en el Teorema 4.14.

En los Capítulos 5 y 6 aplicamos los resultados generales obtenidos previamente, a ciertas clases de sistemas Hamiltonianos en el contexto de la teoría de perturbaciones y formas normales.

Así, en el Capítulo 5 nos centramos en el estudio de sistemas dinámicos sobre cilindros de órbitas, es decir, nos restringimos al caso de un espacio fase de la forma $M = (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}^2$ con coordenadas $(s, \varphi\,(\mathrm{mod}\,2\pi), p, q)$, equipado con una estructura simpléctica no-uniforme $\Omega_0^\varepsilon = \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\varphi + \varepsilon\,\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$, dependiente de un parámetro $\varepsilon > 0$ y nuestro interés aquí es estudiar la dinámica perturbada del sistema Hamiltoniano $\left(M, \Omega_0^\varepsilon, H_\varepsilon\right)$ donde $H_\varepsilon = H_0(s) + \varepsilon\, H_1(s, \varphi, p, q) + O(\varepsilon^2)$ con H_0 y H_1 funciones suaves. Esta formulación es una generalización de la situación adiabática (Arnold [1963], Arnold et al. [1993]) y está relacionados con los sistemas Hamiltonianos propiamente degenerados del tipo *lento-rápido* (Neĭshtadt y Vasiliev [2006]).

Los principales resultados en este capítulo son los siguientes. El Teorema 5.9, el cual es un resultado sobre reducibilidad de la parte no-perturbada del sistema $\left(M, \Omega_0^\varepsilon, H_\varepsilon\right)$ a una forma normal. El Teorema 5.50 en el cual el sistema perturbado original se transforma en un sistema casi-integrable (normalización de primer tipo). El Teorema 5.54, en el cual el sistema perturbado se transforma a una forma normal por medio de cierto simplectomorfismo que se construye explícitamente (normalización de segundo tipo). El Teorema 5.21, que es un resultado de Hamiltonización para la parte no-perturbada. El Teorema 5.36, en el que se discute el problema de Hamiltonización para sistemas de dos frecuencias. El Teorema 5.48, que también es un resultado sobre la Hamiltonización de la parte no-perturbada en un dominio adecuado, pero para el que se calculan explícitamente la forma simpléctica y la función Hamiltoniana. Finalizamos con el Teorema 5.56, en el cual se establece una formulación Hamiltoniana para un sistema perturbado en el que la función H_1 es cuadrática en p y q.

Estos resultados generalizan algunos casos conocidos sobre la normalización de sistemas Hamiltonianos alrededor de una trayectoria periódica individual, los cuales fueron obtenidos en Bryuno [1988], [1988]; Kuskin [1992] y Belov et al. [2003].

Finalmente, en el Capítulo 6 analizamos con bastante detalle un sistema sesquiproducto que está dado por las ecuaciones de Euler en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$, las cuales forman un sistema Hamiltoniano con respecto al corchete de Lie–Poisson en esta álgebra. Nuestro objetivo aquí es estudiar la dinámica de este sistema alrededor de un conjunto de nivel que es una órbita adjunta singular de las dos funciones de Casimir para el sistema. La restricción del sistema original en $\mathfrak{so}(4)$ a esta órbita singular resulta ser un sistema Hamiltoniano en la 2-esfera por lo que fijando un dominio abierto, foliado trivialmente por órbitas periódicas, reducimos el problema original a un sistema en el espacio fase $M = \Delta \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$, con $\Delta \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. El nuevo sistema que se obtiene resulta ser Hamiltoniano con respecto a una estructura de Poisson $\{\,,\}_M$, que es el producto de las estructuras simplécticas canónicas en $\Delta \times \mathbb{S}^1$ y $\mathbb{R}^3$, y es posible estudiarlo como un sistema casi-integrable, es decir, podemos verlo como un sistema Hamiltoniano perturbado cuya parte no-perturbada sea un sistema Hamiltoniano completamente integrable, asumiendo ciertas condiciones de no-degeneración. El problema aquí es que el sistema que tomamos como candidato natural para la parte no-perturbada, no es Hamiltoniano en el corchete del producto. Por lo tanto, es necesario buscar una nueva estructura de Poisson en una clase de estructuras que son deformaciones del corchete $\{\,,\}_M$, que sea equivalente a la estructura producto y que nos garantice la Hamiltonicidad del sistema no-perturbado. Así, se requiere construir un difeomorfismo que preserve estas estructuras de Poisson y que transforme el sistema Hamiltoniano reducido en M a un sistema Hamiltoniano completamente integrable. De nuevo, este difeomorfismo resulta ser el flujo a tiempo 1 de un campo vectorial dependiente del tiempo y para construirlo utilizamos el método de homotopía en su versión contravariante. Se ilustran estos métodos con algunas aplicaciones para el caso de Hamiltonianos cuadráticos.

Capítulo 1

Nociones Preliminares y Notación

Los sistemas dinámicos que estudiamos en este trabajo tienen lugar en espacios fase que son variedades de Poisson. Así, en este primer capítulo se introducen las nociones básicas de la geometría de Poisson y algunas de las propiedades más conocidas del cálculo con corchetes de Schouten, el cual es una herramienta importante en la teoría de las variedades de Poisson. El material que aquí se presenta se puede consultar en [22, 35, 45, 62].

1.1 Variedades de Poisson. Nociones básicas

Como ya se mencionó en la Introducción, la geometría de Poisson es el contexto adecuado en el que tiene lugar el formalismo Hamiltoniano y su relevancia como campo de investigación actual proviene de sus múltiples conexiones con otras áreas, tanto de las propias matemáticas como de la física. En esta sección revisamos algunas de las ideas básicas de la teoría de variedades de Poisson que utilizaremos en este trabajo.

Tensores de Poisson y campos vectoriales Hamiltonianos. Una *variedad de Poisson* es un par $\big(M, \{,\}\big)$ que consiste de una variedad diferenciable M equipada con un *corchete de Poisson* $\{\,,\}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, esto es, una operación $\mathbb{R}$-bilineal, antisimétrica que satisface la regla de Leibniz para el producto puntual de funciones suaves y para cualesquiera $f, g, h \in C^\infty(M)$, se cumple la identidad de Jacobi:

$$\underset{(f,g,h)}{\mathfrak{S}} \{f, \{g, h\}\} = 0. \tag{1.1.1}$$

Aquí, el símbolo $\mathfrak{S}$ indica la suma cíclica sobre las funciones f, g y h. De esta manera, $\big(C^\infty(M), \{\,,\}\big)$ es una álgebra de Lie, la cual es llamada una *álgebra de Poisson*.

Denotemos por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de todos los campos vectoriales suaves en M. Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice ser *Hamiltoniano* con respecto al corchete de Poisson $\{\,,\}$ y a una función $H \in C^\infty(M)$ si

$$\mathcal{L}_X F = \{H, F\}, \qquad \forall\, F \in C^\infty(M). \tag{1.1.2}$$

Con respecto al corchete de Poisson, el sistema Hamiltoniano correspondiente se escribe, por medio de coordenadas locales (y^I) en M, en la forma siguiente,

$$\dot{y}^I = \{H, y^I\}. \tag{1.1.3}$$

Para cada función $H \in C^\infty(M)$, la regla de Leibniz nos garantiza la existencia de un campo vectorial X_H, el cual es Hamiltoniano relativo al corchete $\{\,,\}$, con *función Hamiltoniana* H.

La correspondencia $H \mapsto X_H$ es un homomorfismo de álgebras de Lie,

$$[\,X_{H_1}, X_{H_2}\,] = X_{[H_1,H_2]}. \tag{1.1.4}$$

El núcleo de este homomorfismo consiste de todas aquellas funciones que conmutan, con respecto al corchete de Poisson, con todas las demás funciones en $C^\infty(M)$. A tales funciones se les llama *funciones de Casimir*. En otras palabras, $K \in C^\infty(M)$ es una función de Casimir si y sólo si $\{K, f\} = 0$, para toda $f \in C^\infty(M)$. Notemos que esta propiedad implica que una función de Casimir es una *integral primera* para todo campo vectorial Hamiltoniano, de ahí su importancia.

Un campo vectorial Z en M se dice ser un *automorfismo infinitesimal de Poisson* (o un *campo vectorial de Poisson*) del corchete de Poisson si su derivada de Lie es una derivación del álgebra de Lie $\big(C^\infty(M), \{\,,\}\big)$,

$$\mathcal{L}_Z\{F_1, F_2\} = \{\mathcal{L}_Z F_1, F_2\} + \{F_1, \mathcal{L}_Z F_2\}$$

para cualesquiera $F_1, F_2 \in C^\infty(M)$. Como una consecuencia directa de la identidad de Jacobi se deriva que todo campo vectorial Hamiltoniano es de Poisson. Es necesario hacer notar que, a diferencia del caso simpléctico, un automorfismo infinitesimal de Poisson no necesariamente es localmente Hamiltoniano [45].

En coordenadas locales (y^I) en M, el corchete de Poisson toma la forma

$$\{f, g\} = \Psi^{IJ}(y)\frac{\partial f}{\partial y^I}\frac{\partial g}{\partial y^J}, \tag{1.1.5}$$

donde

$$\Psi^{IJ} = \{y^I, y^J\}.$$

Aquí se debe tomar en cuenta la convención usual de sumar sobre los índices repetidos en la expresión anterior. Seguiremos esa convención en todo lo que sigue. De la identidad de Leibniz se sigue que bajo un cambio de coordenadas, las funciones (locales) Ψ^{IJ} se transforman de acuerdo a la regla de transición para un 2-tensor contravariante. De esto se sigue que

$$\Psi = (1/2)\,\Psi^{IJ}(y)\frac{\partial}{\partial y^I} \wedge \frac{\partial}{\partial y^J}, \tag{1.1.6}$$

es un *campo de bi-vectores* en M, llamado el *tensor de Poisson*.

De esta manera, es claro que si escribimos la identidad (1.1.1) para las funciones coordenadas y^I, y^J, y^L y usamos la relación (1.1.5), entonces la identidad de Jacobi se expresa, en términos del tensor de Poisson, por medio de la siguiente fórmula:

$$\underset{(I,J,L)}{\mathfrak{S}} \Psi^{KI}(y)\, \frac{\partial \Psi^{JL}}{\partial y^K}(y) = 0. \tag{1.1.7}$$

Consideremos ahora el morfismo de haces vectoriales $\Psi^\sharp : T^*M \to TM$ asociado al tensor de Poisson Ψ y que se define por

$$\left\langle \beta, \Psi^\sharp \alpha \right\rangle = \Psi(\alpha, \beta) \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \Omega^1(M). \tag{1.1.8}$$

Luego, el campo vectorial Hamiltoniano X_H se puede escribir como

$$X_H = \Psi^\sharp(\mathrm{d}H) = -\,\Psi^{JI}\, \frac{\partial H}{\partial y^I} \frac{\partial}{\partial y^J}, \tag{1.1.9}$$

por lo que se tiene la siguiente identidad para el corchete de Poisson:

$$\{f, g\} = \langle \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g, \Psi \rangle = \Psi(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g). \tag{1.1.10}$$

Notemos que en términos del morfismo de haces $\Psi^\sharp$ definido por (1.1.8), la condición para que una función suave $K \in C^\infty(M)$ sea una función de Casimir se expresa en la forma siguiente,

$$\Psi^\sharp(\mathrm{d}K) = 0. \tag{1.1.11}$$

El *rango* de la estructura de Poisson en el punto $y \in M$ es el rango del tensor de Poisson $\Psi(y)$ y lo denotaremos por $\mathrm{rank}_y(\Psi)$ o simplemente por $\mathrm{rank}(\Psi)$ cuando no sea necesario especificar el punto de aplicación. Un punto $y \in M$ se llama *regular* si $\mathrm{rank}(\Psi)$ es constante en una vecindad de y en M. En caso contrario, y se dice ser un punto *singular*.

En el caso cuando $\mathrm{rank}_y(\Psi) = \dim M$ para todo $y \in M$, el corchete de Poisson se dice ser *no-degenerado*. En tal situación, existe una única *estructura simpléctica* en M, compatible con la estructura de Poisson; es decir, queda definida una 2-forma $\Omega = (1/2)\, \Omega_{IJ}(y)\, \mathrm{d}y^I \wedge \mathrm{d}y^J$, la cual es cerrada y no-degenerada, de tal manera que

$$\{f, g\} = \Omega(X_f, X_g), \qquad\qquad \forall\, f, g \in C^\infty(M), \tag{1.1.12}$$

o, equivalentemente,

$$\Psi^{IS}\Omega_{SJ} = -\delta^I_J. \tag{1.1.13}$$

En este caso, la identidad de Jacobi para Ψ es justamente la condición de cerradura de la forma simpléctica Ω. Además, en términos de Ω, el campo vectorial Hamiltoniano de $F \in C^\infty(M)$ se define por

$$\mathbf{i}_{X_F}\Omega \equiv X_F \lrcorner\, \Omega = -\,\mathrm{d}F. \tag{1.1.14}$$

La variedad de Poisson (M, Ψ) se llama *regular* si $\mathrm{rank}(\Psi)$ es constante en M. En caso contrario, diremos que M es una variedad de Poisson *singular*.

Hojas simplécticas. Dada una variedad de Poisson (M, Ψ), denotemos por $\mathrm{Ham}(M, \Psi)$ el álgebra de Lie de todos los campos vectoriales Hamiltonianos en M relativos a Ψ. Consideremos la *distribución característica* $\mathcal{D}$ de la estructura de Poisson Ψ que se define por

$$\mathcal{D}_y \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Im}\Psi^\sharp_y \equiv \mathrm{Span}\{X_F(y) \mid F \in C^\infty(M)\}. \tag{1.1.15}$$

Es claro que el flujo de cualquier campo vectorial Hamiltoniano X_F preserva el tensor de Poisson y, en consecuencia, $\mathcal{D}$ es X_F-invariante. Luego, aplicando el Teorema de Stefan-Sussmann [22, 42, 45, 62] al conjunto $\mathrm{Ham}(M, \Psi)$ se tiene que la distribución característica $\mathcal{D}$ es integrable. Sea $B = B_y$ la variedad integrable maximal de $\mathcal{D}$ que pasa por el punto $y \in M$,

$$T_y B = \mathrm{Im}\Psi^\sharp_y.$$

De esto concluimos que existe una única 2-forma ω_B en B que satisface la condición de compatibilidad

$$\omega_B(X_{F_1}, X_{F_2}) = \{F_1, F_2\} \qquad \text{(en } B\text{)}, \tag{1.1.16}$$

para cualesquiera $F_1, F_2 \in C^\infty(M)$. Se puede demostrar que ω_B es cerrada y no-degenerada [45, 35, 42, 62], por lo que define una estructura simpléctica en B. La variedad simpléctica (B, ω_B) se llama una *hoja simpléctica* de la variedad de Poisson (M, Ψ). Se sigue que el rango de Ψ es constante a lo largo de B, $\mathrm{rank}_y(\Psi) = \dim B$, para todo $y \in B$.

De este modo, toda variedad de Poisson puede ser caracterizada como la unión ajena de hojas simplécticas (que son, en general, de dimensiones distintas), las cuales se "pegan" de una manera suave. De acuerdo a las anteriores definiciones, se pueden distinguir dos tipos de hojas simplécticas: *regulares* y *singulares*.

Transformaciones de Poisson. Sean $(M_1, \{\,,\}_1)$ y $(M_2, \{\,,\}_2)$ dos variedades de Poisson y supongamos que Ψ_1 y Ψ_2 son sus respectivos tensores de Poisson. Una *transformación de Poisson* es una función suave $\varphi : M_1 \to M_2$ tal que

$$\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_1 = \{f, g\}_2 \circ \varphi, \tag{1.1.17}$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty(M_2)$. En términos de los tensores de Poisson Ψ_1 y Ψ_2, la condición (1.1.17) se expresa como sigue: Ψ_1 y Ψ_2 están φ-relacionados, es decir,

$$\left(\Psi_2^\sharp\right)_{\varphi(m)} = (\mathrm{d}_m\varphi) \circ \left(\Psi_1^\sharp\right)_m \circ (\mathrm{d}_m\varphi)^*, \tag{1.1.18}$$

en todo punto $m \in M_1$. Esta condición establece que para toda $H \in C^\infty(M_2)$, los campos vectoriales Hamiltonianos relativos a $(M_1, \Psi_1, \varphi^*H)$ y (M_2, Ψ_2, H) están φ-relacionados,

$$X_H(\varphi(m)) = (\mathrm{d}_m\varphi) X_{\varphi^*H}(m). \tag{1.1.19}$$

Si una transformación de Poisson φ es un difeomorfismo, entonces se le llama un *isomorfismo de Poisson* (o *equivalencia*). En este caso, el tensor de Poisson Ψ_2 es simplemente el "*pull-back*" de Ψ_1 por medio de φ, esto es $\Psi_2 = \varphi^*\Psi_1$.

Sean (M_1, Ψ_1) y (M_2, Ψ_2) dos variedades de Poisson. La variedad producto $M_1 \times M_2$ está equipada, de manera natural, con una estructura de Poisson definida por el tensor de Poisson $\Psi_1 \oplus \Psi_2$, la cual es llamada la *estructura de Poisson del producto directo*. Es claro que las proyecciones naturales de $M_1 \times M_2$ en sus respectivos factores, son transformaciones de Poisson.

Una *subvariedad de Poisson* [45, 62] es una subvariedad (inmersa) N en una variedad de Poisson (M, Ψ), de tal manera que N está equipada con una estructura de Poisson $\Psi_{_N}$ para la cual, la inclusión $i : N \to M$ es una transformación de Poisson. Tal estructura $\Psi_{_N}$, en caso de que exista, está definida de manera única por la condición

$$\Psi_{_N}(i^*\beta_1, i^*\beta_2) = i^*\big(\Psi(\beta_1, \beta_2)\big),$$

para cualesquiera $\beta_1, \beta_2 \in \Omega^1(M)$. Se tiene el siguiente criterio [62]: $N \subset M$ es una subvariedad de Poisson si y sólo si todo campo vectorial Hamiltoniano en (M, Ψ) es tangente a N.

1.2 Algunos ejemplos de variedades de Poisson

En esta parte se presentan algunos ejemplos sencillos de variedades de Poisson, pero que son importantes en este trabajo debido a que las relacionaremos más adelante con algunos sistemas dinámicos sesqui-producto.

Estructuras de Lie–Poisson. Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie de dimensión finita y $\mathfrak{g}^*$ su dual. Fijemos una base $\{e^I\}$ de $\mathfrak{g}$ y supongamos que $\{\Upsilon_{_J}\}$ es la base dual, $\langle \Upsilon_{_J}, e^I \rangle = \delta^I_J$. Un ejemplo clásico de una variedad de Poisson singular es la que se define en el espacio dual $\mathfrak{g}^*$ por medio del *corchete de Lie–Poisson*

$$\{y^I, y^J\} = \lambda^{IJ}_S\, y^S, \tag{1.2.1}$$

donde λ^{IJ}_S son las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$ con respecto a la base $\{e^I\}$ y las funciones $\{y^J\}$ son las coordenadas definidas en $\mathfrak{g}^*$ por la base $\{\Upsilon_{_J}\}$. En este caso se tiene que las componentes del *tensor de Lie-Poisson* están dadas por $\Psi^{IJ}(y) = \lambda^{IJ}_S\, y^S$. Para cada $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, denotemos por $\delta_y F$ al elemento de $\mathfrak{g}$ definido por

$$\delta_y F \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial y^I}(y)\, e^I, \qquad (y \in \mathfrak{g}^*).$$

Es fácil ver que $\delta_y F$ no depende de la base que se elija para $\mathfrak{g}$. Más aún, el corchete de Lie–Poisson para $F, G \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ está definido por

$$\{F, G\}(y) = \Big\langle y, [\,\delta_y F, \delta_y G\,] \Big\rangle, \tag{1.2.2}$$

De esta manera, el tensor de Lie–Poisson viene dado por

$$\Psi = (1/2)\, \lambda^{IJ}_S\, y^S\, \frac{\partial}{\partial y^I} \wedge \frac{\partial}{\partial y^J}. \tag{1.2.3}$$

Además, si $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, entonces de (1.1.9), el campo vectorial Hamiltoniano X_H está dado por

$$X_H = -\lambda_S^{IJ} y^S \frac{\partial H}{\partial y^J} \frac{\partial}{\partial y^I}. \tag{1.2.4}$$

Por otro lado, para cada $v \in \mathfrak{g}$, sea $\mathrm{ad}_v : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ la *representación adjunta* de $\mathfrak{g}$ definida por $\mathrm{ad}_v(w) = [v, w]$. La *representación coadjunta* $\mathrm{ad}_v^* : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ se define para cada $y \in \mathfrak{g}^*$ como:

$$\mathrm{ad}_v^* \, y(w) \stackrel{\text{def}}{=} \langle y, \mathrm{ad}_v(w) \rangle, \qquad (w \in \mathfrak{g}). \tag{1.2.5}$$

En particular, se tiene que

$$\mathrm{ad}_{\delta F}^* \, y = -\lambda_S^{IJ} y^S \frac{\partial F}{\partial y^I} \frac{\partial}{\partial y^J},$$

por lo que comparando esta relación con (1.2.4) se sigue que para todo $y \in \mathfrak{g}^*$,

$$X_H = \mathrm{ad}_{\delta H}^* \, y.$$

Por lo tanto, de (1.1.15) se sigue que la distribución característica $\mathcal{D}$ está dada por

$$\mathcal{D}_y = \mathrm{Span}\{\mathrm{ad}_{\delta_y H}^* \, y \mid y \in \mathfrak{g}^*, H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)\},$$

y se puede ver fácilmente [22, 62, 70] que las hojas simplécticas de $\mathfrak{g}^*$ son las *órbitas coadjuntas*. En particular, el origen $y = 0$ es una hoja singular de dimensión cero. El sistema Hamiltoniano que corresponde a $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, relativo al corchete de Lie–Poisson, es llamado un *sistema de Euler* y toma la forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\,\mathrm{ad}_{\delta F}^* \, y. \tag{1.2.6}$$

En coordenadas, el sistema (1.2.6) se expresa como

$$\frac{\mathrm{d}y^I}{\mathrm{d}t} = \lambda_S^{IJ} y^S \frac{\partial F}{\partial y^J}.$$

Una estructura de Poisson para $\mathbb{R}^3$. Consideremos ahora el espacio $\mathbb{R}^3$ con coordenadas (y^1, y^2, y^3). En lo que sigue, vamos a dotar a este espacio con una estructura de Poisson Ψ, no trivial. En efecto, sean $\psi_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, 3)$ funciones suaves y consideremos el tensor que puntualmente está dado por la matriz

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & \psi_3 & -\psi_2 \\ -\psi_3 & 0 & \psi_1 \\ \psi_2 & -\psi_1 & 0 \end{bmatrix} = -\Lambda \circ \boldsymbol{\psi}, \tag{1.2.7}$$

donde $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ es un campo vectorial suave en $\mathbb{R}^3$ y $\Lambda \circ \boldsymbol{\psi}$ representa a la matriz del producto vectorial en $\mathbb{R}^3$; es decir, para todo $y \in \mathbb{R}^3$, $(\Lambda \circ \boldsymbol{\psi})(y) = \boldsymbol{\psi} \times y$. De esta manera, la identidad de Jacobi para Ψ toma la forma

$$\psi_1(\partial_2\psi_3 - \partial_3\psi_2) + \psi_2(\partial_3\psi_1 - \partial_1\psi_3) + \psi_3(\partial_1\psi_2 - \partial_2\psi_1) = 0, \tag{1.2.8}$$

o bien, en la forma vectorial equivalente,

$$\langle \boldsymbol{\psi}, \nabla \times \boldsymbol{\psi} \rangle = 0. \tag{1.2.9}$$

De lo anterior, es fácil calcular el corchete de Poisson para cualesquiera dos funciones $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$:

$$\{f, g\} = \langle \boldsymbol{\psi}, \nabla f \times \nabla g \rangle. \tag{1.2.10}$$

Luego, el campo vectorial Hamiltoniano X_H, asociado a una función $H \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ está dado por

$$X_H = \langle \boldsymbol{\psi} \times \nabla H, \nabla \rangle. \tag{1.2.11}$$

De (1.2.7), es claro que un punto $y \in \mathbb{R}^3$ es regular si $\boldsymbol{\psi}(y) \neq 0$, esto es, $\operatorname{rank}_y(\Psi) = 2$. Si $\boldsymbol{\psi}(y) = 0$ ($\operatorname{rank}_0(\Psi) = 0$), entonces y es un punto singular. Por otro lado, introduciendo la 1-forma

$$\alpha_\psi = \psi_1 \, \mathrm{d}y^1 + \psi_2 \, \mathrm{d}y^2 + \psi_3 \, \mathrm{d}y^3, \tag{1.2.12}$$

asociada al campo vectorial $\boldsymbol{\psi}$, podemos reescribir (1.2.8) como sigue

$$\mathrm{d}\alpha_\psi \wedge \alpha_{\boldsymbol{\psi}} = 0. \tag{1.2.13}$$

Esta es precisamente la condición de integrabilidad de Frobenius. En efecto, si consideramos la distribución plana que en cada punto $y \in \mathbb{R}^3$ está definida por

$$\mathcal{D}_y = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a, \boldsymbol{\psi}(y) \rangle = 0\}, \tag{1.2.14}$$

entonces en el dominio regular $N = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{\psi}(y) \neq 0\}$, la distribución (1.2.14) es integrable si y sólo si $\mathrm{d}\alpha_\psi \wedge \alpha_{\boldsymbol{\psi}} = 0$. De esta manera, N está foliado por hojas simplécticas $\mathcal{S}$ de dimensión 2, las cuales son tangentes a la distribución plana (1.2.14).

Por otra parte, dadas $m, K \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, con $m \neq 0$, se tiene que

$$\boldsymbol{\psi} = m \nabla K \qquad \text{y} \qquad \alpha_\Psi = m \, \mathrm{d}K, \tag{1.2.15}$$

son soluciones de (1.2.9) y (1.2.13), respectivamente, asumiendo que $\nabla K \neq 0$. Luego, el corchete de Poisson (1.2.10) toma la forma

$$\{f, g\} = m \langle \nabla K, \nabla f \times \nabla g \rangle. \tag{1.2.16}$$

Claramente, de (1.2.16) se sigue que K es una función de Casimir y toda hoja simpléctica regular $\mathcal{O}$ es una componente conexa de un conjunto de nivel, regular, de K. El sistema Hamiltoniano es de la forma

$$\dot{y} = m \, \nabla K \times \nabla H.$$

En el dominio N, definamos la 2-forma

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{2m\,\|\nabla K\|^2}\left\langle \nabla K \times \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y \right\rangle = \frac{1}{2m\,\|\nabla K\|^2}\,\epsilon_{ijk}\,\partial_i K\,\mathrm{d}y^j \wedge \mathrm{d}y^k \\ &= \frac{1}{m\,\|\nabla K\|^2}\Big(\partial_3 K\,\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2 + \partial_1 K\,\mathrm{d}y^2 \wedge \mathrm{d}y^3 + \partial_2 K\,\mathrm{d}y^3 \wedge \mathrm{d}y^1\Big). \end{aligned} \tag{1.2.17}$$

La restricción $\omega_{\mathcal{O}} = \Omega\big|_{\mathcal{O}}$ de Ω a cada hoja simpléctica regular $\mathcal{O}$ es compatible con la estructura de Poisson y define la estructura simpléctica de $\mathcal{O}$. Fijemos una orientación en $\mathcal{O}$ asociada con el campo vectorial normal $\nabla K/\|\nabla K\|$ y sea $\sigma_{\mathcal{O}}$ la 2-forma de área de $\mathcal{O}$. Luego,

$$\omega_{\mathcal{O}} = \Omega\big|_{\mathcal{O}} = \frac{1}{m\,\|\nabla K\|}\,\sigma_{\mathcal{O}}. \tag{1.2.18}$$

Es preciso hacer notar que en el caso cuando $m \equiv 1$, a la estructura de Poisson en $\mathbb{R}^3$ definida por el corchete (1.2.16) se le llama el *corchete del cuerpo rígido* [1, 24, 45].

La estructura de Lie–Poisson para $\mathfrak{so}(3)^*$. Presentamos ahora uno de los ejemplos básicos en el cual tiene lugar el corchete del cuerpo rígido, dado por el corchete de Lie–Poisson en la coálgebra de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$. En efecto, fijemos una base $\{e^1, e^2, e^3\}$ para $\mathfrak{so}(3)$, de tal manera que

$$[\,e^1, e^2\,] = e^3, \qquad [\,e^2, e^3\,] = e^1, \qquad [\,e^3, e^1\,] = e^2.$$

Identifiquemos $\mathfrak{so}(3)^* \approx \mathbb{R}^3$ y sean $\{y^1, y^2, y^3\}$ las coordenadas duales en la coálgebra $\mathfrak{so}(3)^*$. Tenemos así, que el corchete de Lie-Poisson para estas funciones está dado por

$$\{y^1, y^2\} = y^3, \qquad \{y^2, y^3\} = y^1, \qquad \{y^3, y^1\} = y^2. \tag{1.2.19}$$

Si calculamos el corchete de Lie–Poisson de dos funciones $f, g \in C^\infty(\mathfrak{so}(3)^*)$ por medio de la fórmula (1.2.2), obtenemos,

$$\{f, g\}(y) = \langle y, \nabla f \times \nabla g \rangle, \qquad (y \in \mathfrak{so}(3)^*). \tag{1.2.20}$$

Luego, de (1.2.20), y tomando en cuenta (1.1.5), las componentes Ψ^{IJ} del tensor de Lie–Poisson Ψ nos dan la representación puntual para éste:

$$\Psi(y) = \begin{bmatrix} 0 & y^3 & -y^2 \\ -y^3 & 0 & y^1 \\ y^2 & -y^1 & 0 \end{bmatrix} \equiv -\Lambda \circ y. \tag{1.2.21}$$

Comparando esta relación con (1.2.7) y (1.2.15) se tiene que $m \equiv 1$ y en consecuencia, $y = \nabla K$, para una función suave $K \in C^\infty(\mathfrak{so}(3)^*)$. De esto se sigue que

$$K = \frac{1}{2}\Big[(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2\Big], \tag{1.2.22}$$

la cual es una función de Casimir que satisface $K \geq 0$ para todo $y \in \mathfrak{so}(3)^*$. Además, de (1.2.11) se sigue que el campo vectorial Hamiltoniano asociado a una función $H \in C^\infty(\mathfrak{so}(3)^*)$ está dado por:

$$X_H = \langle \nabla, y \times \nabla H \rangle.$$

Más aún, es claro que el corchete de Lie-Poisson (1.2.20) se escribe en la forma

$$\{f, g\} = \langle \nabla K, \nabla f \times \nabla g \rangle,$$

el cual resulta ser el corchete del cuerpo rígido.

Por otro lado, las hojas simplécticas que nos dan la foliación de $\mathfrak{so}(3)^*$ son órbitas coadjuntas regulares, las cuales coinciden con los conjuntos de nivel de la función de Casimir (1.2.22) y son las 2-esferas

$$\mathcal{O}_y = \{K = r^2\} = \mathbb{S}_r^2.$$

Notemos que el origen es un punto singular. Luego, en el dominio abierto $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, la 2-forma en (1.2.17) está dada por

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{2\,\|y\|^2} \langle y \times \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y \rangle \\ &= \frac{1}{\|y\|^2} \left(y^3 \mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2 + y^1 \mathrm{d}y^2 \wedge \mathrm{d}y^3 + y^2 \mathrm{d}y^3 \wedge \mathrm{d}y^1 \right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma simpléctica (1.2.18) en cada hoja viene dada por

$$\omega_{\mathbb{S}_r^2} = \Omega\big|_{\mathbb{S}_r^2} = (1/r)\,\sigma_r,$$

donde $\sigma_r = r^2 \operatorname{sen}\theta\, \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi$ es la forma de área en la 2-esfera $\mathbb{S}_r^2$.

La estructura de Lie–Poisson para $\mathfrak{sl}(2)^*$. En el siguiente ejemplo, que también es uno de los básicos en la teoría de las variedades de Poisson, se discute la estructura de Lie–Poisson en la coálgebra de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$. Para ello, fijemos una base $\{e^1, e^2, e^3\}$ para $\mathfrak{sl}(2)$, de tal manera que

$$[\,e^1, e^2\,] = -e^3, \qquad [\,e^2, e^3\,] = e^1, \qquad [\,e^3, e^1\,] = e^2.$$

El corchete de Lie–Poisson en las coordenadas duales $\{y^1, y^2, y^3\}$ de $\mathfrak{sl}(2)^* \approx \mathbb{R}^3$ que corresponde a este caso está dado por las relaciones

$$\{y^1, y^2\} = -y^3, \qquad \{y^2, y^3\} = y^1, \qquad \{y^3, y^1\} = y^2. \tag{1.2.23}$$

De manera análoga al ejemplo anterior, si calculamos el corchete de Lie–Poisson para $f, g \in C^\infty(\mathfrak{sl}(2)^*)$ por medio de la fórmula (1.2.2) se obtiene:

$$\{f, g\}(y) = \langle \mathcal{I} y, \nabla f \times \nabla g \rangle, \qquad (y \in \mathfrak{sl}(2)). \tag{1.2.24}$$

donde $\mathcal{I} = \operatorname{diag}(1,1,-1)$. Tomando en cuenta (1.1.5) y utilizando el corchete (1.2.24) para calcular las componentes Ψ^{IJ} del tensor de Lie–Poisson Ψ, se obtiene la siguiente expresión local para este tensor:

$$\Psi(y) = \begin{bmatrix} 0 & -y^3 & -y^2 \\ y^3 & 0 & y^1 \\ y^2 & -y^1 & 0 \end{bmatrix} \equiv -\Lambda \circ \mathcal{I}y. \tag{1.2.25}$$

Luego, de (1.2.7) y (1.2.15) se tiene $m \equiv 1$ y además $\mathcal{I}y = \nabla K$, para una función suave $K \in C^\infty(\mathfrak{sl}(2)^*)$. De esto se sigue que

$$K = \frac{1}{2}\Big[(y^1)^2 + (y^2)^2 - (y^3)^2\Big], \tag{1.2.26}$$

la cual es una función de Casimir y podemos notar que a diferencia del ejemplo anterior, en este caso K puede tomar valores negativos. De esta manera, podemos reescribir el corchete (1.2.24) como

$$\{f,g\} = \big\langle \nabla K, \nabla f \times \nabla g \big\rangle.$$

Además, de (1.2.11) se sigue que el campo vectorial Hamiltoniano asociado a una función $H \in C^\infty(\mathfrak{sl}(2)^*)$ está dado por:

$$X_{H} = \big\langle \nabla, \mathcal{I}y \times \nabla H \big\rangle.$$

Excepto por el origen, que es un punto singular, en todos los otros puntos el tensor de Poisson es de rango 2. Luego, la foliación de $\mathfrak{sl}(2)^*$ por medio de hojas simplécticas está dada por las órbitas coadjuntas y éstas resultan ser las componentes conexas de los conjuntos de nivel de la función de Casimir K (1.2.26)

$$\mathcal{O}_{\pm c} = \Big\{(1/2)\,\big[(y^1)^2 + (y^2)^2 - (y^3)^2\big] = \pm\, c\Big\} \qquad (c \geq 0).$$

De esta manera, se tienen tres tipos de órbitas coadjuntas de dimensión 2:

(1) $O_{-c} = O^+_{-c} \cup O^-_{-c}$ es un hiperboloide de dos hojas.

(2) O_{+c} es un hiperboloide cilíndrico de una sola hoja.

(3) $O_0 = O^+_0 \cup O^-_0$ es el cono sin el origen.

En este caso, O^+_{-c} y O^-_{-c} son las componentes conexas que están determinadas por la elección $\pm = \operatorname{sgn} y^3$. Por lo tanto, en el dominio abierto $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, la 2-forma en (1.2.17) se escribe como sigue:

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{2\,\|y\|^2}\,\big\langle \mathcal{I}y \times \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y \big\rangle \\ &= \frac{1}{\|y\|^2}\,\big(-y^3 \mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2 + y^1 \mathrm{d}y^2 \wedge \mathrm{d}y^3 + y^2 \mathrm{d}y^3 \wedge \mathrm{d}y^1\big),\end{aligned}$$

y la 2-forma (1.2.18) viene a ser

$$\omega_{\mathcal{O}_{\pm c}} = \frac{1}{\|y\|}\sigma_{\mathcal{O}_{\pm c}}.$$

Debemos notar aquí que $\|y\|$ no es constante a lo largo de $\mathcal{O}_{\pm c}$. De esto se tiene que, en contraste al ejemplo previo, la forma simpléctica no es proporcional a la forma de área de $\mathcal{O}_{\pm c}$.

1.3 El corchete de Schouten

En esta parte se presentan algunas de las propiedades del corchete de Schouten [22, 45, 42, 62], las cuales son necesarias para el desarrollo de este trabajo. Podemos decir que el corchete de Schouten es una extensión natural de la derivada de Lie y es una de las herramientas más importantes en el cálculo de las variedades de Poisson.

Sea M una variedad diferenciable cualquiera y para cada entero $b \geq 0$, denotemos por $\mathscr{X}^b(M) = \mathrm{Sec}\left(\wedge^b TM\right)$ al espacio de los b-campos vectoriales (campos tensoriales contravariantes y antisimétricos de grado k en M). En particular, notemos que $\mathscr{X}^0(M) = C^\infty(M)$ es el espacio de las funciones suaves en M y $\mathscr{X}^1(M) = \mathfrak{X}(M)$ es el espacios de los campos vectoriales suaves en M. La suma directa de todos estos espacios la denotaremos por $\mathscr{X}^\star(M)$, esto es, $\mathscr{X}^\star(M) = \bigoplus_{b\geq 0} \mathscr{X}^k(M)$.

Si (y^I) son coordenadas (locales) en M, entonces cada b-campo vectorial $\mathcal{B}$ se escribe en la forma

$$\mathcal{B} = \sum_{I_1<\cdots<I_b} \mathcal{B}^{I_1\ldots I_b}\frac{\partial}{\partial y^{I_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial y^{I_b}} = \frac{1}{b\,!}\sum_{I_1,\ldots,I_k} \mathcal{B}^{I_1\ldots I_b}\frac{\partial}{\partial y^{I_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial y^{I_b}}.$$

Sea $\Omega^b(M)$ el espacio de las b-formas diferenciales en M. Para cada $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^b(M)$ se tiene

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{I_1<\cdots<I_b} \alpha_{I_1\ldots I_b}\,\mathrm{d}y^{I_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}y^{I_b} = \frac{1}{b\,!}\sum_{I_1,\ldots,I_b} \alpha_{I_1\ldots I_b}\,\mathrm{d}y^{I_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}y^{I_b}$$

Si $\mathcal{B} \in \mathscr{X}^b(M)$ y $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^b(M)$, definimos el *pareamiento* $\langle\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{B}\rangle$ por

$$\langle\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{B}\rangle = \sum_{I_1<\cdots<I_b} \alpha_{I_1\ldots I_b}\,\mathcal{B}^{I_1\ldots I_b}. \tag{1.3.1}$$

En particular, para cualesquiera 1-formas $\boldsymbol{\alpha}^1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^b$, denotamos

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{\alpha}^1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^b) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle\boldsymbol{\alpha}^1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\alpha}^b, \mathcal{B}\right\rangle = \sum_{I_1<\cdots<I_b} \alpha^1_{I_1}\cdots\alpha^b_{I_b}\,\mathcal{B}^{I_1\ldots I_b}. \tag{1.3.2}$$

La derivada de Lie. Recordemos que dado un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, la *derivada de Lie* $\mathcal{L}_X\mathcal{B}$ de un b-campo vectorial $\mathcal{B}$ a lo largo de X es el b-campo vectorial definido por

$$(\mathcal{L}_X\mathcal{B})(\boldsymbol{\alpha}^1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}^b) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}_X\big(\mathcal{B}(\boldsymbol{\alpha}^1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}^b)\big) - \sum_{j=1}^{b}\mathcal{B}(\boldsymbol{\alpha}^1,\ldots,\mathcal{L}_X\boldsymbol{\alpha}^j,\ldots,\boldsymbol{\alpha}^b), \quad (1.3.3)$$

para cualesquiera 1-formas $\boldsymbol{\alpha}^1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}^b$. En coordenadas se tiene lo siguiente,

$$(\mathcal{L}_X\mathcal{B})^{I_1\ldots I_b} = \mathcal{L}_X\mathcal{B}^{I_1\ldots I_b} + \sum_{j,L=1}^{b}(-1)^j\,\mathcal{B}^{LI_1\ldots\widehat{I}_j\ldots I_b}\,\frac{\partial X^{I_j}}{\partial y^L}. \quad (1.3.4)$$

En particular, si $\mathcal{B}=Y$ es un campo vectorial, entonces

$$\mathcal{L}_XY = [\,X,Y\,],$$

es el corchete de Lie usual para campos vectoriales.

La siguiente propiedad establece que la derivada de Lie es una derivación con respecto al producto cuña:

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}) = \mathcal{L}_X\mathcal{A}\wedge\mathcal{B} + \mathcal{A}\wedge\mathcal{L}_X\mathcal{B},$$

para cualesquiera $\mathcal{A}\in\mathscr{X}^a(M)$ y $\mathcal{B}\in\mathscr{X}^b(M)$. En particular, la siguiente fórmula nos será de mucha utilidad,

$$\mathcal{L}_X(Y_1\wedge\cdots\wedge Y_b) = \sum_{j=1}^{b} Y_1\wedge\cdots\wedge\mathcal{L}_XY_j\wedge\cdots\wedge Y_b$$

para cualesquiera b campos vectoriales $Y_1,\ldots,Y_b\in\mathfrak{X}(M)$.

El corchete de Schouten. Como se mencionó anteriormente, una generalización natural de la derivada de Lie para campos vectoriales se logra por medio del llamado *corchete de Schouten* (o Schouten–Nijenhuis) para tensores contravariantes antisimétricos. En esta parte definimos tal operación y se establecen algunas de sus propiedades, guiándonos principalmente por [45, 62].

Sean $\mathcal{A}$ un a-campo vectorial y $\mathcal{B}$ un b-campo vectorial en la variedad M. El corchete de Schouten de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es un $(a+b-1)$-campo vectorial $[\,\mathcal{A},\mathcal{B}\,]$ en M, el cual puede definirse de la siguiente manera [62]: existe una única operación $\mathbb{R}$-bilineal, de tipo local,

$$[\;,\,]:\mathscr{X}^a(M)\times\mathscr{X}^b(M)\to\mathscr{X}^{a+b-1}(M),$$

la cual está bien definida y satisface

$$[\,X_1\wedge\cdots\wedge X_a,\mathcal{B}\,] = \sum_{j=1}^{a}(-1)^{j+1}X_1\wedge\cdots\widehat{X}_j\wedge\cdots\wedge X_k\wedge\mathcal{L}_{X_j}\mathcal{B}, \quad (1.3.5)$$

para cualesquiera $X_1,\ldots,X_a\in\mathfrak{X}(M)$ y $\mathcal{B}\in\mathscr{X}^b(M)$. Más aún, de (1.3.5) se derivan las siguientes propiedades:

(i) Anticonmutatividad con graduación:

$$[\mathcal{A},\mathcal{B}] = (-1)^{ab}[\mathcal{B},\mathcal{A}].$$

(ii) Regla de Leibniz con graduación:

$$[\mathcal{A},\mathcal{B}\wedge\mathcal{C}] = [\mathcal{A},\mathcal{B}]\wedge\mathcal{C} + (-1)^{ab+b}\mathcal{B}\wedge[\mathcal{A},\mathcal{C}],$$
$$[\mathcal{A}\wedge\mathcal{B},\mathcal{C}] = \mathcal{A}\wedge[\mathcal{B},\mathcal{C}] + (-1)^{cb+b}[\mathcal{A},\mathcal{C}]\wedge\mathcal{B},$$

para cualquier $\mathcal{C}\in\mathscr{X}^c(M)$.

(iii) Identidad de Jacobi con graduación: Si $\mathcal{A}\in\mathscr{X}^a(M)$, $\mathcal{B}\in\mathscr{X}^b(M)$ y $\mathcal{C}\in\mathscr{X}^c(M)$, entonces

$$(-1)^{a(c+1)}[\mathcal{A},[\mathcal{B},\mathcal{C}]] + (-1)^{b(a+1)}[\mathcal{B},[\mathcal{C},\mathcal{A}]] + (-1)^{c(b+1)}[\mathcal{C},[\mathcal{A},\mathcal{B}]] = 0.$$

Las propiedades anteriores hacen de $\mathscr{X}^\star(M)$ una álgebra de Lie graduada con respecto al corchete de Schouten, la cual es también llamada una *súper-álgebra de Lie*.

Notemos, en particular, que el corchete de Schouten de un campo vectorial X y un b-campo vectorial $\mathcal{B}$ coincide con la derivada de Lie de $\mathcal{B}$ a lo largo de X,

$$[X,\mathcal{B}] = \mathcal{L}_X\mathcal{B}.$$

Además, si $\mathcal{B} = f\in C^\infty(M)$, entonces

$$[X,f] = [f,X] = \mathcal{L}_X f.$$

Una de las ventajas de este formalismo en el contexto de la geometría de Poisson es que nos proporciona las herramientas para expresar varios de sus principales enunciados en términos invariantes. En efecto, es claro que de (1.1.10) se obtiene

$$\underset{(f,g,h)}{\mathfrak{S}}\{f,\{g,h\}\} = -2\left\langle \mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}h, [\Psi,\Psi]\right\rangle.$$

Esto implica que la identidad de Jacobi para el corchete de Poisson se puede escribir en términos del 2-tensor de Poisson Ψ y del corchete de Schouten de la siguiente manera:

$$[\Psi,\Psi] = 0. \tag{1.3.6}$$

Por otro lado, la condición para que el campo vectorial Z sea un automorfismo infinitesimal de Poisson se formula como sigue: el flujo de Z preserva el tensor de Poisson,

$$\mathcal{L}_Z\Psi = [Z,\Psi] = 0,$$

lo cual podemos expresar en coordenadas como sigue:

$$[X,\Psi]^{IJ} = -\left(\Psi^{IK}\frac{\partial X^J}{\partial y^K} - \Psi^{JK}\frac{\partial X^I}{\partial y^K} - \Psi^{IJ}\frac{\partial X^K}{\partial y^K}\right) = 0.$$

Otra definición equivalente del corchete de Schouten debida a [43] se puede dar en términos del producto interior y la diferencial exterior para formas. Recordemos que el producto interior de una $(a+b)$-forma $\boldsymbol{\alpha}$ y un a-campo vectorial $\mathcal{A}$ es una b-forma $\mathbf{i}_{\mathcal{B}}\,\boldsymbol{\alpha}$ cuyas componentes son

$$(\mathbf{i}_{\mathcal{B}}\,\boldsymbol{\alpha})_{I_{a+1}\cdots I_{a+b}} = \mathcal{A}^{I_1\ldots I_a}\,\alpha_{I_1\ldots I_a I_{a+1}\cdots I_{a+b}}.$$

De esta manera,

$$\langle\beta,[\,\mathcal{A},\mathcal{B}\,]\rangle = (-1)^{(a+1)b}\,\mathbf{i}_{\mathcal{A}}\,\mathrm{d}(\mathbf{i}_{\mathcal{B}}\,\beta) \,+\, (-1)^{a}\,\mathbf{i}_{\mathcal{B}}\,\mathrm{d}(\mathbf{i}_{\mathcal{A}}\,\beta) \,-\, \mathbf{i}_{\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}}\,\mathrm{d}\beta, \tag{1.3.7}$$

para cualquier $(a+b-1)$-forma β.

Finalmente, recopilamos algunas fórmulas del cálculo de Schouten que nos serán de utilidad más adelante para realizar algunos cálculos:

(i) Si $f\in C^\infty(M)$ y $\mathcal{A}\in\mathscr{X}^2(M))$, entonces

$$[\,f,\mathcal{A}\,](\mathrm{d}g) = \mathcal{A}(\mathrm{d}f,\mathrm{d}g).$$

(ii) Si $X\in\mathfrak{X}(M)$ and $\mathcal{A}\in\mathscr{X}^2(M))$, entonces

$$[\,X,\mathcal{A}\,](\mathrm{d}f,\mathrm{d}g) = \mathcal{A}\big(\mathrm{d}g,\mathrm{d}(\mathcal{L}_X f)\big) \,-\, \mathcal{A}\big(\mathrm{d}f,\mathrm{d}(\mathcal{L}_X g)\big) \,+\, \mathcal{L}_X\big(\mathcal{A}(\mathrm{d}f,\mathrm{d}g)\big).$$

(iii) Si $\mathcal{A}\in\mathscr{X}^2(M)$, $\mathcal{B}\in\mathscr{X}^2(M)$ y $f,g,h\in C^\infty(M)$, entonces

$$[\,\mathcal{A},\mathcal{B}\,](\mathrm{d}f,\mathrm{d}g,\mathrm{d}h) = -\underset{(f,g,h)}{\mathfrak{S}}\mathcal{A}\Big(\mathrm{d}f,\mathrm{d}\big(\mathcal{B}(\mathrm{d}g,\mathrm{d}h)\big)\Big) \,+\, \mathcal{B}\Big(\mathrm{d}f,\mathrm{d}\big(\mathcal{A}(\mathrm{d}g,\mathrm{d}h)\big)\Big).$$

(iv) Si $f,g\in C^\infty(M), X\in\mathfrak{X}(M)$ y $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathscr{X}^2(M)$, entonces

$$[\,fX,\mathcal{A}\,] = X\wedge[\,\mathcal{A},f\,] \,+\, f[\,X,\mathcal{A}\,]; \tag{1.3.8}$$
$$[\,f\mathcal{A},g\mathcal{B}\,] = f[\,\mathcal{A},g\,]\wedge\mathcal{B} \,+\, g\mathcal{A}\wedge[\,\mathcal{B},f\,] \,+\, fg[\,\mathcal{A},\mathcal{B}\,]. \tag{1.3.9}$$

(v) Si $X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)$, entonces

$$[\,Z,X\wedge Y\,] = [\,Z,X\,]\wedge Y \,+\, X\wedge[\,Z,Y\,],$$

$$\begin{aligned}[\,X\wedge Y,Z\wedge W\,] = {} & Y\wedge W\wedge[\,X,Z\,] \,-\, Y\wedge Z\wedge[\,X,W\,] \,-\, X\wedge W\wedge[\,Y,Z\,]\\ & +\, X\wedge Z\wedge[\,Y,W\,].\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

(vi) Para cualquier $g\in C^\infty(M)$ y cualesquiera campos vectoriales X, Y, Z, W en M se satisface

$$\begin{aligned}\big[\,gX\wedge Y,Z\wedge W\,\big] = {} & \mathcal{L}_Z(g)\,X\wedge Y\wedge W - \mathcal{L}_W(g)\,X\wedge Y\wedge Z\\ & + g\big[\,X\wedge Y,Z\wedge W\,\big],\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Notemos que (1.3.10) también se puede escribir en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}[][X \wedge Y, Z \wedge W] = [X, Z] \wedge Y \wedge W - [X, W] \wedge Y \wedge Z + [Y, W] \wedge X \wedge Z \\ - [Y, Z] \wedge X \wedge W. \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Hasta aquí hemos presentado las principales herramientas que utilizaremos en este trabajo y que forman parte de la teoría básica de la geometría de Poisson y del cálculo de Schouten. En lo que sigue haremos uso extensivo de este material y estaremos refiriéndonos constantemente a las fórmulas y ecuaciones de este capítulo.

Capítulo 2

Conexiones Invariantes para la Dinámica Proyectable

En este capítulo estudiamos el problema de la existencia de conexiones invariantes de Ehresmann para la dinámica proyectable en haces fibrados triviales y se presentan varios resultados que nos caracterizan los campos vectoriales proyectables que admiten una conexión invariante, en términos de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales lineales no-homogéneas.

La noción de invarianza de una conexión de Ehresmann en un haz fibrado es relativa a un campo vectorial proyectable: El flujo del campo preserva la distribución horizontal que determina la conexión. Además, una conexión de Ehresmann y un campo vectorial proyectable inducen el concepto de campo de Higgs [49, 68], el cual es nuestra principal herramienta para estudiar la invarianza. Más aún, la existencia de campos de Higgs no-nulos es una obstrucción para la invarianza de una conexión.

El hecho de que sea posible caracterizar la invarianza de una conexión de Ehresmann a través de su campo de Higgs, nos permite plantear el problema de la existencia de conexiones invariantes en términos de la solubilidad de ciertas ecuaciones lineales no-homogéneas. En el caso de una conexión de Poisson, los resultados obtenidos los aplicamos para resolver el problema de la existencia de conexiones invariantes para una clase natural de campos vectoriales proyectables en haces fibrados triviales de Poisson. Estos resultados nos serán de utilidad cuando se aborde el problema de Hamiltonización para la dinámica proyectable en el Capítulo 3.

Por otra parte, los sistemas dinámicos que determinan los campos vectoriales proyectables (en haces fibrados triviales) son precisamente el objeto de estudio en este trabajo, a saber, los sistemas dinámicos sesqui-producto. Presentamos también en este capítulo, algunos resultados relacionados a este tipo de sistemas. En particular, se define lanoción de reducibilidad para la dinámica proyectable y se prueba su utilidad en el caso de los sistemas de Lie periódicos.

2.1 Conexiones de Ehresmann. Nociones y resultados básicos

En esta sección introducimos los conceptos básicos del cálculo de Ehresmann en haces fibrados triviales. Para los propósitos de nuestro estudio no es necesario adoptar el enfoque más general de la teoría de conexiones de Ehresmann en haces fibrados arbitrarios (submersiones sobreyectivas) ya que el espacio fase de los sistemas dinámicos que nos interesan es del tipo (variedad simpléctica) $\times$ (variedad de Poisson). Sin embargo, las nociones y resultados aquí expuestos nos proporcionan las herramientas necesarias para estudiar la dinámica proyectable en ese tipo de haces fibrados. Para más detalles, ver [17, 53, 58].

La distribución horizontal y la forma de conexión. Sean M y B dos variedades suaves y supongamos que $\pi : M \to B$ es una función sobreyectiva que define un *haz fibrado* con espacio total M y base B. La fibra sobre $\xi \in B$ está dada por $\pi^{-1}(\xi) \subset M$. Si denotamos por $\mathrm{d}\pi : TM \to TB$ la diferencial (tangent map), entonces para cada punto $m \in M$, el *espacio tangente vertical* $\mathbb{V}_m$ queda definido por $\mathbb{V}_m = \ker \mathrm{d}_m\pi \subset T_mM$. De esta manera, el *subhaz vertical* $\mathbb{V} \subset TM$ queda definido por medio de los espacios tangente a las fibras, es decir, como la distribución $\bigcup_{m\in M} \mathbb{V}_m$. Esto lo escribimos sucintamente como $\mathbb{V} = \ker \mathrm{d}\pi$.

Un campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$ se dice ser un *campo vectorial vertical* en M si es tangente a las fibras, lo cual expresamos de manera equivalente por medio de la siguiente condición:

$$\mathcal{L}_Y(\pi^* f) = 0, \qquad \forall\, f \in C^\infty(B). \tag{2.1.1}$$

Denotaremos por $\mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)$ al conjunto de los campos vectoriales verticales en M. Es claro que $\mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)$ tiene una estructura de álgebra de Lie con el corchete usual de campos vectoriales.

Como es usual, sea $\Omega^k(M)$ el espacio de las k-formas diferenciales en M. Una k-forma η en M se dice ser una *forma horizontal* si anula al subhaz vertical $\mathbb{V} \subset TM$: $\eta(Y_1, \dots, Y_k) = 0$, para cualesquiera campos vectoriales $Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ $(i = 1, \dots, k)$ y $Y_j \in \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)$ para alguna $j \in \{1, \dots, k\}$. En particular, la 1-forma $\sigma \in \Omega^1(M)$ es una 1-forma horizontal en M si para todo $Y \in \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)$, se tiene $Y \lrcorner\, \sigma = 0$. Denotaremos por $\Omega^k_{\mathbb{H}}(M)$ al espacio de las k-formas horizontales en M.

Una *conexión de Ehresmann* en el haz fibrado π es un subhaz $\mathbb{H} \subset TM$ el cual es complementario al subhaz vertical, es decir,

$$TM = \mathbb{H} \oplus \mathbb{V}. \tag{2.1.2}$$

De esta manera, $\mathbb{H}$ es una distribución en M tal que para cualquier $m \in M$, el subespacio $\mathbb{H}_m \subset T_mM$ es complementario a $\mathbb{V}_m$: $T_mM = \mathbb{H}_m \oplus \mathbb{V}_m$. Por lo tanto,

$$\mathbb{H} = \bigcup_{m\in M} \mathbb{H}_m.$$

Dada una conexión de Ehresmann $\mathbb{H} \subset TM$, es posible introducir varios conceptos asociados a esta conexión. El primero de ellos es el de los *campos vectoriales horizontales*, los cuales se definen como los campos vectoriales en M que son tangentes a $\mathbb{H}$. Denotaremos por $\mathfrak{X}_{\mathbb{H}}(M)$ al espacio de los campos vectoriales horizontales en M. De acuerdo con (2.1.2), para todo campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene una única descomposición en sus partes horizontal y vertical,

$$X = X_{\mathbb{H}} + X_{\mathbb{V}}. \tag{2.1.3}$$

Otra noción es la de *k-formas verticales*, las cuales son aquellas k-formas en M que anulan a los campos vectoriales horizontales, esto es, las formas $\mu \in \Omega^k(M)$ tales que $\mu(X_1, \ldots, X_k) = 0$, para cualesquiera campos vectoriales $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ ($i = 1, \ldots, k$) y $X_j \in \mathfrak{X}_{\mathbb{H}}(M)$ para alguna $j \in \{1, \ldots, k\}$. Denotaremos por $\Omega^k_{\mathbb{V}}(M)$ al espacio de las k-formas verticales en M.

Consideremos ahora el espacio $\Omega^k(M, \mathbb{V})$ de las k-formas en M que que toman valores en el espacio de los campos vectoriales verticales. La *forma de conexión* $\Gamma \in \Omega^1(M, \mathbb{V})$ asociada a la conexión de Ehresmann dada por el subhaz $\mathbb{H}$, se define por $\Gamma(X) \overset{\text{def}}{=} X_{\mathbb{V}}$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Es claro que se tienen las propiedades siguientes:

$$\Gamma\big|_{\mathbb{V}} = \mathrm{id}, \tag{2.1.4}$$

y

$$\mathbb{H} = \ker \Gamma. \tag{2.1.5}$$

De hecho, notemos que es posible caracterizar a la forma de conexión Γ por medio de la fórmula

$$\Gamma = \mathrm{id} - \mathrm{pr}_{\mathbb{H}}, \tag{2.1.6}$$

donde $\mathrm{pr}_{\mathbb{H}} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}_{\mathbb{H}}(M)$ es la *proyección horizontal* definida, a través de la descomposición (2.1.3), por $\mathrm{pr}_{\mathbb{H}}(X) = X_{\mathbb{H}}$.

Recíprocamente, dada una forma $\Gamma \in \Omega^1(M, \mathbb{V})$ la cual es la identidad en $\mathbb{V}$, definimos un subhaz $\mathbb{H}$, complementario a $\mathbb{V}$, por medio de (2.1.5). Por lo tanto, las dos descripciones de conexiones de Ehresmann en términos de subhaces horizontales y formas de conexión son equivalentes [17, 42, 66, 68, 69].

Levantamiento horizontal y la forma de curvatura. Supongamos que se tiene dada una conexión de Ehresmann Γ y la correspondiente distribución horizontal $\mathbb{H}$. Es claro que $\mathrm{d}\pi\big|_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \to TB$ es un isomorfismo. Más específicamente, se sigue que para cada $m \in M$, $\mathrm{d}_m\pi\big|_{\mathbb{H}_m} : \mathbb{H}_m \to T_{\pi(m)}B$ es un isomorfismo, de lo cual se deduce que para todo campo vectorial $u \in \mathfrak{X}(B)$, existe un único campo vectorial horizontal $\mathrm{hor}^{\Gamma}(u) \in \mathfrak{X}_{\mathbb{H}}(M)$ que satisface

$$(\mathrm{d}_m\pi)\, \mathrm{hor}^{\Gamma}(u)(m) = u\big(\pi(m)\big). \tag{2.1.7}$$

Al campo vectorial $\mathrm{hor}^{\Gamma}(u) \in \mathfrak{X}_{\mathbb{H}}(M)$ se le llama el *levantamiento horizontal* de u. Notemos que (2.1.7) es equivalente a requerir que para todo $u \in \mathfrak{X}(B)$ y para toda

$f \in C^\infty(B)$ se cumpla la siguiente relación:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{hor}^\Gamma(u)}(\pi^* f) = \pi^*(\mathcal{L}_u f). \tag{2.1.8}$$

Además, en cada punto, el levantamiento horizontal genera el espacio horizontal,

$$\mathbb{H}_m = \mathrm{Span}\{\, \mathrm{hor}^\Gamma(u)(m) \mid u \text{ varía en } \mathfrak{X}(B)\,\}.$$

Por otro lado, de (2.1.1) y (2.1.8) se obtiene la propiedad siguiente

$$\big[\, \mathrm{hor}^\Gamma(u), \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)\,\big] \subset \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M). \tag{2.1.9}$$

Otras propiedades del levantamiento horizontal se enumeran a continuación [58]:

(a) Para cualesquiera $u, v \in \mathfrak{X}(B)$,

$$\mathrm{hor}^\Gamma(u+v) = \mathrm{hor}^\Gamma(u) + \mathrm{hor}^\Gamma(v).$$

(a) Para todo $u \in \mathfrak{X}(B)$ y para toda $f \in C^\infty(B)$ se tiene

$$\mathrm{hor}^\Gamma(fu) = (\pi^* f)\,\mathrm{hor}^\Gamma(u).$$

(b) Sean $\{\xi^i\}$ coordenadas locales alrededor de $\xi \in B$ y consideremos la base local de campos vectoriales $\{\partial/\partial\xi^i\}$ en $\mathfrak{X}(B)$. Si definimos

$$\mathrm{hor}_i \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{hor}^\Gamma(\partial/\partial\xi^i),$$

entonces se tiene que

$$\mathbb{H}_m = \mathrm{Span}\{\, \mathrm{hor}_i,\ i = 1, \ldots, \dim B\,\}, \qquad \pi(m) = \xi.$$

Consideremos ahora el espacio de las k-formas en B que toman valores en el espacio de los campos vectoriales verticales $\Omega^k(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)) = \Omega^k(B) \otimes \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)$. La *forma de curvatura* $\mathrm{Curv}^\Gamma \in \Omega^2(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M))$ está definida por

$$\mathrm{Curv}^\Gamma(u_1, u_2) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{hor}^\Gamma([u_1, u_2]) \,-\, [\, \mathrm{hor}^\Gamma(u_1), \mathrm{hor}^\Gamma(u_2)\,]. \tag{2.1.10}$$

La curvatura de una conexión es una obstrucción para la integrabilidad del subhaz horizontal $\mathbb{H}$. De hecho, se tiene que la distribución horizontal $\mathbb{H}$ es integrable si y sólo si la curvatura es cero, $\mathrm{Curv}^\Gamma = 0$ [58]. En este caso, se dice que la conexión es *plana*.

En lo que sigue del presente capítulo y en todo lo que resta de este trabajo sólo consideraremos haces fibrados triviales, para los cuales la teoría de conexiones se simplifica considerablemente.

De esta manera, supongamos que B y P son dos variedades suaves y consideremos la variedad producto $M = B \times P$ con las proyecciones canónicas π_B y

π_P sobre cada uno de sus respectivos factores. Se tiene que M es el espacio total del haz fibrado trivial $\pi : M \to B$ sobre la base B, donde $\pi = \pi_B$. Notemos que en este caso, la fibra sobre $\xi \in B$ es $\pi^{-1}(\xi) = \{\xi\} \times P$. Más aún, para cada punto $m = (\xi, x)$ con $\xi \in B$ y $x \in P$, el espacio tangente vertical está dado por $\mathbb{V}_m = \ker \mathrm{d}_m\pi = T_x P$. Luego, el subhaz vertical es simplemente $\mathbb{V} = \ker \mathrm{d}\pi = TP$.

Si $\mathbb{H} \subset TM$ define una conexión de Ehresmann, se tiene que

$$TM = \mathbb{H} \oplus \mathbb{V} \equiv \mathbb{H} \oplus TP. \tag{2.1.11}$$

Luego, la descomposición (2.1.3) para un campo arbitrario $X \in \mathfrak{X}(M)$ es simplemente

$$X = X_{\mathbb{H}} + Y, \tag{2.1.12}$$

donde $Y \in \mathfrak{X}(P)$ es un campo vectorial determinado de manera única por X. En este caso, la forma de conexión Γ (2.1.6) está definida por $\Gamma(X) = Y \in \mathfrak{X}(P)$.

En este contexto, un ejemplo de una conexión plana viene dado por la conexión trivial Γ^0 que corresponde a la descomposición canónica

$$TM = TB \oplus TP. \tag{2.1.13}$$

En efecto, para todo $u \in \mathfrak{X}(B)$ se tiene que $\mathrm{hor}^{\Gamma^0}(u) = u$ y de (2.1.10) se sigue claramente que $\mathrm{Curv}^{\Gamma^0}(u_1, u_2) = 0$ para cualesquiera $u_1, u_2 \in \mathfrak{X}(B)$.

Parametrización de conexiones de Ehresmann. Sea $\Omega^k_{\mathbb{H}}(M, \mathbb{V})$ el espacio de las k-formas horizontales que toman valores en el espacio de los campos vectoriales verticales. Para cada $\eta \in \Omega^k(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M))$ definimos un elemento $\pi^*\eta \in \Omega^k_{\mathbb{H}}(M, \mathbb{V})$ por medio de la fórmula

$$(\pi^*\eta)(Y_1, \ldots, Y_k) = \eta\big(\mathrm{d}\pi(Y_1), \ldots, \mathrm{d}\pi(Y_k)\big). \tag{2.1.14}$$

Es claro que si $Y_i \in \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)$, para alguna $i \in \{1, \ldots k\}$, entonces la k-forma en (2.1.14) se anula, por lo que $\pi^*\eta \in \Omega^k_{\mathbb{H}}(M, \mathbb{V})$.

Por otra parte, dadas dos conexiones arbitrarias Γ y $\widetilde{\Gamma}$ en el haz fibrado $\pi : M \to B$, se tienen dos descomposiciones del haz tangente $TM = \mathbb{H} \oplus \mathbb{V} = \widetilde{\mathbb{H}} \oplus \mathbb{V}$. Luego, para cualquier $u \in \mathfrak{X}(B)$, $\mathrm{d}\pi(\mathrm{hor}^{\widetilde{\Gamma}}(u)) = \mathrm{d}\pi(\mathrm{hor}^{\Gamma}(u))$ por lo que $\mathrm{hor}^{\widetilde{\Gamma}}(u) - \mathrm{hor}^{\Gamma}(u) \in \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)$. De esto se sigue que

$$\widetilde{\Gamma} - \Gamma = \pi^*\Xi, \tag{2.1.15}$$

para $\Xi \in \Omega^1(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M))$, lo cual es equivalente a

$$\mathrm{hor}^{\widetilde{\Gamma}}(u) - \mathrm{hor}^{\Gamma}(u) = -\,\Xi(u), \tag{2.1.16}$$

donde $u \in \mathfrak{X}(B)$ es un campo vectorial arbitrario.

Consideremos ahora una familia t-paramétrica $\{\Gamma_t\}$ de conexiones suaves en el haz fibrado π. En este caso se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{hor}^{\Gamma_t} \in \Omega^1(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)). \tag{2.1.17}$$

Una observación importante es la siguiente: Si hacemos $\widetilde{\Gamma} = \Gamma^0$ en (2.1.15), con Γ^0 la conexión trivial, entonces es posible obtener todas las conexiones de Ehresmann en M, las cuales son de la forma

$$\Gamma = \Gamma^0 - \pi^*\Xi, \tag{2.1.18}$$

donde Ξ varía sobre $\Omega^1(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M))$. Se sigue que el conjunto de todas las conexiones en M está parametrizado por los elementos del espacio $\Omega^1(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M))$, esto es, por funciones $C^\infty(B)$-lineales $\Xi : \mathfrak{X}(B) \to \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)$.

Funciones que preservan las fibras. Sean $M = B \times P$ y $\widetilde{M} = \widetilde{B} \times \widetilde{P}$ dos variedades producto y consideremos los haces fibrados correspondientes, $\pi : M \to B$ y $\widetilde{\pi} : \widetilde{M} \to \widetilde{B}$. Se dice que un difeomorfismo $\Phi : M \to \widetilde{M}$ *preserva las fibras* si existe un difeomorfismo $\varphi : B \to \widetilde{B}$, tal que

$$\widetilde{\pi} \circ \Phi = \varphi \circ \pi, \tag{2.1.19}$$

es decir, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & \widetilde{M} \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\widetilde{\pi}} \\ B & \xrightarrow{\varphi} & \widetilde{B} \end{array}$$

En particular, dado un isomorfismo Φ como en (2.1.19), se tiene que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\mathrm{d}\Phi} & T\widetilde{M} \\ {\scriptstyle\mathrm{d}\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mathrm{d}\widetilde{\pi}} \\ TB & \xrightarrow{\mathrm{d}\varphi} & T\widetilde{B} \end{array}$$

es conmutativo, de donde se sigue claramente que la derivada $\mathrm{d}\Phi$ es un isomorfismo de haces vectoriales entre los subhaces verticales $\mathbb{V}$ y $\widetilde{\mathbb{V}}$,

$$\widetilde{\mathbb{V}}_{\Phi(m)} = (\mathrm{d}_m\Phi)\mathbb{V}_m. \tag{2.1.20}$$

En el caso cuando $B = \widetilde{B}$, decimos que Φ es un difeomorfismo que *preserva las fibras y cubre a la identidad* (o idéntico en la base) si (2.1.19) se cumple para $\varphi = \mathrm{id}_B$. Este tipo de funciones son llamadas *transformaciones gauge* (*gauge transformations*). Es claro que toda transformación gradiente es de la forma

$$\Phi(\xi, x) = \big(\xi, \Phi_\xi(x)\big), \qquad (\xi \in B,\ x \in P), \tag{2.1.21}$$

donde $\Phi_\xi : P \to \widetilde{P}$ es una familia de difeomorfismos suaves entre las fibras. Debemos observar que cuando $M = \widetilde{M}$, se tiene que las transformaciones gauge forman un grupo llamado el *grupo gauge*.

Por otro lado, sea $\Phi : M \to \widetilde{M}$ un difeomorfismo que preserva las fibras como en (2.1.19). Dada una conexión de Ehresmann (2.1.11) con forma de conexión Γ, definimos la *conexión del push-forward* $\widetilde{\mathbb{H}} = \Phi_* \mathbb{H}$ como sigue:

$$\widetilde{\mathbb{H}}_p = (\mathrm{d}_{\Phi^{-1}(p)}\Phi)\mathbb{H}_{\Phi^{-1}(p)}, \qquad \forall\, p \in \widetilde{M}. \tag{2.1.22}$$

La correspondiente forma de conexión, $\widetilde{\Gamma} = \Phi_* \Gamma$, está dada por

$$\widetilde{\Gamma}(Y) = \Phi_*\big(\Gamma(\Phi^* Y)\big). \tag{2.1.23}$$

En particular, para el levantamiento horizontal se cumple lo siguiente:

$$\mathrm{hor}^{\widetilde{\Gamma}}(u) = \Phi_*\big(\mathrm{hor}^{\Gamma}(\varphi^* u)\big), \qquad \forall\, u \in \mathfrak{X}(\widetilde{B}). \tag{2.1.24}$$

Sistemas de coordenadas admisibles. Consideremos nuevamente el haz fibrado trivial $M = B \times P$ y fijemos un sistema de coordenadas locales $(\xi, x) = (\xi^i, x^\alpha)$ en M, donde (ξ^i) son coordenadas en B y (x^α) son coordenadas en la fibra P. Tales coordenadas serán llamadas *admisibles*. Localmente, una forma de conexión Γ en M se representa, en un sistema de coordenadas admisibles, como

$$\Gamma = \Gamma^\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \qquad\qquad \Gamma^\nu = \mathrm{d}x^\nu + \Gamma^\nu_i(\xi, x)\,\mathrm{d}\,\xi^i, \tag{2.1.25}$$

donde

$$\Gamma^\nu_i(\xi, x) = \big\langle \mathrm{d}x^\nu, \Gamma(\partial/\partial\xi^i)\big\rangle. \tag{2.1.26}$$

El subhaz horizontal $\mathbb{H}$ que corresponde a la forma de conexión Γ está generado por el levantamiento horizontal de los campos vectoriales básicos $\{\partial/\partial\xi^i\}$ en B:

$$\mathrm{hor}^\Gamma_i \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{hor}^\Gamma(\partial/\partial\xi^i) = \frac{\partial}{\partial\xi^i} - \Gamma^\nu_i(\xi, x)\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}. \tag{2.1.27}$$

Más aún, la forma de curvatura se expresa localmente por medio de la siguiente fórmula

$$\mathrm{Curv}^\Gamma = \frac{1}{2} C^\sigma_{ij}(\xi, x)\,\mathrm{d}\xi^i \wedge \mathrm{d}\xi^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^\sigma}. \tag{2.1.28}$$

donde

$$C^\sigma_{ij} = \frac{\partial \Gamma^\sigma_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_i}{\partial \xi^j} + \Gamma^\nu_j\,\frac{\partial \Gamma^\sigma_i}{\partial x^\nu} - \Gamma^\nu_i\,\frac{\partial \Gamma^\sigma_j}{\partial x^\nu}. \tag{2.1.29}$$

De (2.1.27) y (2.1.29) se derivan las siguientes fórmulas que nos serán de utilidad:

$$[\,\mathrm{hor}^\Gamma_i, \mathrm{hor}^\Gamma_j\,] = -\,C^\sigma_{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \in \mathfrak{X}_{\mathrm{V}}(M). \tag{2.1.30}$$

$$[\,\mathrm{hor}^\Gamma_i, \partial/\partial x^\sigma\,] = \frac{\partial \Gamma^\nu_i}{\partial x^\sigma}\,\frac{\partial}{\partial x^\nu} \in \mathfrak{X}_{\mathrm{V}}(M). \tag{2.1.31}$$

En esta situación, si consideremos la conexión trivial Γ^0 (2.1.13), entonces el subhaz horizontal correspondiente es $\mathbb{H}^0 = TB$, por lo que $\{\partial/\partial\xi^i\}$ es una base local de campos vectoriales horizontales. Por lo tanto, se sigue que $\Gamma^0(\partial/\partial\xi^i) = 0$ y de (2.1.26) se deriva que $(\Gamma^0)_i^\nu = 0$ para toda $i = 1,\ldots,\dim B$. De esto y de (2.1.25) se obtiene

$$\Gamma^0 = \mathrm{d}x^\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \tag{2.1.32}$$

Además, de (2.1.27) se tiene que

$$\mathrm{hor}_i^{\Gamma^0} = \frac{\partial}{\partial \xi^i}. \tag{2.1.33}$$

De la discusión anterior se concluye que el Γ^0-levantamiento horizontal de cualquier campo vectorial $u = u^i(\xi)\,\partial/\partial\xi^i \in \mathfrak{X}(B)$ está dado por $\mathrm{hor}^{\Gamma^0}(u) = u$.

Conexiones relacionadas con campos de bi-vectores. [66]. Sea $M = B \times P$ y denotemos por $\mathscr{X}^k(M) = \mathrm{Sec}\left(\wedge^k TM\right)$ el espacio los campos tensoriales contravariantes y antisimétricos de orden k en M. Sea $\mathrm{Ann}(\mathbb{V}) \subset T^*M$ el *anulador* del subhaz vertical $\mathbb{V} \subset M$. Luego, las secciones de $\mathrm{Ann}(\mathbb{V})$ son las 1-formas horizontales en M, $\Omega^1_{\mathbb{H}}(M)$. Diremos que un k-campo vectorial $Z \in \mathscr{X}^k(M)$ es *vertical* si $Z \lrcorner\, \alpha = 0$ para toda 1-forma horizontal α. Denotaremos por $\mathscr{X}^k_{\mathbb{V}}(M)$ al espacio de los k-campos vectoriales verticales.

Un campo de bi-vectores $\Pi \in \mathscr{X}^2(M)$ se dice ser *horizontalmente no-degenerado* si para todo $m \in M$ la forma bilineal antisimétrica

$$\Pi_m : T_m^*M \times T_m^*M \to \mathbb{R},$$

es no-degenerada en el subespacio $\mathrm{Ann}(\mathbb{V}_m) \subset T_m^*M$. Notemos que esto es equivalente a las condiciones siguientes:

$$\Pi^\sharp\big(\mathrm{Ann}(\mathbb{V})\big) \cap \mathbb{V} = \{0\}, \tag{2.1.34}$$

$$\mathrm{rank}\,\Pi^\sharp\big(\mathrm{Ann}(\mathbb{V})\big) = \dim B, \tag{2.1.35}$$

donde $\Pi^\sharp : T^*M \to TM$ es el morfismo de haces vectoriales asociado a Π (1.1.8).

Así, dado un campo de bi-vectores $\Pi \in \mathscr{X}^2(M)$, horizontalmente no-degenerado, se define la distribución horizontal $\mathbb{H}$ como la imagen de $\mathrm{Ann}(\mathbb{V})$ bajo el morfismo $\Pi^\sharp$:

$$\mathbb{H} \overset{\mathrm{def}}{=} \Pi^\sharp\big(\mathrm{Ann}(\mathbb{V})\big).$$

Las condiciones (2.1.34) y (2.1.35) nos garantizan que se tiene la descomposición

$$TM = \mathbb{H} \oplus \mathbb{V},$$

por lo que Π induce una conexión de Ehresmann con 1-forma de conexión Γ que satisface $\mathbb{H} = \ker \Gamma \subset TM$ (2.1.4), (2.1.5).

2.2 Campos vectoriales proyectables y los sistemas dinámicos sesqui-producto

En esta sección se introducen los sistemas dinámicos que son el motivo de estudio en este trabajo, a saber, los sistemas dinámicos sesqui-producto. Este tipo de sistemas modelan varios problemas importantes en la mecánica [11, 19, 20, 25, 68] y son el punto de partida para el enfoque que desarrollamos en este trabajo sobre la teoría Hamiltoniana de perturbaciones.

Nuevamente, consideremos el haz fibrado trivial $\pi : M \to B$, con $M = B \times P$.

Definición 2.1 *Un campo vectorial $\mathcal{W} \in \mathfrak{X}(M)$ es llamado* proyectable *si existe un campo vectorial $w \in \mathfrak{X}(B)$ tal que $\mathcal{W}$* desciende *a w bajo π, es decir,*

$$\mathrm{d}\pi \circ \mathcal{W} = w \circ \pi. \tag{2.2.1}$$

Denotaremos por $\mathfrak{X}_\pi(M)$ al conjunto de los campos vectoriales proyectables en M. Al sistema dinámico que corresponde a un campo vectorial proyectable le llamaremos un sistema dinámico sesqui-producto *(skew-product dynamical system).*

Notemos que en la definición anterior, $\mathcal{W} \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial proyectable si existe $w \in \mathfrak{X}(B)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mathcal{W}} & TM \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{d}\pi} \\ B & \xrightarrow{w} & TB \end{array}$$

Sea Φ^t el flujo local del campo vectorial $\mathcal{W}$ y sea φ^t el flujo local de w. La condición (2.2.1) para $\mathcal{W}$ significa que el flujo Φ^t es una función en M que preserva las fibras y que desciende a φ^t (ver (2.1.19)),

$$\pi \circ \Phi^t = \varphi^t \circ \pi. \tag{2.2.2}$$

En otras palabras, las trayectorias de $\mathcal{W}$ se proyectan, bajo π, a las trayectorias de w. Notemos que la condición (2.2.1) también se pueden reformular de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{W}}(\pi^* f) = \pi^*(\mathcal{L}_w f), \qquad \forall\, f \in C^\infty(B). \tag{2.2.3}$$

Por otro lado, si $Y \in \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)$, se tiene que $\mathrm{d}\pi(Y) = 0$, de lo cual se sigue que cada campo vectorial vertical en M es proyectable y desciende al campo vectorial $w = 0$ en B, es decir $\mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M) \subset \mathfrak{X}_\pi(M)$. Notemos también que si $\mathcal{W} \in \mathfrak{X}_\pi(M)$ desciende a $w \in \mathfrak{X}(B)$, entonces para cualquier función $f \in C^\infty(B)$, $(\pi^* f)\mathcal{W}$ es también proyectable y desciende a $f\,w$. Además, de (2.2.3) se deducen las propiedades siguientes:

(1) Sean $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos vectoriales proyectables que descienden a los campos vectoriales w_1 y w_2 en B, respectivamente. Entonces $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ es proyectable que desciende a $w_1 + w_2$. Más aún, el corchete de Lie $[\,\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2\,]$, es también un campo vectorial proyectable que desciende a $[\,w_1, w_2\,] \in \mathfrak{X}(B)$.

(2) El corchete de Lie de un campo vectorial proyectable $\mathcal{W}$ con cualquier campo vectorial vertical es, nuevamente, un campo vectorial vertical,

$$[\,\mathcal{W}, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)\,] \subset \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M). \tag{2.2.4}$$

Por lo tanto, de (1) se sigue que el espacio de todos los campos vectoriales proyectables $\mathfrak{X}_{\pi}(M)$ es una álgebra de Lie y la parte (2) nos asegura que $\mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)$ es un ideal del álgebra $\mathfrak{X}_{\pi}(M)$. Es claro que el grupo de transformaciones gauge en M preserva a estas ágebras de Lie.

El siguiente resultado es un criterio importante que resume varias de las propiedades que se han discutido hasta aquí.

Lema 2.2 *Un campo vectorial $\mathcal{W}$ en M es* proyectable *si y sólo si se cumple alguna de las dos condiciones siguientes:*

(a) *Para cada t, el flujo (local) Φ^t del campo vectorial $\mathcal{W}$ es un difeomorfismo que preserva las fibras.*

(b) *La derivada de Lie a lo largo de $\mathcal{W}$ preserva el álgebra de Lie de los campos vectoriales verticales,*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{W}}\big(\mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)\big) \subset \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M). \tag{2.2.5}$$

(c) *Para toda conexión Γ en M, existe una descomposición,*

$$\mathcal{W} = \mathrm{hor}^{\Gamma}(w) \,+\, \mathcal{W}_{\mathbb{V}}, \tag{2.2.6}$$

donde $w \in \mathfrak{X}(B)$ y $\mathcal{W}_{\mathbb{V}} = \Gamma(\mathcal{W})$ es la componente vertical del campo vectorial $\mathcal{W}$.

Como una consecuencia de esta proposición, derivamos el siguiente hecho.

Corolario 2.3 *Sean $\mathcal{W}$ y $\widetilde{\mathcal{W}}$ dos campos vectoriales proyectables en M que descienden a los campos vectoriales w y $\widetilde{w}$ en B, respectivamente, y Γ una conexión de Ehresmann en M. Entonces, el corchete de Lie $[\,\mathcal{W}, \widetilde{\mathcal{W}}\,]$, está dado por*

$$\begin{aligned}[\,\mathcal{W}, \widetilde{\mathcal{W}}\,] &= \mathrm{hor}^{\Gamma}([\,w, \widetilde{w}\,]) \\ &\quad + [\,\mathrm{hor}^{\Gamma}(w), \widetilde{\mathcal{W}}_{\mathbb{V}}\,] - [\,\mathrm{hor}^{\Gamma}(\widetilde{w}), \mathcal{W}_{\mathbb{V}}\,] - \mathrm{Curv}^{\Gamma}(w, \widetilde{w}) + [\,\mathcal{W}_{\mathbb{V}}, \widetilde{\mathcal{W}}_{\mathbb{V}}\,].\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Es oportuno remarcar que los últimos cuatro términos en (2.2.7) forman la parte vertical de la descomposición del campo vectorial $[\,\mathcal{W}, \widetilde{\mathcal{W}}\,] \in \mathfrak{X}(M)$ en sus partes horizontal y vertical con respecto a la conexión Γ.

Sean $\xi = (\xi^i)$ y $x = (x^\alpha)$ coordenadas locales en B y en M, respectivamente. La descomposición (2.2.6) de la conexión trivial Γ^0 se expresa en estas coordenadas en la forma siguiente:

$$\mathcal{W} = w^i(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \xi^i} + W^\alpha(\xi, x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \tag{2.2.8}$$

donde el primer término $w = w^i\,\partial/\partial\xi^i$ es un Γ^0-campo vectorial horizontal en M y el segundo término $W = W^\alpha\,\partial/\partial x^\alpha$ es un Γ^0-campo vectorial vertical en M. El correspondiente sistema dinámico sesqui-producto es de la forma

$$\dot{\xi} = w(\xi), \tag{2.2.9}$$
$$\dot{x} = W(\xi, x). \tag{2.2.10}$$

Supongamos ahora que Γ es una conexión arbitraria en M. De (2.1.18) se sigue que $\Gamma = \Gamma^0 - \pi^*\Xi$, para $\Xi \in \Omega^1(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M))$. Luego, de (2.2.6) y de (2.2.8) se deriva la siguiente regla de transición para la parte vertical del campo vectorial proyectable $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{W}_{\mathbb{V}} = \Big(w^i(\xi)\,\Xi_i^\alpha(\xi, x) + W^\alpha(\xi, x)\Big)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \tag{2.2.11}$$

La observación siguiente establece que los difeomorfismos que preservan las fibras también respetan el álgebra de Lie de los campos vectoriales proyectables.

Lema 2.4 *Sean $\pi : M \to B$ y $\widetilde{\pi} : \widetilde{M} \to \widetilde{B}$ dos haces fibrados y $\Phi : M \to \widetilde{M}$ un difeomorfismo que preserva las fibras y cubre a un difeomorfismo $\varphi : B \to \widetilde{B}$. Entonces para todo campo vectorial proyectable $\mathcal{W}$ en M, el push-forward $\widetilde{\mathcal{W}} = \Phi_*\mathcal{W}$ es un campo vectorial proyectable en $\widetilde{M}$. Más aún, dada una conexión Γ en M, el campo vectorial $\widetilde{\mathcal{W}}$ se descompone con respecto a la conexión $\widetilde{\Gamma} = \Phi_*\Gamma$, en la forma siguiente,*

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \mathrm{hor}^{\widetilde{\Gamma}}(\widetilde{w}) + \widetilde{\mathcal{W}}_{\mathbb{V}}.$$

En este caso, $\widetilde{w} = \varphi_* w$ y $\widetilde{\mathcal{W}}_{\mathbb{V}} = \widetilde{\Gamma}(\widetilde{\mathcal{W}})$.

Sistemas proyectables lineales. Supongamos ahora que $P = E$ es un espacio vectorial real. Luego, $M = B \times E$ es el espacio total de un haz vectorial trivial sobre B. Sea $C^\infty_{\mathrm{lin}}(M)$ el espacio de las funciones lineales por fibras en M, es decir, las funciones que al restringirlas al conjunto $\{\xi\} \times E$ son lineales. Un campo vectorial $\mathcal{W}$ en M se dice ser *lineal* si la derivada de Lie a lo largo de $\mathcal{W}$ preserva el espacio de las funciones lineales por fibras,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{W}}\big(C^\infty_{\mathrm{lin}}(M)\big) \subset C^\infty_{\mathrm{lin}}(M). \tag{2.2.12}$$

Esto implica que la sección cero $B \approx B \times \{0\}$ es $\mathcal{W}$-invariante y $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}(\pi^* C^\infty(B)) \subset \pi^* C^\infty(B)$. Por lo tanto, todo campo vectorial lineal $\mathcal{W}$ es proyectable y desciende a un campo vectorial w en B tal que $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}(\pi^* f) = \pi^*(\mathcal{L}_w f)$, para toda $f \in C^\infty(B)$.

Sea $(\xi, x) = (\xi^i, x^\alpha)$ un sistema de coordenadas en M, donde (ξ^i) son coordenadas en B y (x^α) son coordenadas en E asociadas a una cierta base. Luego, en estas coordenadas

$$\mathcal{W} = w^i(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi^i} + W^\alpha_\sigma(\xi)x^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \tag{2.2.13}$$

Una conexión de Ehresmann Γ en $M = B \times E$ es llamada *homogénea* si el levantamiento horizontal $\mathrm{hor}^\Gamma(w)$ es un campo vectorial lineal para todo $u \in \mathfrak{X}(B)$. En este caso,

$$\Gamma = \Gamma^\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \qquad \text{donde} \quad \Gamma^\nu = \mathrm{d}x^\nu + \Gamma^\nu_{i\sigma}(\xi)x^\sigma \mathrm{d}\xi^i.$$

Existe una correspondencia una a uno entre las conexiones homogéneas y las conexiones lineales en el haz vectorial $\pi : M \to B$ [58]. Una clase importante de campos vectoriales lineales proviene del llamado procedimiento de linealización normal, que presentamos en lo que enseguida.

El procedimiento de linealización normal. Consideremos una tripleta de datos geométricos (N, Z, B) que consiste de una variedad suave N, un campo vectorial Z y una subvariedad invariante $B \subset N$. Sea $M = T_B N/TB$ el haz normal con proyección canónica $\upsilon : T_B N \to M$. Supongamos que el haz normal es trivial, es decir, $M = B \times \mathbb{R}^k$, donde $k = \dim N - \dim B$. Denotemos por $\tau_b : T_b M \to \mathbb{R}^k$ la proyección con respecto a la descomposición canónica $T_b M = T_b B \oplus \mathbb{R}^k$. Por el teorema de la vecindad tubular [42], existe una función exponencial, esto es, un difeomorfismo $\mathbf{f} : M \to N$ del espacio total M sobre una vecindad de la base B en N, tal que $\mathbf{f}\big|_B = \mathrm{id}_B$ y $\upsilon_b \circ \mathrm{d}_b \mathbf{f} = \tau_b$.

Para $\varepsilon \in (0, 1]$, definimos la dilatación $m_\varepsilon : M \to M$ por $m_\varepsilon(\xi, x) = (\xi, \varepsilon x)$, para todo $\xi \in B$ y $x \in \mathbb{R}^k$. Luego, se tiene un campo vectorial lineal bine definido en M, el cual está dado por

$$\mathrm{var}_B(Z) = \lim_{\varepsilon \to 0} (\mathbf{f} \circ m_\varepsilon)^* Z.$$

Notemos que esta definición es independiente de la función exponencial $\mathbf{f}$ [66]. El campo vectorial $\mathrm{var}_B(Z)$ es lineal y se proyecta a la restricción $Z\big|_B$ y es llamado el *campo vectorial linealizado* Z en B. El sistema dinámico de $\mathrm{var}_B(Z)$ se llama el *sistema de primera variación*.

Sea $(\xi, x) = (\xi^i, x^\alpha)$ un sistema de coordenadas en M, de tal manera que (x^α) son coordenadas lineales en M. Luego, $B = \{x = 0\}$ y se tiene

$$\mathbf{f}^* Z = Z^i(\xi, x)\frac{\partial}{\partial \xi^i} + Z^\alpha(\xi, x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

En coordenadas,

$$\mathrm{var}_B(Z) = Z^i(\xi, 0)\frac{\partial}{\partial \xi^i} + \frac{\partial Z^\alpha}{\partial x^\sigma}(\xi, 0)\, x^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Otros enfoques para la dinámica Hamiltoniana linealizada también se pueden encontrar en [36, 48, 65, 67, 68].

2.3 Conexiones invariantes

El par formado por un campo vectorial proyectable y una conexión de Ehresmann induce la noción de campo de Higgs [49, 68]. Este concepto nos sirve para caracterizar la invarianza de una conexión de Ehresmann con respecto a un campo vectorial proyectable. De hecho, se prueba que este tipo de campos vectoriales admiten una conexión invariante si y sólo si el campo de Higgs asociado se anula. Así, los campos de Higgs los podemos considerar como obstrucciones para la invarianza de una conexión.

Sea $\mathcal{W}$ un campo vectorial proyectable en $M = B \times P$ que desciende al campo vectorial w en B. Supongamos que Φ^t es el flujo de $\mathcal{W}$ y φ^t es el flujo de w.

Definición 2.5 *Una conexión de Ehresmann Γ en M se dice ser $\mathcal{W}$-*invariante *si el flujo Φ^t de $\mathcal{W}$ preserva la distribución horizontal de Γ, es decir,*

$$\left(\mathrm{d}_m \Phi^t\right) \mathbb{H}_m = \mathbb{H}_{\Phi^t(m)}, \qquad \forall\, m \in M. \tag{2.3.1}$$

En términos infinitesimales, la condición de $\mathcal{W}$-invarianza de la conexión Γ es equivalente a la condición siguiente: El corchete de Lie de $\mathcal{W}$ con cualquier campo vectorial horizontal es, de nuevo, un campo vectorial horizontal. Esto lo expresamos por

$$[\,\mathcal{W}, \mathfrak{X}_{\mathbb{H}}(M)\,] \subset \mathfrak{X}_{\mathbb{H}}(M). \tag{2.3.2}$$

Por otra parte, de la descomposición (2.2.6) se sigue directamente que para cualquier conexión Γ en M se cumple la siguiente relación,

$$[\,\mathcal{W}, \mathrm{hor}^{\Gamma}(u)\,] = \mathrm{hor}^{\Gamma}([w,u]) \,-\, [\,\mathrm{hor}^{\Gamma}(u), \mathcal{W}_{\mathbb{V}}\,] \,-\, \mathrm{Curv}^{\Gamma}(w,u), \tag{2.3.3}$$

donde los dos últimos términos representan la parte vertical de este corchete de Lie:

$$[\,\mathcal{W}, \mathrm{hor}^{\Gamma}(u)\,]_{\mathbb{V}} = -\,[\,\mathrm{hor}^{\Gamma}(u), \mathcal{W}_{\mathbb{V}}\,] \,-\, \mathrm{Curv}^{\Gamma}(w,u). \tag{2.3.4}$$

Esta observación es importante y nos permite introducir el concepto de campo de Higgs asociado a la conexión Γ en M.

Lema 2.6 *El par $\left(\mathcal{W}, \Gamma\right)$ induce una* 1*-forma con valores vectoriales $A_{\mathcal{W},\Gamma} \in \Omega^1(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M))$ definida por*

$$A_{\mathcal{W},\Gamma}(u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\,\mathcal{W}, \mathrm{hor}^{\Gamma}(u)\,] \,-\, \mathrm{hor}^{\Gamma}([w,u]), \qquad \forall\, u \in \mathfrak{X}(B). \tag{2.3.5}$$

A la 1-forma $A_{\mathcal{W},\Gamma}$ le llamaremos, siguiendo a [49], un *campo de Higgs* asociado al campo vectorial proyectable $\mathcal{W}$ y a la conexión Γ. Se sigue que

$$[\,\mathcal{W}, \mathrm{hor}^{\Gamma}(u)\,] = \mathrm{hor}^{\Gamma}([w,u]) \,+\, A_{\mathcal{W},\Gamma}, \tag{2.3.6}$$

lo cual es equivalente a,

$$A_{\mathcal{W},\Gamma} = [\,\mathcal{W}, \mathrm{hor}^{\Gamma}(u)\,]_{\mathbb{V}}. \tag{2.3.7}$$

De esta manera, dada una conexión Γ en M, las observaciones anteriores nos permiten establecer una correspondencia entre campos vectoriales proyectables en M y campos de Higgs: $\mathcal{W} \mapsto A_{\mathcal{W},\Gamma}$, la cual satisface las propiedades siguientes:

$$A_{\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2,\Gamma} = A_{\mathcal{W}_1,\Gamma} + A_{\mathcal{W}_2,\Gamma}, \tag{2.3.8}$$

$$A_{(\pi^* f)\mathcal{W},\Gamma} = (\pi^* f)A_{\mathcal{W},\Gamma} + \mathrm{d}f \otimes \mathcal{W}_{\mathbb{V}}, \tag{2.3.9}$$

donde $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son campos vectoriales proyectables arbitrarios en M y f es cualquier función en $C^\infty(B)$. La identidad (2.3.8) es trivial y (2.3.9) se sigue del hecho de que el campo vectorial proyectable $(\pi^* f)\mathcal{W}$ desciende a $fw \in \mathfrak{X}(B)$.

Por otro lado, puesto que para cada $u \in \mathfrak{X}(B)$ se tiene que $A_{\mathcal{W},\Gamma}(u)$ es un campo vectorial vertical, podemos decir que el campo de Higgs $A_{\mathcal{W},\Gamma}$ *mide* la desviación de la conexión Γ de la propiedad de $\mathcal{W}$-invarianza. El siguiente resultado nos proporciona un criterio útil para establecer la $\mathcal{W}$-invarianza de una conexión Γ en M.

Lema 2.7 *Una conexión de Ehresmann Γ en M es $\mathcal{W}$-invariante si y sólo si cumple alguna de las condiciones siguientes:*

(i) *El campo de Higgs se anula,*

$$A_{\mathcal{W},\Gamma} = 0. \tag{2.3.10}$$

(ii) *Para todo $u \in \mathfrak{X}(B)$,*

$$[\,\mathcal{W}, \mathrm{hor}^\Gamma(u)\,] = \mathrm{hor}^\Gamma([w,u]). \tag{2.3.11}$$

(iii) *La parte vertical de $\mathcal{W}$ satisface*

$$[\,\mathcal{W}_{\mathbb{V}}, \mathrm{hor}^\Gamma\,] = w \lrcorner \,\mathrm{Curv}^\Gamma. \tag{2.3.12}$$

Corolario 2.8 *Dada una conexión Γ en M, el conjunto de todos los campos vectoriales proyectables $\mathcal{W}$ en M para los cuales Γ es $\mathcal{W}$-invariante, es una álgebra de Lie.*

Demostración. Sean $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ dos campos vectoriales proyectables y supongamos que $A_{\mathcal{W}_1,\Gamma} = 0$ y $A_{\mathcal{W}_2,\Gamma} = 0$. De (2.3.8) se sigue que Γ es $(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2)$-invariante. Para probar la invarianza de Γ bajo el corchete de Lie $[\,\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2\,]$, se utiliza la identidad de Jacobi para campos vectoriales junto con la relación (2.3.11). ∎

Supongamos ahora que $\mathcal{W} \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial proyectable dado. Una cuestión natural que surge en este caso es acerca de la posibilidad de describir todas las conexiones $\mathcal{W}$-invariantes en M. Veremos en lo que sigue que podemos dar una respuesta a esta pregunta y para ello es necesario introducir las operaciones siguientes:

(a) Utilizando la propiedad (2.2.5) podemos definir la derivada de Lie a lo largo de cualquier campo vectorial proyectable $\mathcal{W}$, como la 1-forma en B con valores en los campos vectoriales verticales de M, $\mathcal{L}_{\mathcal{W}} : \Omega^1\big(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)\big) \to \Omega^1\big(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)\big)$, por medio de la regla,

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{W}}\,\Xi)(u) \stackrel{\text{def}}{=} [\,\mathcal{W}, \Xi(u)\,], \tag{2.3.13}$$

para $u \in \mathfrak{X}(B)$ y $\Xi \in \Omega^1\big(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)\big)$. Es claro que se satisface la regla de Leibniz: $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}(F\,\Xi) = \mathcal{L}_{\mathcal{W}}(F)\,\Xi + F\,\mathcal{L}_{\mathcal{W}}(\Xi)$, $\forall\, F \in C^\infty(M)$.

(b) La diferenciación parcial $\mathrm{d}_B : \Omega^k\big(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)\big) \to \Omega^{k+1}\big(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)\big)$, llamada también la derivada Γ^0-covariante, está dada por $\mathrm{d}_B = \pi_B \circ \mathrm{d}$. Más precisamente,

$$(\mathrm{d}_B\eta)(X_0, X_1, \ldots, X_k) = (\mathrm{d}\,\eta)\Big((X_0)_{\mathbb{H}}, (X_1)_{\mathbb{H}}, \ldots, (X_k)_{\mathbb{H}}\Big), \tag{2.3.14}$$

donde d es la derivada exterior en M y $X_{\mathbb{H}}$ denota la parte horizontal de $X \in \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)$, relativo a la descomposición (2.1.13).

(c) Sea Γ una conexión dada en M. Para todo campo vectorial vertical Y denotamos por $[\,\mathrm{hor}^\Gamma, Y\,]$ el elemento de $\Omega^1(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M))$ definido por

$$[\,\mathrm{hor}^\Gamma, Y\,](u) \stackrel{\text{def}}{=} [\,\mathrm{hor}^\Gamma(u), Y\,]. \tag{2.3.15}$$

De (2.1.9) se sigue que (2.3.15) está bien definido.

Sea $\mathcal{W}$ un campo vectorial proyectable en M y consideremos ahora una conexión fija, $\widetilde{\Gamma}$, en M. Sea $A_{\mathcal{W},\widetilde{\Gamma}}$ el campo de Higgs correspondiente. En estas condiciones, se tiene el resultado siguiente.

Lema 2.9 *Un campo vectorial proyectable $\mathcal{W}$ en M admite una conexión invariante Γ si y sólo si la siguiente ecuación lineal no-homogénea,*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{W}}\Xi = -A_{\mathcal{W},\widetilde{\Gamma}}, \tag{2.3.16}$$

es soluble para $\Xi \in \Omega^1\big(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)\big)$. En este caso,

$$\Gamma = \widetilde{\Gamma} - \pi^*\Xi. \tag{2.3.17}$$

Demostración. Sustituyendo $\Gamma \mapsto \widetilde{\Gamma} - \pi^*\Xi$ en (2.3.5) y usando las relaciones

$$\mathrm{hor}^\Gamma(u) = \mathrm{hor}^{\widetilde{\Gamma}}(u) + \Xi(u) \qquad \text{y} \qquad [\,\mathcal{W}, \Xi(u)\,]_{\mathbb{V}} = [\,\mathcal{W}, \Xi(u)\,],$$

se obtiene que la regla de transición para el campo de Higgs está dada por

$$A_{\mathcal{W},\Gamma} \mapsto A_{\mathcal{W},\widetilde{\Gamma}} + \mathcal{L}_{\mathcal{W}}\,\Xi, \tag{2.3.18}$$

lo cual implica (2.3.16). ■

Usando ahora la descomposición $\mathcal{W} = \mathrm{hor}^{\widetilde{\Gamma}}(\widetilde{w}) + \widetilde{\mathcal{W}}_{\mathbb{V}}$, podemos reescribir la ecuación (2.3.16) como sigue:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{hor}^{\widetilde{\Gamma}}(\widetilde{w})}\Xi + [\,\widetilde{\mathcal{W}}_{\mathbb{V}}, \Xi\,] = [\,\mathrm{hor}^{\widetilde{\Gamma}}, \widetilde{\mathcal{W}}_{\mathbb{V}}\,] - \widetilde{w} \lrcorner \operatorname{Curv}^{\widetilde{\Gamma}}. \tag{2.3.19}$$

Corolario 2.10 *Si la conexión* $\widetilde{\Gamma}$ *es plana,* $\operatorname{Curv}^{\widetilde{\Gamma}} = 0$*, entonces la ecuación* (2.3.16) *toma la forma*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{hor}^{\widetilde{\Gamma}}(\widetilde{w})}\Xi + [\,\widetilde{\mathcal{W}}_{\mathbb{V}}, \Xi\,] = [\,\mathrm{hor}^{\widetilde{\Gamma}}, \widetilde{\mathcal{W}}_{\mathbb{V}}\,] \tag{2.3.20}$$

Debemos notar que el lado derecho de la “ecuación homológica” (2.3.16) depende de $\mathcal{W}$. Para hacer esta dependencia aún más explícita, hagamos $\widetilde{\Gamma} = \Gamma^0$, la conexión trivial en (2.1.13). Tomando en cuenta (2.1.33), se deduce de (2.3.16) el resultado siguiente:

Proposición 2.11 *Un campo vectorial proyectable* $\mathcal{W} = w^i(\xi)\,\partial/\partial\xi^i + W^\alpha(\xi,x)\,\partial/\partial x^\alpha$ *admite una conexión invariante* Γ *en* M *si y sólo si existe una solución* $\Xi \in \Omega^1\big(B, \mathfrak{X}_{\mathbb{V}}(M)\big)$ *de la ecuación*

$$\mathcal{L}_w\Xi + [\,\mathcal{W}, \Xi\,] = \mathrm{d}_B\mathcal{W}. \tag{2.3.21}$$

La conexión correspondiente está dada por

$$\Gamma = \Big(\mathrm{d}x^\nu - \Xi^\nu_i(\xi,x)\,\mathrm{d}\xi^i\Big) \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \tag{2.3.22}$$

2.4 Conexiones de Poisson

Consideremos ahora una variedad de Poisson (P,Ψ), cuya estructura de Poisson está definida por un tensor de Poisson $\Psi = (1/2)\,\Psi^{\alpha\beta}(x)\,\partial/\partial x^\alpha \wedge \partial/\partial x^\beta$. Sea $M = B \times P$ el espacio total del haz fibrado trivial de Poisson $\pi : M \to B$, sobre la base B. El levantamiento del tensor de Poisson Ψ al espacio total M por medio de la proyección canónica $\pi_{\mathrm{P}} : M \to P$ es un tensor vertical de Poisson, el cual también denotaremos por Ψ. El corchete de Poisson que corresponde al tensor vertical de Poisson Ψ será denotado por $\{\,,\}_\Psi$. Sea $\mathrm{d}_P = \pi_{\mathrm{P}} \circ \mathrm{d}$ la derivación parcial en P. Diremos que una conexión de Ehresmann Γ es una *conexión de Poisson* si para todo $u \in \mathfrak{X}(B)$, el levantamiento horizontal $\mathrm{hor}^\Gamma(u)$ es un automorfismo infinitesimal de Poisson (un campo vectorial de Poisson) de Ψ,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{hor}^\Gamma(u)}\Psi = 0. \tag{2.4.1}$$

De esta manera, las conexiones de Poisson Γ en M están dadas por (2.3.22), donde Ξ es una 1-forma en B con valores en los campos verticales de Poisson de Ψ. Es claro que la conexión trivial Γ^0 es de Poisson.

Una clase especial de conexiones de Poisson Γ corresponde al caso cuando Ξ toma valores en el álgebra de Lie de campos vectoriales Hamiltonianos verticales

$$\Gamma = \Big(\mathrm{d}x^{\nu} - \Xi^{\nu}_i(\xi, x)\,\mathrm{d}\xi^i\Big) \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}, \qquad \Xi = \Psi^{\sharp}\,\mathrm{d}_P Q, \tag{2.4.2}$$

donde Q es la 1-forma horizontal $Q = Q_i(\xi, x)\,\mathrm{d}\xi^i \in \Omega^1_{\mathrm{H}}(M) \approx \Omega^1\big(B, C^{\infty}(M)\big)$ representa el Hamiltoniano de Ξ: $\Xi(u) = \Psi^{\sharp}\mathrm{d}_P Q(u)$, para $u \in \mathfrak{X}(B)$. El levantamiento horizontal correspondiente está dado por

$$\mathrm{hor}^{\Gamma}(u) = u + \Psi^{\sharp}\,\mathrm{d}_P Q(u). \tag{2.4.3}$$

De esto se sigue que la forma de curvatura Curv^{Γ} de (2.4.2) toma valores en el conjunto de los campos vectoriales Hamiltonianos verticales,

$$\mathrm{Curv}^{\Gamma}(u_1, u_2) = -\Psi^{\sharp}\,\mathrm{d}_P \delta_Q(u_1, u_2), \tag{2.4.4}$$

donde la curvatura Hamiltoniana $\delta_Q \in \Omega^2\big(B, C^{\infty}(M)\big)$ es de la forma

$$\delta_Q \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{d}_B Q + \frac{1}{2}\{Q \wedge Q\}_{\Psi}. \tag{2.4.5}$$

Sea $\mathcal{K}(M, \Psi)$ el espacio de las funciones de Casimir en M de la estructura vertical de Poisson. Es claro que $\pi^*\big(C^{\infty}(B)\big) \subset \mathcal{K}(M, \Psi)$. Notemos que los Hamiltonianos Q y δ_Q están determinados de manera única por (2.4.2) y (2.4.4), módulo los elementos de los espacios $\mathcal{K}(M, \Psi) \otimes \Omega^1(B)$ y $\mathcal{K}(M, \Psi) \otimes \Omega^2(B)$, respectivamente.

Consideremos ahora la siguiente clase natural de campos vectoriales proyectables en el haz fibrado trivial de Poisson M:

$$\mathcal{W}_F = w + \Psi^{\sharp}\,\mathrm{d}_P F, \tag{2.4.6}$$

donde $w \in \mathfrak{X}(B)$ y $F \in C^{\infty}(M)$. Para toda trayectoria $\xi(t)$ de w, el sistema dinámico sesqui-producto de (2.4.6) se reduce al sistema Hamiltoniano dependiente del tiempo en (P, Ψ) con Hamiltoniano $F_t(x) = F(\xi(t), x)$, $(x \in M)$. Por lo tanto, podemos pensar de (2.4.6) como una familia generalizada de sistemas Hamiltonianos dependientes del tiempo.

Teorema 2.12 *El corchete de Lie de* $\mathcal{W}_F$ (2.4.6) *y* $\widetilde{\mathcal{W}}_{\widetilde{F}} = \widetilde{w} + \Psi^{\sharp}\,\mathrm{d}_P\widetilde{F}$ *es de la forma*

$$[\,\mathcal{W}_F, \widetilde{\mathcal{W}}_{\widetilde{F}}\,] = [\,w, \widetilde{w}\,] + \Psi^{\sharp}\,\mathrm{d}_P\big(\{F, \widetilde{F}\}_{\Psi} + \mathcal{L}_w \widetilde{F} - \mathcal{L}_{\widetilde{w}} F\big). \tag{2.4.7}$$

De esto que se sigue el espacio de todos los campos vectoriales del tipo (2.4.6) *forman una álgebra de Lie.*

Demostración. Sea Γ una conexión de Poisson. Luego, por las propiedades estándar de los campos vectoriales de Poisson, se tiene

$$[\,\mathrm{hor}^{\Gamma}(\widetilde{w}), \Psi^{\sharp}\,\mathrm{d}_P F\,] = \Psi^{\sharp}\,\mathrm{d}_P\big(\mathcal{L}_{\widetilde{w}} F\big). \tag{2.4.8}$$

Aplicando ahora (2.4.8) junto con (2.2.7) a $\Gamma = \Gamma^0$, se deriva (2.4.7). ■

El resultado que se enuncia a continuación nos da un criterio para la existencia de conexiones invariantes de los campos vectoriales proyectables de la forma (2.4.6) y es una consecuencia directa del Lema 2.3.16.

Teorema 2.13 *El campo vectorial proyectable* $\mathcal{W}_F$ (2.4.6) *admite una conexión invariante de Poisson* Γ*, de la forma* (2.4.2)*, si y sólo si existe una* 1*-forma horizontal* $Q = Q_i(\xi, x)\, \mathrm{d}\xi^i$ *que satisface la ecuación*

$$\mathcal{L}_w Q + \{F, Q\}_\Psi = \mathrm{d}_B F + \kappa, \tag{2.4.9}$$

para una cierta 1*-forma* $\kappa \in \Omega^1(B) \otimes \mathcal{K}(M, \Psi)$.

2.5 Transformaciones gauge Hamiltonianas y reducibilidad

Recordemos de la Sección 2.1 que una transformación gauge en la variedad producto $M = B \times P$ es una función $\mathcal{T} : M \to M$ que preserva las fibras y es de la forma $\mathcal{T}(\xi, x) = \big(\xi, \mathcal{T}_\xi(x)\big)$, donde $\mathcal{T}_\xi : P \to P$ es un difeomorfismo ($\xi \in B,\ x \in P$). Además, el conjunto de este tipo de transformaciones forman un grupo, el llamado grupo gauge.

Supongamos que P es una variedad de Poisson con tensor de Poisson Ψ. Decimos que una transformación gauge es de Poisson si $\mathcal{T}_* \Psi = \Psi$. Equivalentemente, $\mathcal{T}_\xi : P \to P$ es una transformación de Poisson en (P, Ψ) para todo $\xi \in B$. Es claro que tales transformaciones forman un grupo y preservan el conjunto de las conexiones de Poisson en M. Más aún, toda transformación gauge de Poisson $\mathcal{T}$ preserva el espacio de los campos vectoriales verticales Hamiltonianos en M,

$$\mathcal{T}_* \Psi^\sharp\, \mathrm{d}_P F = \Psi^\sharp\, \mathrm{d}_P(\mathcal{T}_* F). \tag{2.5.1}$$

Nuestro objetivo aquí es describir las transformaciones gauge de Poisson que dejan invariante el álgebra de Lie de los campos vectoriales proyectables de la forma (2.4.6).

Supongamos que se tiene dada una transformación gauge de Poisson $\mathcal{T}$ y consideremos la conexión trivial Γ^0. Recordemos que a todo campo vectorial $w \in \mathfrak{X}(B)$ lo identificamos con el Γ^0-levantamiento horizontal, $w = \mathrm{hor}^{\Gamma^0}(w)$. Puesto que Γ^0 es una conexión de Poisson, es claro que w es un campo vectorial de Poisson. Luego, el "*push-forward*" $\mathcal{T}_* w$ es también un campo vectorial de Poisson. Es fácil ver que la Γ^0-parte horizontal de $\mathcal{T}_* w$ es precisamente w. Por lo tanto,

$$\mathcal{T}_* w - w, \tag{2.5.2}$$

es un campo vertical de Poisson. En coordenadas,

$$\mathcal{T}_* w - w = w^i(\xi)\, \frac{\partial \mathcal{T}_\xi^\alpha}{\partial \xi^i} \left(\mathcal{T}_\xi^{-1}(x)\right) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \tag{2.5.3}$$

Definición 2.14 *Una transformación gauge de Poisson $\mathcal{T}$ se dice ser una* transformación gauge Hamiltoniana *si existe una 1-forma $\Theta_{\mathcal{T}} \in \Omega^1\big(B, C^\infty(M)\big)$, esto es, una transformación $\mathbb{R}$-lineal, $\Theta_{\mathcal{T}} : \mathfrak{X}(B) \to C^\infty(M)$,*

$$w \mapsto \Theta_{\mathcal{T}}(w), \tag{2.5.4}$$

tal que

$$\mathcal{T}_* w - w = -\Psi^\sharp \, \mathrm{d}_P \Theta_{\mathcal{T}}(w). \tag{2.5.5}$$

para cualquier $w \in \mathfrak{X}(B)$.

Notemos que una manera equivalente de escribir (2.5.5) es la siguiente:

$$\mathcal{T}_* \Gamma^0 = \Gamma^0 + \Psi^\sharp \, \mathrm{d}_P \Theta_{\mathcal{T}}. \tag{2.5.6}$$

Por lo tanto, para cada transformación gauge Hamiltoniana $\mathcal{T}$ y todo campo vectorial proyectable de la forma (2.4.6), se tiene

$$\mathcal{T}_* \mathcal{W}_F = w + \Psi^\sharp \, \mathrm{d}_P \Big(\mathcal{T}_* F - \Theta_{\mathcal{T}}(w) \Big). \tag{2.5.7}$$

Supongamos ahora que $\mathcal{T}$ y $\widetilde{\mathcal{T}}$ son dos transformaciones gauge Hamiltonianas dadas. Luego, usando la Definición 2.14, se deduce que la composición $\mathcal{T} \circ \widetilde{\mathcal{T}}$ es también una transformación gauge Hamiltoniana, cuyo Hamiltoniano está definido por la regla siguiente:

$$\Theta_{\mathcal{T} \circ \widetilde{\mathcal{T}}} = \Theta_{\mathcal{T}} + \mathcal{T}_* \Theta_{\widetilde{\mathcal{T}}}. \tag{2.5.8}$$

De esto se sigue que el conjunto de todas las transformaciones gauge Hamiltonianas en M forman un grupo. En resumen, tenemos el resultado siguiente.

Proposición 2.15 *El grupo de las transformaciones gauge de Poisson que preservan el álgebra de Lie de los campos vectoriales proyectables de la forma $\mathcal{W}_F = w + \Psi^\sharp \, \mathrm{d}_P F$ coincide con el grupo de transformaciones gauge Hamiltonianas. En este caso, w varía en $\mathfrak{X}(B)$ y F varía sobre $C^\infty(M)$.*

Corolario 2.16 *Si Γ es una conexión de Poisson de la forma* (2.4.2) *y es invariante con respecto a $\mathcal{W}_F = w + \Psi^\sharp \mathrm{d}_P F$, entonces para cualquier transformación gauge Hamiltoniana $\mathcal{T}$, el* "push-forward" *$\mathcal{T}_* \Gamma$ es una conexión de Poisson, la cual es invariante con respecto a $\mathcal{T}_* \mathcal{W}_F$.*

De (2.5.1) y (2.5.6) se tiene

$$\mathcal{T}_* \Gamma = \Gamma^0 - \Psi^\sharp \mathrm{d}_P \big(\mathcal{T}_* Q - \Theta_{\mathcal{T}} \big). \tag{2.5.9}$$

Por lo tanto, analíticamente la afirmación del Corolario 2.16 significa que la transformación

$$(F, Q) \mapsto (\widetilde{F}, \widetilde{Q}) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\mathcal{T}_* F - \Theta_{\mathcal{T}}(w), \mathcal{T}_* Q - \Theta_{\mathcal{T}} \big), \tag{2.5.10}$$

preserva la condición de invarianza (2.4.9).

Definición 2.17 *Un campo vectorial proyectable $\mathcal{W}_F = w + \Psi^\sharp \mathrm{d}_P F$ se dice ser* reducible *si existe una transformación gauge Hamiltoniana $\mathcal{T}$ tal que la función*

$$F^0 = \mathcal{T}_* F - \Theta_{\mathcal{T}}(w), \tag{2.5.11}$$

es constante a lo largo de la trayectoria de w,

$$\mathcal{L}_w F^0 = 0. \tag{2.5.12}$$

Si $\mathcal{W}_F$ es reducible, entonces el sistema dinámico del campo vectorial transformado $\mathcal{T}_*\mathcal{W}_F$ toma la forma

$$\dot{\xi} = w(\xi), \tag{2.5.13}$$

$$\dot{x} = \Psi^\sharp \mathrm{d}_P F^0(\xi, x), \tag{2.5.14}$$

y posee la propiedad siguiente: Dada una trayectoria $\xi(t)$ de w que pasa por un punto $\xi^0 \in B$, el sistema (2.5.13), (2.5.14) se reduce al sistema Hamiltoniano, independiente del tiempo, en P

$$\dot{x} = \Psi^\sharp \mathrm{d}_P F^0(\xi^0, x).$$

Por lo tanto, la Definición 2.17 coincide con la noción usual de reducibilidad para sistemas Hamiltonianos lineales con coeficientes periódicos [72]. Un análogo no lineal del teorema de Floquet clásico se puede obtener en el caso que se analiza enseguida.

Familias de sistemas de Lie periódicos. Sea (P, Ψ) una variedad de Poisson y sea G un grupo de Lie real con $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Supongamos que se tiene dada una acción por la izquierda del grupo G en la variedad P, esto es, $\Phi : G \times P \to P$. Para cualesquiera $g \in G$ y $x \in P$, denotemos por $\Phi_g : P \to P$ y $\Phi^x : G \to P$ las funciones definidas por $\Phi^x(g) = \Phi_g(x) = \Phi(g, x)$. El generador infinitesimal de cada $a \in \mathfrak{g}$ se define por

$$X_a(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi_{\exp(t\alpha)}(x)\big|_{t=0} = T_e \Phi^x(a). \tag{2.5.15}$$

Supongamos que la G-acción es canónica [45], esto es, existe una transformación de momento $\mathbb{J} : M \to \mathfrak{g}^*$,

$$X_a(x) = \Psi^\sharp \mathrm{d}\, \mathbb{J}_a(x), \tag{2.5.16}$$

para $a \in \mathfrak{g}$ y $m \in M$. En este caso, $\mathbb{J}_a(x) = \langle \mathbb{J}(x), a \rangle$.

Sea B una variedad suave y $w \in \mathfrak{X}(B)$. Dada una función suave

$$B \ni \xi \mapsto a(\xi) \in \mathfrak{g}, \tag{2.5.17}$$

consideremos el siguiente sistema dinámico en $M = B \times P$, el cual es llamado un *sistema de Lie* [15] sobre B,

$$\dot{\xi} = w(\xi), \tag{2.5.18}$$

$$\dot{x} = T_e \Phi^x\big(a(\xi)\big). \tag{2.5.19}$$

Es claro que el campo vectorial del sistema (2.5.18), (2.5.19) es de la forma $\mathcal{W}_F$, con

$$F(\xi, x) = \mathbb{J}_{a(\xi)}(x). \tag{2.5.20}$$

En este caso, una clase importante de transformaciones gauge Hamiltonianas se puede describir como sigue. Sea

$$B \ni \xi \mapsto \beta(\xi) \in G, \tag{2.5.21}$$

una función suave. Definimos $\mathcal{T} : M \to M$, $\mathcal{T}(\xi, x) = \big(\xi, \mathcal{T}_\xi(x)\big)$ por

$$\mathcal{T}_\xi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{\beta(\xi)}(x). \tag{2.5.22}$$

Usando la fórmula de variación estándar [45], se sigue que esta transformación actúa sobre el campo vectorial $\mathcal{W}_F$ del sistema (2.5.18), (2.5.19) en la forma siguiente:

$$\big(\mathcal{T}_* \mathcal{W}_F\big)(\xi, x) = \Big(w(\xi), \big(\Psi^\sharp \mathrm{d}_P \mathbb{J}_{b_{(\xi)}}\big)(x)\Big), \tag{2.5.23}$$

donde

$$b_\xi = \mathrm{Ad}_{\beta(\xi)}\, a(\xi) \;+\; \big(T_{\beta(\xi)} R_{\beta^{-1}(\xi)}\big)\, \mathrm{d}_\xi \beta(w) \in \mathfrak{g}, \tag{2.5.24}$$

y $\mathrm{d}_\xi \beta : T_\xi B \longrightarrow T_{\alpha(\xi)} G$ es la transformación tangente de (2.5.21). Esto implica que la transformación (2.5.22) es una transformación gauge Hamiltoniana con Hamiltoniano Θ definido por

$$\Theta(u)(\xi, x) = -\Big\langle \mathbb{J}(x), \big(T_{\beta(\xi)} R_{\beta^{-1}(\xi)}\big)\, \mathrm{d}_\xi \beta(u) \Big\rangle. \tag{2.5.25}$$

para $u \in \mathfrak{X}(B)$. De esto podemos deducir el siguiente criterio: Si existe un elemento β como en (2.5.21), de tal manera que para toda trayectoria $\xi(t)$ la función

$$b_{\xi(t)} = \text{const}, \tag{2.5.26}$$

entonces el sistema (2.5.18), (2.5.19) es reducible bajo la transformación (2.5.22).

Consideremos ahora el caso cuando $B = D \times \mathbb{S}^1 = \{\xi = (s, \varphi)\}$ y $w = \omega(s)\partial/\partial\varphi$. Aquí, $D \subset \mathbb{R}$ es un espacio de parámetros y $s \mapsto \omega(s) \neq 0$ es una función suave. Supongamos que la función $a(\xi) = a(s, \varphi)$ en (2.5.17) define una familia de curvas cerradas en $\mathfrak{g}$ que depende de manera suave del parámetro s y es periódica en φ:

$$a(s, \varphi + 2\pi) = a(s, \varphi). \tag{2.5.27}$$

Entonces, el sistema de Lie (2.5.18), (2.5.19) toma la forma

$$\dot{s} = 0, \tag{2.5.28}$$

$$\dot{\varphi} = \omega(s), \tag{2.5.29}$$

$$\dot{x} = \Psi^\sharp \mathrm{d}\, \mathbb{J}_{a(s,\varphi)}(x). \tag{2.5.30}$$

Sea $(s,\varphi) \mapsto g(s,\varphi) \in G$ una solución del problema de Cauchy

$$\omega(s)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\varphi} = \big(T_e R_g\big) a(s,\varphi), \tag{2.5.31}$$

$$g(s,0) = e. \tag{2.5.32}$$

En general, $g(s,\varphi)$ no es 2π-periódica debido a la obstrucción que representa la monodromía. Si aceptamos la hipótesis sobre la existencia del logaritmo para la monodromía, es decir, existe una función suave $D \ni s \mapsto k(s) \in \mathfrak{g}$ tal que

$$g(s,2\pi) = \exp\big(2\pi k(s)\big). \tag{2.5.33}$$

Defínase ahora la función

$$\beta(s,\varphi) \overset{\text{def}}{=} \exp\big(\varphi k(s)\big) \cdot g^{-1}(s,\varphi). \tag{2.5.34}$$

Sustituyendo (2.5.34) en (2.5.24), se puede verificar que se cumple (2.5.26).

Proposición 2.18 *Bajo la condición* (2.5.33)*, el sistema* (2.5.28)-(2.5.30) *es reducible por medio de la transformación gauge Hamiltoniana* (2.5.22)*, con β dada por* (2.5.34)*, a la forma "constante"*

$$\dot{s} = 0, \tag{2.5.35}$$

$$\dot{\varphi} = \omega(s), \tag{2.5.36}$$

$$\dot{x} = \Psi^{\sharp}\mathrm{d}\,\mathbb{J}_{k(s)}(x). \tag{2.5.37}$$

Aquí es necesario apuntar que algunos criterios sobre la reducibilidad de sistemas de Lie también se han obtenido en [23, 27].

Capítulo 3

El Problema de Hamiltonización para la Dinámica Proyectable

Recordemos que dado un sistema dinámico arbitrario (M, X), el problema de Hamiltonización para este sistema consiste en encontrar una estructura de Poisson Ψ en M y una función $H \in C^{\infty}(M)$, de tal manera que el campo vectorial X sea precisamente el campo vectorial Hamiltoniano determinado por la función H. En un contexto general, este problema no es fácil de resolver por lo que una estrategia razonable es considerar una clase de sistemas dinámicos en espacios fase de un cierto tipo y tratar de dar una formulación Hamiltoniana para tales sistemas, por medio de una clase apropiada de estructuras de Poisson en esos espacios fase.

Este es precisamente el enfoque que se presenta en este capítulo ya que estudiaremos el problema de Hamiltonización para los sistemas dinámicos sesquiproducto en haces fibrados triviales del tipo (*variedad simpléctica*) $\times$ (*variedad de Poisson*), en los que se introduce una estructura de Poisson parametrizada por una forma horizontal Q, llamadas Q-estructuras de Poisson, las cuales tienen una interpretación geométrica en el contexto del acoplamiento de Poisson [66, 68, 69]. Nuestro objetivo aquí es formular un criterio de Hamiltonización para la dinámica proyectable en términos de las soluciones de una ecuación lineal no homogénea e investigar algunos casos en los que es posible obtener soluciones explícitas para esta ecuación.

3.1 Planteamiento del problema

Consideremos un espacio fase el cual se separa como $M = B \times P$, donde B es una variedad simpléctica y P es una variedad de Poisson con corchetes de Poisson $\{\,,\,\}_B$ y $\{\,,\,\}_P$, respectivamente. En este caso podemos ver a M como el espacio total de un haz fibrado trivial sobre B, con fibra típica P, y estudiar un *sistema dinámico proyectable* en M el cual es el resultado de *acoplar* un sistema Hamiltonian en B con Hamiltoniano $f : B \to \mathbb{R}$ y una familia de sistemas Hamiltonianos en P con

Hamiltonianos paramétricamente dependientes $F : B \times P \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} = \{f, \xi^i\}_B, \tag{3.1.1}$$
$$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} = \{F_\xi, x^\alpha\}_P, \tag{3.1.2}$$

donde $\xi = (\xi^i) \in B$, $x = (x^\alpha) \in P$ y $F_\xi(x) = F(\xi, x)$. En la mecánica clásica es usual estudiar sistemas cuyas ecuaciones de movimiento son de la forma (3.1.1), (3.1.2) [50, 52, 53, 68]. Aquí estamos especialmente interesados en el caso cuando B es una variedad simpléctica y la estructura de Poisson en P es degenerada y tiene puntos singulares. Varios ejemplos importantes de este tipo de sistemas son los llamados *sistemas de primera variación*, los cuales surgen en el estudio de la dinámica Hamiltoniana alrededor de subvariedades simplécticas invariantes [24, 36, 65, 68].

En general, el sistema (3.1.1), (3.1.2) no es Hamiltoniano en el corchete natural en M, es decir, el corchete que corresponde a la estructura de Poisson producto la cual está definida por el producto directo de las estructuras de Poisson en cada uno de los factores B y P. Nuestro propósito aquí es dar una formulación Hamiltoniana para los *sistemas dinámicos sesqui-producto* (*skew-product dynamical systems*), es decir, es necesario encontrar un corchete Poisson $\{\,,\}_M$ en el espacio total M de tal manera que (3.1.1), (3.1.2) se escriba en la forma

$$\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} = \{H, \xi^i\}_M, \tag{3.1.3}$$
$$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} = \{H, x^\alpha\}_M, \tag{3.1.4}$$

para una cierta función suave $H : B \times P \to \mathbb{R}$.

Una de las principales motivaciones para este problema de Hamiltonización viene de la teoría de perturbaciones [68]. En efecto, consideremos el espacio fase $M = B \times P$ equipado con una estructura de Poisson la cual es el producto de $\{\,,\}_B$ y el corchete de Poisson re-escalado por un parámetro $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{\varepsilon}\{\,,\}_P$. Si en este espacio fase estudiamos un sistema Hamiltoniano $\mathcal{H}_\varepsilon(\xi, x) = f(\xi) + \varepsilon F(\xi, x) + O(\varepsilon^2)$ para $\varepsilon \ll 1$, entonces el sistema límite correspondiente (no-perturbado) coincide precisamente con el sistema (3.1.1), (3.1.2), el cual no necesariamente es Hamiltoniano con el corchete original en M. Así, la Hamiltonización de (3.1.1), (3.1.2) puede verse como un primer paso del enfoque KAM para $\mathcal{H}_\varepsilon$ [20].

En el caso cuando $P = \mathfrak{g}^*$ es la coálgebra de una álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ y $F_\xi : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ es lineal, el sistema (3.1.1), (3.1.2) es descrito por ecuaciones de Euler lineales sobre la variedad simpléctica B y este tipo de sistemas aparecen en el proceso de linealización de sistemas Hamiltonianos alrededor de hojas simplécticas singulares [66, 67, 68]. El problema de Hamiltonización que corresponde a este caso se estudió en [68]. En este trabajo se extienden esos resultados al caso general de corchetes de Poisson (no lineales) en P.

El principal resultado que presentamos aquí es un criterio para la existencia de una estructura Hamiltoniana $\{\,,\}_M$ para (3.1.1), (3.1.2), el cual es formulado como la solubilidad de una ecuación diferencial lineal no homogénea (una ecuación homológica) en B. Geométricamente, este criterio está relacionado con la existencia de una conexión de Ehresmann en el haz trivial $B \times P \to B$, la cual es invariante con respecto al flujo de (3.1.1), (3.1.2). La construcción de la estructura Hamiltoniana $\{\,,\}_M$ se basa en la aplicación del método de acoplamiento de Poisson [66, 69].

En la Sección 3.2 se introducen y se estudia una clase especial de estructuras de Poisson de acoplamiento en M, parametrizadas por 1-formas horizontales Q en M, a las cuales les llamamos Q-estructuras de Poisson. En la Sección 3.3 formulamos un criterio para la existencia de una estructura Hamiltoniana para el sistema (3.1.1), (3.1.2) en la clase de Q-estructuras de Poisson. En la Sección 3.4 se discuten también algunos aspectos de la teoría de simetrías y aplicaciones a sistemas Hamiltonianos dependientes del tiempo en espacios fase generales.

3.2 Q-estructuras de Poisson

Sea $M = B \times P$ el producto de una variedad simpléctica (B, ω) y una variedad de Poisson (P, Ψ). En este caso,

$$\omega = (1/2)\, \omega_{ij}(\xi)\; \mathrm{d}\xi^i \wedge \mathrm{d}\xi^j, \qquad \big(\xi = (\xi^i) \in B\big), \tag{3.2.1}$$

es la estructura simpléctica en B y

$$\Psi = (1/2)\, \Psi^{\alpha\beta}(x)\; \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial x^\beta}, \qquad \big(x = (x^\alpha) \in P\big), \tag{3.2.2}$$

es el tensor de Poisson en P. Los corchetes de Poisson que corresponden a la estructura simpléctica ω en B y a la estructura de Poisson Ψ en P son, respectivamente,

$$\{\xi^i, \xi^j\}_B = -\omega^{ij}(\xi), \qquad (\omega^{is}\omega_{sj} = \delta^i_j), \tag{3.2.3}$$

$$\{x^\alpha, x^\beta\}_P = \Psi^{\alpha\beta}(x). \tag{3.2.4}$$

Recordemos que el espacio fase M es visto como el espacio total del haz fibrado trivial $\pi : B \times M \to B$ sobre la base B, con fibra típica P. Los campos vectoriales en M, tangentes a las fibras, son llamados *verticales* y cualquier forma diferencial en M que anula a los campos verticales se dice ser *horizontal*. Denotemos por d_B y d_P las derivadas parciales exteriores en M a lo largo de B y P, respectivamente. Es claro que $\mathrm{d}_M = \mathrm{d}_P + \mathrm{d}_B$ y $\mathrm{d}_B^2 = \mathrm{d}_P^2 = 0$, $\mathrm{d}_P \circ \mathrm{d}_B = -\mathrm{d}_B \circ \mathrm{d}_P$.

Sean π_B y π_P las proyecciones canónicas sobre cada uno de los factores respectivos. Luego, el levantamiento natural de Ψ a M nos da un π-campo vertical de bi-vectores al que llamaremos la *estructura de Poisson vertical*. Más aún, para cualquier $G \in C^\infty(M)$ y cualesquiera 1-formas horizontales $\alpha = \alpha_i\, \mathrm{d}\xi^i$ y $\beta = \beta_j\, \mathrm{d}\xi^j$ en M, denotamos por $\{G, \alpha\}_P$ y $\{\alpha \wedge \beta\}_P$, respectivamente, las formas horizontales siguientes:

$$\{G, \alpha\}_P = \{G, \alpha_i\}_P\, \mathrm{d}\xi^i, \tag{3.2.5}$$

$$\{\alpha \wedge \beta\}_P = \{\alpha_i, \beta_j\}_P\, \mathrm{d}\xi^i \wedge \mathrm{d}\xi^j. \tag{3.2.6}$$

Dada una 1-forma horizontal $Q = Q_i(\xi, x)\, \mathrm{d}\xi^i$ en M introducimos la siguiente 2-forma horizontal,

$$\mathcal{F}_Q = \pi^*\omega - \big(\mathrm{d}_B Q + (1/2)\, \{Q \wedge Q\}_P\big). \tag{3.2.7}$$

En coordenadas, esta expresión toma la forma

$$\mathcal{F}_Q = (1/2)\, \mathcal{F}_{ij}(\xi, x)\ \mathrm{d}\xi^i \wedge \mathrm{d}\xi^j, \tag{3.2.8}$$

donde

$$\mathcal{F}_{ij}(\xi, x) = \omega_{ij}(\xi) - \left(\frac{\partial Q_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial Q_i}{\partial \xi^j} + \{Q_i, Q_j\}_P\right). \tag{3.2.9}$$

Denotemos por

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{F}_Q) = \big\{(\xi, x) \in M \,\big|\, \det[\mathcal{F}_{ij}(\xi, x)] \neq 0\big\}, \tag{3.2.10}$$

un dominio abierto en M, el cual consiste de aquellos puntos en los que la 2-forma $\mathcal{F}_Q$ es no-degenerada y consideremos las siguientes relaciones para los corchetes de las funciones coordenadas ξ^i, x^α en $\mathrm{Dom}(\mathcal{F}_Q)$:

$$\{\xi^i, \xi^j\}_M = -\mathcal{F}^{ij}(\xi, x), \tag{3.2.11}$$

$$\{\xi^i, x^\sigma\}_M = \mathcal{F}^{is}(\xi, x)\, \Psi^{\sigma\nu}(x)\, \frac{\partial Q_s}{\partial x^\nu}(\xi, x), \tag{3.2.12}$$

$$\{x^\alpha, x^\beta\}_M = \Psi^{\alpha\beta}(x) + \Psi^{\alpha\nu}(x)\, \frac{\partial Q_i}{\partial x^\nu}(\xi, x)\, \mathcal{F}^{ij}(\xi, x)\, \frac{\partial Q_j}{\partial x^\mu}(\xi, x)\, \Psi^{\mu\beta}(x). \tag{3.2.13}$$

En este caso, $\mathcal{F}^{is} = \mathcal{F}^{is}(\xi, x)$ denota las entradas de la inversa de la matriz $[\mathcal{F}_{ij}(\xi, x)]$, $\mathcal{F}^{is}\mathcal{F}_{sj} = \delta^i_j$.

Teorema 3.1 *Para cada* 1*-forma horizontal Q en M, el corchete definido por las relaciones* (3.2.11)-(3.2.13) *determina una estructura de Poisson en* $\mathrm{Dom}(\mathcal{F}_Q)$*, asociada con los datos geométricos* (ω, Ψ, Q).

La demostración de este teorema se basa en la idea de acoplamiento de Poisson, la cual proporciona un enfoque geométrico general para la construcción de estructuras de Poisson por medio de conexiones de Ehresmann. En este caso, usando las técnicas estándar del cálculo diferencial [1, 35, 62] presentamos una verificación directa de la identidad de Jacobi para el corchete dado por las relaciones (3.2.11)-(3.2.13).

Primeramente, debemos probar que las relaciones para el corchete definen un campo de bi-vectores, que está bien definido en todo el dominio $\mathrm{Dom}(\mathcal{F}_Q)$. Para ello, dada una 1-forma horizontal Q asociamos con ésta los siguientes objetos:

(i) Los campos vectoriales (locales) en M:

$$\mathrm{hor}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \xi^i} - \Psi^{\alpha\beta} \frac{\partial Q_i}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \tag{3.2.14}$$

para $i = 1, \ldots, \dim B$.

(ii) El campo de bi-vectores

$$\Pi_Q^{\mathbb{H}} = -(1/2)\, \mathcal{F}^{ij}(\xi, x)\ \mathrm{hor}_i \wedge \mathrm{hor}_j. \tag{3.2.15}$$

Debemos notar que $\{\mathrm{hor}_i, \partial/\partial x^\alpha\}$ forma una base de campos vectoriales (locales) en M. De las reglas de transición para $\mathcal{F}^{ij}$ y para hor_i bajo el cambio de coordenadas locales (ξ^i) se sigue que Π_Q^H es un campo de bi-vectores bien definido en $\mathrm{Dom}(\mathcal{F}_Q) \subset M$. Introduzcamos ahora el campo de bi-vectores

$$\Pi_Q = \Pi_Q^{\mathbb{H}} + \Psi. \tag{3.2.16}$$

Un cálculo directo nos muestra que, en términos de Π_Q, las relaciones (3.2.11)-(3.2.13) para el corchete $\{\,,\}_M$ de las funciones coordenadas se pueden escribir como sigue:

$$\{\xi^i, \xi^j\}_M = \Pi_Q(\mathrm{d}\xi^i, \mathrm{d}\xi^j), \tag{3.2.17}$$

$$\{\xi^i, x^\sigma\}_M = \Pi_Q(\mathrm{d}\xi^i, \mathrm{d}x^\sigma), \tag{3.2.18}$$

$$\{x^\alpha, x^\beta\}_M = \Pi_Q(\mathrm{d}x^\alpha, \mathrm{d}x^\beta). \tag{3.2.19}$$

Debemos probar ahora que Π_Q es un tensor de Poisson tensor, esto es, satisface la identidad de Jacobi,

$$[\,\Pi_Q, \Pi_Q\,] = 0. \tag{3.2.20}$$

Dado que Ψ es un tensor de Poisson, (3.2.20) se reduce a la siguiente ecuación

$$\left[\,\Pi_Q^{\mathbb{H}}, \Pi_Q^{\mathbb{H}}\,\right] + 2\left[\,\Pi_Q^{\mathbb{H}}, \Psi\,\right] = 0. \tag{3.2.21}$$

Realizando los cálculos indicados en el primer término en (3.2.21), podemos derivar las siguientes relaciones entre hor_i y $\mathcal{F}_Q$.

Lema 3.2 *El corchete de Lie de los campos vectoriales* hor_i *y* hor_j *es de la forma*

$$[\,\mathrm{hor}_i, \mathrm{hor}_j\,] = -\,C_{ij}^\sigma(\xi, x)\,\frac{\partial}{\partial x^\sigma}, \tag{3.2.22}$$

donde

$$C_{ij}^\sigma = \Psi^{\nu\sigma}\,\frac{\partial \mathcal{F}_{ij}}{\partial x^\nu}. \tag{3.2.23}$$

Demostración. Notemos que es posible representar los campos vectoriales hor_i en la forma

$$\mathrm{hor}_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \Psi^\sharp(\mathrm{d}_P Q_i).$$

Así, de las propiedades de los campos vectoriales Hamiltonianos $\Psi^\sharp(\mathrm{d}_P Q_i)$, se obtiene:

$$\left[\, \Psi^\sharp(\mathrm{d}_P Q_i), \Psi^\sharp(\mathrm{d}_P Q_j) \,\right] = \Psi^\sharp\big(\mathrm{d}_P \{Q_i, Q_j\}_P\big),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \Psi^\sharp(\mathrm{d}_P Q_j) \right] = \Psi^\sharp \left(\mathrm{d}_P \frac{\partial Q_j}{\partial \xi^i} \right).$$

De esto, claramente se siguen las relaciones (3.2.22) y (3.2.23). ■

Aplicando las fórmulas (3.2.22) y (1.3.11), (1.3.12) se obtiene

$$\begin{aligned} \left[\, \Pi^{\mathbb{H}}_Q, \Pi^{\mathbb{H}}_Q \,\right] &= (1/4) \left[\, \mathcal{F}^{ij}\, \mathrm{hor}_i \wedge \mathrm{hor}_j,\ \mathcal{F}^{i'j'}\, \mathrm{hor}_{i'} \wedge \mathrm{hor}_{j'} \,\right] \\ &= -\mathcal{F}^{ks}\, \mathcal{L}_{\mathrm{hor}_s}(\mathcal{F}^{ij})\, \mathrm{hor}_i \wedge \mathrm{hor}_j \wedge \mathrm{hor}_k \\ &\quad - \mathcal{F}^{ji}\, C^{\sigma}_{ii'}\, \mathcal{F}^{i'j'} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \wedge \mathrm{hor}_j \wedge \mathrm{hor}_{j'}. \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Si tomamos en cuenta (3.2.14), se deriva la siguiente propiedad para los campos vectoriales hor_i.

Lema 3.3 *Los campos vectoriales* hor_i, $(i = 1, \ldots, \dim B)$ *son automorfismos infinitesimales de* Ψ,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{hor}_i} \Psi \equiv [\, \mathrm{hor}_i, \Psi \,] = 0. \tag{3.2.25}$$

Ahora, si aplicamos de nuevo (1.3.11), (1.3.12) junto con (3.2.25), podemos calcular el segundo término en (3.2.21):

$$\begin{aligned} 2 \left[\, \Pi^{\mathbb{H}}_Q, \Psi \,\right] &= -(1/2) \left[\mathcal{F}^{ij}\, \mathrm{hor}_i \wedge \mathrm{hor}_j, \Psi^{\sigma\sigma'} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{\sigma'}} \right] \\ &= -\Psi^{\sigma'\sigma} \frac{\partial \mathcal{F}^{jj'}}{\partial x^{\sigma'}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \wedge \mathrm{hor}_j \wedge \mathrm{hor}_{j'}. \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

Si sustituimos (3.2.24) y (3.2.26) en la identidad de Jacobi (3.2.21), vemos que esta es equivalente a las ecuaciones siguientes:

$$\mathcal{F}^{ji}\, C^{\sigma}_{ii'}\, \mathcal{F}^{i'j'} = \Psi^{\sigma'\sigma} \frac{\partial \mathcal{F}^{jj'}}{\partial x^{\sigma'}}, \tag{3.2.27}$$

$$\underset{(k,i,j)}{\mathfrak{S}} \mathcal{F}^{ks}\, \mathcal{L}_{\mathrm{hor}_s}(\mathcal{F}^{ij}) = 0. \tag{3.2.28}$$

La primera condición (3.2.27) se cumple automáticamente debido a (3.2.23). Para verificar la segunda condición, debemos tomar en cuenta que (3.2.28) se puede reescribir como:

$$\underset{(k,i,j)}{\mathfrak{S}} \mathcal{L}_{\mathrm{hor}_s}(\mathcal{F}_{ij}) = 0. \tag{3.2.29}$$

Se sigue directamente de la definición de $\mathcal{F}_{ij}$ en (3.2.9) y de (3.2.14), que

$$\mathcal{L}_{\mathrm{hor}_s}(\mathcal{F}_{ij}) = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial \xi^s} + \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \xi^s \partial \xi^j} - \frac{\partial^2 Q_j}{\partial \xi^s \partial \xi^i} - \frac{\partial \{Q_i, Q_j\}_{P}}{\partial \xi^s} \\ + \left\{ Q_s, \frac{\partial Q_i}{\partial \xi^j} - \frac{\partial Q_j}{\partial \xi^i} \right\}_P - \{Q_s, \{Q_i, Q_j\}_P\}_P.$$

Finalmente, sustituyendo esta igualdad en la suma cíclica (3.2.29) y teniendo en cuenta la cerradura de ω y la identidad de Jacobi para $\{\,,\}_P$, vemos que se verifica (3.2.29). Esto completa la prueba del Teorema 3.1.

Interpretación geométrica. Usando los resultados del Capítulo 2, se tiene que toda 1-forma horizontal Q induce una conexión de Ehresmann en el haz trivial $\pi_B : B \times P \to B$, con forma de conexión

$$\Gamma = \Gamma^\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \qquad \Gamma^\nu = \mathrm{d}x^\nu + \Gamma_i^\nu(\xi, x)\, \mathrm{d}\xi^i, \tag{3.2.30}$$

con

$$\Gamma_i^\nu = \Psi^{\nu\beta}(x) \frac{\partial Q_i}{\partial x^\beta}. \tag{3.2.31}$$

Los campos vectoriales hor_i en (3.2.14) son precisamente los Γ-levantamientos horizontales de los campos vectoriales básicos $\partial/\partial\xi^i$ y la distribución horizontal de Γ es

$$\mathbb{H}_{(\xi,x)} = \mathrm{Span}\{\, \mathrm{hor}_i(\xi, x), \quad i = 1, \ldots, \dim B\}. \tag{3.2.32}$$

La propiedad (3.2.25) nos garantiza que Γ es una conexión de Poisson, es decir, el transporte paralelo de Γ preserva la estructura de Poisson en cada fibra. De la igualdad (3.2.22), la forma de curvatura de Γ es

$$C = (1/2)\, C_{ij}^\sigma\, \mathrm{d}\xi^i \wedge \mathrm{d}\xi^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \tag{3.2.33}$$

donde C_{ij}^σ están dados por (3.2.23). En forma abreviada, escribiremos (3.2.33) como

$$C = \Psi^\sharp(\mathrm{d}_P \mathcal{F}_Q). \tag{3.2.34}$$

Esto significa que C toma valores en el espacio de los campos vectoriales Hamiltonianos verticales. Además, (3.2.34) es de la misma forma que (1.1.9), lo cual nos permite decir que la 2-forma horizontal $\mathcal{F}_Q$ juega el papel del "Hamiltoniano" de la curvatura y se le llama la *forma de acoplamiento*. Por definición se tiene que $\mathcal{F}_Q$ es no-degenerada a lo largo del subhaz horizontal $\mathbb{H}$ y anula al subhaz vertical. De esto se sigue que la distribución característica de Π_Q es la suma directa de $\mathbb{H}$ y la distribución característica vertical de la estructura de Poisson Ψ. En particular,

$$\mathrm{rank}\, \Pi_Q = \dim B + \mathrm{rank}\, \Psi.$$

El tensor de Poisson Π_Q en (3.2.16) se define por medio del acoplamiento de la estructura simpléctica ω en la base B y la estructura de Poisson vertical Ψ a través de la conexión de Poisson Γ [66, 69]. De esta manera, las Q-estructuras de Poisson representan una clase especial de estructuras de Poisson de acoplamiento. En términos de la forma de conexión (3.2.30), los corchetes de Poisson (3.2.11)-(3.2.13) se escriben como sigue:

$$\{\xi^i, \xi^j\}_M = -\mathcal{F}^{ij}(\xi, x), \tag{3.2.35}$$

$$\{\xi^i, x^\sigma\}_M = \mathcal{F}^{is}(\xi, x)\,\Gamma_s^\sigma(\xi, x), \tag{3.2.36}$$

$$\{x^\alpha, x^\beta\}_M = \Psi^{\alpha\beta}(x) \;-\; \Gamma_i^\alpha(\xi, x)\;\mathcal{F}^{ij}(\xi, x)\,\Gamma_j^\beta(\xi, x). \tag{3.2.37}$$

Notemos que si Q satisface la *ecuación de curvatura cero*

$$\mathrm{d}_B Q \,+\, (1/2)\,\{Q \wedge Q\}_\Psi = 0, \tag{3.2.38}$$

entonces $\mathcal{F}_Q = \pi^*\omega$ por lo que Π_Q está bien definido en todo el espacio total M. En este caso llamamos a Π_Q una *Q-estructura de Poisson plana*. En particular, en el caso cuando $Q = 0$ se obtiene la estructura de Poisson del producto directo en M:

$$\Pi_0 = -\frac{1}{2}\,\omega^{ij}(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \xi^i} \wedge \frac{\partial}{\partial \xi^j} \,+\, \frac{1}{2}\,\Psi^{\alpha\beta}(x)\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial x^\beta}. \tag{3.2.39}$$

En este caso, la conexión Γ^0 correspondiente está definida por la descomposición canónica $TM = TB \oplus TP$. Las hojas simplécticas de Π_0 son las variedades producto $B \times \mathcal{O}$, donde $\mathcal{O} \subset P$ es una hoja simpléctica de Ψ. Luego, $B \times \mathcal{O}$ son subvariedades invariantes de una Q-estructura de Poisson Π_Q dada. Las hojas simplécticas de Π_Q son las componentes conexas de $(B \times \mathcal{O}) \cap \mathrm{Dom}(\mathcal{F}_Q)$. De esta manera, podemos considerar a las Q-estructuras de Poisson como una deformación de la estructura de Poisson canónica Π_0 en M.

En general, una Q-estructura de Poisson tiene singularidades y el dominio de definición $\mathrm{Dom}(\mathcal{F}_Q)$ no coincide con todo el espacio total M. Para ilustrar esto, en lo que sigue mostramos un caso importante en el cual se puede obtener información más precisa acerca de $\mathrm{Dom}(\mathcal{F}_Q)$. Supongamos que $x^0 \in M$ es un punto singular de la estructura vertical de Poisson Ψ,

$$\Psi^{\alpha\beta}(x^0) = 0. \tag{3.2.40}$$

Supongamos también que una 1-forma horizontal Q se anula en los puntos del subconjunto $B \times \{x^0\}$,

$$Q_i(\xi, x^0) = 0. \tag{3.2.41}$$

De esto se obtiene

$$\mathcal{F}_Q = \pi^*\omega, \qquad \text{en } B \times \{x^0\},$$

por lo que existe una vecindad abierta U de $B \times \{x^0\}$ en M tal que

$$\det\big[\mathcal{F}_{ij}(\xi, x)\big] \neq 0, \qquad \forall\,(\xi, x) \in U.$$

En consecuencia,

$$B \times \{x^0\} \subset U \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{F}_Q).$$

Por lo tanto, el rango de la estructura de Poisson Π_Q en todo punto de $B \times \{x^0\}$ es igual a $\dim B$ y cada componente conexa de $B \times \{x^0\}$ es una hoja simpléctica de $B \times \{x^0\}$.

Notemos que la condición (3.2.40) tiene lugar, por ejemplo, en el caso cuando $P = \mathfrak{g}^*$ es el espacio dual de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, con la estructura de Lie-Poisson (1.2.1). La estructura vertical correspondiente es

$$\Psi = \lambda_{\sigma}^{\alpha\beta} x^{\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}$$

y el origen $x^0 = 0$ es un punto singular de Ψ.

Acoplamiento débil de Q-estructuras de Poisson. En esta parte y siguiendo a [66, 69], se describe una Q-estructura de Poisson que depende de un parámetro. De nuevo, dada una 1-forma horizontal Q hacemos un reescalamiento de los datos geométricos (Q, Ψ) por medio de un parámetro $\varepsilon \neq 0$. En efecto, sea

$$Q \mapsto \varepsilon Q, \qquad \Psi \mapsto \frac{1}{\varepsilon}\Psi. \tag{3.2.42}$$

La 2-forma de acoplamiento que corresponde a los datos reescalados se escribe como

$$\mathcal{F}_{Q}^{\varepsilon} = \pi^*\omega \,-\, \varepsilon\big(\mathrm{d}_B Q \,+\, (1/2)\,\{Q \wedge Q\}_{\Psi}\big). \tag{3.2.43}$$

En coordenadas, se tiene que

$$\mathcal{F}_{Q}^{\varepsilon} = (1/2)\,\mathcal{F}_{ij}^{\varepsilon}(\xi, x)\,\mathrm{d}\xi^i \wedge \mathrm{d}\xi^j, \tag{3.2.44}$$

donde

$$\mathcal{F}_{ij}^{\varepsilon}(\xi, x) = \omega_{ij}(\xi) - \varepsilon\left(\frac{\partial Q_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} + \{Q_i, Q_j\}_{\Psi}\right). \tag{3.2.45}$$

Sea

$$\Pi_{Q}^{\varepsilon} = -(1/2)\,\mathcal{F}_{\varepsilon}^{ij}(\xi, x)\,\mathrm{hor}_i \wedge \mathrm{hor}_j \,+\, (1/2\,\varepsilon)\,\Psi^{\alpha\beta}(x)\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}, \tag{3.2.46}$$

el tensor de Poisson asociado a los datos (3.2.42). En este caso, $\mathcal{F}_{is}^{\varepsilon}\mathcal{F}_{\varepsilon}^{sj} = \delta_i^j$ y los campos vectoriales hor_i están dados por (3.2.14) y son independientes de ε. De esta manera, Π_Q^{ε} está bien definido en un dominio dependiente del parámetro ε,

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{F}_{Q}^{\varepsilon}) = \big\{(\xi, x) \in M \mid\, \det \mathcal{F}_{ij}^{\varepsilon}(\xi, x) \neq 0\,\big\}, \tag{3.2.47}$$

el cual se aproxima a M cuando $\varepsilon \to 0$. Notemos que para $\varepsilon = 0$, Π_Q^{ε} resulta ser singular. Además, como una consecuencia directa del Teorema 3.1 se obtiene el siguiente hecho que es importante en las aplicaciones.

Teorema 3.4 *Si M es compacta, entonces para cualquier Q el tensor de Poisson Π_Q^{ε}* (3.2.46) *está bien definido en todo el espacio M para $\varepsilon \ll 1$ suficientemente pequeño.*

El caso simpléctico. Vamos ahora a considerar el caso cuando la estructura de Poisson vertical Ψ es no-degenerada, esto es, P es una variedad simpléctica con forma simpléctica dada por

$$\sigma = (1/2)\,\sigma_{\alpha\beta}(x)\;\mathrm{d}x^{\alpha} \wedge \mathrm{d}x^{\beta}, \tag{3.2.48}$$

donde $\sigma_{\alpha\beta}\Psi^{\beta\gamma} = -\delta_{\alpha}^{\gamma}$.

Proposición 3.5 *La estructura simpléctica de la Q-estructura de Poisson* Π_Q^{ε} *en* (3.2.46) *es*

$$\Omega_Q^{\varepsilon} = \mathcal{F}_Q^{\varepsilon} + \varepsilon\,\sigma_{\Gamma} \equiv (1/2)\,\mathcal{F}_{ij}^{\varepsilon}(\xi,x)\;\mathrm{d}\xi^{i} \wedge \mathrm{d}\xi^{j} + (\varepsilon/2)\,\sigma_{\alpha\beta}(x)\,\Gamma^{\alpha} \wedge \Gamma^{\beta}, \tag{3.2.49}$$

donde las 1*-formas* Γ^{α} *están definidas por* (3.2.30)*. Esta forma también admite la representación*

$$\Omega_Q^{\varepsilon} = \pi_B^{*}\omega + \varepsilon\,\pi_P^{*}\sigma - \varepsilon\,\mathrm{d}Q. \tag{3.2.50}$$

3.3 Un criterio para la existencia de estructuras Hamiltonianas

Supongamos que se tienen dadas las funciones $f \in C^{\infty}(B)$ y $F \in C^{\infty}(B \times P)$, y consideremos el sistema dinámico proyectable (3.1.1), (3.1.2) en M, el cual puede escribirse en la forma

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = v_f(\xi), \tag{3.3.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V_F(\xi,x). \tag{3.3.2}$$

En este caso,

$$v_f = \omega^{ij}(\xi)\,\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi^{j}}\,\frac{\partial}{\partial \xi^{i}}, \tag{3.3.3}$$

es el campo vectorial Hamiltoniano de $f = f(\xi)$ en (B,ω) y

$$V_F = \Psi^{\sharp}\,\mathrm{d}_P F \equiv -\Psi^{\alpha\beta}\,\frac{\partial F}{\partial x^{\beta}}\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \tag{3.3.4}$$

es el campo vectorial Hamiltoniano en (P,Ψ) de la función "parámetro-dependiente" $F_{\xi}(x) = F(\xi,x)$. Luego, el campo vectorial del sistema (3.3.1), (3.3.2) es

$$\mathcal{V} = v_f^{i}(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi^{i}} + V_F^{\alpha}(\xi,x)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}. \tag{3.3.5}$$

Así, bajo la proyecció canónica π, $\mathcal{V}$ se proyecta al campo vectorial Hamiltoniano v_f en B,

$$\mathrm{d}\pi \circ \mathcal{V} = v_f \circ \pi$$

De manera equivalente, en términos del flujo $Fl^t = Fl^t_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$, esta condición se expresa como

$$\pi_B \circ Fl^t = \varphi^t \circ \pi_B.$$

En este caso φ^t es el flujo Hamiltoniano de v_f en B. El flujo Fl^t está dado por

$$Fl^t(\xi, x) = \big(\varphi^t(\xi), \mathcal{G}^t_\xi(x)\big), \tag{3.3.6}$$

donde $\mathcal{G}^t_\xi$ es una familia de difeomorfismos (locales) en P que están determinados como el flujo del sistema Hamiltoniano dependiente del tiempo

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{G}^t_\xi}{\mathrm{d}t}(x) = V_F\big(\varphi^t(\xi), \mathcal{G}^t_\xi(x)\big), \qquad \mathcal{G}^0_\xi = \mathrm{id}_P. \tag{3.3.7}$$

Si $\mathcal{V}$ es completo, entonces la propiedad de grupo de Fl^t implica las relaciones siguientes:

$$\mathcal{G}^{t_1+t_2}_\xi = \mathcal{G}^{t_1}_{\varphi^{t_2}(\xi)} \circ \mathcal{G}^{t_2}_\xi = \mathcal{G}^{t_2}_{\varphi^{t_1}(\xi)} \circ \mathcal{G}^{t_1}_\xi, \tag{3.3.8}$$

$$\big(\mathcal{G}^t_\xi\big)^{-1} = \mathcal{G}^{-t}_{\varphi^t(\xi)}. \tag{3.3.9}$$

Se sigue que el flujo Fl^t preserva el tensor de Poisson vertical,

$$\big(Fl^t\big)_*\Psi = \Psi.$$

Debemos notar que $\mathcal{V}$ es Hamiltoniano con respecto a la estructura de Poisson canónica Π_0 en M, solamente en el caso trivial siguiente,

$$\mathrm{d}_B F = 0.$$

Por lo tanto, nuestro objetivo es buscar una estructura Hamiltoniana para $\mathcal{V}$ en la clase de Q-estructuras de Poisson, las cuales se presentan como deformaciones de la estructura de Poisson canónica en M.

Formulación de los resultados principales. Presentamos ahora un criterio de Hamiltonización para la dinámica proyectable, del cual podemos decir que es uno de los resultados centrales de este trabajo. A través de este resultado nos será posible encontrar formulaciones Hamiltonianas para varios casos importantes, por ejemplo, los sistemas de Euler lineales y los sistemas de Lie periódicos, entre otros.

Teorema 3.6 (a) *Supongamos que existe una* 1*-forma horizontal* $Q = Q_i(\xi, x)\,\mathrm{d}\xi^i$ *en* M *que satisface la* ecuación homológica

$$\mathcal{L}_{v_f} Q + \{F, Q\}_P = \mathrm{d}_B F. \tag{3.3.10}$$

Entonces el sistema dinámico proyectable (3.3.1), (3.3.2) *es Hamiltoniano con respecto al corchete de Poisson* (3.2.11)-(3.2.13) *asociado a la solución* Q *y a la función*

$$H = \pi_B^* f + F - \mathbf{i}_{v_f} Q. \tag{3.3.11}$$

Más aún, el dominio $\mathrm{Dom}(\mathcal{F}_Q)$ *es invariante con respecto al flujo* Fl^t *del campo* $\mathcal{V}$ (3.3.5).
(b) *Recíprocamente, si el sistema* (3.3.1), (3.3.2) *es Hamiltoniano con respecto a una Q-estructura de Poisson, entonces Q satisface la ecuación* (3.3.10).

De esta manera, el Teorema 3.6 nos da un criterio que nos permite reducir el problema de Hamiltonización a la solubilidad de una ecuación diferencial lineal (3.3.10) en la que su lado derecho es de una forma específica.

Por otro lado, usando el Teorema 2.13, el criterio anterior se puede interpretar geométricamente en los términos siguientes.

Teorema 3.7 *Toda solución Q de* (3.3.10) *induce una conexión de Poisson–Ehresmann* Γ *definida por* (3.2.30), (3.2.31) *en el haz trivial* $\pi_B : B \times P \to B$*, la cual es invariante con respecto al flujo del sistema* (3.3.1), (3.3.2). *Esto significa que existe una descomposición*

$$TM = \mathbb{H} \oplus TP,$$

de tal manera que el subhaz horizontal $\mathbb{H}$ *es* $\mathcal{V}$*-invariante,*

$$\mathrm{d}\, Fl^t\big(\mathbb{H}_{(\xi,x)}\big) = \mathbb{H}_{Fl^t(\xi,x)}.$$

Sistemas de Euler lineales sobre B**.** Sea $P = \mathfrak{g}^*$ el espacio dual del álgebra de Lie finito-dimensional $\big(\mathfrak{g}, [\,,]_{\mathfrak{g}}\big)$, el cual está equipado con la estructura de Lie-Poisson

$$\{x^\alpha, x^\beta\}_{\mathfrak{g}^*} = \lambda_\gamma^{\alpha\beta} x^\gamma.$$

Dada una función suave de valores vectoriales $B \ni \xi \mapsto \phi(\xi) \in \mathfrak{g}$, hacemos $F(\xi, x) = \langle x, \phi(\xi)\rangle$. Luego, el sistema (3.3.1), (3.3.2) toma la forma

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = v_f(\xi), \tag{3.3.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{ad}^*_{\phi(\xi)}\, x. \tag{3.3.13}$$

Este sistema dinámico lineal (skew-product) en $M = B \times \mathfrak{g}^*$ es llamado un *sistema lineal de Euler* sobre B [45, 68]. Si buscamos una solución de (3.3.10) de la forma

$$Q = \langle x, \rho_i(\xi)\rangle\, \mathrm{d}\xi^i, \qquad (\rho_i(\xi) \in \mathfrak{g}), \tag{3.3.14}$$

se obtiene la siguiente ecuación para la 1-forma $\rho = \rho_i(\xi) \otimes \mathrm{d}\xi^i$ en B, con valores en $\mathfrak{g}$:

$$\mathcal{L}_{v_f}\rho + [\phi, \rho]_{\mathfrak{g}} = \mathrm{d}_B\phi. \tag{3.3.15}$$

El corchete de Poisson asociado a Q en (3.2.11)-(3.2.13) está dado por las relaciones

$$\{\xi^i, \xi^j\}_M = -\mathcal{F}^{ij}(\xi, x), \tag{3.3.16}$$

$$\{\xi^i, x^\sigma\}_M = \mathcal{F}^{ij}(\xi, x)\; \lambda_\nu^{\sigma\alpha}\rho_{j\alpha}x^\nu, \tag{3.3.17}$$

$$\{x^\alpha, x^\beta\}_M = \lambda_\nu^{\alpha\beta}x^\nu \;-\; \lambda_\nu^{\alpha\gamma}\rho_{i\gamma}\mathcal{F}^{ij}(\xi, x)\rho_{j\mu}\; \lambda_\sigma^{\beta\mu}x^\nu x^\sigma. \tag{3.3.18}$$

donde
$$\mathcal{F}_{ij}(\xi,x) = \omega_{ij}(\xi) \; - \; x^{\nu}\left(\frac{\partial\rho_{j\nu}}{\partial\xi^{i}} \; - \; \frac{\partial\rho_{i\nu}}{\partial\xi^{j}} \; + \; \lambda_{\nu}^{\alpha\beta}\,\rho_{i\alpha}\,\rho_{j\beta}\right). \tag{3.3.19}$$
De acuerdo con el Teorema 3.6 se obtiene el siguiente criterio.

Proposición 3.8 *La existencia de una solución ρ para* (3.3.15) *implica que el sistema lineal de Euler* (3.3.12), (3.3.13) *es Hamiltoniano en el corchete de Poisson* (3.3.16)-(3.3.16), *con función Hamiltoniana*

$$H(\xi,x) = f(\xi) \; + \; \langle x, \phi(\xi) - \mathbf{i}_{v_f}\rho\rangle.$$

Debemos observar que en el caso cuando $\mathfrak{g}$ es semisimple, la solubilidad de (3.3.15) es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una estructura Hamiltonian del sistema lineal de Euler en una clase natural de estructuras de Poisson [68].

El proceso de linealización sobre B. Supongamos ahora que $P \approx \mathbb{R}^{r}$ y que el origen es un punto singular de Ψ,

$$\Psi(0) = 0. \tag{3.3.20}$$

Esto implica que $V_F(\xi,0) = 0$, por lo que $B \approx B \times \{0\}$ es una subvariedad invariante de $\mathcal{V}$ (3.3.5). Dado que la función F en (3.3.4) está unívocamente definida módulo la suma de una función de Casimir de Ψ que depende del parámetro, sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$F\big|_{B} = 0.$$

De esta manera, la ecuación (3.3.10) es invariante bajo la transformación $Q \mapsto Q - \pi^{*}q$, para cualquier 1-forma q en B tal que $\mathcal{L}_{v_f}q = 0$. Se sigue de esto que si (3.3.10) es soluble, entonces se puede tomar una solución Q que se anule en B,

$$Q\big|_{B} = 0. \tag{3.3.21}$$

En esta situación, se tiene
$$\mathcal{F}_{Q}\big|_{B} = \pi^{*}\omega,$$
por lo que $\det\mathcal{F}^{\varepsilon}_{ij}(\xi,x) \neq 0$ en una vecindad de B en M. Como una consecuencia del Teorema 3.6 se deduce el resultado siguiente.

Proposición 3.9 *Si Q es una solución de* (3.3.10) *que satisface* (3.3.21), *entonces $\mathcal{V}$ es Hamiltoniano con respecto a la Q-estructura de Poisson asociada a la solución Q, la cual está bien definida en una vecindad abierta U de B en M de tal manera que*

$$B \subset U \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{F}_{Q}).$$

Si B es compacta, entonces U se puede tomar como el producto de B y la bola abierta de radio $r > 0$, $U = B \times \{\|x\| < r\}$.

Por otro lado, supongamos que Q una solución de (3.3.10) que satisface (3.3.21). Si se linealizan los datos geométricos (Ψ, Q) en $x = 0$, entonces se obtienen los datos infinitesimales

$$\Lambda = \lambda_{\sigma}^{\alpha\beta} x^{\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}, \qquad \rho = \rho_i(\xi)\, \mathrm{d}\xi^i,$$

dados por

$$\Psi^{\alpha\beta}(x) = \lambda_{\gamma}^{\alpha\beta} x^{\gamma} + O(x^2)$$

$$Q = \langle x, \rho \rangle + O(x^2).$$

Es claro que Λ es la linealización de la estructura de Poisson Ψ en $x = 0$, asociada con el *álgebra de Lie de isotropía* $\mathfrak{g}$ y ρ satisface la ecuación linealizada (3.3.15) con

$$\phi(\xi) = \frac{\partial F(\xi, 0)}{\partial x}.$$

Se sigue que la no-solubilidad de la ecuación linealizada es una obstrucción para la solubilidad de (3.3.10) en una vecindad de B.

Estructuras Hamiltonianas por medio del acoplamiento débil. Dados los datos geométricos (Ψ, Q), para todo $\varepsilon \neq 0$, consideremos el tensor de Poisson Π_Q^{ε} en (3.2.46) con los datos geméтricos reescalados $(\omega, \varepsilon^{-1}\Psi, \varepsilon Q)$, (3.2.42). Tomando en cuenta que la ecuación (3.3.10) y el campo vectorial $\mathcal{V}$ (3.3.5) son invariantes bajo la transformación

$$F \mapsto \varepsilon F, \qquad \Psi \mapsto \varepsilon^{-1}\Psi, \qquad Q \mapsto \varepsilon Q,$$

se llega a la siguiente versión parámetro-dependiente del Teorema 3.6:

Teorema 3.10 *Sea Q una solución de* (3.3.10)*. Entonces, para todo $\varepsilon \neq 0$, el campo vectorial $\mathcal{V}$* (3.3.5) *es Hamiltoniano relativo a la estructura de Poisson dependiente del parámetro ε, Π_Q^{ε}* (3.2.46) *en* $\mathrm{Dom}(\mathcal{F}_Q^{\varepsilon})$ (3.2.47) *y a la función*

$$H_{\varepsilon} = \pi^* f + \varepsilon\big(F - \mathbf{i}_{v_f} Q\big). \tag{3.3.22}$$

Si M es compacta, entonces para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeño,

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{F}_Q^{\varepsilon}) = M,$$

es decir, el sistema (3.3.1), (3.3.2) *admite una formulación Hamiltoniana en todo el espacio fase M.*

Este resultado será una de nuestras principales herramientas para el enfoque perturbativo que desarrollaremos en el Capítulo 4.

Campos vectoriales Hamiltonianos. En esta parte se presenta una prueba del Teorema 3.6 y se discuten algunas propiedades de sistemas Hamiltonianos en espacios fase equipados con Q-estructuras de Poisson.

Dada la 1-forma Q, consideremos la Q-estructura de Poisson Π_Q (3.2.16).

Lema 3.11 *El campo vectorial Hamiltoniano de una función $H \in C^\infty(M)$ es de la forma*

$$\Pi_Q^\sharp \, \mathrm{d}H = -\mathcal{F}^{ij} \, \mathcal{L}_{\mathrm{hor}_i}(H) \, \mathrm{hor}_j \, + \, \Psi^{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta}. \tag{3.3.23}$$

Nuestro objetivo aquí es describir todos los campos vectoriales proyectables en M, los cuales son Hamiltonianos con respecto a Π_Q. Para cada campo vectorial $u = u_i(\xi) \, \partial/\partial\xi^i$ en B, denotaremos por $\mathrm{hor}(u) = u_i(\xi) \, \mathrm{hor}_i$ el campo vectorial en M que representa el levantamiento horizontal de u con respecto a la distribución (3.2.32). Luego, todo campo vectorial proyectable X en M es de la forma

$$X = \mathrm{hor}(u) + Y, \tag{3.3.24}$$

donde $Y = Y^\alpha(\xi, x) \, \partial/\partial x^\alpha$ es un campo vectorial vertical. De (3.3.23) y (3.3.24), derivamos el criterio siguiente.

Lema 3.12 *El campo vectorial proyectable X* (3.3.24) *es Hamiltoniano con respecto a Π_Q y a la función $H \in C^\infty(M)$, esto es, $X = \Pi_Q^\sharp \, \mathrm{d}H$, si y sólo si*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{hor}_i}(H) = \, -u^j \, \mathcal{F}_{ji}, \tag{3.3.25}$$

$$\Psi^{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} = Y^\alpha. \tag{3.3.26}$$

Nótese que la segunda condición (3.3.26) significa que la parte vertical Y de X es Hamiltoniana relativa al tensor de Poisson Ψ.

Consideremos ahora el campo vectorial $\mathcal{V}$ del sistema (3.3.1), (3.3.2). Para una Q tomada arbitrariamente, tenemos la representación

$$\mathcal{V} = \mathrm{hor}(v_f) \, + \, \Psi^\sharp \, \mathrm{d}_P G, \tag{3.3.27}$$

donde

$$G = F \, - \, \mathbf{i}_{v_f} Q. \tag{3.3.28}$$

Aplicando el Lema 3.12 a $\mathcal{V}$ y a la función

$$H = \pi^* f \, + \, G, \tag{3.3.29}$$

obtenemos que (3.3.26) se cumple automáticamente y la condición (3.3.25) viene a ser

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^i} \, + \, \mathcal{L}_{\mathrm{hor}_i}(G) = -\, v_f^j \, \mathcal{F}_{ji}. \tag{3.3.30}$$

Si introducimos la 2-forma

$$\delta_{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{*}\omega - \mathcal{F}_{Q} \equiv \mathrm{d}_{B}Q + (1/2)\{Q \wedge Q\}_{\Psi}, \tag{3.3.31}$$

entonces (3.3.30) se puede reescribir como sigue:

$$\mathrm{d}_{B}G - \{G, Q\}_{P} = \mathbf{i}_{v_f}\delta_{Q}. \tag{3.3.32}$$

De esta manera, si Q satisface (3.3.32), entonces $\mathcal{V}$ es Hamiltoniano con respecto a Π_{Q} y la función H (3.3.29). Obsérvese ahora que la relación (3.3.28) nos da una equivalencia entre las ecuaciones (3.3.10) y (3.3.32).

Lema 3.13 (a) *Cada solución Q de* (3.3.32) *también satisface la ecuación* (3.3.10) *para*

$$F = G + \mathbf{i}_{v_f}Q. \tag{3.3.33}$$

(b) *Recíprocamente, si Q satisface* (3.3.10), *entonces Q es una solución de* (3.3.32) *para G dada por* (3.3.28).

Demostración. Supongamos que Q es una solución de (3.3.32). Sustituyendo (3.3.28) en (3.3.32) se obtiene

$$\mathrm{d}_{B}F - \mathrm{d}_{B}\mathbf{i}_{v_f}Q - \{F, Q\}_{P} + \{\mathbf{i}_{v_f}Q, Q\}_{P} = \mathbf{i}_{v_f}\mathrm{d}_{B}Q + \{\mathbf{i}_{v_f}Q, Q\}_{P}.$$

Luego, aplicando la fórmula de Cartan $\mathcal{L}_{v_f} = \mathrm{d}_{B} \circ \mathbf{i}_{v_f} + \mathbf{i}_{v_f} \circ \mathrm{d}_{B}$ a esta última relación, nos lleva a (3.3.10). ■

Hasta aquí, hemos probado la primera parte del Teorema 3.6.

Ahora sólo resta mostrar que si Q satisface (3.3.10), entonces $\mathrm{Dom}(\mathcal{F}_{Q})$ es invariante con respecto al flujo del sistema (3.3.1), (3.3.2). En términos infinitesimales, esto significa que la derivada de Lie de la 2-forma $\mathcal{F}_{Q}$ a lo largo de $\mathcal{V}$ es igual a cero.

Lema 3.14 *Si Q es una solución de* (3.3.10), *entonces*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{V}}\mathcal{F}_{Q} = 0.$$

Demostración. De las propiedades estándar de la derivada de Lie podemos derivar las siguientes identidades:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(\mathrm{d}_{B}\alpha) - \mathrm{d}_{B}(\mathcal{L}_{\mathcal{V}}\alpha) = -\{\mathrm{d}_{B}F \wedge \alpha\}_{P}, \tag{3.3.34}$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{V}}\big(\{\alpha \wedge \beta\}_{P}\big) = \{\mathcal{L}_{\mathcal{V}}\alpha \wedge \beta\}_{P} + \{\alpha \wedge \mathcal{L}_{\mathcal{V}}\beta\}_{P}, \tag{3.3.35}$$

para cualesquiera 1-formas horizontales α y β. Si escribimos (3.3.10) en la forma $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}Q = \mathrm{d}_{B}F$ y aplicamos (3.3.34), (3.3.35), entonces se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{V}}\mathcal{F}_{Q} &= -\mathcal{L}_{\mathcal{V}}\big(\mathrm{d}_{B}Q\big) - (1/2)\,\mathcal{L}_{\mathcal{V}}\big(\{Q \wedge Q\}_{P}\big)\\ &= \{\mathrm{d}_{B}F \wedge Q\}_{P} - (1/2)\,\{\mathrm{d}_{B}F \wedge Q\}_{P} - (1/2)\,\{Q \wedge \mathrm{d}_{B}F\}_{P} = 0.\end{aligned}$$

■

Esto completa la demostración del Teorema 3.6. Como una consecuencia directa se obtiene un criterio que nos será de mucha utilidad:

Criterio 3.15 *Dada una* 1*-forma horizontal Q, el campo vectorial $\mathcal{V}$ en* (3.3.27) *es Hamiltoniano con respecto a la Q-estructura de Poisson Π_Q si y sólo si G satisface* (3.3.32)*.*

La observación siguiente establece que si una solución Q de (3.3.10) satisface una condición de compatibilidad adicional con v_f, entonces el flujo Fl^t admite una factorización.

Proposición 3.16 *Considérese el campo vectorial*

$$\mathcal{V} = \mathrm{hor}(v_f) + \Psi^\sharp \, \mathrm{d}_P G, \tag{3.3.36}$$

para una función $G \in C^\infty(M)$ cualquiera. Supongamos que existe una solución Q de (3.3.10) *que satisface la condición*

$$\mathbf{i}_{v_f} \delta_Q = 0, \tag{3.3.37}$$

y sea Π_Q la Q-estructura de Poisson asociada a esta solución. Entonces, $\mathcal{V} = \mathcal{V}^h + \mathcal{V}^v$, donde $\mathcal{V}^h$ y $\mathcal{V}^v$ son los campos vectoriales Hamiltonianos de las funciones $f_B = \pi_B^* f$ y G, respectivamente,

$$\mathcal{V}^h = \Pi_Q^\sharp \, \mathrm{d} f_B = -\mathcal{F}^{ij} \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \, \mathrm{hor}_j, \tag{3.3.38}$$

$$\mathcal{V}^v = \Pi_Q^\sharp \, \mathrm{d} G = \Psi^{\alpha\beta} \frac{\partial G}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta}. \tag{3.3.39}$$

Más aún, f_B y G conmutan entre sí con respecto al corchete de Poisson $\{\,,\}_M$:

$$\{f_B, G\}_M = 0. \tag{3.3.40}$$

Demostración. Se tiene que $\{f_B, G\}_M = \Pi_Q\big(\mathrm{d} f_B, \mathrm{d} G\big) + \Psi\big(\mathrm{d} f_B, \mathrm{d} G\big)$. Es claro que el segundo término se anula. Por el Lema 3.13, las relaciones (3.3.10) y (3.3.37), implican que $\mathcal{L}_{\mathrm{hor}_i}(G) = 0$ para toda $i = 1, \dots, \dim B$. Luego,

$$\Pi_Q\big(\mathrm{d} f_B, \mathrm{d} G\big) = -\mathcal{F}^{ij} \, \mathcal{L}_{\mathrm{hor}_i}(f_B) \, \mathcal{L}_{\mathrm{hor}_i}(G) = 0$$

por lo que se cumple (3.3.40). ■

Notemos que como una consecuencia de (3.3.40) se tiene $\big[\, \mathcal{V}^h, \mathcal{V}^v \,\big] = 0$. De esto se observa que el flujo de $\mathcal{V}$ es la composición de los dos flujos Hamiltonianos de los campos vectoriales $\mathcal{V}^h$ y $\mathcal{V}^v$, los cuales, como ya se vió, conmutan entre sí. En otras palabras, el flujo de $\mathcal{V}$ es la composición de los flujos conmutativos de los campos Hamiltonianos horizontal y vertical en $\big(M, \Pi_Q\big)$.

Álgebras de Lie y simetrías. Dada una 1-forma horizontal Q, considérese el tensor de Poisson Π_Q y el corchete de Poisson $\{\,,\}_M$, correspondiente. Es posible ver la relación (3.3.32) como una ecuación para G. Denotemos por $\mathcal{A}_Q$ el conjunto de todas las funciones $H \in C^\infty(M)$ con la siguiente propiedad: *El campo vectorial Hamiltoniano $\Pi_Q^\sharp \, \mathrm{d}H$ desciende, bajo la proyección $\pi_B : M \to B$ al campo vectorial Hamiltoniano v_f, para una cierta función $f \in C^\infty(B)$.* Es claro que $\mathcal{A}_Q$ es un espacio lineal y por el Lema 3.12, consiste de las funciones de la forma $H = \pi_B^* f + G$, donde la función $G \in C^\infty(M)$ satisface (3.3.32).

Proposición 3.17 *El espacio lineal $(\mathcal{A}_Q, \{\,,\}_M)$ es una álgebra de Lie. Para dos funciones cualesquiera $H_1 = \pi_B^* f_1 + G_1$ y $H_2 = \pi_B^* f_2 + G_2$ en $\mathcal{A}_Q$, se tiene*

$$\{H_1, H_2\}_M = \pi_B^*\big(\{f_1, f_2\}_B\big) + \{G_1, G_2\}_P - \delta_Q\big(v_{f_1}, v_{f_2}\big). \tag{3.3.41}$$

Demostración. Si tomamos en cuenta que (f_1, G_1) y (f_2, G_2) satisfacen (3.3.32), entonces podemos calcular el corchete de Lie de $\mathcal{V}_1 = \mathrm{hor}(v_{f_1}) + \Psi^\sharp \, \mathrm{d}_P G_1$ y $\mathcal{V}_2 = \mathrm{hor}(v_{f_2}) + \Psi^\sharp \, \mathrm{d}_P G_2$:

$$\Pi_Q^\sharp \, \mathrm{d}(\{H_1, H_2\}_M) = \big[\,\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\,\big] = \mathrm{hor}(v_{\{f_1, f_2\}_B}) + \Psi^\sharp \, \mathrm{d}_P\big(\{G_1, G_2\}_P - \delta_Q(v_{f_1}, v_{f_2})\big).$$

Esto nos muestra que $\{H_1, H_2\}_M$ pertenece a $\mathcal{A}_Q$. ∎

De esta manera, vemos que los campos vectoriales

$$\mathcal{V} = \Pi_Q^\sharp \, \mathrm{d}H,$$

donde H varía en todo $\mathcal{A}_Q$, describe el álgebra de Lie de todos los campos vectoriales Hamiltonian que son proyectables en (M, Π_Q).

Ahora, usando la fórmula (3.3.41), se deriva el resultado siguiente.

Proposición 3.18 *Sea $\mathfrak{h}$ una álgebra de Lie. Supongamos que se tiene dado un homomorfismo $\mathfrak{h} \ni a \mapsto f_a \in C^\infty(B)$,*

$$\{f_a, f_b\}_B = f_{[a,b]}, \qquad \forall\, a, b \in \mathfrak{h}.$$

Entonces la transformación $\mathbb{R}$-lineal $\mathfrak{h} \ni a \mapsto H_a \in \mathcal{A}_Q$,

$$H_a = \pi_B^* f_a + G_a$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie si y sólo si

$$\{G_a, G_b\}_P - G_{[a,b]} = \delta_Q(v_{f_a}, v_{f_b}).$$

para cualesquiera $a, b \in \mathfrak{h}$.

3.4 Solubilidad de la ecuación (3.3.10)

En esta sección vamos a discutir, para algunos casos especiales, la solubilidad de la ecuación (3.3.10), la cual nos da una condición suficiente para la Hamiltonización del sistema dinámico proyectable (3.3.1), (3.3.2).

Supongamos que la variedad simpléctica B es el espacio $\mathbb{R}^{2k}$ con coordenadas $\xi = (s, \alpha) = (s^1, \ldots, s^{2k-1}, \alpha)$. Si suponemos que el campo vectorial Hamiltoniano v_f es de la forma

$$v_f = \frac{\partial}{\partial \alpha}, \qquad f = s^1,$$

entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la estructura simpléctica ω en B se escribe como sigue:

$$\omega = \mathrm{d}s^1 \wedge \mathrm{d}\alpha + \varpi_{ij}(s, \alpha)\, \mathrm{d}s^i \wedge \mathrm{d}s^j.$$

En esta situación, el sistema proyectable (3.3.1), (3.3.2) toma la forma

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = 1, \tag{3.4.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V_F(s, \alpha, x). \tag{3.4.2}$$

Es claro que este sistema autónomo se obtiene de la familia de sistemas Hamiltonianos dependientes del tiempo en una variedad de Poisson (P, Ψ), que dependen de un parámetro $s \in \mathbb{R}$:

$$\dot{x}^\sigma = \{F_{s,t}, x^\sigma\}_P.$$

Aquí, el Hamiltoniano $F_{s,t} : P \to P$ depende del tiempo t de manera suave y el parámetro s y está dado por

$$F(s, \alpha, x) = F_{s,\alpha}(x).$$

La ecuación (3.3.10) para $Q = Q_i(s, \alpha, x)\, \mathrm{d}s^i + Q_{2k}(s, \alpha, x)\, \mathrm{d}\alpha$ se separa en las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} + \{F, Q_i\}_P = \frac{\partial F}{\partial s^i}, \qquad (i = 1, \ldots, 2k-1), \tag{3.4.3}$$

$$\frac{\partial Q_{2k}}{\partial \alpha} + \{F, Q_{2k}\}_P = \frac{\partial F}{\partial \alpha}. \tag{3.4.4}$$

Primeramente vamos a considerar la solubilidad de (3.4.3), (3.4.4), para lo cual se establece el resultado siguiente.

Proposición 3.19 *En una vecindad de cada punto en $\mathbb{R}^{2n} \times P$ existe una solución de* (3.4.3), (3.4.4).

La prueba de este resultado se sigue de la existencia de coordenadas (locales) de rectificación para el sistema (3.4.1), (3.4.2) que están asociadas a con la hipersuperficie transversal $\{\alpha = 0\}$ en $\mathbb{R}^{2n} \times P$. Más adelante se dan argumentos más precisos acerca de esta situación.

De la Proposición 3.19 derivamos la solubilidad local de la ecuación (3.3.10) en el caso general.

Corolario 3.20 *Consideremos el sistema* (3.3.1), (3.3.2) *en* $M = B \times P$. *Sea* $(\xi^0, x^0) \in M$ *un punto tal que*

$$v_f(\xi^0) \neq 0.$$

Entonces la ecuación (3.3.10) *es soluble en una vecindad de* (ξ^0, x^0) *en* M.

En esta situación, primeramente debemos aplicar el teorema de rectificación al campo vectorial v_f alrededor de de ξ^0 para poder reducir el sistema (3.3.1), (3.3.2) a la forma 3.4.3), (3.4.4).

Supongamos ahora que el sistema (3.4.1), (3.4.2) es *completo*, esto es, el flujo $\mathsf{Fl}^t : M \to M$ está bien definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Consideremos la familia de difeomorfismos $g_s^t : P \to P$ definida por

$$\frac{\mathrm{d}g_s^t}{\mathrm{d}t}(x) = V_F(s, t, g_s^t(x)), \qquad g_s^0 = \mathrm{id}. \tag{3.4.5}$$

Entonces, por las propiedades (3.3.8), (3.3.9) se tiene que, en términos de g_s^t, la familia $\mathcal{G}_{s,\alpha}^t$ en (3.3.6), (3.3.7) está dada por

$$\mathcal{G}_{s,\alpha}^t = g_s^{t+\alpha} \circ (g_s^\alpha)^{-1}, \tag{3.4.6}$$

y de aquí se concluye que el flujo de (3.4.1), (3.4.2) tiene la representación

$$\mathsf{Fl}^t(s, \alpha, x) = \Big(s,\ t + \alpha,\ g_s^{t+\alpha} \circ (g_s^\alpha)^{-1}(x)\Big).$$

Proposición 3.21 *Una solución general de* (3.4.3), (3.4.4) *en* $\mathbb{R}^{2n} \times P$ *está dada por las fórmulas*

$$Q_i(s, \alpha, x) = \int_0^\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial s^i}\right)\big(s, \tau, g_s^\tau \circ (g_s^\alpha)^{-1}(x)\big)\,\mathrm{d}\tau \ +\ \chi_i\big(s, (g_s^\alpha)^{-1}(x)\big), \tag{3.4.7}$$

$$(i = 1, \ldots, 2k-1),$$

$$Q_{2k}(s, \alpha, x) = F(s, \alpha, x) \ +\ \chi_{2k}(s, (g_s^\alpha)^{-1}(x)), \tag{3.4.8}$$

donde $\chi_1 = \chi_1(s, x)$, $\ldots$, $\chi_{2k} = \chi_{2k}(s, x)$ *son funciones arbitrarias suaves en* s *y* x. *El sistema* (3.4.1), (3.4.2) *es Hamiltoniano con respecto al corchete* (3.2.11)-(3.2.12) *asociado con la solución* (3.4.7), (3.4.8) *y la función*

$$H(s, \alpha, x) = s^1 \ -\ \chi_{2k}(s, g_{s,\alpha}^{-\alpha}(x)).$$

Demostración. Las ecuaciones (3.4.3), (3.4.4) se pueden escribir en la forma

$$\mathcal{L}_{\mathcal{V}} Q_i = \frac{\partial F}{\partial s^i}, \tag{3.4.9}$$

donde

$$\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial \alpha} + V_{F}(s, \alpha, x).$$

Introducimos el difeomorfismo $\widehat{g} : M \to M$ definido por

$$\widehat{g}(s, \alpha, x) = (s, \alpha, g_s^{\alpha}(x)),$$

el cual tiene la propiedad de preservar las fibras. Luego, se tiene que

$$\widehat{g}^* \circ \mathcal{L}_{\mathcal{V}} = \mathcal{L}_{v_f} \circ \widehat{g}^*.$$

Si aplicamos $\widehat{g}^*$ a los dos lados de (3.4.9), entonces se obtiene

$$\widehat{g}^*(\mathcal{L}_{\mathcal{V}} Q_i) = \mathcal{L}_{v_f}(\widehat{g}^* Q_i) = \widehat{g}^* \frac{\partial F}{\partial s^i}.$$

O bien, de manera equivalente,

$$\frac{\partial \widetilde{Q}_i}{\partial \alpha}(s, \alpha, x) = \frac{\partial F}{\partial s^i}(s, \alpha, g_s^{\alpha}(x)),$$

donde $\widetilde{Q}_i = \widehat{g}^* Q_i$. Al integrar esta ecuación se obtienen (3.4.7) y (3.4.8). ■

De esta manera, el difeomorfismo $\widehat{g}$ es precisamente una transformación de rectificación para el sistema (3.4.3), (3.4.4). En el caso local (Proposisición 3.19), $\widehat{g}$ es un difeomorfismo (local) bien definido entre dos dominios abiertos en $\mathbb{R}^{2n} \times P$.

Notemos también que la afirmación de la Proposición 3.21 se cumple si las hojas simplécticas de Ψ son compactas.

De la Proposición 3.21 se deduce el criterio siguiente para el caso general:

Corolario 3.22 *Considérese el sistema* (3.3.1), (3.3.2) *y supóngase que el campo vectorial* $\mathcal{V}$ (3.3.5) *es completo. Sea* $\xi^0 \in B$ *un punto tal que*

$$v_f(\xi^0) \neq 0.$$

Luego, la ecuación (3.3.10) *es soluble en* $U \times P$ *donde* U *es una vecindad de* ξ^0 *en* B.

Finalmente, observamos que si hacemos $\chi_{2k} \equiv 0$ en (3.4.8), entonces las ecuaciones (3.4.3), (3.4.4) se pueden expresar en términos de la 2-forma horizontal δ_{Q} (3.3.31), como sigue:

$$\mathbf{i}_{\partial/\partial\alpha} \delta_{Q} = 0. \tag{3.4.10}$$

En este caso, $F = \mathbf{i}_{v_f}\delta_Q$ y, en consecuencia, el campo vectorial $\mathcal{V}$ coincide con el levantamiento horizontal de $\partial/\partial\alpha$ con respecto a la conexión.

El caso $k = 1$. Consideremos el caso de una familia 1-paramétrica de sistemas Hamiltonianos dependientes del tiempo, donde $B = \mathbb{R}^2 = \{(s, \alpha)\}$ y

$$\omega = \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\alpha.$$

En esta situación, el sistema (3.4.1), (3.4.2) es Hamiltoniano con respecto al corchete de Poisson

$$\{s, \alpha\}_M = \frac{1}{\mathcal{F}_{12}}, \tag{3.4.11}$$

$$\{s, x^\sigma\}_M = -\frac{1}{\mathcal{F}_{12}}\Psi^{\sigma\nu}\,\frac{\partial Q_2}{\partial x^\nu}, \tag{3.4.12}$$

$$\{\alpha, x^\sigma\}_M = \frac{1}{\mathcal{F}_{12}}\Psi^{\sigma\nu}\,\frac{\partial Q_1}{\partial x^\nu}, \tag{3.4.13}$$

$$\{x^\alpha, x^\beta\}_M = \Psi^{\alpha\beta} - \frac{1}{\mathcal{F}_{12}}\Psi^{\alpha\nu}\,\Psi^{\beta\mu}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x^\mu}\frac{\partial Q_2}{\partial x^\nu} - \frac{\partial Q_1}{\partial x^\nu}\frac{\partial Q_2}{\partial x^\mu}\right), \tag{3.4.14}$$

donde

$$\mathcal{F}^{12} = 1 + \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial Q_2}{\partial s} - \{Q_1, Q_2\}_P,$$

y

$$Q_1(s, \alpha, x) = \int_0^\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)\big(s, \tau, g_s^\tau \circ (g_s^\alpha)^{-1}(x)\big)\,\mathrm{d}\tau \,+\, \chi_1\big(s, (g_s^\alpha)^{-1}(x)\big), \tag{3.4.15}$$

$$Q_2(s, \alpha, x) = F(s, \alpha, x) \,+\, \chi_2\big(s, (g_s^\alpha)^{-1}(x)\big). \tag{3.4.16}$$

Además, el Hamiltoniano toma la forma

$$H(s, \alpha, x) = s \,-\, \chi_2\big(s, g_{s,\alpha}^{-\alpha}(x)\big).$$

En particular, si $\chi_2 \equiv 0$, entonces se sigue de (3.4.10) que $\delta_Q = 0$ y $\mathcal{F}^{12} \equiv 1$.

Observación 3.23 *Si F es independiente del parámetro s, $\partial F/\partial s \equiv 0$, entonces el sistema* (3.4.1), (3.4.2) *corresponde a un sistema "simple" dependiente del tiempo* $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = V_F(t, x)$. *Si se toma $\chi_1 = \chi_2 = 0$, se obtiene $Q_1 = 0$, $Q_2 = F$ y $\mathcal{F}^{12} = 1$. En este caso, $H(s, \alpha, x) = s$ y las relaciones* (3.4.11)-(3.4.14) *para el corchete vienen a ser*

$$\{s, \alpha\} = 1, \tag{3.4.17}$$

$$\{s, x^\sigma\} = -\Psi^{\sigma\nu}(x)\,\frac{\partial F}{\partial x^\nu}, \qquad \{\alpha, x^\sigma\} = 0, \tag{3.4.18}$$

$$\{x^\alpha, x^\beta\} = \Psi^{\alpha\beta}. \tag{3.4.19}$$

Bajo la transformación

$$s \mapsto s - F(\alpha, x) \qquad \alpha \mapsto \alpha, \qquad x \mapsto x,$$

el sistema (3.4.1), (3.4.2) *es transformado a un sistema Hamiltoniano en el corchete de Poisson del producto directo en* $M = \mathbb{R}^2 \times P$ *con Hamiltoniano* $H(s, \alpha, x) = s + F(\alpha, x)$. *Este resultado es bastante conocido en el formalismos de los sistemas Hamiltonianos dependientes del tiempo* [1, 16].

El caso periódico. Consideremos ahora el caso cuando $B = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 = \{(s, \alpha \,(\mathrm{mod}\, 2\pi))\}$ es el cilindro con la forma simpléctica canónica $\omega = \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\alpha$, el cual está trivialmente foliado por las trayectorias periódicas del campo vectorial

$$v_f = \omega(s)\,\frac{\partial}{\partial\alpha}, \qquad \text{con } f'(s) = \omega(s).$$

Aquí, $\omega = \omega(s)$ es la función de frecuencia que depende de manera suave de $s \in \mathbb{R}$. Supongamos que

$$F(s, \alpha + 2\pi, x) = F(s, \alpha, x),$$

de donde se tiene $V_F(s, \alpha + 2\pi, x) = V_F(s, \alpha, x)$. Así, en este caso estamos tratando el sistema proyectable en $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times P$:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{3.4.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \omega(s), \tag{3.4.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V_F(s, \alpha, x). \tag{3.4.22}$$

Este sistema es asociado con la familia 1-paramétrica de sistemas Hamiltonianos periódicos en el tiempo $(P, \Psi, F_{s,t})$,

$$F_{s,\,t+T(s)} = F_{s,t}, \qquad T(s) = \frac{2\pi}{\omega(s)}.$$

La ecuación (3.3.10) para $Q = Q_1\mathrm{d}s + Q_2\mathrm{d}\alpha$ en $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \times P$, se reduce a las siguientes ecuaciones para las funciones $Q_1(s, \alpha, x)$, y $Q_2(s, \alpha, x)$:

$$\omega(s)\frac{\partial Q_1}{\partial\alpha} + \{F, Q_1\}_P + \omega_1'(s)Q_2 = \frac{\partial F}{\partial s}, \tag{3.4.23}$$

$$\omega(s)\frac{\partial Q_2}{\partial\alpha} + \{F, Q_2\}_P = \frac{\partial F}{\partial\alpha}, \tag{3.4.24}$$

las cuales satisfacen la condición de periodicidad

$$Q_1(s, \alpha, x) = Q_1(s, \alpha + 2\pi, x), \qquad Q_2(s, \alpha, x) = Q_2(s, \alpha + 2\pi, x). \tag{3.4.25}$$

La solubilidad de (3.4.23)-(3.4.24), significa que el sistema es Hamiltoniano en el corchete de Poisson (3.2.11)-(3.2.12) con Hamiltoniano

$$H(s, \alpha, x) = f(s) + F - \omega_1 Q_2$$

Consideremos los dos casos siguientes:

Caso 1: $\omega(s) \equiv 1$. En esta situación, las ecuaciones (3.4.23)-(3.4.24) son independientes y por la Proposición 3.21, la reducibilidad de (3.4.1), (3.4.2) equivale a la existencia de ciertas funciones $\chi_1 = \chi_1(s,x)$ y $\chi_2 = \chi_2(s,x)$ tales que Q_1 y Q_2 en (3.4.23)-(3.4.24) satisfacen la condición de periodicidad (3.4.25). Ahora, por medio de argumentos estándar es posible mostrar que la familia de difeomorfismos $g_s^t : P \to P$ en (3.4.5) tiene la propiedad

$$g_s^{t+2\pi} = g_s^t \circ \mathcal{M}_s$$

donde

$$\mathcal{M}_s \stackrel{\text{def}}{=} g_s^{2\pi}$$

es la *monodromía* del sistema periódico en el tiempo (3.4.20)-(3.4.22). Recordemos que para (s,α) fijo, denotamos por $V_G = \Psi^\sharp \mathrm{d}_P G$ el campo vectorial Hamiltoniano en P de una función $G = G(s,\alpha,x)$. La fórmula (3.4.7) implica que

$$V_{Q_1} = (g_s^\alpha)_* \int_0^\alpha (g_s^\tau)^* V_{\frac{\partial F}{\partial s}} \, \mathrm{d}\tau \, + \, (g_s^\alpha)_* V_{\chi_1}. \tag{3.4.26}$$

Tomando la derivada de (3.4.5) con respecto a s se obtiene

$$(g_s^\tau)^* V_{\frac{\partial F}{\partial s}}(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\left(\mathrm{d}_{g_s^\alpha(x)} (g_s^\alpha)^{-1} \right) \frac{\partial g_s^\alpha}{\partial s}(x) \right].$$

Sustituyendo esta igualdad en (3.4.26) nos lleva a la fórmula de variación de parámetros

$$V_{Q_1}(s,\alpha,x) = \frac{\partial g_s^\alpha}{\partial s}\Big((g_s^\alpha)^{-1}(x) \Big) \, + \, (g_s^\alpha)_* V_{\chi_1}(x).$$

De esto se deduce el resultado siguiente.

Proposición 3.24 *La periodicidad de* Q_1 (3.4.25) *en* α *implica la siguiente condición para la monodromía* $\mathcal{M}_s$*,*

$$\frac{\partial \mathcal{M}_s}{\partial s}(x) \, + \, \big(\mathrm{d}_x \mathcal{M}_s\big) \, V_{\chi_1}(s,x) \, - \, V_{\chi_1}\big(s, \mathcal{M}_s(x)\big) = 0, \qquad \forall \, x \in P. \tag{3.4.27}$$

Notemos que la condición (3.4.27) es una analogía no-lineal de la llamada condición de "deformación iso-espectral", la cual aparece en el caso lineal [25, 65, 68]. Si existe χ_1 de tal manera que (3.4.27) se cumple, entonces $\mathcal{M}_s$ coincide con $\mathcal{M}_0$ salvo por una conjugación, $\mathcal{M}_s = \mathcal{U}_s \circ \mathcal{M}_0 \circ \mathcal{U}_s^{-1}$, donde

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathcal{U}_s}{\mathrm{d}s} = V_{\chi_s^1} \circ \mathcal{U}_s, \qquad \mathcal{U}_0 = \mathrm{id}.$$

Caso 2. $\omega'(s) > 0$. Si tomamos

$$Q_2 = \frac{1}{\omega}(F - C),$$

entonces (3.4.23), (3.4.24) se reducen a las siguientes ecuaciones para C y Q_1:

$$\omega(s)\,\frac{\partial C}{\partial \alpha} + \{F, C\}_{P} = 0, \tag{3.4.28}$$

$$\omega(s)\,\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} + \{F, Q_1\}_{P} = \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\omega'}{\omega}\,F + \frac{\omega'}{\omega}\,C. \tag{3.4.29}$$

Por lo tanto, de la primera ecuación se sigue que $C = C(s, \alpha, x)$ es una integral primera del sistema (3.4.20)-(3.4.22), la cual es 2π-periódica en α. Además, el Hamiltoniano toma la forma

$$H = \pi^* f + C.$$

Si resolvemos para C en la ecuación (3.4.28) y sustituyéndola en (3.4.29) se obtiene el criterio siguiente

Criterio 3.25 *La solubilidad de las ecuaciones* (3.4.28), (3.4.29) *es equivalente a la existencia de una solución Q_1 de la ecuación*

$$\omega\frac{\partial^2 Q_1}{\partial^2 \alpha} + 2\left\{F, \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha}\right\}_{P} + \left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha}, Q_1\right\}_{P} + \frac{1}{\omega}\,\{F, \{F, Q_1\}_{P}\}_{P} = \frac{\partial^2 F}{\partial s\,\partial \alpha} - \frac{\omega'}{\omega}\,\frac{\partial F}{\partial \alpha}. \tag{3.4.30}$$

Consideremos el caso particular cuando F es independiente de α

$$F = F^0(s, x).$$

Luego, el sistema (3.4.20)-(3.4.22) toma la forma

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{3.4.31}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \omega(s), \tag{3.4.32}$$

$$\frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}t} = -\Psi^{\sigma\gamma}(x)\,\frac{\partial F^0}{\partial x^{\gamma}}(s, x). \tag{3.4.33}$$

Claramente, en este caso, (3.4.30) es soluble y una solución particular de (3.4.28), (3.4.29) está dada por

$$Q_1^0 = 0, \qquad Q_2^0 = \frac{1}{\omega'(s)}\frac{\partial F^0}{\partial s}(s, x). \tag{3.4.34}$$

Esto corresponde a

$$C = F^0 - \frac{\omega(s)}{\omega'(s)}\,\frac{\partial F^0}{\partial s}.$$

Consideremos ahora el tensor de Poisson Π_{Q^0} asociado con la solución $Q^0 = Q_1^0\,\mathrm{d}s + Q_2^0\,\mathrm{d}\alpha$ en (3.4.34). El corchete de Poisson (3.4.11)-(3.4.14) correspondiente toma la forma

$$\{s, \alpha\}_{M} = \frac{1}{\mathcal{F}_{12}}, \tag{3.4.35}$$

$$\{s, x^{\sigma}\}_{M} = -\frac{1}{\omega' \, \mathcal{F}_{12}} \Psi^{\sigma\nu} \frac{\partial^2 F^0}{\partial x^{\nu} \, \partial s}, \tag{3.4.36}$$

$$\{\alpha, x^{\sigma}\}_{M} = 0, \tag{3.4.37}$$

$$\{x^{\alpha}, x^{\beta}\}_{M} = \Psi^{\alpha\beta}, \tag{3.4.38}$$

donde

$$\mathcal{F}_{12} = 1 - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\omega'(s)} \frac{\partial F^0}{\partial s}(s,x)\right).$$

Proposición 3.26 *En el dominio invariante*

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{F}^{\varepsilon}_{Q^0}) \approx \mathbb{S}^1 \times \left\{ (s,x) \;\Big|\; \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\omega'(s)} \frac{\partial F^0}{\partial s}(s,x)\right) \neq 1 \right\},$$

el sistema (3.4.31)-(3.4.33) *es Hamiltoniano relativo al corchete de Poison* (3.4.35)-(3.4.38) *y a la función*

$$H^0(s,x) = f(x) \,+\, F^0(s,x) \,-\, \frac{\omega(s)}{\omega'(s)} \frac{\partial F^0}{\partial s}(s,x). \tag{3.4.39}$$

Familias de sistemas de Lie periódicos. Aplicaremos ahora los resultados previos al problema de Hamiltonización de sistemas sesqui-producto reducibles, en el sentido de la Definición 2.17 (ver Capítulo 2). De las Proposiciones 3.26 y 3.26 se obtiene el resultado siguiente.

Teorema 3.27 *Supongamos que el sistema sesqui-producto en* $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times P$*,*

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{3.4.40}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega(s), \tag{3.4.41}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V_{F}(s,\alpha,x), \tag{3.4.42}$$

es reducible por medio de una transformación gauge Hamiltoniana $\mathcal{T} : M \to M$*,* $\mathcal{T}(s,\varphi,x) = (s,\varphi,\mathcal{T}_{s,\varphi}(x))$ *a la "forma constante"* (3.4.31)-(3.4.33)*. Sea* $\Theta = \Theta_1(s,\varphi,x)\,\mathrm{d}s \,+\, \Theta_2(s,\varphi,x)\,\mathrm{d}\varphi$ *la* 1*-forma Hamiltoniana en* (2.5.25)*. Entonces el sistema* (3.4.40)-(3.4.42) *es Hamiltoniano con respecto a la Q-estructura de Poisson asociada a la* 1*-forma horizontal* $Q = Q_1(s,\varphi,x)\,\mathrm{d}s \,+\, Q_2(s,\varphi,x)\,\mathrm{d}\varphi$*, con*

$$Q_1(s,\varphi,x) = -\Theta_1(s,\varphi,x), \tag{3.4.43}$$

$$Q_2(s,\varphi,x) = Q_2^0(s,\mathcal{T}_{s,\varphi}(x)) \,-\, Q_2^0(s,x), \tag{3.4.44}$$

y a la función

$$H(s,\varphi,x) = H^0(s,\mathcal{T}_{s,\varphi}(x)) \,-\, \omega(s)\Theta_2(s,\varphi,x), \tag{3.4.45}$$

donde Q_2^0 *y* H^0 *están dadas por* (3.4.34) *y* (3.4.39)*, respectivamente.*

Corolario 3.28 *El sistema de Lie*

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{3.4.46}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega(s), \tag{3.4.47}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = T_e\Phi^x(a(s,\varphi)). \tag{3.4.48}$$

en $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times P$ *asociado a la familia de curvas cerradas* $a : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to \mathfrak{g}$, $a(s,\varphi + 2\pi) = a(s,\varphi)$. *Si se satisface la condición* (2.5.33)*, entonces el sistema* (3.4.46)-(3.4.48) *es Hamiltoniano con respecto a la Q-estructura de Poisson determinada por Q en* (3.4.43), (3.4.44) *y la función* (3.4.45)*, donde* Θ *está dada por* (2.5.25).

Algunas generalizaciones. En esta parte generalizamos los resultados obtenidos anteriormente sobre la solubilidad de la ecuación (3.3.10) para la estructura toplógica de la variedad simpléctica (B,ω) y la dinámica Hamiltoniana de v_f es más complicada. Así, supongamos que la variedad B es *paralelizable* y en cada punto admite una base de campos vectoriales $w_1, \ldots, w_{2k}$ ($\dim(B) = 2k$). Es ampliamente conocido [6] que si B es conexa y los campos vectoriales $w_1, \ldots, w_{2k}$ son completos, entonces se tiene que $B \approx \mathbb{T}^s \times \mathbb{R}^{2k-s}$. Denotemos por $\eta^1, \ldots, \eta^{2k}$ la base dual de las 1-formas en B: $\eta^i(w_j) = \delta^i_j$. Supongamos además, que el campo vectorial $v \equiv v_f$ satisface la siguiente condición: Existe un entero $s < 2k$ tal que

$$[v, w_j] = 0, \tag{3.4.49}$$

$$\mathbf{i}_v\eta^i = 0, \tag{3.4.50}$$

para $i = 1,\ldots,s$ y $j = s+1,\ldots,2k$. Las condiciones (3.4.49) y (3.4.50) implican la siguiente descomposición para v_f:

$$v = \sum_{j=s+1}^{2k} c^j\, w_j,$$

donde los coeficientes $c^j \in C^\infty(B)$ satisfacen

$$\mathcal{L}_{w_l}c^j = 0, \qquad (l,\, j = s+1,\ldots,2k).$$

Geométricamente, las condiciones (3.4.49) y (3.4.50) implican que v es tangente a las hojas de la distribución integrable generada por los campos vectoriales $w_{s+1},\ldots,w_{2k}$.

Debemos notar que para cualquier campo vectorial w en B, si aplicamos el producto interior $\mathbf{i}_w$ en ambos lados de la ecuación (3.3.10) se obtiene

$$\mathcal{L}_v(\mathbf{i}_wQ) + \{F, \mathbf{i}_wQ\}_P + \mathbf{i}_{[w,v]}Q = \mathcal{L}_wF. \tag{3.4.51}$$

Aquí hemos utilizado la relación estándar entre la derivada de Lie y el producto interior [1]: $\mathbf{i}_w \circ \mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v \circ \mathbf{i}_w = \mathbf{i}_{[w,v]}$. Además, tomando en cuenta (3.4.49) y

$$[w_i, v] = \sum_{l=s+1}^{2k} (\mathcal{L}_{w_i}c^j)w_j, \tag{3.4.52}$$

y representando una 1-forma horizontal Q como

$$Q = \sum_{i=s}^{s} Q_i \, \eta^i \; + \sum_{j=s+1}^{2k} Q_j \, \eta^j,$$

se deriva de (3.4.51) que (3.3.10) se descompone en las ecuaciones siguientes:

$$\mathcal{L}_v Q_i \; + \; \{F, Q_i\}_P \; + \sum_{j=s+1}^{2k} \mathfrak{L}_i^j Q_j = \mathcal{L}_{w_i} F \qquad (i = 1, \ldots, s), \tag{3.4.53}$$

$$\mathcal{L}_v Q_j \; + \; \{F, Q_j\}_P = \mathcal{L}_{w_j} F \qquad (j = s+1, \ldots, 2k), \tag{3.4.54}$$

donde

$$\mathfrak{L}_i^j \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}_{w_i} c^j. \tag{3.4.55}$$

Supongamos ahora que la función F en (3.3.10) satisface

$$\mathcal{L}_{w_j} F = 0 \qquad (j = s+1, \ldots, 2k). \tag{3.4.56}$$

Luego, haciendo $Q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, s)$ y sustituyendo en (3.4.53), se obtienen las relaciones

$$\sum_{j=s+1}^{2k} \mathfrak{L}_i^j Q_j = \mathcal{L}_{w_i} F, \tag{3.4.57}$$

$$\mathcal{L}_v Q_j \; + \; \{F, Q_j\}_P = 0. \tag{3.4.58}$$

Lema 3.29 *Si la ecuación algebraica* (3.4.57) *admite una solución* $Q_j = Q_j^0$*, para cada* $j = s+1, \ldots, 2k$*, entonces* Q_j^0 *es también una solución de* (3.4.58).

Demostración. Es claro que las Q_j^0 dependen algebraicamente de $\mathcal{L}_{w_i} F$ y $\mathfrak{L}_i^j$. Así, es suficiente probar que $\mathcal{L}_{w_i} F$ y $\mathfrak{L}_i^j$ satisfacen (3.4.58). De (3.4.52) y de (3.4.56) se tiene $\mathcal{L}_v(\mathcal{L}_{w_i} F) = 0$ junto con $\mathcal{L}_v(\mathfrak{L}_i^j) = 0$. Además, $\{F, \mathcal{L}_{w_i} F\}_P = 0$ y $\{F, \mathfrak{L}_i^j\}_P = 0$. ■

De esto se deriva el resultado siguiente.

Proposición 3.30 *Supongamos que* v_f *y* F *satisfacen las condiciones* (3.4.49), (3.4.50) *y* (3.4.56). *Si* (3.4.57) *admite una solución* Q_j^0*, entonces*

$$Q = \sum_{j=s+1}^{2k} Q_j^0 \, \eta^j \tag{3.4.59}$$

es una solución de (3.3.10). *En el caso cuando* $s = k$*, la solución* Q_j^0 *existe si* $\mathfrak{L} = (\mathfrak{L}_i^j)$ *es no-degenerada en* B*,*

$$\det \mathfrak{L} \neq 0, \tag{3.4.60}$$

y está dada por

$$Q_j^0 = \sum_{i=1}^{k} (\mathfrak{L}^{-1})_j^i \, \mathcal{L}_{w_i} F \qquad (j = 1, \ldots, k). \tag{3.4.61}$$

Las condiciones (3.4.49), (3.4.50) se pueden concretar en el caso cuando el sistema Hamiltoniano (B, ω, f) es integrable [6] o parcialmente integrable [56]. Sean $B = \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^k = \{s = (s^1, \dots, s^k), \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)\}$, $\omega = \sum_{i=1}^k \mathrm{d}s^i \wedge \mathrm{d}\varphi_i$ y $f = f(s)$. Entonces,

$$v_f = \sum_{j=1}^{k} c^j(s) \frac{\partial}{\partial \varphi_j}, \qquad c^j(s) = \frac{\partial f}{\partial s^j}(s) \tag{3.4.62}$$

y las condiciones (3.4.49), (3.4.50) se cumplen para $\eta^i = \mathrm{d}s^i$, $\eta^{i+k} = \mathrm{d}\varphi_i$ y $w_i = \partial/\partial s^i$, $w_{i+k} = \partial/\partial \varphi_i$, $i = 1, \dots, k$. Supongamos ahora que $F = F^0(s, x)$. Entonces se cumple (3.4.56).

Consideremos ahora la versión multidimensional del sistema (3.4.40)-(3.4.42) en $M = (\mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^k) \times P$:

$$\frac{\mathrm{d}s^i}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{3.4.63}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t} = c^i(s), \tag{3.4.64}$$

$$\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}t} = -\Psi^{\sigma\gamma}(x) \frac{\partial F^0}{\partial x^\gamma}(s, x). \tag{3.4.65}$$

De la Proposicón 3.30 se deriva la siguiente generalización de la Proposisición 3.26.

Proposición 3.31 *Supongamos que* $\mathfrak{L}(s) = \left[\dfrac{\partial^2 f(s)}{\partial s^j \partial s^i}\right]$ *es no-degenerada,*

$$\det \left[\frac{\partial^2 f(s)}{\partial s^j \partial s^i}\right] \neq 0, \tag{3.4.66}$$

y sea

$$Q = \sum_{i,j=1}^{k} \left(\mathfrak{L}^{-1}(s)\right)^i_j \frac{\partial F^0}{\partial s^i}(s)\, \mathrm{d}\varphi_j. \tag{3.4.67}$$

Entonces el sistema (3.4.63)-(3.4.65) *es Hamiltoniano con respecto a la estructura de Poisson* Π_Q *asociada a* Q (3.4.67) *y a la función*

$$H^0(s, x) = f(x) + F^0(s, x) - \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial f(s)}{\partial s^j} \left(\mathfrak{L}^{-1}(s)\right)^i_j \frac{\partial F^0(s)}{\partial s^i}. \tag{3.4.68}$$

Debemos notar que la condición de no-degeneración (3.4.66) significa que el sistema Hamiltoniano completamente integrable (B, ω, f) es no-degenerado en el sentido de Kolmogorov [6].

Notemos también que de aquí se deriva un análogo del Teorema 3.27 para una familia de sistemas Hamiltonianos quasi-periódicos dependientes del tiempo en P.

Capítulo 4

Equivalencia de Q-estructuras de Poisson. Relaciones con la Teoría de Perturbaciones

La noción de Q-estructura de Poisson se introdujo en el capítulo anterior con relación al problema de Hamiltonización para la dinámica proyectable y es precisamente esta clase de estructuras de Poisson las que nos permiten dar una respuesta afirmativa a dicho problema.

Ahora estamos interesados en investigar las condiciones bajo las cuales dos Q-estructuras de Poisson, en una variedad suave M, son isomorfas. Este problema es un caso especial del llamado método de homotopía en su versión contravariante, la cual ha sido propuesta en [66] y consiste en encontrar un difeomorfismo entre dos campos suaves de bi-vectores contravariantes en M, sujetos a la condición: Existe una familia de campos de bi-vectores suaves en M que *conecta* a los dados previamente. Esta versión es un análogo contravariante del método de homotopía de Moser para el caso simpléctico [54].

En el caso del método de las trayectorias de Moser, como también se le conoce, se tienen dos estructuras simplécticas Ω_0 y Ω_1 en una variedad suave, compacta, M, *unidas* por medio de una familia de formas simplécticas $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ y se prueba que son isomorfas, es decir, existe un simplectomorfismo $\Phi : M \to M$ tal que $\Phi^*\Omega_1 = \Omega_0$ [18, 51]. Precisamente, las 2-formas simplécticas Ω_λ nos proporciona una *trayectoria suave* entre las formas simplécticas Ω_0 y Ω_1 cuando λ varía en $[0,1]$ y se requiere construir una familia de difeomorfismos $\{\Phi^\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$, en M, de tal manera que $\Phi^0 = \mathrm{id}$ y se cumpla

$$\left(\Phi^\lambda\right)^* \Omega_\lambda = \Omega_0, \qquad \forall\, \lambda \in [0,1]. \tag{4.1}$$

Aquí es oportuno observar lo siguiente: Si existe tal familia de difeomorfismos Φ^λ, que cumplen (5.7.10), entonces ésta define una familia Z_λ de campos vectoriales dependientes del tiempo en M, los cuales, para cada punto $y \in M$ satisfacen:

$$Z_\lambda(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\Phi^\tau\right)(x)\Big|_{\tau=\lambda}, \qquad \text{donde} \quad x = (\Phi^\tau)^{-1}(y),$$

es decir,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\Phi^\lambda\right) = Z_\lambda(\Phi^\lambda). \tag{4.2}$$

Recíprocamente, dada una familia de campos vectoriales dependientes del tiempo, Z_λ, en M, se tiene que si ésta es una variedad compacta o los campos Z_λ tienen soporte compacto, entonces existe una familia de difeomorfismos Φ^λ en M que satisfacen la ecuación diferencial (4.2). Más precisamente, para cada valor del parámetro λ, el difeomorfismo Φ^λ es el flujo del campo Z_λ.

Así, la familia $\{\Phi^\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ nos proporciona una *trayectoria suave* entre la identidad Φ^0 y el llamado *flujo a tiempo* 1, Φ^1. Es precisamente este último difeomorfismo el que nos interesa ya que si hacemos $\Phi \equiv \Phi^1$, entonces Φ satisface la condición $\Phi^*\Omega_1 = \Omega_0$.

Por otra parte, notemos que al aplicar la fórmula

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big((\Phi^\lambda)^*\Omega_\lambda\Big) = \Big(\Phi^\lambda\Big)^* \left(\mathcal{L}_{Z_\lambda}\Omega_\lambda + \frac{\partial}{\partial\lambda}\Omega_\lambda\right),$$

a la ecuación $\left(\Phi^\lambda\right)^*\Omega_\lambda = \Omega_0$ (5.7.10) y puesto que

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big((\Phi^\lambda)^*\Omega_\lambda\Big) = 0, \qquad \forall\, \lambda \in [0,1], \tag{4.3}$$

se obtiene la *ecuación homológica*

$$\mathcal{L}_{Z_\lambda}\Omega_\lambda + \frac{\partial}{\partial\lambda}\Omega_\lambda = 0, \tag{4.4}$$

la cual debemos resolver para Z_λ. Precisamente un campo vectorial Z_λ que sea solución de la ecuación (4.4) nos permite construir los difeomorfismos Φ^λ con las propiedades mencionadas. En este caso, Z_λ es un campo vectorial, dependiente del tiempo, en M que satisface

$$\frac{\mathrm{d}\Phi^\lambda}{\mathrm{d}\lambda}(m) = Z_\lambda(\Phi^\lambda(m)), \qquad \Phi^0(m) = m, \qquad \forall\, m \in M.$$

Vemos así que (5.7.10) es equivalente a resolver la ecuación homológica (4.4) para un campo vectorial Z_λ. Si es posible resolver tal ecuación, entonces el flujo Φ^λ se obtiene al integrar el campo vectorial resultante, lo cual es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (5.7.27)-(5.7.30), como se verá en lo que sigue. Además, veremos que el flujo a tiempo 1, Φ^1, nos da el difeomorfismo Φ que se busca.

4.1 El método de homotopía

En esta parte se presenta una versión contravariante del método de homotopía, la cual fue introducida en [66] y es un análogo contravariante del método de homotopía de Moser [54] para el caso simpléctico.

Esquema general. Sea M una variedad diferenciable y supongamos que es compacta. Si asumimos que Π y $\widetilde{\Pi}$ son dos campos suaves de bi-vectores en M, el *método de homotopía*, en su versión global, consiste en encontrar un difeomorfismo $\phi : M \to M$ tal que

$$\phi^* \widetilde{\Pi} = \Pi. \tag{4.1.1}$$

En este caso se dice que Π y $\widetilde{\Pi}$ son *isomorfos* o *equivalentes*.

Para resolver este problema es necesario, además de la anteriores hipótesis, suponer que podemos "conectar" los bi-vectores Π y $\widetilde{\Pi}$ de alguna manera. La respuesta se da en el resultado siguiente.

Proposición 4.1 *Supongamos que existe una familia* 1*-paramétrica* $\{\Pi_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ *de campos suaves de bi-vectores* Π_λ *en* M *que unen* Π *con* $\widetilde{\Pi}$*,*

$$\Pi_0 = \Pi, \qquad \Pi_1 = \widetilde{\Pi}.$$

Si existe un campo vectorial suave Z_λ*, dependiente del tiempo, en* M *que satisface la* ecuación homológica

$$\mathcal{L}_{Z_\lambda} \Pi_\lambda + \frac{\partial \Pi_\lambda}{\partial \lambda} = 0, \tag{4.1.2}$$

entonces Π *y* $\widetilde{\Pi}$ *son isomorfos en* M *por medio de un difeomorfismo* $\phi : M \to M$ *dado por*

$$\phi = \Phi^1, \tag{4.1.3}$$

donde Φ^λ *es el flujo de* Z_λ*,*

$$\frac{d\Phi^\lambda}{d\lambda} = Z_\lambda \circ \Phi^\lambda, \qquad \Phi^0 = \mathrm{id}.$$

El difeomorfismo ϕ en (4.1.3) lo llamaremos el *flujo a tiempo* 1 del campo vectorial Z_λ.

Demostración. Dado que M es compacta, el flujo Φ^λ está bien definido para todo $\lambda \in [0,1]$. Ahora, utilizando la relación, bastante conocida, entre los flujos de campos vectoriales dependientes del tiempo y la derivada de Lie [1, 42], se tiene que

$$\frac{d}{d\lambda}\left[(\Phi^\lambda)^* \Pi_\lambda\right] = (\Phi^\lambda)^* \left(\mathcal{L}_{Z_\lambda} \Pi_\lambda + \frac{\partial \Pi_\lambda}{\partial \lambda} \right) = 0,$$

y de esto se sigue

$$(\Phi^\lambda)^* \Pi_\lambda = \Pi_0, \qquad \forall\, \lambda \in [0,1].$$

Luego, definimos $\phi \overset{\text{def}}{=} \Phi^1$ y se tiene $\phi^* \Pi_1 = (\Phi^1)^* \Pi_1 = \Pi_0$, por lo que se cumple (4.1.1). ∎

En el caso cuando M no es compacta, la Proposición 4.1 es verdadera si asumimos la siguiente hipótesis: Existe un dominio abierto $U \subset M$ tal que el flujo Φ^λ

de Z_λ está bien definido en U para todo $\lambda \in [0,1]$. Esta propiedad se realiza en una situación importante, que se describe en lo que sigue.

Para establecer una versión semilocal de la Proposición 4.1 partimos de una variedad suave M (no necesariamente compacta) y de una subvariedad cerrada $B \subset M$. Suponemos además, que se tienen dos campos de bi-vectores Π y $\widetilde{\Pi}$ definidos en una vecindad de B en M y que se cumplen las condiciones siguientes:

(i) Existe una familia 1-paramétrica suave $\{\Pi_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ de campos de bi-vectores que unen Π con $\widetilde{\Pi}$.

(ii) Existe una solución Z_λ de la ecuación homológica (4.1.2), la cual se anula en B,
$$Z_\lambda\big|_B = 0.$$

En estas condiciones es tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.2 *Existe una vecindad U de B en M de tal modo que el flujo Φ^λ de Z_λ está bien definido para todo $\lambda \in [0,1]$. El flujo a tiempo 1, $\phi = \Phi^1 : U \to \widetilde{U}$ es un difeomorfismo entre U y una vecindad $\widetilde{U}$ de B en M, el cual establece un isomorfismo entre Π y $\widetilde{\Pi}$.*

La prueba de este enunciado se sigue de la Proposición 4.1 y del resultado siguiente [1, 2]:

Lema 4.3 *Sea m^0 un punto singular de un campo vectorial dependiente del tiempo Z_λ en M. Entonces, para todo $T > 0$ existe una vecindad U de m^0 en M tal que el flujo Φ^λ de Z_λ está bien definido en U para todo $\lambda \in [0,T]$.*

Notemos que si B es compacta, entonces U se puede tomar como una *vecindad tubular*.

De esta manera, la cuestión de sobre la equivalencia de dos campos tensoriales se reduce a la de solubilidad de la ecuación homológica (4.1.2).

4.2 Isomorfismo entre Q-estructuras de Poisson

Sea $M = B \times P$ el producto de una variedad simpléctica (B,ω) y una variedad de Poisson (P,Ψ). Supóngase, además, que se tienen dadas dos 1-formas horizontales Q y $\widetilde{Q}$ en M. Cosidérense ahora los correspondientes tensores de Poisson, dependientes del parámetro ε, Π_Q^ε y $\Pi_{\widetilde{Q}}^\varepsilon$ dados por (3.2.46). Para definir una trayectoria de estructuras de Poisson con puntos finales Π_Q^ε y $\Pi_{\widetilde{Q}}^\varepsilon$ es necesario que estos tensores de Poisson estén bien definidos en un dominio que esté contenido en $\mathrm{Dom}(\Pi_Q^\varepsilon) \cap \mathrm{Dom}(\Pi_{\widetilde{Q}}^\varepsilon)$. Se consideran tres casos que estudiaremos en lo que sigue.

La versión del acoplamiento débil. Si suponemos que M es una variedad compacta, entonces para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, los tensores de Poisson Π^{ε}_{Q} y $\Pi^{\varepsilon}_{\widetilde{Q}}$ están bien definidos en todo el espacio M y $\mathrm{Dom}(\Pi^{\varepsilon}_{Q}) = \mathrm{Dom}(\Pi^{\varepsilon}_{\widetilde{Q}}) = M$. Introduzcamos la familia "lineal" de 1-formas horizontales Q^{λ} haciendo

$$Q^{\lambda} = Q^{\lambda}_{i}(\xi, x)\,\mathrm{d}\xi^{i} \overset{\text{def}}{=} (1-\lambda)Q + \lambda\widetilde{Q}. \tag{4.2.1}$$

Consideremos la familia 2-paramétrica de estructuras de Poisson $\Pi^{\varepsilon}_{\lambda}$ asociadas con los datos geométricos $\big(\omega,\, \varepsilon Q^{\lambda},\, \varepsilon^{-1}\Psi\big)$,

$$\Pi^{\varepsilon}_{\lambda} \overset{\text{def}}{=} \Pi_{\varepsilon Q^{\lambda}} = -(1/2)\,\mathcal{F}^{ij}_{\lambda,\varepsilon}(\xi, x)\,\mathrm{hor}^{\lambda}_{i} \wedge \mathrm{hor}^{\lambda}_{j} \,+\, (1/2\varepsilon)\,\Psi^{\alpha\beta}(x)\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \tag{4.2.2}$$

donde $\big[\mathcal{F}^{ij}_{\lambda,\varepsilon}\big]$ es la inversa de la matriz $\big[\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}_{ij}\big]$ cuyos entradas definen la 2-forma de acoplamiento de $\Pi^{\varepsilon}_{\lambda}$:

$$\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon} = (1/2)\,\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}_{ij}(\xi, x)\,\mathrm{d}\xi^{i} \wedge \mathrm{d}\xi^{j} \,=\, \pi^{*}\omega \,-\, \varepsilon\big[\mathrm{d}_{B}Q^{\lambda} \,+\, (1/2)\{Q^{\lambda} \wedge Q^{\lambda}\}_{P}\big]. \tag{4.2.3}$$

Además,

$$\mathrm{hor}^{\lambda}_{i} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \xi^{i}} \,-\, \Psi^{\alpha\beta}\,\frac{\partial Q^{\lambda}_{i}}{\partial x^{\beta}}\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \xi^{i}} \,+\, \Psi^{\sharp}\,\mathrm{d}_{P}Q^{\lambda}_{i}. \tag{4.2.4}$$

De (4.2.2) y (4.2.3) es claro que

$$\Pi^{\varepsilon}_{0} = \Pi^{\varepsilon}_{Q}, \qquad \Pi^{\varepsilon}_{1} = \Pi^{\varepsilon}_{\widetilde{Q}}.$$

Por otro lado, dado que M es compacta, existe $\delta > 0$ tal que para todo $0 < |\varepsilon| < \delta$ y para todo $0 \leq \lambda \leq 1$, se cumple

$$\det\big[\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}_{ij}(\xi, x)\big] \neq 0.$$

en todos los puntos (ξ, x) de M. De esta manera, para todo $0 < |\varepsilon| < \delta$, $\{\Pi^{\varepsilon}_{\lambda}\}_{\lambda \in [0,1]}$ es una trayectoria que consiste de tensores de Poisson bien definidos en todo M. Aplicando ahora la Proposición 4.1, se tiene que la existencia de un isomorfismo entre los tensores de Poisson Π^{ε}_{Q} y $\Pi^{\varepsilon}_{\widetilde{Q}}$ se reduce a la solubilidad de la ecuación homológica

$$\mathcal{L}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\Pi^{\varepsilon}_{\lambda} \,+\, \frac{\partial \Pi^{\varepsilon}_{\lambda}}{\partial \lambda} = 0, \tag{4.2.5}$$

en M, para $0 < |\varepsilon| < \delta$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Si existe un campo vectorial, dependiente del tiempo, $Z_{\lambda,\varepsilon}$ que satisface (4.2.5), entonces

$$(\Phi^{\lambda,\varepsilon})^{*}\Pi^{\lambda}_{\varepsilon} = \Pi^{\varepsilon}_{0} = \Pi^{\varepsilon}_{Q},$$

donde $\Phi^{\lambda,\varepsilon}$ es el flujo de $Z_{\lambda,\varepsilon}$,

$$\frac{\mathrm{d}\Phi^{\lambda,\varepsilon}}{\mathrm{d}\lambda} = Z_{\lambda,\varepsilon} \circ \Phi^{\lambda,\varepsilon}, \qquad \Phi^{0,\varepsilon} = \mathrm{id}_{M}.$$

Siguiendo a [66, 69], buscamos una solución de (4.2.5) en la forma

$$Z_{\lambda,\varepsilon} = Z^{i}_{\lambda,\varepsilon}(\xi, x)\,\mathrm{hor}^{\lambda}_{i}. \tag{4.2.6}$$

Una caracterización importante de las soluciones de este tipo se da en el resultado siguiente.

Proposición 4.4 *Para todo $0 < |\varepsilon| < \delta$ y para todo $0 \leq \lambda \leq 1$, el campo vectorial $Z_{\lambda,\varepsilon}$, de la forma* (4.2.6)*, es una solución de la ecuación homológica* (4.2.5)*. Este campo está determinado de manera única por la fórmula*

$$\mathbf{i}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon} = \varepsilon(\widetilde{Q} - Q). \tag{4.2.7}$$

La prueba de esta proposición se hace en tres etapas.

Primera Etapa. Debemos notar, primeramente, que los campos vectoriales hor_i^λ, $\partial/\partial x^\alpha$ forman una base (local) de campos vectoriales en M. Además, se tienen (ver Lema 3.2 y Lema 3.3) las propiedades siguientes:

$$\left[\,\mathrm{hor}_i^\lambda, \mathrm{hor}_j^\lambda\,\right] = -\Psi^{\nu\sigma}\,\frac{\partial \mathcal{F}_{ij}^{\lambda,\varepsilon}}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \;\equiv\; -\Psi^\sharp\,\mathrm{d}_P\,\mathcal{F}_{ij}^{\lambda,\varepsilon}, \tag{4.2.8}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{hor}_i^\lambda}\Psi = 0. \tag{4.2.9}$$

Se sigue de (4.2.8) y de las propiedades de la derivada de Lie que

$$\left[\,Z_{\lambda,\varepsilon}, \mathrm{hor}_i^\lambda\,\right] = -\big(\mathcal{L}_{\mathrm{hor}_i^\lambda} Z_{\lambda,\varepsilon}^s\big)\,\mathrm{hor}_s^\lambda \;-\; Z_{\lambda,\varepsilon}^s\,\Psi^\sharp\,\mathrm{d}_P\,\mathcal{F}_{si}^{\lambda,\varepsilon}. \tag{4.2.10}$$

Además, de (4.2.9) y de las propiedades del corchete de Schouten se tiene,

$$\mathcal{L}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\Psi = -\,\mathrm{hor}_s^\lambda \wedge \Psi^\sharp \mathrm{d}_P\, Z_{\lambda,\varepsilon}^s. \tag{4.2.11}$$

De esta fórmula y usando de nuevo las propiedades del corchete de Schouten, se deduce el resultado siguiente.

Lema 4.5 *La derivada de Lie del tensor de Poisson Π_λ^ε* (4.2.2) *a lo largo de $Z_{\lambda,\varepsilon}$ está dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\Pi_\lambda^\varepsilon = (1/2)\,\mathcal{F}_{\lambda,\varepsilon}^{im}\Big(\mathcal{L}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}_{mm'}^{\lambda,\varepsilon} \;-\; \mathcal{F}_{sm}^{\lambda,\varepsilon}\,\mathcal{L}_{\mathrm{hor}_{m'}^\lambda} Z_{\lambda,\varepsilon}^s \;+\; \mathcal{F}_{sm'}^{\lambda,\varepsilon}\,\mathcal{L}_{\mathrm{hor}_m^\lambda} Z_{\lambda,\varepsilon}^s\Big)\,\mathcal{F}_{\lambda,\varepsilon}^{m'j}\,\mathrm{hor}_i^\lambda \wedge \mathrm{hor}_j^\lambda \\ -\; Z_{\lambda,\varepsilon}^s\,\mathcal{F}_{\lambda,\varepsilon}^{mi}\,\mathrm{hor}_i^\lambda \wedge \Psi^\sharp\big(\mathrm{d}_P\mathcal{F}_{sm}^{\lambda,\varepsilon}\big) \;-\; \mathrm{hor}_i^\lambda \wedge \big(\Psi^\sharp\,\mathrm{d}_P Z_{\lambda,\varepsilon}^i\big).\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

De la definición de la derivada de Lie y de la fórmula (4.2.10) se demuestra que

$$\mathcal{L}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}_{mm'}^{\lambda,\varepsilon} \;-\; \mathcal{F}_{sm}^{\lambda,\varepsilon}\,\mathcal{L}_{\mathrm{hor}_{m'}^\lambda} Z_{\lambda,\varepsilon}^s \;+\; \mathcal{F}_{sm'}^{\lambda,\varepsilon}\,\mathcal{L}_{\mathrm{hor}_m^\lambda} Z_{\lambda,\varepsilon}^s \;=\; \big(\mathcal{L}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}\big)\big(\mathrm{hor}_m^\lambda, \mathrm{hor}_{m'}^\lambda\big). \tag{4.2.13}$$

Por otro lado, de las definiciones (4.2.3) y (4.2.4) de $\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}$ y hor_i^λ, respectivamente, se verifica la identidad

$$\underset{(ijs)}{\mathfrak{S}}\,\mathcal{L}_{\mathrm{hor}_i^\lambda}\mathcal{F}_{js}^{\lambda,\varepsilon} = 0.$$

Esta relación junto con (4.2.13) nos lleva a la propiedad siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\big(\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}\big)\big(\mathrm{hor}_m^\lambda, \mathrm{hor}_{m'}^\lambda\big) &= \mathcal{L}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}_{mm'}^{\lambda,\varepsilon} \;-\; \mathcal{F}_{sm}^{\lambda,\varepsilon}\,\mathcal{L}_{\mathrm{hor}_{m'}} Z_{\lambda,\varepsilon}^s \;+\; \mathcal{F}_{sm'}^{\lambda,\varepsilon}\,\mathcal{L}_{\mathrm{hor}_m} Z_{\lambda,\varepsilon}^s \\ &= \mathcal{L}_{\mathrm{hor}_m}\big(\mathbf{i}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}\big)_{m'} \;-\; \mathcal{L}_{\mathrm{hor}_{m'}}\big(\mathbf{i}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}\big)_m \\ &= \Big(\mathrm{d}_B\big(\mathbf{i}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}\big) \;+\; \{\mathbf{i}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon} \wedge Q^\lambda\}_P\Big)_{mm'}.\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Así, obtenemos una nueva representación de la fórmula (4.2.12) para $\mathcal{L}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\Pi_\lambda^\varepsilon$:

Lema 4.6 *Para cada $\lambda \in [0,1]$, se cumple la siguiente identidad,*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\Pi_\lambda^\varepsilon = (1/2)\,\mathcal{F}^{im}_{\lambda,\varepsilon}\Big(\mathrm{d}_B\big(\mathbf{i}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}\big) + \{\mathbf{i}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}\wedge Q^\lambda\}_P\Big)_{mm'}\mathcal{F}^{m'j}\,\mathrm{hor}_i^\lambda\wedge\mathrm{hor}_j^\lambda \\ - Z^s_{\lambda,\varepsilon}\,\mathcal{F}^{mi}_{\lambda,\varepsilon}\,\mathrm{hor}_i^\lambda\wedge\Psi^\sharp\big(\mathrm{d}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}_{sm}\big) - \mathrm{hor}_i^\lambda\wedge\big(\Psi^\sharp\mathrm{d}Z^i_{\lambda,\varepsilon}\big).\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Segunda Etapa. Vamos a calcular ahora $\partial\Pi^\varepsilon_\lambda/\partial\lambda$. Diferenciando (4.2.2) con respecto al parámetro λ se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Pi^\varepsilon_\lambda}{\partial\lambda} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{F}^{ij}_{\lambda,\varepsilon}}{\partial\lambda}\,\mathrm{hor}_i^\lambda\wedge\mathrm{hor}_j^\lambda - \mathcal{F}^{ij}_{\lambda,\varepsilon}\,\mathrm{hor}_i^\lambda\wedge\frac{\partial\mathrm{hor}_j^\lambda}{\partial\lambda} \\ &= \mathcal{F}^{im}_{\lambda,\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}_{mm'}}{\partial\lambda}\mathcal{F}^{m'j}_{\lambda,\varepsilon}\,\mathrm{hor}_i^\lambda\wedge\mathrm{hor}_j^\lambda - \mathcal{F}^{ij}_{\lambda,\varepsilon}\,\mathrm{hor}_i^\lambda\wedge\frac{\partial\mathrm{hor}_j^\lambda}{\partial\lambda}\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

De (4.2.4) y la relación

$$\frac{\partial Q^\lambda}{\partial\lambda} = \widetilde{Q} - Q,$$

obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathrm{hor}_i^\lambda = -\Psi^{\alpha\beta}\frac{\partial(\widetilde{Q}_i - Q_i)}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \Psi^\sharp\mathrm{d}_P(\widetilde{Q}_i - Q_i). \tag{4.2.17}$$

Más aún, de (4.2.3) se sigue directamente que

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon} = -\varepsilon\,\Sigma^\lambda, \tag{4.2.18}$$

donde Σ^λ denota la 2-forma horizontal en M dada por:

$$\Sigma^\lambda \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{d}_B(\widetilde{Q} - Q) + \{(\widetilde{Q} - Q)\wedge Q^\lambda\}_P.$$

Sustituyendo (4.2.17) y (4.2.18) en (4.2.16), se deriva el resultado siguiente.

Lema 4.7 *Para todo $\lambda \in [0,1]$, la fórmula de variación de parámetros*

$$\frac{\partial\Pi^\varepsilon_\lambda}{\partial\lambda} = -\varepsilon\,\mathcal{F}^{im}_{\lambda,\varepsilon}\,\Sigma^\lambda_{mm'}\,\mathcal{F}^{m'j}_{\lambda,\varepsilon}\,\mathrm{hor}_i^\lambda\wedge\mathrm{hor}_j^\lambda - \mathcal{F}^{ij}_{\lambda,\varepsilon}\,\mathrm{hor}_i^\lambda\wedge\Psi^\sharp\,\mathrm{d}_P\big(\widetilde{Q}_j - Q_j\big), \tag{4.2.19}$$

se cumple en M.

Tercera Etapa. Sustituyendo las fórmulas (4.2.15) y (4.2.16) para $\mathcal{L}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\Pi^\varepsilon_\lambda$ y $\partial\Pi^\varepsilon_\lambda/\partial\lambda$ en la ecuación homológica (4.2.5), vemos que los coeficientes se anulan bajos los campos tensoriales independientes $\mathrm{hor}_i^\lambda\wedge\mathrm{hor}_j^\lambda$ y $\mathrm{hor}_i^\lambda\wedge\partial/\partial x^\alpha$, lo cual nos da

$$\mathrm{d}_B\big(\mathbf{i}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}\big) + \{\mathbf{i}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}\wedge Q^\lambda\}_P = \varepsilon\,\Sigma^\lambda,$$

$$-Z^s_{\lambda,\varepsilon}\mathcal{F}^{ji}_{\lambda,\varepsilon}\Psi^\sharp\,\mathrm{d}_P\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}_{sj} - \Psi^\sharp\mathrm{d}_P Z^i_{\lambda,\varepsilon} - \mathcal{F}^{ij}_{\lambda,\varepsilon}\,\Psi^\sharp\,\mathrm{d}_P(\widetilde{Q}_j - Q_j) = 0.$$

De lo anterior se sigue que

Lema 4.8 *Un campo vectorial $Z_{\lambda,\varepsilon}$ satisface la ecuación homológica* (4.2.5) *si y sólo si*

$$\mathrm{d}_B\Big(\mathbf{i}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon} - \varepsilon\,(\widetilde{Q} - Q)\Big) + \Big\{\big(\mathbf{i}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon} - \varepsilon(\widetilde{Q} - Q)\big) \wedge Q^{\lambda}\Big\}_P = 0,$$

$$\Psi^{\sharp}\,\mathrm{d}_P\big(\mathbf{i}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon} - \varepsilon\,(\widetilde{Q} - Q)\big) = 0.$$

Notemos que estas relaciones se cumplen automáticamente si $\mathbf{i}_{Z_{\lambda,\varepsilon}}\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon} - \varepsilon\,(\widetilde{Q} - Q) = 0$. Con esto finaliza la demostración de la Proposición 4.4.

Para resumir la discusión anterior, y por su importancia, formulamos el resultado siguiente.

Teorema 4.9 *Sea $M = B \times P$ una variedad compacta y Q, $\widetilde{Q}$ dos* 1*-formas horizontales en M. Entonces, para $\varepsilon \in (0, \delta)$ suficientemente pequeño, los correspondientes tensores de Poisson, Π^{ε}_{Q} y $\Pi^{\varepsilon}_{\widetilde{Q}}$, son isomorfos en M por medio del flujo a tiempo* 1, $\Phi^{1,\varepsilon}$ *del campo vectorial*

$$Z_{\lambda,\varepsilon} = -\varepsilon\,\mathcal{F}^{ij}_{\lambda,\varepsilon}\big(\widetilde{Q}_j - Q_j\big)\,\mathrm{hor}^{\lambda}_i, \tag{4.2.20}$$

es decir,

$$\big(\Phi^{1,\varepsilon}\big)^{*}\Pi^{\varepsilon}_{\widetilde{Q}} = \Pi^{\varepsilon}_{Q}.$$

Debemos señalar que $\Phi^{1,\varepsilon}$ es una *transformación cercana a la identidad* ya que si $\varepsilon \longrightarrow 0$, entonces

$$\Phi^{1,0} = \mathrm{id}_M.$$

Corolario 4.10 *Para toda* 1*-forma horizontal Q y para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, la estructura de Poisson del producto directo Π^{ε}_{0} es isomorfa a Π^{ε}_{Q} por medio del flujo a tiempo* 1,

$$\big(\Phi^{1,\varepsilon}\big)^{*}\Pi^{\varepsilon}_{Q} = \Pi^{\varepsilon}_{0}$$

del campo vectorial dependiente del tiempo

$$Z_{\lambda,\varepsilon} = -\varepsilon\,\mathcal{F}^{ij}_{\lambda,\varepsilon}Q_j\,\mathrm{hor}^{\lambda}_i,$$

donde

$$\mathrm{hor}^{\lambda}_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i} - \lambda\,\Psi^{\alpha\beta}\,\frac{\partial Q_i}{\partial x^{\beta}}\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}},$$

$$\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon} = \pi^{*}\omega - \varepsilon\lambda\big(\mathrm{d}_B Q + (1/2)\{Q \wedge Q\}_P\big).$$

El caso simpléctico. Supongamos de nuevo que $M = B \times P$ es compacta y que (P, Ψ) es una variedad simpléctica, esto es, el tensor de Poisson Ψ es no-degenerado. La correspondiente forma simpléctica en P (ver (3.2.48)) está dada por

$$\sigma = (1/2)\,\sigma_{\alpha\beta}(x)\;\mathrm{d}x^{\alpha} \wedge \mathrm{d}x^{\beta}.$$

Dadas dos 1-formas horizontales Q y $\widetilde{Q}$ en M, consideremos las estructuras de Poisson, ε-dependientes, Π_Q y $\Pi_{\widetilde{Q}}$ que corresponden a cada una. Entonces, para

ε suficientemente pequeño, Π_Q y $\Pi_{\widetilde{Q}}$ son no-degeneradas en M y las respectivas formas simplécticas (formas de acoplamiento) estás dadas por (ver la Proposición 3.5):

$$\Omega^{\varepsilon}_{Q} = \pi^*_B\,\omega + \varepsilon\,\pi^*_P\,\sigma - \varepsilon\,\mathrm{d}Q, \tag{4.2.21}$$

$$\Omega^{\varepsilon}_{\widetilde{Q}} = \pi^*_B\,\omega + \varepsilon\,\pi^*_P\,\sigma - \varepsilon\,\mathrm{d}\widetilde{Q}. \tag{4.2.22}$$

Como una consecuencia directa del Teorema 4.9 se deduce lo siguiente.

Teorema 4.11 *Para ε suficientemente pequeño, las formas simplécticas Ω^{ε}_{Q} y $\Omega^{\varepsilon}_{\widetilde{Q}}$ son isomorfas por medio del flujo a tiempo 1, $\Phi^{1,\varepsilon}$, del campo vectorial dependiente del tiempo $Z_{\lambda,\varepsilon}$ en* (4.2.20),

$$\left(\Phi^{1,\varepsilon}\right)^*\Omega^{\varepsilon}_{\widetilde{Q}} = \Omega^{\varepsilon}_{Q}.$$

Es oportuno señalar, por otro lado, que este hecho se sigue del resultado ampliamente conocido de Moser [31], el cual no tiene un análogo en el caso de estructuras de Poisson degeneradas.

Proposición 4.12 *Sea M una variedad compacta y sean Ω_0 y Ω_1 dos estructuras simplécticas en M. Supongamos que*

(i) $\Omega_\lambda = \lambda\Omega_1 + (1-\lambda)\Omega_0$ *es simpléctica para todo* $\lambda \in [0,1]$, *y*

(ii) *Las clases de cohomología* $[\Omega_0]$ *y* $[\Omega_1]$ *son iguales.*

Entonces, Ω_0 y Ω_1 son isomorfas.

Demostración. En esta situación, la ecuación homológica (4.2.5) toma la forma

$$\mathcal{L}_{Z_\lambda}\Omega_\lambda + \frac{\mathrm{d}\Omega_\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = 0. \tag{4.2.23}$$

Por hipótesis, existe una 1-forma μ en M tal que

$$\Omega_1 - \Omega_0 = \mathrm{d}\mu.$$

Luego, usando la fórmula de Cartan, $\mathcal{L}_{Z_\lambda} = \mathbf{i}_{Z_\lambda}\circ\mathrm{d} + \mathrm{d}\circ\mathbf{i}_{Z_\lambda}$, es posible escribir la ecuación (4.2.23) en la forma

$$\mathrm{d}(\mathbf{i}_{Z_\lambda}\Omega_\lambda) = -\mathrm{d}\mu. \tag{4.2.24}$$

Dado que Ω_λ es no-degenerada para todo $\lambda \in [0,1]$, existe un único campo vectorial dependiente del tiempo, Z_λ, en M que satisface

$$\mathbf{i}_{Z_\lambda}\Omega_\lambda = -\mu. \tag{4.2.25}$$

Por lo tanto, (4.2.24) se cumple y Z_λ es una solución de la ecuación homológica (4.2.5). El flujo Φ^λ de Z_λ está bien definido para todo $\lambda \in [0,1]$ y se sigue que

$(\Phi^1)^*\Omega_1 = \Omega_0$. ■

Regresando al Teorema 4.11, podemos aplicar la Proposición 4.12 al caso cuando $\Omega_1 = \Omega^{\varepsilon}_{\widetilde{Q}}$ y $\Omega_0 = \Omega^{\varepsilon}_{Q}$. Luego, la condición (4.2.25) se satisface para $\mu = Q - \widetilde{Q}$. La primera de las hipótesis (i) en la Proposición 4.12 también se cumple. En este caso es importante que Q y $\widetilde{Q}$ sean horizontales.

La versión semi-local. Consideremos ahora el caso cuando la variedad $M = B \times P$ no es necesariamente compacta, pero asumiendo que la estructura de Poisson Ψ en P tiene un punto singular $x^0 \in P$,

$$\Psi^{\alpha\beta}(x^0) = 0.$$

Supongamos que están dadas dos 1-formas horizontales en M,

$$Q = Q_i(\xi, x)\, \mathrm{d}\xi^i, \qquad \widetilde{Q} = \widetilde{Q}_i(\xi, x)\, \mathrm{d}\xi^i,$$

las cuales se anulan en los puntos del subconjunto $B \times \{x^0\}$:

$$Q_i(\xi, x^0) = 0 \quad \text{y} \quad \widetilde{Q}_i(\xi, x^0) = 0, \quad \forall\, \xi \in B. \tag{4.2.26}$$

Luego, de acuerdo con el Teorema 3.1, se tiene que los correspondientes tensores de Poisson Π_Q y $\Pi_{\widetilde{Q}}$ vienen dados por (3.2.46) y están bien definidos en una vecindad de $B \times \{x^0\}$ en M. El subconjunto $B \times \{x^0\}$ es una subvariedad invariante para estas estructuras de Poisson y las restricciones de Π_Q y $\Pi_{\widetilde{Q}}$ a $B \times \{x^0\}$ coinciden con la estructura de Poisson no-degenerada de la variedad simpléctica (B, ω). En particular,

$$\mathcal{F}_Q = \mathcal{F}_{\widetilde{Q}} = \pi^*\omega,$$

en $B \times \{x^0\}$. De esta manera, el problema aquí es estudiar la equivalencia entre las estructuras de Poisson Π_Q y $\Pi_{\widetilde{Q}}$ alrededor de $B \times \{x^0\}$.

Teorema 4.13 *Existe un difeomorfismo $\phi : U \to \widetilde{U}$ entre dos vecindades U y $\widetilde{U}$ de B en M, el cual es la identidad en B, $\phi|_B = \mathrm{id}_B$, y tal que*

$$\phi^*\Pi_{\widetilde{Q}} = \Pi_Q.$$

Demostración. La prueba se basa en los mismos argumentos usados en la demostración del Teorema 4.9. Primeramente, introduzcamos la familia de 1-formas horizontales

$$Q^\lambda = (1-\lambda)Q + \lambda\widetilde{Q},$$

que, debido a (4.2.26), automáticamente satisfacen

$$Q^\lambda_i(\xi, x^0) = 0 \quad \forall\, \xi \in B. \tag{4.2.27}$$

Esto da lugar a la familia de estructuras de Poisson $\{\Pi_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ asociada con Q^λ,

$$\Pi_\lambda = \Pi_{Q^\lambda},$$

y a las 2-formas de acoplamiento

$$\mathcal{F}^\lambda = \pi^*\omega - (\mathrm{d}_B Q^\lambda + (1/2)\{Q^\lambda \wedge Q^\lambda\}_P).$$

Claramente, para todo $\lambda \in [0,1]$, se tiene

$$\mathcal{F}^\lambda = \pi^*\omega,$$

en $B \times \{x^0\}$. Esto implica que Π_λ está bien definido en una vecindad de $B \times \{x^0\}$ en M. La solución de la ecuación homológica (4.2.5) es un campo vectorial dependiente del tiempo

$$Z_\lambda = Z^i_\lambda(\xi, x)\,\mathrm{hor}^\lambda_i$$

dado por

$$Z_\lambda \lrcorner \mathcal{F}^\lambda = \widetilde{Q} - Q.$$

De la propiedad (4.2.27) se sigue que

$$Z_\lambda\big|_{B\times\{x^0\}} = 0, \qquad \forall\ \lambda \in [0,1].$$

De esta manera, existe una vecindad U de $B \times \{x^0\}$ en M tal que el flujo Φ^λ de Z_λ está bien definido en U para todo $\lambda \in [0,1]$. Finalmente, el difeomorfismo en el Teorema 4.13 está dado como $\phi = \Phi^1$. ∎

4.3 La dinámica proyectable y su relación con los sistemas Hamiltonianos no-perturbados

En esta parte presentamos la Teoría de Perturbaciones para sistemas Hamiltonianos en espacios fase que son el producto directo de dos variedades, en los que la dinámica no-perturbada juega el papel de los sistemas no-perturbados.

Al igual que en la sección anterior, estamos interesados en dos casos: estructuras Hamiltonianas que dependen de un parámetro y la dinámica en vecindades.

El caso compacto. Sean (B,ω) una variedad simpléctica y (P,Ψ) una variedad de Poisson. Consideremos la variedad producto $M = B \times P$, la cual está equipada con el corchete de Poisson del producto, el cual también depende de ε:

$$\{\xi^i, \xi^j\} = -\omega^{ij}(\xi), \tag{4.3.1}$$

$$\{\xi^i, x^\sigma\} = 0, \tag{4.3.2}$$

$$\{x^\alpha, x^\beta\} = \frac{1}{\varepsilon}\,\Psi^{\alpha\beta}(x). \tag{4.3.3}$$

En este caso, el tensor de Poisson que corresponde a esta estructura producto es

$$\Pi_0^\varepsilon = -(1/2)\omega^{ij}(\xi)\,\frac{\partial}{\partial\xi^i} \wedge \frac{\partial}{\partial\xi^j} + (1/2\varepsilon)\Psi^{\alpha\beta}(x)\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial x^\beta}. \tag{4.3.4}$$

Notemos que el tensor Π_0^ε en (4.3.4) puede verse como una Q-estructura de Poisson asociada con $Q=0$.

Nuestro interés aquí es estudiar, en el límite cuando $\varepsilon \to 0$, un sistema Hamiltoniano en el espacio fase (M, Π_0^ε), el cual posee un Hamiltoniano dependiente de ε, que es de la forma

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\xi, x) = f(\xi) + \varepsilon F(\xi, x) + O(\varepsilon^2), \tag{4.3.5}$$

donde f y F son ciertas funciones suaves en B y M, respectivamente.

El sistema dinámico que corresponde al campo vectorial Hamiltoniano

$$X_\varepsilon = (\Pi_0^\varepsilon)^\sharp \mathrm{d}\mathcal{H}_\varepsilon, \tag{4.3.6}$$

se puede escribir en la forma

$$\dot{\xi}^i = \omega^{ij}(\xi)\,\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi^j} + \varepsilon\omega^{ij}(\xi)\,\frac{\partial F(\xi, x)}{\partial \xi^j} + O(\varepsilon^2), \tag{4.3.7}$$

$$\dot{x}^\alpha = -\Psi^{\alpha\beta}\,\frac{\partial F}{\partial x^\beta} + O(\varepsilon). \tag{4.3.8}$$

Por lo tanto, la característica principal en este caso es que la estructura de Poisson (4.3.4) tiene una singularidad en $\varepsilon = 0$; sin embargo, el campo vectorial Hamiltoniano admite el límite cuando $\varepsilon \to 0$:

$$X_0 \equiv \mathcal{V} = v_f^i(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi^i} + V_F^\alpha(\xi, x)\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \tag{4.3.9}$$

el cual es precisamente el sistema proyectable en M asociado con los datos (f, F). Como sabemos, X_0 no es Hamiltoniano en (M, Π_0^ε) y en el contexto de la teoría Hamiltoniana de perturbaciones, surge una pregunta natural, a saber, si es posible encontrar una transformación que *reduzca* X_ε al sistema perturbado con parte Hamiltoniana no-perturbada. Más adelante damos una respuesta a esta pregunta, para lo cual combinamos el Teorema 3.6 sobre la existencia de estructuras Hamiltonianas para X_0 y el Teorema 4.9 sobre la equivalencia de Poisson para estructuras de Poisson Π_0^ε y Π_Q^ε.

Vamos a suponer lo siguiente:

(i) M es compacta.

(ii) Existe una 1-forma horizontal Q en M, la cual es una solución de la ecuación

$$\mathcal{L}_{v_f} Q + \{F, Q\}_{\scriptscriptstyle P} = \mathrm{d}_{\scriptscriptstyle B} F.$$

Luego, por el Teorema 3.10, X_0 es Hamiltoniano con respecto a la estructura de Poisson ε-dependiente Π_Q^ε (3.2.46) asociada a los datos $(\omega, \varepsilon Q, \varepsilon^{-1}\Psi)$,

$$X_0 = (\Pi_Q^\varepsilon)^\sharp \mathrm{d}H_\varepsilon,$$

donde

$$H_\varepsilon = \pi_B^* f + \varepsilon \left(F - v_f \lrcorner Q\right). \tag{4.3.10}$$

Con la solución Q vamos a asociar el siguiente sistema dinámico dependiente del tiempo,

$$\frac{d\xi^i}{d\lambda} = \varepsilon \mathcal{F}^{is}_{\lambda,\varepsilon} Q_s, \tag{4.3.11}$$

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = (\lambda - 1)\varepsilon \mathcal{F}^{ij}_{\lambda,\varepsilon} Q_j \Psi^{\alpha\beta} \frac{\partial Q_i}{\partial x^\beta}. \tag{4.3.12}$$

Notemos que este sistema también depende del parámetro ε. Aquí,

$$\mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}_{ij} = \omega_{ij} - \varepsilon(1-\lambda)\left(\frac{\partial Q_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} + (1-\lambda)\{Q_i, Q_j\}_P\right),$$

y $\mathcal{F}^{is}_{\lambda,\varepsilon} \mathcal{F}^{\lambda,\varepsilon}_{sj} = \delta^i_j$. Denotemos por $\Phi^{\lambda,\varepsilon}$ el flujo del sistema (4.3.11), (4.3.12). Podemos observar que $\Phi^{0,\varepsilon} = \Phi^{\lambda,0} = \mathrm{id}_M$ y, por lo tanto, para λ fijo, $\Phi^{\lambda,\varepsilon}$ es una transformación cercana a la identidad para $\varepsilon \to 0$. Más aún, recordemos que para $\varepsilon \in (0,\delta)$, el flujo $\Phi^{\lambda,\varepsilon}$ está bien definido en todo el espacio fase M para todo $\lambda \in [0,1]$ y por el Teorema 4.9 para el caso $\widetilde{Q} = 0$, se tiene

$$\left(\Phi^{1,\varepsilon}\right)^* \Pi_0^\varepsilon = \Pi_Q^\varepsilon.$$

Teorema 4.14 *Para $\varepsilon \in (0,\delta)$ suficientemente pequeño, el flujo a tiempo 1, $\Phi^{1,\varepsilon} : M \to M$, transforma X_ε en el sistema Hamiltoniano perturbado $\left(M, \Pi_Q^\varepsilon, \widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon\right)$ de tal manera que*

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \mathcal{H}_\varepsilon \circ \Phi^{1,\varepsilon} = H_\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{4.3.13}$$

donde H_ε es el Hamiltoniano del campo vectorial X_0 (4.3.9). Esto es, $(\Phi^{1,\varepsilon})^* X_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \mathcal{V} + O(\varepsilon)$ y los sistemas perturbado y no-perturbado son Hamiltonianos con respecto a la misma estructura de Poisson Π_Q^ε.

Demostración. Si tomamos en cuenta que

$$\mathcal{F}^{ij}_{\lambda,\varepsilon} = -\omega^{ij} + O(\varepsilon)$$

entonces obtenemos que el campo vectorial del sistema (4.3.11), (4.3.12) es de la forma

$$Z_{\lambda,\varepsilon} = \varepsilon \mathcal{F}^{ij}_{\lambda,\varepsilon} Q_j \operatorname{hor}_i^\lambda, \tag{4.3.14}$$

donde

$$\operatorname{hor}_i^\lambda = \frac{\partial}{\partial \xi^i} - (1-\lambda)\Psi^{\alpha\beta} \frac{\partial Q_i}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Notemos que en $\varepsilon = 0$, el campo vectorial $Z_{\lambda,\varepsilon}$ (4.3.14) tiene la siguiente descomposición:

$$Z_{\lambda,\varepsilon} = \varepsilon Z^{(1)}_{\lambda,\varepsilon} + O(\varepsilon^2),$$

donde

$$Z^{(1)}_{\lambda,\varepsilon} = Q_i \omega^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^j} - (1-\lambda)\, \Psi^{\alpha\beta} \frac{\partial Q_j}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right). \tag{4.3.15}$$

Luego, se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\pi_B^* f + \varepsilon F\right) \circ \Phi^{1,\varepsilon} &= \pi_B^* f + \varepsilon F + \varepsilon \mathcal{L}_{Z^{(1)}_{\lambda,\varepsilon}} \left(\pi_B^* f + \varepsilon F\right) + O(\varepsilon^2) \\
&= \pi_B^* f + \varepsilon F + \varepsilon \mathcal{L}_{Z^{(1)}_{\lambda,\varepsilon}} (\pi_B^* f) + O(\varepsilon^2) \\
&= \pi_B^* f + \varepsilon F - \varepsilon v_f \lrcorner Q + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

■

Finalmente, vamos a hacer algunas observaciones sobre la existencia de integrales de movimiento para el sistema (4.3.7), (4.3.7). Consideremos el caso cuando $\mathcal{H}_\varepsilon = f + \varepsilon F$. Decimos que una función ε-dependiente $G_\varepsilon = G_0 + \varepsilon G_1 + \cdots$ es una integral de movimiento de (4.3.7), (4.3.7), módulo $O(\varepsilon^k)$ si $\{\mathcal{H}_\varepsilon, G_\varepsilon\} = O(\varepsilon^k)$. Notemos que la última condición se cumple si

$$\mathcal{L}_\mathcal{V} G_0 = 0, \tag{4.3.16}$$

$$\mathcal{L}_\mathcal{V} G_1 = -\omega^{ij} \frac{\partial F}{\partial \xi^j} \frac{\partial G_0}{\partial \xi^i}, \tag{4.3.17}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}_\mathcal{V} G_{k-1} = -\omega^{ij} \frac{\partial F}{\partial \xi^j} \frac{\partial G_{k-2}}{\partial \xi^i}. \tag{4.3.18}$$

Supongamos que se tiene una integral de movimiento G_0 del campo vectorial no-perturbado $\mathcal{V}$. Entonces observamos que bajo las hipótesis (i), (ii) asumidas para el Teorema 4.14, existe una solución G_1 de (4.3.17). De hecho, de (4.3.13) se tiene $\{\mathcal{H}_\varepsilon, G_0 \circ (\Phi^{1,\varepsilon})^{-1}\} = O(\varepsilon^2)$. De esto y de (4.3.15) se obtiene

$$G_1 = -Q_i\, \omega^{ij} \frac{\partial G_0}{\partial \xi^j}. \tag{4.3.19}$$

Capítulo 5

Normalización de Sistemas Hamiltonianos sobre Cilindros de Órbitas

En este capítulo veremos cómo se concretan los resultados generales que obtuvimos en los Capítulos 3 y 4, en el enfoque Hamiltoniano perturbativo por medio del acoplamiento mínimo, para el caso más simple de un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad en el espacio fase $\mathbb{R}^4 = \{(p_1, q_1, p_2, q_2)\}$ equipado con una estructura simpléctica dependiente de un parámetro,

$$\mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}q_1 + \varepsilon \mathrm{d}p_2 \wedge \mathrm{d}q_2, \qquad (\varepsilon > 0), \tag{5.1}$$

y Hamiltoniano de la forma

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0(\varepsilon^\mu p_1, \varepsilon^{1-\mu} q_1) + \varepsilon \mathcal{H}_1(p_1, q_1, p_2, q_2). \tag{5.2}$$

Para funciones genéricas $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_1$, el sistema Hamiltoniano no es integrable y nuestro interés es estudiar este sistema en el contexto de la teoría de perturbaciones para ε pequeño. La característica principal de esta formulación es que, en el límite cuando $\varepsilon \to 0$, la estructura simpléctica (5.1) es degenerada. Además, el corchete de Poisson que corresponde a (5.1) depende del parámetro ε, de manera no-uniforme y es de la forma

$$\{p_1, q_1\} = 1,$$
$$\{p_2, q_2\} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

De acuerdo a la teoría adiabática [34], las coordenadas (p_1, q_2) y (p_2, q_2) son llamadas *variables lentas* y *rápidas*, respectivamente. El sistema (5.1), (5.2) puede asociarse con un sistema Hamiltoniano en $\mathbb{R}^4$, equipado con la forma simplética canónica, de dos maneras diferentes, las cuales se describimos a continuación.

Caso 1. Supongamos que se comienza con un sistema Hamiltoniano

$$\mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}q_1 + \mathrm{d}p_2 \wedge \mathrm{d}q_2, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0(p_1, q_1) + \varepsilon \mathcal{H}_1(p_1, q_1, p_2/\varepsilon^\mu, q_2/\varepsilon^{1-\mu}), \tag{5.4}$$

donde $\mu \in [0, 1]$. Luego, por medio del reescalamiento

$$p_2 \to \frac{p_2}{\varepsilon^\mu}, \qquad q_2 \to \frac{q_2}{\varepsilon^{1-\mu}}, \tag{5.5}$$

el sistema (5.3), (5.4) se transforma precisamente en el sistema (5.1), (5.2). Para $\mu \in (0,1)$, esta transformación es llevada cerca de la subvariedad *lenta* $\{p_2 = 0, q_2 = 0\}$. Notemos que en el caso particular cuando $\mathcal{H}_1$ es cuadrático en p_2, q_2 y $\mu = 1/2$, el Hamiltoniano (5.4) es independiente de ε y describe la dinámica cerca de una 2-subvariedad simpléctica invariante. En los casos extremos $\mu = 0, 1$, se derivan de (5.5) las siguientes configuraciones para el Hamiltoniano $\mathcal{H}_\varepsilon$ y que aparecen en la mecánica clásica:

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \frac{p_1^2}{2} + U_0(q_1) + \frac{p_2^2}{2} + \varepsilon\, U_1(q_1, q_2), \qquad (\mu = 1), \tag{5.6}$$

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \frac{p_1^2}{2} + U_0(q_1) + \varepsilon\frac{p_2^2}{2} + \varepsilon\, U_1(q_1, q_2/\varepsilon), \qquad (\mu = 0). \tag{5.7}$$

Caso 2. Consideremos ahora un sistema Hamiltoniano

$$\mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}q_1 + \mathrm{d}p_2 \wedge \mathrm{d}q_2, \tag{5.8}$$

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0(p_1, q_1) + \varepsilon\mathcal{H}_1(\varepsilon^\mu p_1, \varepsilon^{1-\mu} q_1, p_2, q_2), \tag{5.9}$$

para $\mu \in [0,1]$. Notemos que en el dominio $\mu \in (0,1)$, se tiene $p_1 \to \infty$ y $q_1 \to \infty$. Luego, por medio del reescalamiento

$$p_1 \to \varepsilon^\mu p_2, \qquad q_1 \to \varepsilon^{1-\mu} q_2, \tag{5.10}$$

$$(\text{forma simpléctica}) \;\to\; \varepsilon(\text{forma simpléctica}), \tag{5.11}$$

se obtiene nuevamente el sistema (5.1), (5.2). El contexto adiabático [5, 7, 34] aparece cuando $\mathcal{H}_0 \equiv 0$. Por ejemplo, si $\mu = 0$, entonces de (5.6) se obtiene el sistema adiabático modelo [34]

$$\mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}q_1 + \mathrm{d}p_2 \wedge \mathrm{d}q_2,$$

$$\mathcal{H}_1(p_1, \varepsilon q_1, p_2, q_2),$$

cuyo Hamiltoniano varía lentamente en q_1.

Debemos señalar que nuestro caso es una generalización de la situación adiabática en el sentido que asumimos el sistema $(\mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}q_1, \mathcal{H}_0)$ como un sistema Hamiltoniano no-degenerado, con un grado de libertad, el cual posee órbitas periódicas que producen una foliación de algún dominio abierto en $\mathbb{R}^2$. Esta hipótesis será importante en lo que sigue y en las siguientes secciones se discute ampliamente.

5.1 Formulación del problema

Para plantear nuestro problema, consideremos el espacio fase $M = (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}^2$, con coordenadas $(s, \varphi \,(\mathrm{mod}\, 2\pi), p, q)$. Supongamos que M está equipado con una estructura simpléctica no-uniforme

$$\Omega_0^\varepsilon = \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\varphi + \varepsilon\, \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q, \tag{5.1.1}$$

donde $\varepsilon > 0$ es un parámetro. Notemos que en el caso $\varepsilon = 0$ se obtiene la estructura simpléctica canónica en $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ y para $\varepsilon = 1$ se obtiene la estructura simpléctica canónica en M.

Supongamos que se tiene un sistema Hamiltoniano $\left(M, \Omega_0^\varepsilon, H_\varepsilon\right)$ tal que el Hamiltoniano H_ε depende del parámetro ε de manera suave y es de la forma

$$H_\varepsilon = H_0(s) \,+\, \varepsilon\, H_1(s, \varphi, p, q) + O(\varepsilon^2), \tag{5.1.2}$$

donde $H_0 = H_0(s)$ y $H_1 = H_1(s, \varphi, p, q)$ son funciones suaves. Denotemos por $X_\varepsilon \equiv X_{H_\varepsilon}$ el campo vectorial Hamiltoniano de H_ε, esto es, $X_\varepsilon \lrcorner\, \Omega_0^\varepsilon = -\mathrm{d}H_\varepsilon$. Luego,

$$\begin{aligned} X_\varepsilon = &-\left(\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2)\right) \frac{\partial}{\partial s} \;+\; \left(\frac{\partial H_0}{\partial s} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial s} + O(\varepsilon^2)\right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &- \left(\frac{\partial H_1}{\partial q} + O(\varepsilon)\right) \frac{\partial}{\partial p} \;+\; \left(\frac{\partial H_1}{\partial p} + O(\varepsilon)\right) \frac{\partial}{\partial q}. \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

De esta manera, el sistema dinámico correspondiente a (5.1.3) se escribe en la forma siguiente:

$$\dot{s} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2), \tag{5.1.4}$$

$$\dot{\varphi} = \omega_1(s) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial s} + O(\varepsilon^2), \tag{5.1.5}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H_1}{\partial q} + O(\varepsilon), \tag{5.1.6}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H_1}{\partial p} + O(\varepsilon), \tag{5.1.7}$$

donde $\omega_1 = \omega_1(s)$ es la función

$$\omega_1(s) = \frac{\partial}{\partial s} H_0(s). \tag{5.1.8}$$

Suponemos, además, que

$$\omega_1(s) \neq 0, \qquad \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{5.1.9}$$

Debemos señalar que los sistemas dinámicos del tipo (5.1.4)-(5.1.7) surgen en el estudio de sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad, alrededor de cilindros de órbitas (ver Secciones 5.5 y 5.6).

Recordemos que en la Sección 4.3 se discutió el problema de reducción de un sistema perturbado a un sistema con parte Hamiltoniana no-perturbada en el contexto de la teoría Hamiltoniana de perturbaciones en variedades producto. Ahora, nuestro interés es estudiar el sistema (5.1.4)-(5.1.7) en este mismo contexto y analizar su comportamiento cuando $\varepsilon \to 0$. Una primera observación es que para $\varepsilon = 0$ en (5.1.4)-(5.1.7), se obtiene el siguiente sistema no-perturbado en M,

$$\dot{s} = 0, \tag{5.1.10}$$
$$\dot{\varphi} = \omega_1(s), \tag{5.1.11}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H_1}{\partial q}, \tag{5.1.12}$$
$$\dot{q} = \frac{\partial H_1}{\partial p}. \tag{5.1.13}$$

En este caso, el campo vectorial que corresponde al sistema (5.1.10)-(5.1.13) está dado por

$$X_0 = \omega_1(s)\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_1}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial H_1}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}, \tag{5.1.14}$$

por lo que, en términos de X_0, el campo vectorial Hamiltoniano X_ε (5.1.3) se expresa como

$$X_\varepsilon = X_0 + \varepsilon X_1 + O(\varepsilon^2), \tag{5.1.15}$$

para un cierto campo vectorial Hamiltoniano X_1 en M.

Se verá más adelante que bajo ciertas hipótesis es posible considerar el sistema (5.1.4)-(5.1.7) como una perturbación del sistema no-perturbado (5.1.10)-(5.1.13), el cual es un sistema dinámico proyectable (ver Capítulo 2). De hecho, en este caso el espacio fase M es el espacio total del haz vectorial simpléctico trivial $\pi : M \to B$, donde π es la proyección canónica sobre la base simpléctica $\big(B = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \omega_B\big)$ con $\omega_B \equiv \Omega^0 = \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\varphi$ y cuyas fibras están dadas por la estructura simpléctica $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q)$.

Notemos que el campo vectorial v_{H_0} que corresponde al sistema Hamiltoniano $\big(B, \omega_B, H_0\big)$ es de la forma $v_{H_0} = \omega_1(s)\partial/\partial\varphi$; un cálculo directo nos permite ver que el campo vectorial X_0 se proyecta, bajo π, al campo vectorial v_{H_0}.

Por otra parte, $\big(B, \omega_B, H_0\big)$ es un sistema Hamiltoniano con un grado de libertad y es claro que la función coordenada s es una integral de movimiento. Por lo tanto, el retrato fase de este sistema consiste de órbitas periódicas de la forma $\gamma_c = \{(s, \varphi) \in B \mid s = c\}$, donde $c \in \mathbb{R}$ y el período está dado por $2\pi/\omega_1(s)$. Esto nos dice que cualquier trayectoria del campo X_0 que pase por el punto (s, φ, p, q) se proyecta a una órbita periódica γ_s. Más aún, las coordenadas (s, φ) en la base B resultan ser coordenadas acción-ángulo de H_0.

Con base en estos hechos y otras hipótesis adicionales que se discuten en la Sección 5.2, veremos que el sistema no-perturbado tiene la siguiente propiedad: *Existe un dominio abierto $\mathcal{M} \subset M$, con $\overline{\mathcal{M}}$ compacto, foliado trivialmente por 2-toros invariantes $\Lambda^2_{c_1,c_2}$ del sistema* (5.1.10)-(5.1.13). *Además, en estos toros, el movimiento a lo largo de las trayectorias del campo vectorial X_0 es quasi-periódico.*

En esta situación, una pregunta que surge de manera natural es si los 2-toros invariantes $\Lambda^2_{c_1,c_2}$ del sistema no-perturbado (5.1.10)-(5.1.13) se preservan bajo pequeñas perturbaciones. En otras palabras, nos preguntamos si para $\varepsilon \ll 1$, el sistema perturbado (5.1.4)-(5.1.7) posee también 2-toros invariantes y si éstos *permanecen cerca* de los 2-toros $\Lambda^2_{c_1,c_2}$. Una manera de tratar de resolver este problema es a través de la teoría Hamiltoniana de perturbaciones (resultados del tipo KAM). Sin embargo, con este enfoque surge otro problema: El sistema no-perturbado X_0 no es Hamiltoniano con respecto a la estructura simpléctica Ω_0^ε. Así, en este contexto no es posible aplicar directamente la Teoría KAM y sus derivaciones.

De esta manera, nuestro objetivo es dar una formulación Hamiltoniana para el sistema no-perturbado (5.1.10)-(5.1.13) y establecer las condiciones bajo las cuales el sistema perturbado (5.1.4)–(5.1.7) pueda realizarse como una perturbación del anterior. Para resolver este problema partimos de un enfoque que comprende varias etapas, el cual se basa en el esquema siguiente:

(I) *Toros invariantes para el sistema no-perturbado.* Se discuten las hipótesis bajo las cuales es posible garantizar que el dominio $\mathcal{M} \subset M$ esté, efectivamente, foliado por 2-toros invariantes. En estas condiciones, se demuestra que es posible llevar el sistema (5.1.10)-(5.1.13) a una *forma normal* (Teorema 5.9).

(II) *Transformaciones gauge exactas.* Se introduce un tipo de transformaciones por medio de las cuales la forma simpléctica no-uniforme Ω_0^ε (5.1.1) en $\mathcal{M}$ es transformada en una *forma simpléctica deformada*, Ω_Q^ε, la cual está parametrizada por una 1-forma horizontal Q. El "*push-forward*"del campo vectorial X_ε bajo una transformación gauge exacta es un sistema Hamiltoniano con respecto a Ω_Q^ε y a cierto Hamiltoniano (Teorema 5.21).

(III) *Estructuras simplécticas deformadas.* Se estudia con más detalle la familia de formas simplécticas en $\mathcal{M}$ dependientes del parámetro ε,

$$\Omega_Q^\varepsilon = \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\varphi \,+\, \varepsilon\,\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q - \varepsilon\,\mathrm{d}Q,$$

las cuales están parametrizadas por una forma horizontal $Q = Q_1\,\mathrm{d}s + Q_2\,\mathrm{d}\varphi$ y se establece la equivalencia (simpléctica) entre las estructuras simplécticas Ω_0^ε y Ω_Q^ε. Esto último se lleva a cabo por medio del método de homotopía ya que se construye un simplectomorfismo Φ_ε, dependiente de ε, entre las estructuras simplécticas Ω_0^ε y Ω_Q^ε, es decir,

$$(\Phi_\varepsilon)^*\Omega_Q^\varepsilon = \Omega_0^\varepsilon,$$

para $0 < \varepsilon \ll 1$ (Sección 5.4).

(IV) *Normalización Hamiltoniana de primer tipo.* Bajo ciertas hipótesis con respecto a la función H_1, se construye una estructura Hamiltoniana dependiente de ε, $\left(\mathcal{M}, \Omega_Q^\varepsilon, F_\varepsilon\right)$, para el sistema no-perturbado (5.1.10)-(5.1.13), de tal manera que

$$X_0 \lrcorner\, \Omega_Q^\varepsilon = -\,\mathrm{d}F_\varepsilon.$$

Se muestra, además, que el sistema $\left(\mathcal{M}, \Omega_Q^\varepsilon, F_\varepsilon\right)$ es un sistema Hamiltoniano completamente integrable con dos grados de libertad cuya foliación por toros de Liouville coincide con la foliación por 2-toros quasi-periódicos $\mathbb{T}^2_{c_1,c_2}$ del espacio fase $\mathcal{M}$ (Teorema 5.48). Por otro lado, por medio de una *transformación cercana a la identidad* aplicada al sistema perturbado se obtiene un *nuevo* sistema perturbado $\left(\mathcal{M}, \Omega^{\varepsilon}_{Q}, \widetilde{H}_{\varepsilon}\right)$ correspondiente al Hamiltoniano

$$\widetilde{H}_{\varepsilon} = H_{\varepsilon} \circ \Phi_{\varepsilon}^{-1} = F_{\varepsilon} + O(\varepsilon^2),$$

de tal manera que podemos considerar al sistema Hamiltoniano $\left(\mathcal{M}, \Omega^{\varepsilon}_{Q}, F_{\varepsilon}\right)$ como un sistema *no-perturbado* del sistema Hamiltoniano $\left(\mathcal{M}, \Omega^{\varepsilon}_{Q}, \widetilde{H}_{\varepsilon}\right)$ (Teorema 5.50). En este caso, la estructura simpléctica Ω^{ε}_{Q} y el Hamiltoniano F_{ε} dependen de manera suave del parámetro ε. A este proceso lo llamamos *normalización hamiltoniana de primer tipo*. Una observación importante aquí es que el sistema dinámico que corresponde al sistema $\left(\mathcal{M}, \Omega^{\varepsilon}_{Q}, F_{\varepsilon}\right)$ coincide, precisamente, con el sistema no-perturbado (5.1.10)-(5.1.13). Por lo tanto, es independiente de ε y en esta situación es posible aplicar los resultados de tipo KAM ya conocidos.

(V) *Normalización Hamiltoniana de segundo tipo*. Se construye un simplectomorfismo $\Upsilon_{\varepsilon} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, donde el dominio toroidal $\mathcal{N} = (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times (\Delta_2 \times \mathbb{S}^1)$ está equipado con la forma simpléctica

$$\widetilde{\Omega}^{\varepsilon}_{0} = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2.$$

y donde Δ_1, Δ_2 son intervalos abiertos de $\mathbb{R}$. En esta situación, el sistema Hamiltoniano perturbado X_{ε} es transformado, bajo Υ_{ε}, a una forma normal

$$H_{\varepsilon} \circ (\Upsilon_{\varepsilon})^{-1} = f(s_1) + \varepsilon\, h(s_1, s_2) + O(\varepsilon^2),$$

para ciertas funciones f y h. Así, el sistema no-perturbado se transforma en un nuevo sistema Hamiltoniano no-perturbado, el cual es de la forma $\left(\mathcal{N}, \widetilde{\Omega}^{\varepsilon}_{0}, \widetilde{F}_{\varepsilon} = f + \varepsilon h\right)$ (Teorema 5.54). A este proceso le llamamos *normalización Hamiltoniana de segundo tipo*. En este caso, la forma normal construída aparece usualmente en la Teoría KAM.

5.2 Toros quasi-periódicos para el sistema no-perturbado

Recordemos que en la sección anterior mencionamos la existencia de un dominio abierto $\mathcal{M}$, con cerradura compacta, en el espacio fase del sistema no-perturbado (5.1.10)-(5.1.13), del cual afirmamos estar foliado por 2-toros invariantes Λ_{c_1,c_2}, quasi-periódicos. En esta sección vamos a establecer algunas condiciones para justificar dicha afirmación y estableceremos las hipótesis que son necesarias para la existencia de dichos toros quasi-periódicos.

Nuestra primera hipótesis tiene que ver con la existencia de una integral de movimiento, adicional a la que ya se mencionó en la sección previa, a saber, la función coordenada s. En este caso, debemos presuponer también la existencia de un dominio abierto en el cual está definida dicha integral primera. Sin embargo, en la segunda hipótesis abundaremos más sobre este dominio. Así, supongamos que:

(H1) Existen un dominio abierto, compacto, $\mathcal{M} \subset M$ y una integral de movimiento $G : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ del campo X_0. Esto es, $G = G(s, \varphi, p, q)$ es una función suave y 2π-periódica en φ, la cual satisface (ver 5.1.14):

$$\mathcal{L}_{X_0} G = \omega_1(s) \frac{\partial G}{\partial \varphi} + \{H_1, G\}_2 = 0, \tag{5.2.1}$$

donde el corchete $\{\,,\}_2$ denota la operación

$$\{H_1, G\}_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial H_1}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial H_1}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p}. \tag{5.2.2}$$

En la segunda hipótesis establecemos condiciones necesarias para garantizar que el dominio $\mathcal{M}$ esté foliado por toros quasi-periódicos del sistema no-perturbado X_0. De esta manera, suponemos lo siguiente:

(H2) Existe un intervalo abierto $\Delta \subset \mathbb{R}$ y para cada $(s, \varphi) \in \Delta \times \mathbb{S}^1$ existe un dominio abierto $U_{s,\varphi}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que se cumple:

(i) Para todo $E \in \big(E_1, E_2\big) \subset \mathbb{R}$, el conjunto de nivel

$$\Gamma_{s,\varphi}(E) = \big\{(p, q) \in U_{s,\varphi} \;\big|\; G(s, \varphi, p, q) = E\big\}, \tag{5.2.3}$$

es compacto y conexo. Además, suponemos que

$$U_{s,\varphi} = \bigcup_{E \in (E_1, E_2)} \Gamma_{s,\varphi}(E). \tag{5.2.4}$$

(ii) El dominio $\mathcal{M}$ queda definido por la unión

$$\mathcal{M} = \bigcup_{(s,\varphi) \in \Delta \times \mathbb{S}^1} \{(s, \varphi)\} \times U_{s,\varphi}, \tag{5.2.5}$$

y es un subconjunto abierto en M, con $\overline{\mathcal{M}} \subset M$ compacto, que satisface

$$\pi(\mathcal{M}) = \Delta \times \mathbb{S}^1. \tag{5.2.6}$$

Suponemos además, lo siguiente:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}, \frac{\partial G}{\partial q}\right) \neq 0, \tag{5.2.7}$$

en $\overline{\mathcal{M}}$.

Sea $(s,\varphi) \in \Delta \times \mathbb{S}^1$ un elemento fijo y denotemos por $g_{s,\varphi} : U_{s,\varphi} \to (E_1, E_2)$ la restricción $g_{s,\varphi} = G\big|_{U_{s,\varphi}}$. Luego, las soluciones del sistema Hamiltoniano con un grado de libertad

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial g_{s,\varphi}}{\partial q}(p,q), \tag{5.2.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial g_{s,\varphi}}{\partial p}(p,q), \tag{5.2.9}$$

son las trayectorias periódicas $\Gamma_{s,\varphi}(E)$ (5.2.3). En este caso, la función $g_{s,\varphi}$ es vista como un Hamiltoniano que depende de los parámetros s, φ.

Por otra parte, la hipótesis (H2) implica que $g_{s,\varphi}$ es una submersión sobreyectiva propia y por el Teorema de Trivialización de Ehresmann [??], se sigue que existe una sección suave $L_{s,\varphi} : (E_1, E_2) \to U_{s,\varphi}$,

$$g_{s,\varphi} \circ L_{s,\varphi} = \mathrm{id}.$$

Esto nos indica que el dominio abierto $U_{s,\varphi}$ está trivialmente foliado por las trayectorias periódicas $\Gamma_{s,\varphi}(E)$. Más adelante mostraremos cómo tomar una sección $L_{s,\varphi}$ que depende de manera suave de los parámetros s y φ.

Si X un campo vectorial arbitrario en M y $F \in C^\infty(M)$ es una integral de movimiento de X, asociamos a F el *campo vectorial Hamiltoniano vertical*,

$$V_F = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}. \tag{5.2.10}$$

De este modo, la integral G de X_0 tiene asociado el campo vectorial Hamiltoniano vertical

$$V_G = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)\frac{\partial}{\partial q} - \left(\frac{\partial G}{\partial q}\right)\frac{\partial}{\partial p}. \tag{5.2.11}$$

Si consideramos ahora el haz vectorial trivial $\pi : M \to \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ con fibra simpléctica $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q)$, entonces el dominio abierto $\mathcal{M} \subset M$ es el espacio total de un subhaz de π, $\pi|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \Delta \times \mathbb{S}^1$, con fibra típica $U_{s,\varphi}$. Luego, la restricción de V_G a cada fibra $\{(s,\varphi)\} \times U_{s,\varphi}$ nos da precisamente el campo vectorial del sistema (5.2.8), (5.2.9). De esto se sigue que el dominio $\mathcal{M}$ está foliado por las trayectorias periódicas de V_G dadas por $\widetilde{\Gamma}_{s,\varphi}(E) = \{(s,\varphi)\} \times \Gamma_{s,\varphi}(E)$.

Denotemos por $\mathcal{G} : \mathcal{M} \to (\Delta \times \mathbb{S}^1) \times (E_1, E_2)$ la restricción de $\pi \times G : M \to (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}$ a $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{G} = (\pi \times G)\big|_{\mathcal{M}}. \tag{5.2.12}$$

Se tiene así que $\mathcal{G}$ es una submersión sobreyectiva de tal manera que

$$\mathcal{G}^{-1}(s,\varphi,E) = \widetilde{\Gamma}_{s,\varphi}(E),$$

para cada $(s,\varphi,E) \in (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times (E_1, E_2)$.

Si introducimos ahora la *acción* a lo largo de la trayectoria periódica $\Gamma_{s,\varphi}(E)$ del sistema (5.2.8), (5.2.9),

$$a = a(s,\varphi,E) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_{s,\varphi}(E)} p\,\mathrm{d}q, \tag{5.2.13}$$

entonces el período T de $\Gamma_{s,\varphi}(E)$ está dado por

$$T = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial a}{\partial E}(s,\varphi,E). \tag{5.2.14}$$

Es claro que a y T son funcione suaves definidas en la base $(\Delta \times \mathbb{S}^1) \times (E_1, E_2)$ de la fibración $\mathcal{G}$.

El resultado que se enuncia a continuación es consecuencia de las dos hipótesis anteriores y se demostrará en varias etapas ya que es necesario introducir varios conceptos requeridos para su prueba.

Proposición 5.1 *Las hipótesis* (H1) *y* (H2) *implican lo siguiente:*

(a) *Las funciones a y T son independientes de φ,*

$$a = a(s,E) \quad y \quad T = T(s,E). \tag{5.2.15}$$

(b) *La fibración del dominio $\mathcal{M}$ por medio órbitas periódicas de V_G es un $\mathbb{S}^1$-haz trivial; esto es, existe una sección suave $L : (\Delta \times \mathbb{S}^1) \times (E_1, E_2) \to \mathcal{M}$,*

$$\mathcal{G} \circ L = \mathrm{id}. \tag{5.2.16}$$

Antes de probar esta proposición vamos a discutir algunas de las propiedades del campo vectorial V_G (5.2.11).

(i) *Toros invariantes quasi-periódicos y el invariante de Poincaré–Cartan*. Consideremos el campo vectorial X_0 (5.1.14) del sistema no-perturbado (5.1.10)-(5.1.13),

$$X_0 = \omega_1(s)\frac{\partial}{\partial\varphi} + V_{H_1},$$

donde la parte vertical V_{H_1} está dada por (5.2.10). De (5.2.1) se sigue que X_0 conmuta con V_G,

$$[\,X_0, V_G\,] = V_{\omega_1 \frac{\partial G}{\partial\varphi}} + [\,V_{H_1}, V_G\,] = V_{\omega_1 \frac{\partial G}{\partial\varphi}} + V_{\{H_1,G\}_2} = 0, \tag{5.2.17}$$

de lo cual se concluye que las integrales de movimiento s y G de X_0 son funcionalmente independientes en $\mathcal{M}$. Consideremos ahora la *transformación de momento* $\mathcal{J} : \mathcal{M} \to \Delta \times (E_1, E_2)$,

$$\mathcal{J}(s,\varphi,p,q) = \big(s, G(s,\varphi,p,q)\big).$$

Es claro que X_0 y V_G son tangentes a cada conjunto de nivel

$$\Lambda_{s,E} = \mathcal{J}^{-1}(s, E),$$

y se sigue que $\Lambda_{s,E}$ está foliado por trayectorias periódicas de V_G,

$$\Lambda_{s,E} = \bigcup_{\varphi \in \mathbb{S}^1} \widetilde{\Gamma}_{s,\varphi}(E).$$

En particular, esto nos dice que $\Lambda_{s,E}$ es una 2-variedad compacta y conexa. De la discusión anterior y del Teorema de Liouville–Arnold se deriva el siguiente resultado.

Lema 5.2 *Para cada $(s, E) \in \Delta \times (E_1, E_2)$, el conjunto de nivel $\Lambda_{s,E}$ es difeomorfo a un 2-toro, en el cual, el movimiento a lo largo de las trayectorias de X_0 es quasi-periódico .*

De esto se sigue que X_0 es un campo vectorial completo en $\overline{\mathcal{M}}$. Si denotamos por $Fl^t_{X_0}$ el flujo del campo vectorial X_0 y tomando en cuenta que éste conmuta con V_G, se tiene que el flujo $Fl^t_{X_0}$ transforma cada trayectoria de V_G en otra trayectoria de este campo vectorial. Así,

$$Fl^t_{X_0}\big(\widetilde{\Gamma}_{s,\varphi}(E)\big) = \widetilde{\Gamma}_{s,\varphi'}(E), \tag{5.2.18}$$

para $\varphi' = \varphi + \omega_1(s)\, t$. Notemos que

$$a = \frac{1}{2\pi} \oint_{\widetilde{\Gamma}_{s,\varphi}(E)} \left(p\, \mathrm{d}q - H_1 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\omega_1} \right).$$

De esta relación y de las propiedades del invariante de Poincaré–Cartan [1, 6], se sigue que a no depende de φ. Esto prueba la parte (a) de la Proposisición 5.1.

(ii) *El número de rotaciones*. Fijemos $(s, \varphi) \in \Delta \times \mathbb{S}^1$ y $E \in (E_1, E_2)$. Esto nos determina una trayectoria periódica $\widetilde{\Gamma}_{s,\varphi}(E)$. Tomemos ahora un punto arbitrario $m^0 = (s, \varphi, p^0, q^0) \in \widetilde{\Gamma}_{s,\varphi}(E)$. La trayectoria de X_0 que comienza en el punto m^0 intersecta de nuevo la trayectoria $\widetilde{\Gamma}_{s,\varphi}(E)$ en el punto m^1 al tiempo $t_0 = 2\pi/\omega_1(s)$ (el tiempo del primer retorno),

$$Fl^{t_0}_{X_0}(m^0) = m^1 \in \widetilde{\Gamma}_{s,\varphi}.$$

Sea τ el tiempo a lo largo de la trayectoria de V_G, desde m^0 hasta m^1,

$$Fl^{\tau}_{V_G}(m^0) = m^1.$$

Lema 5.3 *El tiempo τ no depende de la elección del punto $m^0 \in \widetilde{\Gamma}_{s,\varphi}(E)$ ni del valor de φ; es decir, $\tau = \tau(s, E)$ es una función suave en $\Delta \times (E_1, E_2)$.*

Demostración. El tiempo τ está determinado por la condición

$$Fl_{X_0}^{t_0}(m^0) = Fl_{V_G}^{\tau}(m^0).$$

Sea $\widetilde{m}^0 = Fl_{V_G}^{t}(m^0)$ otro punto en $\widetilde{\Gamma}_{s,\varphi}(E)$. Dado que los flujos de X_0 y V_G conmutan, se tiene

$$\begin{aligned} Fl_{X_0}^{t_0}(\widetilde{m}^0) &= Fl_{X_0}^{t_0} \circ Fl_{V_G}^{t}(m^0) = Fl_{V_G}^{t}\big(Fl_{X_0}^{t_0}(m^0)\big) \\ &= Fl_{V_G}^{t} \circ Fl_{V_G}^{\tau}(m^0) = Fl_{V_G}^{\tau}(\widetilde{m}^0). \end{aligned}$$

La independencia de τ con respecto a φ se sigue de (5.2.18). ■

Consideremos ahora los campos vectoriales

$$Y_1 = \frac{1}{\omega_1(s)} X_0 - \frac{\tau(s,G)}{2\pi} V_G, \qquad Y_2 = \frac{T(s,G)}{2\pi} V_G. \tag{5.2.19}$$

Se tiene así el siguiente resultado.

Lema 5.4 *Los campos vectoriales Y_1 y Y_2 en* (5.2.19) *tienen las propiedades siguientes:*

(1) *Y_1 y Y_2 son linealmente independientes en $\mathcal{M}$ y conmutan entre sí.*

(2) *Todas las trayectorias de Y_1 y Y_2 son periódicas, con período igual a 2π.*

(3) *Cualesquiera dos trayectorias γ_1 y γ_2 de Y_1 y Y_2, respectivamente, que pertenezcan al toro $\Lambda_{s,E}$, forman una base de 1-ciclos. En particular,*

$$\pi(\gamma_1) = \{s\} \times \mathbb{S}^1$$

Demostración. (1) se sigue directamente de (5.2.17). Mostraremos ahora que Y_1 es 2π-periódico. Es claro que

$$Fl_{Y_1}^{t} = Fl_{[1/\omega_1(s)]X_0}^{t} \circ Fl_{Y_2}^{-t}.$$

Luego, si tomamos en cuenta que

$$Fl_{[1/\omega_1(s)]X_0}^{2\pi} = Fl_{X_0}^{t_0}, \qquad Fl_{Y_2}^{2\pi} = Fl_{V_G}^{\tau},$$

de las definiciones para t_0 y τ, se deriva $Fl_{Y_1}^{2\pi} = \mathrm{id}$. ■

Corolario 5.5 *En $\Lambda_{s,E}$ se tiene la siguiente descomposición*

$$X_0 = \omega_1(s)\, Y_1 + \omega_2(s,E)\, Y_2,$$

donde ω_1 y ω_2 son las frecuencias del movimiento quasi-periódico, con ω_1 dada por (5.1.8), *los campos Y_1 y Y_2 definidos por* (5.2.19) *y donde ω_2 está dada por*

$$\omega_2(s,E) = \omega_1(s) \frac{\tau(s,E)}{T(s,E)}. \tag{5.2.20}$$

La discusión anterior nos permite introducir el siguiente concepto.

Definición 5.6 *El número*

$$\beta(s,E) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_2(s,E)}{\omega_1(s)} \equiv \frac{\tau(s,E)}{T(s,E)}, \tag{5.2.21}$$

se llama el número de rotaciones *del flujo del campo vectorial* X_0 *relativo al flujo del campo vectorial* V_G*.*

(iii) *Construcción de la sección* L*.* En esta parte mostraremos que existen funciones suaves $p^0(s,\varphi,E)$ y $q^0(s,\varphi,E)$ que satisfacen las propiedades siguientes:

$$p^0(s,\varphi+2\pi,E) = p^0(s,\varphi,E), \qquad q^0(s,\varphi+2\pi,E) = q^0(s,\varphi,E), \tag{5.2.22}$$

y

$$G\big(s,\varphi,p^0(s,\varphi,E),q^0(s,\varphi,E)\big) = E, \tag{5.2.23}$$

para todo $(s,\varphi,E) \in \Delta_1 \times \mathbb{S}^1 \times (E_1,E_2)$. Luego, una sección L (5.2.16) está dada por

$$L(s,\varphi,E) = \big(s,\varphi,p^0(s,\varphi,E),q^0(s,\varphi,E)\big). \tag{5.2.24}$$

Vamos a describir la construcción de L de manera más explícita. Primeramente, debemos notar que es posible definir L en $\varphi = 0$, esto es, existen funciones suaves $\widetilde{p}^{\,0}(s,E)$ y $\widetilde{q}^{\,0}(s,E)$ que satisfacen (5.2.22). De hecho, consideremos la restricción $\mathcal{G}_0 : \mathcal{M}_0 \to \Delta \times (E_1,E_2)$ de la submersión sobreyectiva propia $\mathcal{G}$ (5.2.12) al subconjunto $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M} \cap \{\varphi = 0\}$. Esta es una fibración sobre una base contractible y por el Teorema de Trivialización de Ehresmann [**?**], existe una sección suave $\widetilde{L} : \Delta \times (E_1,E_2) \to \mathcal{M}_0$,

$$\widetilde{L}(s,E) = \big(s,0,\widetilde{p}^{\,0}(s,E),\widetilde{q}^{\,0}(s,E)\big).$$

De esta manera, para definir L, podemos extender $\widetilde{L}$ para todo $\varphi \in \mathbb{S}^1$, por medio del flujo $Fl^t_{Y_1}$ del campo vectorial Y_1 en (5.2.19). El sistema dinámico de Y_1 es de la forma

$$\dot{s} = 0, \tag{5.2.25}$$
$$\dot{\varphi} = 1, \tag{5.2.26}$$
$$\dot{p} = -\left(\frac{1}{\omega_1}\frac{\partial H_1}{\partial q} - \frac{\tau}{2\pi}\frac{\partial G}{\partial q}\right) \tag{5.2.27}$$
$$\dot{q} = \left(\frac{1}{\omega_1}\frac{\partial H_1}{\partial p} - \frac{\tau}{2\pi}\frac{\partial G}{\partial p}\right). \tag{5.2.28}$$

Ahora, tomando en cuenta que G es una integral de movimiento de Y_1 y la periodicidad del flujo,

$$Fl^{t+2\pi}_{Y_1} = Fl^t_{Y_1},$$

definimos

$$L(s,\varphi,E) = Fl^{\varphi}_{Y_1}\big(\widetilde{L}(s,E)\big). \tag{5.2.29}$$

Esto nos dice que las funciones $p^0(s,\varphi,E)$ y $q^0(s,\varphi,E)$ en (5.2.22) se definen como solución del problema de Cauchy para el sistema (5.2.25)-(5.2.28), con datos iniciales $\widetilde{p}^{\,0}(s,E)$, $\widetilde{q}^{\,0}(s,E)$, lo cual demuestra la parte (b) de la Proposición 5.1.

De la discusión anterior, podemos reformular la hipótesis (H2) en los términos siguientes.

Corolario 5.7 *Si existe un dominio abierto $\mathcal{M} \subset (\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1)\times\mathbb{R}^2$ de tal manera que $\pi(\mathcal{M}) = \Delta\times\mathbb{S}^1$ y $\mathcal{M}$ está foliado trivialmente por las trayectorias periódicas del campo vectorial vertical Hamiltoniano V_G, entonces se cumple la hipótesis* (H2).

Reducibilidad. La propiedad (5.2.15) y la existencia de la sección L hacen que sea posible construir las variables acción-ángulo para el sistema Hamiltoniano (5.2.8), (5.2.9), las cuales varían de manera suave con los parámetros $s\in\Delta\subset\mathbb{R}$ y $\varphi\in\mathbb{S}^1$.

Consideremos también la variedad producto $N = (\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1)\times(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1)$ con coordenadas $(s_1,\varphi_1(\operatorname{mod}2\pi),s_2,\varphi_2(\operatorname{mod}2\pi))$ y sea $\upsilon : N\to(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1)$ la proyección natural en el primer factor. De esta manera, N es el espacio total de un haz fibrado simpléctico trivial cuya estructura simpléctica en las fibras es $\mathrm{d}s_2\wedge\mathrm{d}\varphi_2$. Tenemos entonces dos haces fibrados triviales, simplécticos, π y υ sobre la misma base $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$.

Por otro lado, para cada $(s,\varphi)\in\Delta\times\mathbb{S}^1$, la trayectoria periódica $\Gamma_{s,\varphi}(E)$ en (5.2.3) se define en forma paramétrica como

$$\Gamma_{s,\varphi}(E) = \big\{p = p\big(s,\,\varphi,\,E,2\pi t/T(s,E)\big),\quad q = q\big(s,\,\varphi,\,E,\,2\pi t/T(s,E)\big)\big\},$$

donde

$$\Big(p\big(s,\,\varphi,\,E,\,2\pi t/T(s,E)\big),\,q\big(s,\,\varphi,\,E,\,2\pi t/T(s,E)\big)\Big),$$

es la solución del sistema Hamiltoniano (5.2.8), (5.2.9) con condiciones iniciales asociadas a la sección L,

$$p\big|_{t=0} = p^0(s,\varphi,E),\qquad q\big|_{t=0} = q^0(s,\varphi,E).$$

Denotemos por $E = E(s_1,s_2)$ la solución de la ecuación

$$s_2 = a(s_1,E), \tag{5.2.30}$$

donde (s_1,s_2) varía sobre el dominio abierto,

$$D = \bigcup_{s_1\in\Delta}\{s_1\}\times\Delta(s_1)\ \subset\ \mathbb{R}^2. \tag{5.2.31}$$

Aquí, $\Delta(s_1)$ es un subconjunto de la imagen de $\{s_1\}\times(E_1,E_2)$ bajo la acción a, es decir, $\Delta(s_1) = \big\{s_2 = a(s_1,E)\mid E\in(E_1,E_2)\big\}$ y E es una función suave en D,

Definición 5.8 *Sea $\iota : N\to\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}^2$ la identificación canónica dada por $\iota(s_1,\varphi_1,s_2,\varphi_2) = (s_1,s_2,\varphi_1,\varphi_2)$. Decimos que un subconjunto $\mathcal{U}\subset N$ es un* dominio toroidal simple *en N si $\upsilon(\mathcal{U}) = \Delta\times\mathbb{S}^1$ y además, $\iota(\mathcal{U}) = D_{\mathcal{U}}\times\mathbb{T}^2$, donde $D_{\mathcal{U}}\subset\mathbb{R}^2$ es un subconjunto abierto, conexo y simplemente conexo.*

De esta manera, es claro que el conjunto

$$\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s_1 \in \Delta} \{s_1\} \times \mathbb{S}^1 \times \Delta(s_1) \times \mathbb{S}^1 \ \subset N, \tag{5.2.32}$$

es un dominio toroidal simple en N con $D_{\mathcal{N}} = D$ en (5.2.31). Notemos, además, que los dominios $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son subhaces fibrados de π y υ, respectivamente, sobre la misma base $\Delta \times \mathbb{S}^1$. En estas condiciones, sea $\mathcal{R} : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ la transformación definida por

$$\mathcal{R}(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(s_1, \varphi_1, p(s_1, \varphi_1, E, \varphi_2), q(s_1, \varphi_1, E, \varphi_2)\Big)\Big|_{E=E(s_1,s_2)}. \tag{5.2.33}$$

Se tiene así que la transformación $\mathcal{R}$ satisface las propiedades siguientes:

(1) $\mathcal{R}$ es un difeomorfismo de haces que cubre la identidad,

$$\upsilon = \pi \circ \mathcal{R}.$$

(2) Para cada elemento fijo $(s, \varphi) \in \Delta \times \mathbb{S}^1$ se tiene que la transformación inversa $\mathcal{R}^{-1}_{s,\varphi} : U_{s,\varphi} \to \Delta(s_1) \times \mathbb{S}^1$ define las variables acción-ángulo del sistema Hamiltoniano (5.2.8), (5.2.9) asociado a la sección L (Esto lo aclaramos más adelante).

Estamos ahora en condiciones de formular el principal resultado sobre la reducibilidad del sistema (5.1.10)-(5.1.13).

Teorema 5.9 *Sea X_0 el campo vectorial del sistema dinámico no-perturbado* (5.1.10)-(5.1.13) *y supongamos que se cumplen las condiciones* (H1), (H2). *Entonces existen funciones suaves $A : \mathcal{M} \to \Delta(s_1)$, $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{S}^1$ y un difeomorfismo de haces $\mathcal{T} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ que cubre a la identidad,*

$$\mathcal{T}(s, \varphi, p, q) = \big(s, \varphi, A(s, \varphi, p, q), \phi(s, \varphi, p, q)\big), \tag{5.2.34}$$

con las siguientes propiedades:

(a) *El sistema no-perturbado* (5.1.10)-(5.1.13) *se transforma, bajo $\mathcal{T}$, a una* forma normal. *Esto es, el sistema dinámico del campo vectorial $\mathcal{T}_* X_0$ está dado por*

$$\dot{s}_1 = 0, \tag{5.2.35}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(s_1), \tag{5.2.36}$$

$$\dot{s}_2 = 0, \tag{5.2.37}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2(s_1, s_2), \tag{5.2.38}$$

donde ω_2 es una función suave en las variables $(s_1, s_2) \in D$.

(b) $\mathcal{T}$ *es una* transformación canónica *con respecto al corchete* $\{\,,\}_2$*, es decir,*

$$\{A,\phi\}_2 = \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial q} - \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial p} = 1. \tag{5.2.39}$$

Demostración. Por medio de la variable acción $a(s,E)$ (5.2.13) y la integral de movimiento G de la hipótesis (H1) definimos la función A por

$$A(s,\varphi,p,q) \stackrel{\text{def}}{=} a\big(s, G(s,\varphi,p,q)\big). \tag{5.2.40}$$

De la relación (5.2.1) se sigue, por un cálculo directo, que A es una integral de movimiento de X_0 (5.1.14),

$$\mathcal{L}_{X_0}A = \omega_1 \frac{\partial A}{\partial \varphi} + \{H_1, A\}_2 = \frac{\partial a}{\partial E}\mathcal{L}_{X_0}G = 0. \tag{5.2.41}$$

Más aún, las integrales de movimiento s y A son independientes (sus gradientes son linealmente independientes).

Dada una sección L (5.2.29), considere la transformación $\mathcal{R}$ en (5.2.33). Luego, para $(s,\varphi) \in \Delta \times \mathbb{S}^1$ fijo, la transformación inversa $\mathcal{R}^{-1}_{s,\varphi} : U_{s,\varphi} \to \Delta(s_1) \times \mathbb{S}^1$ es de la forma

$$\mathcal{R}^{-1}_{s,\varphi}(p,q) = \big(A(s,\varphi,p,q), \phi_0(s,\varphi,p,q)\big),$$

donde la variable *ángulo* ϕ_0 corresponde a la renormalización del *tiempo* t a lo largo de la trayectoria periódica $\Gamma_{s,\varphi}(E)$,

$$\phi_0 = \frac{2\pi t}{T(s,E)} \,(\mathrm{mod}\, 2\pi). \tag{5.2.42}$$

Por lo tanto, (A,ϕ_0) son precisamente las variables acción-ángulo del sistema Hamiltoniano (5.2.8)-(5.2.9), de lo cual se obtiene

$$\{A,\phi_0\}_2 = 1. \tag{5.2.43}$$

Notemos que la variable acción A es independiente de la elección de la sección L y que la variable ángulo se transforma, bajo variaciones de L, como $\phi_0 \mapsto \phi_0 + \chi$, donde χ es una función suave arbitraria que es constante a lo largo de las trayectorias periódicas $\widetilde{\Gamma}_{s,\varphi}(E)$.

Definimos ahora la siguiente función:

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1(s)\frac{\partial \phi_0}{\partial \varphi} + \{H_1, \phi_0\}_2. \tag{5.2.44}$$

De las relaciones (5.2.41) y (5.2.43), junto con la identidad de Jacobi para el corchete $\{\,,\}_2$ se obtiene que

$$\{\theta, A\}_2 = 0, \tag{5.2.45}$$

lo cual se ve fácilmente por medio de un cálculo directo:

$$\begin{aligned}
\{\theta, A\}_2 &= \omega_1 \left\{\frac{\partial \phi_0}{\partial \varphi}, A\right\}_2 + \{\{H_1, \phi_0\}_2, A\}_2 \\
&= \omega_1 \left\{\frac{\partial \phi_0}{\partial \varphi}, A\right\}_2 - \{\{\phi_0, A\}_2, H_1\}_2 - \{\{A, H_1\}_2, \phi_0\}_2 \\
&= \omega_1 \left\{\frac{\partial \phi_0}{\partial \varphi}, A\right\}_2 - \{\{A, H_1\}_2, \phi_0\}_2 = \omega_1 \left\{\frac{\partial \phi_0}{\partial \varphi}, A\right\}_2 - \omega_1 \left\{\frac{\partial A}{\partial \varphi}, \phi_0\right\}_2 \\
&= \omega_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} \{\phi_0, A\}_2 = 0.
\end{aligned}$$

De las relaciones (5.2.44) y (5.2.45) se sigue que la función θ es de la forma

$$\theta = \Theta\big(s, \varphi, A(s, \varphi, p, q)\big), \tag{5.2.46}$$

donde $\Theta = \Theta(s_1, \varphi_1, s_2)$ es una función suave, 2π-periódica en φ_1.

Consideremos ahora la transformación

$$\mathcal{T}_0 : (s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) \mapsto \Big(s_1, \varphi_1, A(s_1, \varphi_1, p, q), \phi_0(s_1, \varphi_1, p, q)\Big).$$

De (5.2.41) se tiene que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}_0)_* X_0 &= \omega_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \left(\omega_1 \frac{\partial A}{\partial \varphi_1} + \{A, H_1\}_2\right) \frac{\partial}{\partial s_2} + \left(\omega_1 \frac{\partial \phi_0}{\partial \varphi_1} + \{\phi_0, H_1\}_2\right) \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \\
&= \omega_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \left(\omega_1 \frac{\partial \phi_0}{\partial \varphi_1} + \{\phi_0, H_1\}_2\right) \frac{\partial}{\partial \varphi_2},
\end{aligned} \tag{5.2.47}$$

lo cual implica que el sistema dinámico que se obtiene del "*push-forward*" $(\mathcal{T}_0)_* X_0$ es de la forma

$$\begin{aligned}
\dot{s}_1 &= 0, \\
\dot{\varphi}_1 &= \omega_1(s_1), \\
\dot{s}_2 &= 0, \\
\dot{\varphi}_2 &= \Theta(s_1, \varphi_1, s_2).
\end{aligned}$$

Introducimos ahora una nueva variable cíclica de la siguiente manera:

$$\phi(s_1, \varphi_1, p, q) = \phi_0(s_1, \varphi_1, p, q) + \chi\big(s_1, \varphi_1, A(s_1, \varphi_1, p, q)\big), \tag{5.2.48}$$

donde

$$\chi = \chi(s_1, \varphi_1, s_2) = \chi(s_1, \varphi_1 + 2\pi, s_2), \tag{5.2.49}$$

es una función suave. Así, la transformación $\mathcal{T}$ en (5.2.34), con A y ϕ definidas por (5.2.40) y (5.2.48), respectivamente, satisface las propiedades (a) y (b) del teorema. En efecto, notemos que la condición (b) se sigue de (5.2.43) y (5.2.48). Con respecto a la condición (a), notemos que de (5.2.47), ésta se cumple si la función ϕ satisface la ecuación

$$\omega_1 \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_1} + \{H_1, \phi\}_2 = \omega_2\big(s_1, A(s_1, \varphi_1, p, q)\big). \tag{5.2.50}$$

Luego, tomando en cuenta (5.2.41) y (5.2.44) vemos que (5.2.50) se expresa, en términos de χ como

$$\omega_1(s_1)\frac{\partial \chi}{\partial \varphi_1}(s_1, \varphi_1, s_2) = \omega_2(s_1, s_2) - \Theta(s_1, \varphi_1, s_2). \tag{5.2.51}$$

Sea

$$\omega_2(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Theta(s_1, \varphi_1, s_2))\, \mathrm{d}\varphi_1. \tag{5.2.52}$$

Se sigue que la ecuación (5.2.51) tiene una solución χ que satisface (5.2.49) y es de la forma

$$\omega_1(s_1)\chi = \omega_2(s_1, s_2)\varphi_1 - \int_0^{\varphi_1} \Theta(s_1, \varphi_1', s_2)\mathrm{d}\varphi_1'. \tag{5.2.53}$$

Esto termina la demostración del teorema. ■

Una consecuencia directa del Teorema 5.9 es la siguiente: Para cada $(c_1, c_2) \in D$ (5.2.31), la imagen inversa bajo $\mathcal{T}$ de cada toro $\mathbb{T}^2 = \{s_1 = c_1,\ s_2 = c_2\} \subset \mathcal{N}$ es un toro en $\mathcal{M}$. Esto lo formulamos en el siguiente resultado.

Corolario 5.10 *Bajo las hipótesis* (H1), (H2)*, el espacio fase $\mathcal{M}$ está trivialmente foliado por los* 2*-toros invariantes del sistema no-perturbado X_0,*

$$\Lambda_{c_1,c_2} = \mathcal{T}^{-1}(\mathbb{T}^2_{c_1,c_2}) = \{s_1 = c_1,\ A(s_1, \varphi_1, p, q) = c_2\}, \tag{5.2.54}$$

en los cuales el movimiento a lo largo de las trayectorias de X_0 es quasi-periódico con frecuencias $\omega_1(c_1)$ y $\omega_2(c_1, c_2)$, que están dadas por (5.1.8) *y* (5.2.52)*, respectivamente.*

Sistemas Hamiltonianos lineales periódicos en $\mathbb{R}^2$. En esta parte ilustramos con un ejemplo, algunos de los conceptos y resultados de las secciones anteriores. En particular, consideramos el caso cuando la función H_1 en (5.1.2) es cuadrática en las variables p y q,

$$H_1 = \frac{1}{2}\big(w_1 p^2 + 2\, w_2 p\, q + w_3 q^2\big),$$

donde $w_i = w_i(s_1, \varphi_1)$, $(i = 1, 2, 3)$ son funciones suaves y 2π-periódicas en φ_1. Así, el sistema (5.1.10)-(5.1.13) toma la forma

$$\dot{s}_1 = 0, \tag{5.2.55}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(s_1), \tag{5.2.56}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = J\, W(s_1, \varphi_1) \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}. \tag{5.2.57}$$

En este caso,

$$W(s_1, \varphi_1) = \begin{bmatrix} w_1(s_1, \varphi_1) & w_2(s_1, \varphi_1) \\ w_2(s_1, \varphi_1) & w_3(s_1, \varphi_1) \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así, este sistema se asocia con una familia de sistemas Hamiltonianos lineales en $\mathbb{R}^2$, que son periódicos en el tiempo.

Recordemos de [25] que un sistema Hamiltoniano lineal periódico se dice ser *estable* (en el sentido de Lyapunov) si todas sus soluciones son acotadas para $t \in (-\infty, \infty)$. Más aún, un sistema Hamiltoniano lineal periódico y estable es llamado *fuertemente estable* (o *paramétricamente estable*), si toda perturbación Hamiltoniana T-periódica, suficientemente pequeña, de ese sistema, es también estable.

Para los propósitos de este ejemplo, es necesario suponer que nuestro sistema satisface la Hipótesis de Estabilidad Fuerte:

(HEF) Para todo $s_1 \in \overline{\Delta}_1$ el sistema (5.2.55)-(5.2.57) es *fuertemente estable*.

Antes de proseguir, debemos recordar algunos hechos de la teoría de sistemas Hamiltonianos lineales, que pueden ser consultados en [25]. Primeramente, el criterio de estabilidad para el sistema (5.2.55)-(5.2.57) se puede formular en términos de su matriz de monodromía. Sea $F(s_1, \varphi_1)$ la solución fundamental del problema lineal

$$\omega_1 \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi_1} = J\, W(s_1, \varphi_1)\, F \tag{5.2.58}$$

$$F(s_1, 0) = I. \tag{5.2.59}$$

Es claro que F es una función suave en s_1, φ_1, que toma valores en $\mathrm{Sp}(1, \mathbb{R})$ y además, $\det F(s_1, \varphi_1) = 1$. De esta manera, en términos de la matriz de monodromía $\mathfrak{M}(s_1) = F(s_1, 2\pi)$, la condición de estabilidad (HEF) se formula como sigue:

$$-2 < \mathrm{tr}\, \mathfrak{M}(s_1) < 2, \qquad \forall\, s_1 \in \Delta.$$

Esto nos dice que el espectro de la matriz de monodromía $\mathfrak{M}(s_1)$ es simple y pertenece al círculo unitario en el plano complejo,

$$\mathrm{Spec}\, \mathfrak{M}(s_1) = \left\{ \exp\left(\pm 2\pi\, i\, \beta(s_1) \right) \right\},$$

donde $\beta(s_1) > 0$.

Con el sistema (5.2.55)-(5.2.57) asociamos la ecuación de Riccati para una función $(s_1, \varphi_1) \mapsto \mathcal{D}(s_1, \varphi_1)$ (que depende de s_1 como parámetro), con valores en $\mathbb{C}$:

$$\omega_1 \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varphi_1} + w_1 \mathcal{D}^2 + 2\, w_2 \mathcal{D} + w_3 = 0. \tag{5.2.60}$$

Proposición 5.11 *La hipótesis* (HEF) *es equivalente a la siguiente condición: Existe una única solución suave* $\mathcal{D}(s_1, \varphi_1) = \mathcal{D}_1(s_1, \varphi_1) + i\,\mathcal{D}_2(s_1, \varphi_1)$ *de la ecuación de Riccati* (5.2.60) *que satisface las propiedades siguientes:*

$$\mathcal{D}_2(s_1, \varphi_1) > 0, \tag{5.2.61}$$

$$\mathcal{D}(s_1, \varphi_1 + 2\pi) = \mathcal{D}(s_1, \varphi_1), \tag{5.2.62}$$

para todo $(s_1, \varphi_1) \in \Delta \times \mathbb{S}^1$.

Observación 5.12 *La existencia de una solución suave* $\mathcal{D} : \Delta \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ *con parte imaginaria positiva tiene una interpretación geométrica* [25]*: en la complexificación* $(\Delta \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{C}^2 \to \Delta \times \mathbb{S}^1$*, la solución* $\mathcal{D}$ *determina el subhaz Kahleriano*

$$(s_1, \varphi_1) \mapsto \{p = \mathcal{D}(s_1, \varphi_1)\, q\}$$

el cual es invariante *con respecto al flujo del sistema* (5.2.55)–(5.2.57).

Proposición 5.13 *Bajo la condición de estabilidad fuerte* (HEF) *el sistema* (5.2.55)-(5.2.57) *admite una integral de movimiento* $G : (\Delta \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, la cual está dada por*

$$G(s_1, \varphi_1, p, q) = \frac{1}{2\,\mathcal{D}_2}\Big[(p - \mathcal{D}_1 q)^2 + (\mathcal{D}_2\, q)^2\Big]. \tag{5.2.63}$$

De esta manera, se cumplen las hipótesis (H1) *y* (H2).

Para demostrar este hecho, fijemos E_1 y E_2, arbitrarios, de tal manera que $0 < E_1 < E_2$. El sistema dinámico del campo vectorial Hamiltoniano V_G se integra fácilmente ya que se reduce al oscilador armónico bajo el cambio canónico de variables

$$p \mapsto \frac{(p - \mathcal{D}_1\, q)}{\sqrt{\mathcal{D}_2}}, \qquad q \mapsto \sqrt{\mathcal{D}_2}\, q. \tag{5.2.64}$$

Luego, para todo $E \in (E_1, E_2)$, la trayectoria periódica $\Gamma_{s_1,\varphi_1}(E)$ de V_G tiene período $T = 2\pi$ con variables acción-ángulo

$$a(s_1, E) = E, \qquad \phi_0 = t. \tag{5.2.65}$$

Tomamos ahora una sección L definiendo

$$p^0(s_1, \varphi_1, E) = \sqrt{2\, E\, \mathcal{D}_2(s_1, \varphi_1)}, \qquad q^0(s_1, \varphi_1, E) = 0.$$

De (5.2.30) y (5.2.65) se tiene que $E(s_1, s_2) = s_2$. Luego, el difeomorfismo $\mathcal{R}$ en (5.2.33) está dado por

$$\mathcal{R}_{s_1,\varphi_1} : (s_2, \varphi_2) \mapsto (p, q) = \left(\sqrt{2s_2}\left(\sqrt{\mathcal{D}_2}\cos\varphi_2 + \frac{\mathcal{D}_1}{\sqrt{\mathcal{D}_2}}\operatorname{sen}\varphi_2\right), \sqrt{\frac{2s_2}{\mathcal{D}_2}}\operatorname{sen}\varphi_2\right).$$

La transformación inversa $\mathcal{R}^{-1}$ queda definida por las relaciones

$$A(s_1, \varphi_1, p, q) = \frac{1}{2\mathcal{D}_2}\Big[(p - \mathcal{D}_1 q)^2 + (\mathcal{D}_2\, q)^2\Big], \tag{5.2.66}$$

$$\phi_0 = \arctan\left(\frac{p - \mathcal{D}_1\, q}{\mathcal{D}_2}\right). \tag{5.2.67}$$

De esto y usando la ecuación de Riccati, calculamos la evolución temporal de ϕ_0 a lo largo de las trayectorias del sistema original (5.2.55)-(5.2.57) y derivamos la fórmula siguiente para la función Θ en (5.2.46),

$$\Theta(s_1, \varphi_1) = w_1(s_1, \varphi_1)\, \mathcal{D}_2(s_1, \varphi_1).$$

La transformación $\mathcal{T}$ que reduce el sistema a la forma (5.2.35)-(5.2.38) está dada por la fórmula (5.2.34) bajo la sustitución $\varphi_2 \mapsto \varphi_2 + \chi$, donde

$$\chi = \frac{1}{\omega_1(s_1)}\left[\omega_2(s_1)\, \varphi_1 - \int_0^{\varphi_1} w_1(s_1, \varphi_1')\mathcal{D}_2(s_1, \varphi_1')\mathrm{d}\varphi_1'\right], \tag{5.2.68}$$

$$\omega_2(s_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_1(s_1, \varphi_1)\mathcal{D}_2(s_1, \varphi_1)\mathrm{d}\varphi_1. \tag{5.2.69}$$

Por lo tanto, la transformación $\mathcal{T}$ (5.2.34) queda definida por las funciones A en (5.2.66) y

$$\phi = \arctan\left(\frac{p - \mathcal{D}_1\, q}{\mathcal{D}_2}\right) + \chi(s_1, \varphi_1).$$

Notemos que los exponentes de Floquet $\beta(s_1)$ están relacionados con las frecuencias a través de las relaciones siguientes:

$$\beta(s_1) = \frac{\omega_2(s_1)}{\omega_1(s_1)}.$$

Observación 5.14 *Notemos que la transformación $\mathcal{T}$ es precisamente una modificación de la transformación estándar de Floquet–Lyapunov $\mathscr{L} : (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}^2 \to (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}^2$ dada por*

$$\mathscr{L}_{s_1,\varphi_1} = \exp\left(\frac{\varphi_1}{\omega_1(s_1)}\mathcal{K}(s_1)\right) \circ F^{-1}(s_1, \varphi_1).$$

En este caso $\mathcal{K}(s_1) = \frac{\omega_1(s_1)}{2\pi} \ln \mathfrak{M}(s)$ y existe una rama real del logaritmo de $\mathfrak{M}(s_1)$ debido a la hipótesis de estabilidad. Luego, $\mathcal{K}(s_1) \in \mathfrak{sp}(1, \mathbb{R})$ y los valores propios de $\mathcal{K}(s_1)$ son $\pm\, i\, \omega_2(s_1)$. Bajo la transformación $\mathscr{L}$, el sistema (5.2.55)-(5.2.57) *se reduce a la forma constante*

$$\dot{s}_1 = 0,$$
$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(s_1),$$
$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \mathcal{K}(s_1) \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

De esta manera, podemos escoger funciones vectoriales suaves $\mathbf{e}_i : \Delta_1 \to \mathbb{R}^2$ $(i = 1, 2)$, *tales que*

$$\mathcal{K}(s_1)\,\mathbf{e}_1(s_1) = -\omega_2(s_1)\,\mathbf{e}_2(s_1),$$
$$\mathcal{K}(s_1)\,\mathbf{e}_2(s_1) = \omega_2(s_1)\,\mathbf{e}_1(s_1),$$

y $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \circ \mathscr{L}$, *donde* $\mathcal{T}_0 : (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times (\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{S}^1)$ *es la transformación con inversa*

$$(s_1, \varphi_1, p, q) \mapsto \sqrt{\frac{2p}{\omega_2(s_1)}}\,\cos q\,\mathbf{e}_1(s_1) + \sqrt{\frac{2p}{\omega_2(s_1)}}\,\operatorname{sen} q\,\mathbf{e}_2(s_1).$$

5.3 Transformaciones gauge exactas

En esta parte vamos a estudiar de manera un poco más general el tipo de transformaciones $\mathcal{T}$ (5.2.34) que se introdujeron en el Teorema 5.9.

Al igual que en la sección anterior, sean $M = (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}^2$ y $N = (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$, con coordenadas $(s, \varphi \,(\mathrm{mod}\, 2\pi), p, q)$ y $(s_1, \varphi_1 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi), s_2, \varphi_2 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi))$, respectivamente. Consideremos las fibraciones $\pi : M \to \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ y $\upsilon : N \to \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ que definen los correspondientes haces fibrados simplécticos, triviales. Si $\mathcal{M} \subset M$ y $\mathcal{N} \subset N$ son dos dominios abiertos tales que $\pi(\mathcal{M}) = \Delta \times \mathbb{S}^1 = \upsilon(\mathcal{N})$, entonces podemos verlos como los espacios totales de los subhaces fibrados triviales $\pi\big|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \Delta \times \mathbb{S}^1$ y $\upsilon\big|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \Delta \times \mathbb{S}^1$, sobre la misma base, la cual tiene estructura simpléctica $\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\varphi$. En este caso, las fibras $\mathcal{M}_{s,\varphi} = \pi^{-1}(s, \varphi) \subset \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{N}_{s_1,\varphi_1} = \upsilon^{-1}(s_1, \varphi_1) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ tienen estructuras simplécticas $\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$ y $\mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2$, respectivamente. Aquí estamos interesados en el caso cuando $\pi_1(\mathcal{M}_{s,\varphi}) = \pi_1(\mathcal{N}_{s_1,\varphi_1}) = \mathbb{Z}$.

Adicionalmente a las hipótesis anteriores, supongamos que se tiene dado un difeomorfismo de haces $\mathcal{T} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ que preserva las fibras y es la identidad en la base,

$$\mathcal{T}(s, \varphi, p, q) \overset{\text{def}}{=} \big(s_1, \varphi_1, A(s, \varphi, p, q), \phi(s, \varphi, p, q)\big), \tag{5.3.1}$$

para funciones suaves $A = A(s, \varphi, p, q)$ y $\phi = \phi(s, \varphi, p, q)$ en $\mathcal{M}$, tales que $A(s, \varphi, p, q) \in \mathbb{R}$ y $\phi(s, \varphi, p, q) \in \mathbb{S}^1$ (ver Teorema 5.9). Al difeomorfismo $\mathcal{T}$ definido por (5.3.1) lo llamaremos una *transformación gauge*.

Se sigue directamente de (5.3.1) que se cumplen las siguientes relaciones:

$$s_2 \circ \mathcal{T} = A, \qquad \varphi_2 \circ \mathcal{T} = \phi. \tag{5.3.2}$$

Por otra parte, para cada elemento fijo $(s, \varphi) \in \Delta \times \mathbb{S}^1$, denotemos por $\mathcal{T}_{s,\varphi} : \mathcal{M}_{s,\varphi} \to \mathcal{N}_{s_1,\varphi_1}$ la función sobre las fibras definida por

$$\mathcal{T}_{s,\varphi}(p, q) \overset{\text{def}}{=} \Big(A(s, \varphi, p, q), \phi(s, \varphi, p, q)\Big). \tag{5.3.3}$$

Es claro que $\mathcal{T}(s,\varphi,p,q) = \big(s_1,\varphi_1,\mathcal{T}_{s,\varphi}(p,q)\big)$. En estas condiciones, asociamos a $\mathcal{T}$ la siguiente 1-forma en $\mathcal{M}_{s,\varphi}$:

$$\alpha_{s,\varphi} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{T}^*_{s,\varphi}(s_2\,\mathrm{d}\varphi_2) - p\,\mathrm{d}q. \tag{5.3.4}$$

Luego, por medio de un cálculo directo, se obtiene

$$\mathcal{T}^*_{s,\varphi}(s_2\,\mathrm{d}\varphi_2) = A(s,\varphi,p,q)\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\,\mathrm{d}p + \frac{\partial\phi}{\partial q}\,\mathrm{d}q\right). \tag{5.3.5}$$

Definición 5.15 *Una transformación gauge $\mathcal{T}:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ se dice ser* exacta *si*

$$\mathcal{T}^*(\mathrm{d}s_2\wedge\mathrm{d}\varphi_2) = \mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}q + \mathrm{d}P, \tag{5.3.6}$$

donde

$$P = P_1(s,\varphi,p,q)\,\mathrm{d}s + P_2(s,\varphi,p,q)\,\mathrm{d}\varphi, \tag{5.3.7}$$

es una 1-forma horizontal en $\mathcal{M}$, y los coeficientes P_1, P_2 son funciones suaves y 2π-periódicas en las variable φ. La 1-forma P en (5.3.7) es llamada una primitiva *de $\mathcal{T}$.*

Denotemos por d_1 y d_2 las derivadas exteriores en M con respecto a cada uno de los factores $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Luego, $\mathrm{d} = \mathrm{d}_1+\mathrm{d}_2$ y $\mathrm{d}_1\circ\mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_2\circ\mathrm{d}_1 = 0$. Ahora podemos probar el criterio siguiente:

Proposición 5.16 *Sea $\mathcal{T}:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ una transformación gauge y supongamos que existe una función suave $K:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ tal que*

$$\alpha_{s,\varphi} = -\mathrm{d}_2 K, \tag{5.3.8}$$

para todo $(s,\varphi)\in\Delta\times\mathbb{S}^1$. Entonces $\mathcal{T}$ es exacta, con primitiva dada por

$$P = A\,\mathrm{d}_1\phi + \mathrm{d}_1 K. \tag{5.3.9}$$

Demostración. Notemos que de (5.3.4) y de (5.3.5) se tiene

$$\alpha_{s,\varphi} = A\,\mathrm{d}_2\phi - p\,\mathrm{d}q. \tag{5.3.10}$$

Luego, de la hipótesis (5.3.8) y de (5.3.10) se obtiene

$$A\,\mathrm{d}_2\phi = p\,\mathrm{d}q - \mathrm{d}_2 K. \tag{5.3.11}$$

Por otro lado, tomado en cuenta (5.3.11), un cálculo directo nos muestra que

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^*(\mathrm{d}s_2\wedge\mathrm{d}\varphi_2) &= \mathrm{d}\,(A\,\mathrm{d}\phi) = \mathrm{d}(A\,\mathrm{d}_1\phi) + \mathrm{d}(A\,\mathrm{d}_2\phi)\\ &= \mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}q + \mathrm{d}(A\,\mathrm{d}_1\phi) - \mathrm{d}(\mathrm{d}_2 K)\\ &= \mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}q + \mathrm{d}(A\,\mathrm{d}_1\phi) + \mathrm{d}(\mathrm{d}_1 K)\\ &= \mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}q + \mathrm{d}\,(A\,\mathrm{d}_1\phi + \mathrm{d}_1 K)\,.\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

Así, comparando (5.3.6) con (5.3.12) proponemos

$$P = A\,\mathrm{d}_1\phi \,+\, \mathrm{d}_1 K,$$

por lo que se cumple (5.3.6) con P dada por (5.3.9). Finalmente, los coeficientes de la 1-forma horizontal P en (5.3.7) están dados por

$$P_1 = A\,\frac{\partial\phi}{\partial s} \,+\, \frac{\partial K}{\partial s}, \tag{5.3.13}$$

$$P_2 = A\,\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \,+\, \frac{\partial K}{\partial\varphi}. \tag{5.3.14}$$

Esto termina la prueba de la proposición. ■

Observación 5.17 *Notemos que $\mathcal{T}$ es una transformación canónica con respecto al corchete $\{\,,\}_2$, ya que de* (5.3.10) *y* (5.3.11) *se tiene que $A\,\mathrm{d}_2\phi - p\,\mathrm{d}q = -\mathrm{d}_2 K$, lo cual es equivalente a*

$$\{A, \phi\}_2 = 1. \tag{5.3.15}$$

Además, de (5.3.10) *y* (5.3.11) *también se tiene*

$$\alpha_{s,\varphi} = \left(A\,\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)\mathrm{d}p + \left(A\,\frac{\partial\phi}{\partial q} - p\right)\mathrm{d}q = -\frac{\partial K}{\partial p}\,\mathrm{d}p - \frac{\partial K}{\partial}\mathrm{d}q,$$

por lo que se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$A\,\frac{\partial\phi}{\partial p} = -\frac{\partial K}{\partial p}, \tag{5.3.16}$$

$$A\,\frac{\partial\phi}{\partial q} = -\frac{\partial K}{\partial q} + p. \tag{5.3.17}$$

Como una consecuencia directa de la Proposición 5.16 se prueba a continuación un resultado el cual nos muestra que la transformación que se introdujo en el Teorema 5.9 es un ejemplo importante de una transformación gauge exacta.

Corolario 5.18 *Sea $\mathcal{T} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ el difeomorfismo en* (5.2.34)*, donde las funciones $A = A(s, \varphi, p, q)$ y $\phi = \phi(s, \varphi, p, q)$ están definidas por las relaciones* (5.2.40) *y* (5.2.48)*, respectivamente. Entonces $\mathcal{T}$ es una transformación gauge exacta.*

Demostración. La condición (5.3.15) es precisamente la propiedad (5.2.39). Ahora vamos a probar que también se cumple la condición (5.3.8), para lo cual es suficiente encontrar una primitiva de $\alpha_{s,\varphi}$. Fijemos $(s, \varphi) \in \Delta \times \mathbb{S}^1$. Se tiene que $\mathcal{M}_{s,\varphi} = \{(s, \varphi)\} \times U_{s,\varphi}$ y el grupo fundamental del dominio $U_{s,\varphi} \subset \mathbb{R}^2$ está generado por la trayectoria periódica $\Gamma_{s,\varphi}(E)$ del sistema Hamiltoniano (5.2.8), (5.2.9). Notemos que $\alpha_{s,\varphi}$ es cerrada ya que de (5.3.4), (5.3.5) y de la propiedad (5.2.39) (o bien (5.3.15)), se tiene

$$\mathrm{d}_2\alpha_{s,\varphi} = \big(\{A, \phi\}_2 - 1\big)\,\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q = 0.$$

Mostraremos ahora que $\alpha_{s,\varphi}$ es exacta. De (5.2.15) y de la definición (5.2.40) de A, se tiene que $A\big|_{\Gamma_{s,\varphi}(E)} = a(s,E)$. Tomando en cuenta (5.2.13) y (5.3.4), se deriva lo siguiente:

$$\oint_{\Gamma_{s,\varphi}(E)} \alpha_{s,\varphi} = \oint_{\Gamma_{s,\varphi}(E)} \mathcal{T}^*_{s,\varphi}(s_2\,\mathrm{d}\varphi_2) - \oint_{\Gamma_{s,\varphi}(E)} p\,\mathrm{d}q$$

$$= \int_0^{2\pi} a(s,E)\,\mathrm{d}\phi \,-\, 2\pi\,a(s,E) = 0.$$

Finalmente, dada una sección L en (5.2.29) y fijando $E \in (E_1,E_2)$, definimos la primitiva $K_{s,\varphi}$ de $\alpha_{s,\varphi}$, dependiente de manera suave de s y φ, vistos como parámetros, por medio de la fórmula

$$K_{s,\varphi}(p,q) = -\int_{(p^0,q^0)}^{(p,q)} \alpha_{s,\varphi}, \tag{5.3.18}$$

donde la integral se toma sobre cualquier curva que une el punto dado $(p,q) \in U_{s,\varphi}$ con el punto $\big(p^0(s,\varphi,E_0), q^0(s,\varphi,E_0)\big)$ asociado con L. Es claro que de (5.3.18) se tiene $-\mathrm{d}_2K_{s,\varphi} = \alpha_{s,\varphi}$, con lo cual se demuestra el teorema. ■

Definición 5.19 *Al difeomorfismo $\mathcal{T}: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ definido por* (5.2.34)*, con A y ϕ dadas por* (5.2.40) *y* (5.2.48) *respectivamente, le llamaremos una* transformación gauge exacta asociada al sistema no-perturbado (5.1.10)-(5.1.13).

Consideremos nuevamente el espacio fase $\mathcal{M}$ con estructura simpléctica no-uniforme dada por

$$\Omega_0^\varepsilon = \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\varphi \,+\, \varepsilon\,\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q. \tag{5.3.19}$$

En estas condiciones, el siguiente resultado justifica el término *transformación gauge exacta*.

Corolario 5.20 *Si $\mathcal{T}: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es una transformación gauge exacta, entonces*

$$\mathcal{T}_*\Omega_0^\varepsilon = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 \,+\, \varepsilon\,\mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 \,-\, \mathrm{d}\widetilde{Q}, \tag{5.3.20}$$

donde

$$\widetilde{Q} = \mathcal{T}_*P = \widetilde{Q}_1(s_1,\varphi_1,s_2,\varphi_2)\,\mathrm{d}s_1 \,+\, \widetilde{Q}_2(s_1,\varphi_1,s_2,\varphi_2)\,\mathrm{d}\varphi_1, \tag{5.3.21}$$

es una forma horizontal en $\mathcal{N}$ y $P = P_1\mathrm{d}s_1 + P_2\mathrm{d}\varphi_1$ es la primitiva de $\mathcal{T}$ (5.3.6), (5.3.7). *En este caso se tiene que*

$$\widetilde{Q}_1 = P_1 \circ \mathcal{T}^{-1} \qquad y \qquad \widetilde{Q}_2 = P_2 \circ \mathcal{T}^{-1}. \tag{5.3.22}$$

Recíprocamente, si $\mathcal{T}: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es una transformación gauge que satisface (5.3.20)*, entonces $\mathcal{T}$ es exacta.*

En la Sección 5.4 mostraremos que dada una forma horizontal $\mathcal{Q}$ y para cualquier $\varepsilon > 0$, la 2-forma cerrada (5.3.20) es no-degenerada en un dominio abierto de $\mathcal{N}$. Este dominio es el espacio total de un subhaz de $\mathcal{N} \to \Delta \times \mathbb{S}^1$. A la 2-forma definida por (5.3.20) le llamaremos una *estructura simpléctica deformada* (o $\widetilde{Q}$*-forma simpléctica*) en $\mathcal{N}$.

Resumimos la discusión anterior en el siguiente resultado, el cual también nos permitirá introducir una clase de sistemas a los que llamaremos *sistemas Hamiltonianos perturbados modelo*, que estudiaremos con más detalle en la Sección 5.5.

Teorema 5.21 *Sea X_ε el campo vectorial Hamiltoniano del sistema perturbado original* $\left(M, \Omega_0^\varepsilon, H_\varepsilon\right)$ (5.1.4)-(5.1.7). *Supongamos que el sistema no-perturbado* (5.1.10)-(5.1.13) *satisface las hipótesis* (H1), (H2) *en un dominio $\mathcal{M} \subset M$. Sea $\mathcal{T} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ la transformación gauge exacta asociada, la cual está dada por* (5.2.34), (5.2.40), (5.2.48). *Entonces el* "push-forward" *$\mathcal{T}_* X_\varepsilon$ de X_ε bajo $\mathcal{T}$ es un sistema Hamiltoniano en $\mathcal{N}$ con respecto a la estructura simpléctica deformada*

$$\Omega^\varepsilon_{\widetilde{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_* \Omega_0^\varepsilon = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 - \mathrm{d}\widetilde{Q}, \tag{5.3.23}$$

y la función

$$\widetilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \mathcal{T} = \widetilde{H}_0(s_1) + \varepsilon\, \widetilde{H}_1(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) + O(\varepsilon^2). \tag{5.3.24}$$

En este caso, la forma horizontal $\widetilde{Q}$ en $\mathcal{N}$ está definida por (5.3.21) *y*

$$\widetilde{H}_1\big(s_1, \varphi_1, A(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2), \phi(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2)\big) = H_1(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2). \tag{5.3.25}$$

Más aún, el sistema no-perturbado $\widetilde{X}_0 \equiv X_{\widetilde{H}_\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}$ de $X_{\widetilde{H}_\varepsilon} = \mathcal{T}_* X_\varepsilon$ coincide con (5.2.35)-(5.2.38).

Un sistema Hamiltoniano que depende del parámetro ε, $\left(\mathcal{N}, \Omega^\varepsilon_{\widetilde{Q}}, \widetilde{H}_\varepsilon\right)$, en el cual el Hamiltoniano satisface (5.3.25), lo llamaremos un *sistema Hamiltoniano perturbado modelo* si el sistema no-perturbado $\widetilde{X}_0$ es de la forma

$$\widetilde{X}_0 = \omega_1(s_1) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \omega_2(s_1, s_2) \frac{\partial}{\partial \varphi_2}.$$

Hasta aquí se ha completado lo que sería la primera etapa en lo que respecta a la teoría de perturbaciones para una clase de sistemas Hamiltonianos de la forma (5.1.4)-(5.1.7).

En las Sección 5.6 se da el siguiente paso en el cual se da la interpretación del sistema no-perturbado $\widetilde{X}_0$ como un sistema Hamiltoniano completamente integrable. En particular, los 2-toros (5.2.54) vienen a ser toros de Liouville. Finalmente, en la última etapa, Sección 5.8, se aplica el método de homotopía con el fin de llevar al sistema Hamiltoniano perturbado original al contexto de la teoría KAM.

5.4 Estructuras simplécticas deformadas

En esta parte estudiaremos las estructuras simplécticas introducidas al final de la sección anterior, que como ya hemos visto, surgen en el estudio de sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad en el contexto de la teoría hamiltoniana de perturbaciones.

El tipo de espacios fase que nos interesan son los dominios toroidales de la forma $\mathcal{N} = (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times (\Delta_2 \times \mathbb{S}^1)$, con $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{R}$ intervalos abiertos (ver Definición 5.8). Sean $(s_1, \varphi_1(\mathrm{mod}\, 2\pi), s_2, \varphi_2(\mathrm{mod}\, 2\pi))$ coordenadas en el espacio $\mathcal{N}$ y supongamos que está equipado con la familia de 2-formas

$$\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 - \varepsilon\, \mathrm{d}\mathcal{Q}, \tag{5.4.1}$$

parametrizadas por la 1-forma horizontal $\mathcal{Q}$ en $\mathcal{N}$,

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1\, \mathrm{d}s_1 + \mathcal{Q}_2\, \mathrm{d}\varphi_1, \tag{5.4.2}$$

donde $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_i(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2)$, $i = 1, 2$, son funciones arbitrarias suaves en $\mathcal{N}$ y el parámetro $\varepsilon \in [0, 1]$. Notemos que la 2-forma $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ en (5.4.1) coincide con la 2-forma $\Omega^{\varepsilon}_{\widetilde{\mathcal{Q}}}$ en (5.3.23) para $\widetilde{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}$.

De manera explícita, se tiene que la 2-forma $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ se expresa como

$$\begin{aligned}\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} \;=\; & \left[1 - \varepsilon\left(\frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_1} - \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_1}\right)\right] \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}s_2 + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2} \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 \\ & + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}s_2 + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 + \varepsilon \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2.\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

Además, para $\varepsilon = 0$ se tiene que $\Omega^{0}_{\mathcal{Q}} = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1$ es la 2-forma simpléctica canónica en el cilindro $\Delta_1 \times \mathbb{S}^1$. Además, si $\mathcal{Q} = 0$ en (5.4.1), entonces se obtiene la forma simpléctica

$$\widetilde{\Omega}^{\varepsilon}_{0} = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2, \tag{5.4.4}$$

la cual es una forma simpléctica no-uniforme en $\mathcal{N}$.

Para cada $\varepsilon \in [0, 1]$, la 2-forma $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ es cerrada. Sin embargo, para $\varepsilon > 0$, la condición de no-degeneración depende de las funciones $\mathcal{Q}_1$ y $\mathcal{Q}_2$, por lo que es necesario determinar un dominio adecuado en el espacio fase $\mathcal{N}$ en el cual esta forma sea no-degenerada.

Para mostrar que la 2-forma $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ es no-degenerada podemos calcular el determinante de su matriz asociada y probar que éste es siempre distinto de cero. En este caso, en lugar de calcular directamente tal determinante, vamos a introducir bases locales adecuadas para $T\mathcal{N}$ y $\Omega^1(\mathcal{N})$, de tal manera que la matriz de la 2-forma (5.4.3) se exprese de un modo más sencillo. Para ello, recordemos que toda forma horizontal $\mathcal{Q}$ induce una conexión de Ehresmann Γ (3.2.30), (3.2.31) en el haz trivial $\pi : \mathcal{N} \to \Delta_1 \times \mathbb{S}^1$ y los campos vectoriales que generan localmente la distribución horizontal son precisamente los Γ-levantamientos horizontales de los campos vectoriales básicos $\partial/\partial s_1$ y $\partial/\partial\varphi_1$ en la base $\Delta_1 \times \mathbb{S}^1$ (ver (3.2.14)). En esta situación, esos campos vectoriales vienen dados por

$$\mathrm{hor}_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial}{\partial s_1} + \left(-\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2} \frac{\partial}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right), \tag{5.4.5}$$

$$\mathrm{hor}_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \left(-\frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} \frac{\partial}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right). \tag{5.4.6}$$

Se tiene así que

$$\left\{ \mathrm{hor}_1, \mathrm{hor}_2, \frac{\partial}{\partial s_2}, \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right\}, \tag{5.4.7}$$

es una base local para $T\mathcal{N}$. Más aún, si definimos las 1-formas

$$\Gamma_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{d}s_2 + \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2} \mathrm{d}s_1 + \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} \mathrm{d}\varphi_1 \right), \tag{5.4.8}$$

$$\Gamma_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{d}\varphi_2 - \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} \mathrm{d}s_1 + \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \mathrm{d}\varphi_1 \right), \tag{5.4.9}$$

se sigue que

$$\{\mathrm{d}s_1, \mathrm{d}\varphi_1, \Gamma_1, \Gamma_2\}, \tag{5.4.10}$$

es una base local para el espacio de las 1-formas $\Omega^1(\mathcal{N})$, dual a la base (5.4.7).

Sea $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ la 2-forma definida en $\mathcal{N}$ por

$$\mathcal{F}_{\mathcal{Q}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{F}_{12}\, \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1, \tag{5.4.11}$$

donde

$$\mathcal{F}_{12} = 1 - \varepsilon \left[\left(\frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_1} - \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_1} \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2} \right) \right]. \tag{5.4.12}$$

Notemos que $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ coincide con la 2-forma horizontal (3.2.44) introducida en la Sección 3.2. En este caso, la forma simpléctica en la base $\Delta_1 \times \mathbb{S}^1$ es $\mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1$ y la estructura de Poisson vertical está dada en las fibras por el corchete $\{\,,\}_2$ definido en (5.2.2).

En estas condiciones se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.22 *Para cada $\varepsilon > 0$, la 2-forma $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ (5.4.1) se representa como*

$$\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} = \mathcal{F}_{\mathcal{Q}} + \varepsilon\, \Gamma_1 \wedge \Gamma_2, \tag{5.4.13}$$

donde $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ está dada por (5.4.11) y Γ_1, Γ_2 se definen por (5.4.8), (5.4.9). Más aún, la 2-forma $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ es no-degenerada si y sólo si la forma $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ es no-degenerada, es decir, $\mathcal{F}_{12} \neq 0$.

Demostración. Un cálculo directo nos muestra que la 2-forma $\varepsilon\,\Gamma_1 \wedge \Gamma_2$ está dada por

$$\varepsilon\,\Gamma_1 \wedge \Gamma_2 = \varepsilon\left(\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2}\frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2}\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2}\right) \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2}\mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}s_2 + \varepsilon\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2}\mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2$$

$$+\,\varepsilon\frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2}\mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}s_2 + \varepsilon\frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2}\mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 + \varepsilon \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2,$$

por lo que comparando esta expresión con la de $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ en (5.4.3), se sigue claramente la fórmula (5.4.13), con $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ definida por (5.4.11). Ahora sólo nos resta establecer las condiciones de no-degeneración de $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$. Para ello, notemos que la matriz que la representa puntualmente con respecto a la base (5.4.10) está dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{F}_{12} & 0 & 0 \\ -\mathcal{F}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.4.14}$$

cuyo determinante es $\varepsilon^2 \mathcal{F}_{12}^2$. De esto se sigue que el determinante de la matriz (5.4.14) es no-nulo si y sólo si $\mathcal{F}_{12} \neq 0$. ∎

Corolario 5.23 *Si $\varepsilon > 0$, la 2-forma $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ es no-degenerada en el dominio abierto*

$$\mathcal{N}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Dom}(\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}) = \left\{(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) \in \mathcal{N} \;\middle|\; \mathcal{F}_{12}(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) \neq 0\right\} \subset \mathcal{N},$$

donde $\mathcal{F}_{12}$ está dada por (5.4.12). *Por lo tanto, $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ es una forma simpléctica en $\mathcal{N}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$.*

El dominio $\mathcal{N}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ en el cual la 2-forma $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ es simpléctica puede extenderse a todo el espacio fase $\mathcal{N}$ si tomamos el parámetro ε lo suficientemente pequeño e imponemos condiciones un poco más fuertes para las funciones $\mathcal{Q}_1$ y $\mathcal{Q}_2$ que definen la forma horizontal $\mathcal{Q}$ (5.4.2). Se tiene así el siguiente resultado.

Corolario 5.24 *Si las funciones $\mathcal{Q}_1$ y $\mathcal{Q}_2$ en* (5.4.2) *están bien definidas y son suaves en la cerradura de $\mathcal{N}$, $\overline{\mathcal{N}} = \overline{\Delta}_1 \times \mathbb{S}^1 \times \overline{\Delta}_2 \times \mathbb{S}^1$, entonces existe $\delta_{\mathcal{Q}} > 0$ tal que para todo ε con $0 < \varepsilon < \delta_{\mathcal{Q}}$ se tiene que*

$$\mathcal{N}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} = \mathcal{N}.$$

Por lo tanto, $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ es una forma simpléctica en todo el espacio fase $\mathcal{N}$.

Demostración. La función $f_{\mathcal{Q}}$ definida por

$$f_{\mathcal{Q}} = \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_1} - \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_1}\right) + \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2}\frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2}\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2}\right),$$

es suave en el compacto $\overline{\mathcal{N}}$ por lo que toma su valor máximo en este conjunto. Además, se requiere que

$$\mathcal{F}_{12} = 1 - \varepsilon\, f_{\mathcal{Q}} \neq 0. \tag{5.4.15}$$

Si tomamos

$$\delta_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{\max\limits_{z \in \overline{\mathcal{N}}} \{\, |f_{\mathcal{Q}}(z)|\, \}},$$

se cumple $0 \leq \varepsilon\, |f_{\mathcal{Q}}| < 1$ para todo ε con $0 < \varepsilon < \delta_{\mathcal{Q}}$, lo cual nos garantiza (5.4.15). ∎

En vista del Corolario 5.24 y por simplicidad, vamos a suponer en lo que sigue que $0 < \varepsilon < \delta_{\mathcal{Q}}$, de tal modo que el dominio de la forma simplética $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ sea todo el espacio fase $\mathcal{N}$.

De esta manera, la estructura de Poisson, $\{\,,\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$, que induce la forma simpléctica $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ está definida en todo $\mathcal{N}$ y está dada por (ver (1.1.12)),

$$\{F, G\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} = \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}(X_F, X_G),$$

donde X_F y X_G son los campos Hamiltonianos de las funciones $F, G \in C^{\infty}(\mathcal{N})$, respectivamente. Recordemos que en este caso, el corchete de Poisson $\{\,,\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ define el tensor de Poisson

$$\Psi^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\Psi^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}})^{ij} \frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z_j}, \tag{5.4.16}$$

donde las funciones componentes están definidas por

$$(\Psi^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}})^{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \{z_i, z_j\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}},$$

con $z_1 = s_1$, $z_2 = \varphi_1 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$, $z_3 = s_2$ y $z_4 = \varphi_2 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$.

Proposición 5.25 *El corchete de Poisson $\{\,,\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ en $\mathcal{N}$ que corresponde a la forma simpléctica $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ está dado por*

$$\{s_1, \varphi_1\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{\mathcal{F}_{12}}, \qquad \{s_1, s_2\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} = -\frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2}, \qquad \{s_1, \varphi_2\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2}, \tag{5.4.17}$$

$$\{\varphi_1, s_2\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2}, \qquad \{\varphi_1, \varphi_2\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} = -\frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2}, \tag{5.4.18}$$

$$\{s_2, \varphi_2\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2} \right). \tag{5.4.19}$$

Demostración. Si utilizamos la relación (1.1.13) y la expresión (5.4.13) para la forma simpléctica $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ en la base (5.4.10), se tiene que la matriz asociada al tensor de

Poisson $\Psi_{\mathcal{Q}}^{\varepsilon}$ (5.4.16) en $\mathcal{N}$ está dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\mathcal{F}_{12}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\mathcal{F}_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, el tensor de Poisson se puede expresar en los siguientes términos:

$$\Psi_{\mathcal{Q}}^{\varepsilon} = \frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \operatorname{hor}_1 \wedge \operatorname{hor}_2 \; + \; \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial s_2} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi_2}. \tag{5.4.20}$$

De esto se sigue, haciendo los cálculos necesarios, que

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{Q}}^{\varepsilon} = & \left(\frac{1}{\mathcal{F}_{12}}\right) \frac{\partial}{\partial s_1} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \left(\frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2}\right) \frac{\partial}{\partial s_1} \wedge \frac{\partial}{\partial s_2} + \left(\frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2}\right) \frac{\partial}{\partial s_1} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \\ & + \left(\frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2}\right) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \wedge \frac{\partial}{\partial s_2} - \left(\frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2}\right) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \\ & + \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2}\right)\right] \frac{\partial}{\partial s_2} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi_2}. \end{aligned} \tag{5.4.21}$$

Esto finaliza la prueba de la proposición. ∎

5.5 Perturbaciones de sistemas modelo

Recordemos que en el Teorema 5.9 se introdujo una clase especial de sistemas dinámicos (5.2.35)-(5.2.38) en dominios toroidales $\mathcal{N} = (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times (\Delta_2 \times \mathbb{S}^1)$ que resultan ser una forma normal de ciertos sistemas Hamiltonianos no-perturbados (5.1.10)-(5.1.13), a través de una transformación gauge exacta $\mathcal{T}$ (5.2.34). Más aún, en el Teorema 5.21 se probó que, bajo ciertas hipótesis, el sistema Hamiltoniano perturbado $\left(M, \Omega_0^{\varepsilon}, H_{\varepsilon}\right)$ (5.1.4)-(5.1.7), considerado como un sistema en dominio $\mathcal{M} \subset M$, se transforma por medio de $\mathcal{T} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, en un sistema Hamiltoniano relativo a una estructura simpléctica deformada $\Omega_{\mathcal{Q}}^{\varepsilon}$ (5.4.1) en $\mathcal{N}$, donde $\Omega_{\mathcal{Q}}^{\varepsilon} = \mathcal{T}_* \Omega_0^{\varepsilon}$, con Ω_0^{ε} la estructura simpléctica no-uniforme (5.3.19). Ver también el Corolario 5.20.

En esta sección, veremos que la estructura de Poisson $\left(\{\,,\}_{\mathcal{Q}}^{\varepsilon}, \mathcal{N}\right)$ introducida en la Proposición 5.25, nos permite investigar el tipo de sistemas que son Hamiltonianos relativos a ese corchete de Poisson. Para ello, fijemos la forma horizontal

$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \mathrm{d}s_1 + \mathcal{Q}_2 \mathrm{d}\varphi_1$ y consideremos la forma simpléctica $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$, con $0 < \varepsilon < \delta_{\mathcal{Q}}$, definida en todo el espacio $\mathcal{N}$ (ver Corolario 5.24). En estas condiciones, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.26 *Sea* $\left(\mathcal{N}, \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}, \widetilde{H}_{\varepsilon}\right)$ *un sistema Hamiltoniano con*

$$\widetilde{H}_{\varepsilon} = \widetilde{H}_0(s_1) + \varepsilon\, \widetilde{H}_1(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) + O(\varepsilon^2). \tag{5.5.1}$$

Entonces la dinámica del sistema Hamiltoniano $\left(\mathcal{N}, \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}, \widetilde{H}_{\varepsilon}\right)$*, cuando* $\varepsilon \to 0$*, es de la forma*

$$\dot{s}_1 \;=\; \{\widetilde{H}_{\varepsilon}, s_1\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} \;=\; O(\varepsilon), \tag{5.5.2}$$

$$\dot{\varphi}_1 \;=\; \{\widetilde{H}_{\varepsilon}, \varphi_1\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} \;=\; \omega(s_1) + O(\varepsilon), \tag{5.5.3}$$

$$\dot{s}_2 \;=\; \{\widetilde{H}_{\varepsilon}, s_2\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} \;=\; O(\varepsilon), \tag{5.5.4}$$

$$\dot{\varphi}_2 \;=\; \{\widetilde{H}_{\varepsilon}, \varphi_2\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} \;=\; \omega_2(s_1, s_2) + O(\varepsilon), \tag{5.5.5}$$

para

$$\omega(s_1) = \frac{\partial \widetilde{H}_0}{\partial s_1}, \tag{5.5.6}$$

y una función $\omega_2 = \omega_2(s_1, s_2)$*, si y sólo si*

$$\widetilde{H}_1 = -\omega_1 \mathcal{Q}_2 \;+\; g(s_1, s_2) \;+\; \chi(s_1, \varphi_1), \tag{5.5.7}$$

donde $g = g(s_1, s_2)$ *y* $\chi = \chi(s_1, \varphi_1)$ *son funciones arbitrarias. En este caso,*

$$\omega_2 = \frac{\partial g}{\partial s_2}. \tag{5.5.8}$$

Demostración. Observemos que de (5.4.12), podemos expresar $\mathcal{F}_{12}$ como

$$\mathcal{F}_{12} = 1 + O(\varepsilon). \tag{5.5.9}$$

De esta expresión y de las relaciones (5.4.17)-(5.4.19) para el corchete de Poisson $\{\, , \}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$, junto con (5.1.2), (5.5.6), se sigue que (5.5.2) y (5.5.3) se cumplen de manera automática.

Por otra parte, para los corchetes $\{\widetilde{H}_{\varepsilon}, s_2\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ y $\{\widetilde{H}_{\varepsilon}, \varphi_2\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ se obtienen, respectivamente, las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\{\widetilde{H}_{\varepsilon}, s_2\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} &= \{s_1, s_2\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} \frac{\partial \widetilde{H}_{\varepsilon}}{\partial s_1} \;+\; \{\varphi_1, s_2\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} \frac{\partial \widetilde{H}_{\varepsilon}}{\partial \varphi_1} \;+\; \{\varphi_2, s_2\}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} \frac{\partial \widetilde{H}_{\varepsilon}}{\partial \varphi_2} \\
&= -\frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} \left[\frac{\partial \widetilde{H}_0}{\partial s_1} + \varepsilon \frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial s_1} \right] \;+\; \varepsilon \frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial \varphi_1} \\
&\quad - \varepsilon \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \right) \right] \frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial \varphi_2} + O(\varepsilon^2) \\
&= -\frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \widetilde{H}_0}{\partial s_1} \;-\; \frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial \varphi_2} \;+\; O(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{5.5.10}$$

$$\begin{aligned}
\{\widetilde{H}_\varepsilon, \varphi_2\}_{\mathcal{Q}}^\varepsilon &= \{s_1, \varphi_2\}_{\mathcal{Q}}^\varepsilon \frac{\partial \widetilde{H}_\varepsilon}{\partial s_1} + \{\varphi_1, \varphi_2\}_{\mathcal{Q}}^\varepsilon \frac{\partial \widetilde{H}_\varepsilon}{\partial \varphi_1} + \{s_2, \varphi_2\}_{\mathcal{Q}}^\varepsilon \frac{\partial \widetilde{H}_\varepsilon}{\partial s_2} + O(\varepsilon^2) \\
&= \frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \left[\frac{\partial \widetilde{H}_0}{\partial s_1} + \varepsilon \frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial s_1} \right] - \varepsilon \frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} \frac{\partial \widetilde{H}_0}{\partial \varphi_1} \\
&\quad + \varepsilon \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \right) \right] \frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial s_2} + O(\varepsilon^2) \\
&= \frac{1}{\mathcal{F}_{12}} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \frac{\partial \widetilde{H}_0}{\partial s_1} + \frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial s_2} + O(\varepsilon). \qquad (5.5.11)
\end{aligned}$$

De esto se sigue que (5.5.4) y (5.5.5) se cumplen si y sólo si

$$\frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial \varphi_2} = -\frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \widetilde{H}_0}{\partial s_1} = -\frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} \omega_1(s_1), \qquad (5.5.12)$$

$$\frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial s_2} = \omega_2 - \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \omega_1. \qquad (5.5.13)$$

En consecuencia, de (5.5.12) se tiene que

$$\widetilde{H}_1 = -\omega_1 \mathcal{Q}_2 + g(s_1, s_2, \varphi_1), \qquad (5.5.14)$$

para alguna función suave $g = g(s_1, s_2, \varphi_1)$, de lo cual se obtiene

$$\frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial s_2} = -\omega_1 \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} + \frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2, \varphi_1). \qquad (5.5.15)$$

Comparando (5.5.15) con (5.5.13) se sigue que

$$\omega_2(s_1, s_2) = \frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2, \varphi_1),$$

y de esta última ecuación se obtiene $\frac{\partial}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\partial g}{\partial s_2}\right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \omega_2 = 0$, por lo que

$$g = g(s_1, s_2) + \chi(s_1, \varphi_1),$$

con lo cual se satisface la condición (5.5.8) para la función ω_2. ■

La Proposición 5.26 que acabamos de demostrar es importante ya que es posible observar que si $\varepsilon = 0$, entonces el sistema (5.5.2)-(5.5.5) toma la forma

$$\dot{s}_1 = 0, \qquad (5.5.16)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega(s_1), \qquad (5.5.17)$$

$$\dot{s}_2 = 0, \qquad (5.5.18)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2(s_1, s_2), \qquad (5.5.19)$$

lo cual nos permite pensar en el sistema (5.5.2)-(5.5.5) como una perturbación del sistema (5.5.16)-(5.5.19), para $\varepsilon \ll 1$, el cual es precisamente el sistema (5.2.35)-(5.2.38), el cual a su vez, es el "*push-forward*" del campo vectorial X_0 bajo la transformación gauge exacta $\mathcal{T}$ (5.2.34), como se probó en el Teorema 5.9. En lo que sigue, vamos a estudiar con más detalle este tipo de sistemas.

5.6 Estructura Hamiltoniana para sistemas de dos frecuencias

En lugar de estudiar el sistema (5.5.16)-(5.5.19), vamos a estudiar una clase de sistemas un poco más generales, aquellos en los que las frecuencias ω_1 y ω_2 dependen ambas de las dos variables s_1 y s_2.

Consideremos el sistema dinámico

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= 0, && (5.6.1)\\ \dot{\varphi}_1 &= \omega_1(s_1, s_2), && (5.6.2)\\ \dot{s}_2 &= 0, && (5.6.3)\\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_2(s_1, s_2), && (5.6.4) \end{aligned}$$

en el espacio fase $D \times \mathbb{T}^2$, donde $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio abierto con coordenadas $(s_1, s_2) \in D$ y $\varphi_1 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$, $\varphi_2 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ son coordenadas cíclicas en el toro $\mathbb{T}^2$. Además, suponemos que $\omega_1 = \omega_1(s_1, s_2)$ y $\omega_2 = \omega_2(s_1, s_2)$ son funciones suaves en D.

El sistema (5.6.1)-(5.6.4) tiene dos integrales de movimiento, a saber, las funciones s_1 y s_2. En efecto, si denotamos por $X_0 = \omega_1 \partial/\partial\varphi_1 + \omega_2 \partial/\partial\varphi_2$ el campo vectorial definido por este sistema, es inmediato verificar que $\mathcal{L}_{X_0}(s_i) = 0$ para $i = 1, 2$. De esto se sigue que el espacio fase $D \times \mathbb{T}^2$ está trivialmente foliado por 2-toros invariantes

$$\mathbb{T}^2_{c_1, c_2} = \{s_1 = c_1, s_2 = c_2\},$$

del sistema (5.6.1)-(5.6.4), en los cuales el movimiento a lo largo de las trayectorias de X_0 es quasi-periódico con frecuencias $\omega_1(s_1, s_2)$ y $\omega_2(s_1, s_2)$.

En general, un sistema de la forma (5.6.1)-(5.6.4) no es Hamiltoniano relativo a la forma simpléctica canónica en $D \times \mathbb{T}^2$,

$$\Omega^{\mathsf{can}} = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2. \tag{5.6.5}$$

Esto se debe a que las frecuencias ω_1 y ω_2 son funciones arbitrarias y no necesariamente satisfacen la condición de compatibilidad

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial s_2} = \frac{\partial \omega_2}{\partial s_1}. \tag{5.6.6}$$

De esta manera, nuestro interés es darle una estructura Hamiltoniana a este tipo de sistemas por medio de lo que hemos llamado estructuras simplécticas deformadas y considerar a los 2-toros $\mathbb{T}^2_{c_1, c_2}$ como toros de Liouville de un sistema Hamiltoniano completamente integrable con dos grados de libertad.

El caso general. Una manera en la que podemos intentar resolver el problema que ahora nos ocupa es tratando de *deformar* la estructura simpléctica canónica (5.6.5) por medio de ciertas funciones $I_1(s_1, s_2)$, $I_2(s_1, s_2)$ definidas en el dominio abierto $D \subset \mathbb{R}^2$. De esta manera, se obtendría una nueva forma simpléctica, la cual nos proporcionaría la estructura Hamiltoniana que buscamos para nuestro sistema. Un resultado en esa dirección es el siguiente.

Proposición 5.27 *Supongamos que el dominio abierto D es simplemente conexo y que existen funciones suaves $I_1 = I_1(s_1, s_2)$, $I_2 = I_2(s_1, s_2)$, definidas en D, las cuales satisfacen las condiciones*

$$\frac{\partial I_1}{\partial s_1}\frac{\partial I_2}{\partial s_2} - \frac{\partial I_1}{\partial s_2}\frac{\partial I_2}{\partial s_1} \neq 0, \tag{5.6.7}$$

y

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial s_1}\frac{\partial I_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial s_2}\frac{\partial I_1}{\partial s_1} = \frac{\partial \omega_2}{\partial s_2}\frac{\partial I_2}{\partial s_1} - \frac{\partial \omega_2}{\partial s_1}\frac{\partial I_2}{\partial s_2}. \tag{5.6.8}$$

Entonces el sistema (5.6.1)-(5.6.4) *es Hamiltoniano en $D \times \mathbb{T}^2$ con respecto a la forma simpléctica*

$$\widetilde{\Omega} = \mathrm{d}I_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \mathrm{d}I_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2, \tag{5.6.9}$$

y la función Hamiltoniana

$$F(s_1, s_2) = \int_\gamma \left(\omega_1 \frac{\partial I_1}{\partial s_1} + \omega_2 \frac{\partial I_2}{\partial s_1}\right) \mathrm{d}s_1 + \left(\omega_1 \frac{\partial I_1}{\partial s_2} + \omega_2 \frac{\partial I_2}{\partial s_2}\right) \mathrm{d}s_2, \tag{5.6.10}$$

donde γ una curva arbitraria suave que une el punto fijo $(s_1^0, s_2^0) \in D$, elegido arbitrariamente, con el punto (s_1, s_2) en D.

Demostración. Primero vamos a probar que $\widetilde{\Omega}$ es una forma simpléctica. En efecto, se tiene que en términos de las coordenadas $(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2)$,

$$\widetilde{\Omega} = \frac{\partial I_1}{\partial s_1}\mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 - \frac{\partial I_1}{\partial s_2}\mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}s_2 + \frac{\partial I_2}{\partial s_1}\mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 + \frac{\partial I_2}{\partial s_2}\mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2, \tag{5.6.11}$$

por lo que es claro que esta 2-forma es cerrada. Asimismo, se sigue directamente de (5.6.11) que la matriz de esta 2-forma es

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial I_1}{\partial s_1} & 0 & \frac{\partial I_2}{\partial s_1} \\ -\frac{\partial I_1}{\partial s_1} & 0 & -\frac{\partial I_1}{\partial s_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial I_1}{\partial s_2} & 0 & \frac{\partial I_2}{\partial s_2} \\ -\frac{\partial I_2}{\partial s_1} & 0 & -\frac{\partial I_2}{\partial s_2} & 0 \end{bmatrix},$$

cuyo determinante viene dado por

$$\rho^2 \equiv \left(\frac{\partial I_1}{\partial s_1}\frac{\partial I_2}{\partial s_2} - \frac{\partial I_1}{\partial s_2}\frac{\partial I_2}{\partial s_1}\right)^2 = \left(\det \begin{bmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial s_1} & \frac{\mathrm{d} I_1}{\mathrm{d} s_2} \\ \frac{\partial I_2}{\partial s_1} & \frac{\partial I_2}{\partial s_2} \end{bmatrix}\right)^2. \tag{5.6.12}$$

Por lo tanto, $\widetilde{\Omega}$ es no-degenerada si y sólo si se cumple la condición (5.6.7).

Por otro lado, el campo vectorial X_0 del sistema (5.6.1)-(5.6.4) es, por definición, Hamiltoniano con respecto la forma simpléctica $\widetilde{\Omega}$ (5.6.9) y a una función suave $F = F(s_1, s_2, \varphi_1, \varphi_2)$ si

$$X_0 \lrcorner \widetilde{\Omega} = -\,\mathrm{d}F. \tag{5.6.13}$$

Luego, usando (5.6.11) se obtiene

$$X_0 \lrcorner \widetilde{\Omega} = -\left(\omega_1 \frac{\partial I_1}{\partial s_1} + \omega_2 \frac{\partial I_2}{\partial s_1}\right) \mathrm{d}s_1 - \left(\omega_1 \frac{\partial I_1}{\partial s_2} + \omega_2 \frac{\partial I_2}{\partial s_2}\right) \mathrm{d}s_2. \tag{5.6.14}$$

Sustituyendo (5.6.14) en (5.6.13) se obtienen las siguientes ecuaciones para F:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} = 0. \tag{5.6.15}$$

$$\frac{\partial F}{\partial s_1} = \omega_1 \frac{\partial I_1}{\partial s_1} + \omega_2 \frac{\partial I_2}{\partial s_1} \tag{5.6.16}$$

$$\frac{\partial F}{\partial s_2} = \omega_1 \frac{\partial I_1}{\partial s_2} + \omega_2 \frac{\partial I_2}{\partial s_2}. \tag{5.6.17}$$

De esta manera, la condición (5.6.13) implica que F es independiente de φ_1 y φ_2, es decir, $F = F(s_1, s_2)$. Por lo tanto, (5.6.16), (5.6.17) se escriben, en el dominio D, en forma de la siguiente ecuación para F:

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial s_1}\mathrm{d}s_1 + \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\mathrm{d}\varphi_1 + \frac{\partial F}{\partial s_2}\mathrm{d}s_2 + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\mathrm{d}\varphi_2, \tag{5.6.18}$$

El lado derecho de (5.6.18) es una forma cerrada si y sólo si se cumple la condición (5.6.8) en D. Tomando en cuenta que D es simplemente conexo, se concluye que la función Hamiltoniana F existe y viene dada por (5.6.10). ■

Observación 5.28 *Notemos que si el dominio D tiene forma de estrella, entonces por el Lema de Poincaré aplicado a la* 1*-forma* $\mathrm{d}F$ (5.6.18)*, se tiene que*

$$\begin{aligned} F(s_1, s_2) = &\ (\omega_1\, I_1 \,+\, \omega_2\, I_2)(s_1 + s_1^0, s_2 + s_2^0) \,-\, (\omega_1\, I_1 \,+\, \omega_2\, I_2)(s_1^0, s_2^0) \\ &- \int_0^1 \Big(I_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, \omega_1 \,+\, I_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, \omega_2\Big)(\tau s_1 + s_1^0, \tau s_2 + s_2^0)\, \mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{5.6.19}$$

Si suponemos además que $(0,0) \in D$ y tomamos $(s_1^0, s_2^0) = (0,0)$, entonces la fórmula para el Hamiltoniano F toma la forma

$$\begin{aligned} F(s_1, s_2) = &\ (\omega_1\, I_1 \,+\, \omega_2\, I_2)(s_1, s_2) \,-\, (\omega_1\, I_1 \,+\, \omega_2\, I_2)(0,0) \\ &- \int_0^1 \Big(I_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, \omega_1 \,+\, I_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, \omega_2\Big)(\tau s_1, \tau s_2)\, \mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{5.6.20}$$

Corolario 5.29 *Si las funciones I_1, I_2 en la* Proposición 5.27 *son tales que $I_1 = s_1$ e $I_2 = s_2$, entonces* (5.6.8) *implica la condición de compatibilidad* (5.6.6).

Observación 5.30 *Si consideremos la función $\mathbb{I}$ definida en D por*

$$\mathbb{I} : (s_1, s_2) \to \big(I_1(s_1, s_2), I_2(s_1, s_2)\big), \tag{5.6.21}$$

se sigue de la condición (5.6.7) *que $\mathbb{I}$ es un difeomorfismo local. Si la función $\mathbb{I}$ es inyectiva se tiene que* (5.6.21) *nos da un cambio de coordenadas y* (5.6.7) *es precisamente el Jacobiano de este cambio de coordenadas.*

La estructura de Poisson en $D \times \mathbb{T}^2$ que induce la forma simpléctica $\widetilde{\Omega}$ (5.6.11) está dada por el tensor de Poisson

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Psi^{ij} \frac{\partial}{\partial z^i} \wedge \frac{\partial}{\partial z^j},$$

donde $\Psi^{ij} = \{z^i, z^j\}$, con $z_1 = s_1$, $z_2 = \varphi_1$,$z_3 = s_2$ y $z_4 = \varphi_2$. La matriz asociada al tensor Ψ es

$$\frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial I_2}{\partial s_2} & 0 & -\frac{\partial I_1}{\partial s_2} \\ -\frac{\partial I_2}{\partial s_2} & 0 & \frac{\partial I_2}{\partial s_1} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial I_2}{\partial s_1} & 0 & \frac{\partial I_1}{\partial s_1} \\ \frac{\partial I_1}{\partial s_2} & 0 & -\frac{\partial I_1}{\partial s_1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.6.22}$$

donde ρ está definido por (5.6.12). Se tiene así el siguiente resultado:

Proposición 5.31 *El corchete de Poisson $\{\,,\}$ que corresponde a la forma simpléctica $\widetilde{\Omega}$ en $D \times \mathbb{T}^2$ está dado por*

$$\{s_1, \varphi_1\} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial I_2}{\partial s_2}, \qquad \{s_1, s_2\} = 0, \qquad \{s_1, \varphi_2\} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial I_1}{\partial s_2}, \tag{5.6.23}$$

$$\{\varphi_1, s_2\} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial I_2}{\partial s_1}, \qquad \{\varphi_1, \varphi_2\} = 0, \qquad \{s_2, \varphi_2\} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial I_1}{\partial s_1}. \tag{5.6.24}$$

Notemos que si $F_1 \overset{\text{def}}{=} s_1$ y $F_2 \overset{\text{def}}{=} s_2$, entonces F_1 y F_2 están en involución ya que $\{F_1, F_2\} = 0$; además, estas funciones son integrales primeras del sistema (5.6.1)-(5.6.4), como ya se había mencionado. De esta manera, el Teorema de Arnold-Liouville nos permite establecer el siguiente resultado:

Proposición 5.32 *El sistema $\big(D \times \mathbb{T}^2, \widetilde{\Omega}, F\big)$ es un sistema Hamiltoniano completamente integrable por lo que la variedad $D \times \mathbb{T}^2$ está foliada por toros de Liouville*

$$\mathbb{T}^2_{c_1,c_2} = \{(s_1, s_2, \varphi_1, \varphi_2) \in D \times \mathbb{T}^2 \mid F_1 = c_1, F_2 = c_2\}.$$

Si la transformación $\mathbb{I}$ *en* (5.6.21) *es inyectiva, entonces las funciones coordenadas* I_1, I_2, φ_1, φ_2 *son las variables acción-ángulo. Más aún, las variables acción* I_1 *e* I_2 *están determinadas por las fórmulas*

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_1} \alpha, \qquad I_2 = \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_2} \alpha,$$

donde $\gamma_1 = \gamma_2(c_1, c_2)$, $\gamma_2 = \gamma_2(c_1, c_2)$ *son* 1*-ciclos fundamentales en* $\mathbb{T}^2_{c_1,c_2}$ *y la* 1*-forma* $\alpha = I_1\,\mathrm{d}\varphi_1 + I_2\,\mathrm{d}\varphi_2$ *definida en una vecindad de* $\mathbb{T}^2_{c_1,c_2}$*, satisface* $\widetilde{\Omega} = \mathrm{d}\alpha$.

El caso de la dinámica proyectable. En esta parte mostraremos que es posible, bajo algunas hipótesis adicionales, obtener de forma explícita las funciones I_1 e I_2, introducidas en el estudio del sistema (5.6.1)-(5.6.4). En ese contexto, supusimos que las frecuencias ω_1 y ω_2 eran funciones que dependían de las variables s_1 y s_2. Una primera hipótesis que imponemos ahora es la siguiente:

$$\omega_1 = \omega_1(s_1). \tag{5.6.25}$$

En consecuencia, el sistema (5.6.1)-(5.6.4) toma la forma

$$\dot{s}_1 = 0, \tag{5.6.26}$$
$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(s_1), \tag{5.6.27}$$
$$\dot{s}_2 = 0, \tag{5.6.28}$$
$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2(s_1, s_2). \tag{5.6.29}$$

Vamos a suponer, además, que el espacio fase es $D \times \mathbb{T}^2$ es tal que

$$D = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset \mathbb{R}^2,$$

con Δ_1 y Δ_2 intervalos abiertos de $\mathbb{R}$. Una hipótesis adicional es que las funciones $\omega_1 = \omega_1(s_1)$ y $\omega_2 = \omega_2(s_1, s_2)$ son suaves en D, con $s_1 \in \Delta_1$ y $s_2 \in \Delta_2$.

Reconocemos el sistema (5.6.26)-(5.6.29) como el sistema (5.2.35)-(5.2.38), el cual es el resultado de aplicar la transformación $\mathcal{T}$ (5.2.34) al sistema dinámico no-perturbado (5.1.10)-(5.1.13), (ver Teorema 5.9).

De esta observación se sigue que el sistema (5.6.26)-(5.6.29) es un sistema dinámico proyectable al identificar el espacio fase $D \times \mathbb{T}^2$ con el dominio toroidal simple $(\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times (\Delta_2 \times \mathbb{S}^1)$. El campo vectorial X_0 del sistema (5.6.26)-(5.6.29) se proyecta al campo

$$v_f = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1}$$

sobre la base $\Delta_1 \times \mathbb{S}^1$, donde $f = f(s_1)$ es una función suave que satisface

$$f'(s_1) = \omega_1(s_1). \tag{5.6.30}$$

Supongamos, además, que la función ω_1 satisface la condición

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial s_1} \neq 0, \qquad \forall\, s_1 \in \Delta_1. \tag{5.6.31}$$

En este caso es posible calcular de manera explícita las variables *deformadas* I_1, I_2. En efecto, la ecuación (5.6.8) toma la forma

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial s_1}\frac{\partial I_1}{\partial s_2} = \frac{\partial \omega_2}{\partial s_2}\frac{\partial I_2}{\partial s_1} - \frac{\partial \omega_2}{\partial s_1}\frac{\partial I_2}{\partial s_2}, \tag{5.6.32}$$

lo cual nos lleva a formular una hipótesis obvia para tratar de simplificar esta ecuación: la función coordenada I_2 sólo depende de la variable s_2; esto es, podemos suponer que

$$I_2 = \zeta(s_2). \tag{5.6.33}$$

donde $\zeta : \Delta_2 \to \mathbb{R}$ es una función arbitraria suave de s_2. De esta manera, de (5.6.32) se obtiene

$$\omega_1'(s_1)\frac{\partial I_1}{\partial s_2} = -\frac{\partial \omega_2}{\partial s_1}(s_1, s_2)\,\zeta'(s_2), \tag{5.6.34}$$

por lo que

$$I_1(s_1, s_2) = -\frac{1}{\omega_1'(s_1)}\int_{s_2^0}^{s_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial s_1}(s_1, \widetilde{s}_2)\;\zeta'(\widetilde{s}_2)\,\mathrm{d}\widetilde{s}_2 \;+\; I_1^0(s_1), \tag{5.6.35}$$

con s_2^0 un punto arbitrario fijo en Δ_2 y donde $I_1^0 : \Delta_1 \to \mathbb{R}$ es una función arbitraria de s_1.

Esta discusión nos permite establecer el siguiente resultado.

Proposición 5.33 *Supongamos que la función ω_1 satisface* (5.6.25) *y* (5.6.31). *Entonces las funciones*

$$I_1(s_1, s_2) = -\frac{1}{\omega_1'(s_1)}\int_{s_2^0}^{s_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial s_1}(s_1, \widetilde{s}_2)\;\zeta'(\widetilde{s}_2)\,\mathrm{d}\widetilde{s}_2 \;+\; I_1^0(s_1), \tag{5.6.36}$$

$$I_2(s_2) = \zeta(s_2), \tag{5.6.37}$$

son soluciones de (5.6.8). *Además, la condición de no-degeneración* (5.6.7) *toma la forma*

$$\frac{\partial I_1}{\partial s_1}(s_1, s_2)\,\zeta'(s_2) \neq 0, \tag{5.6.38}$$

para todo $s_1 \in \Delta_1$ y para todo $s_2 \in \Delta_2$. En este caso, la transformación $\mathbb{I}$ (5.6.21) *es un difeomorfismo en D.*

Ahora, adicionalmente a las hipótesis (5.6.25) y (5.6.31) hechas con respecto a ω_1 en la Proposición 5.33, supongamos también que ω_2 depende solamente de $s_1 \in \Delta_1$:

$$\omega_2 = \omega_2(s_1). \tag{5.6.39}$$

En este caso, si tomamos I_2 como en (5.6.37), entonces es posible evaluar la integral en (5.6.36) y se obtiene

$$I_1 = -\frac{1}{\omega_1'(s_1)} \int_{s_2^0}^{s_2} \omega_2'(s_1)\, \zeta'(\widetilde{s}_2)\, d\widetilde{s}_2 \;+\; I_1^0(s_1) = -\frac{\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)}\, \zeta(\widetilde{s}_2)\Big|_{s_2^0}^{s_2} \;+\; I_1^0(s_1)$$

$$= -\frac{\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)}\, \zeta(s_2) \;+\; \frac{\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)}\, \zeta(s_2^0) \;+\; I_1^0(s_1).$$

Esto nos permite definir la función I_1^0 de manera que podamos simplificar la expresión para I_1: Si hacemos $I_1^0(s_1) \stackrel{\text{def}}{=} s_1 - \dfrac{\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)}\, \zeta(s_2^0)$, se obtiene finalmente,

$$I_1(s_1, s_2) = s_1 - \frac{\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)}\, \zeta(s_2). \tag{5.6.40}$$

Podemos resumir esta discusión de la siguiente manera:

Corolario 5.34 *Si las frecuencias ω_1, ω_2 sólo dependen de s_1, esto es, cumplen* (5.6.25) *y* (5.6.39) *y además, ω_1 satisface* (5.6.31), *entonces las funciones*

$$I_1(s_1, s_2) = s_1 - \frac{\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)}\, \zeta(s_2), \tag{5.6.41}$$

$$I_2(s_2) = \zeta(s_2), \tag{5.6.42}$$

son soluciones de la ecuación (5.6.8) *y la condición de no-degeneración* (5.6.7) *toma la forma*

$$\frac{\partial I_1(s_1, s_2)}{\partial s_1}\, \zeta'(s_2) = \left[1 - \frac{\omega_1'(s_1)\omega_2''(s_1) - \omega_2'(s_1)\omega_1''(s_1)}{[\omega_1'(s_1)]^2}\, \zeta(s_2)\right] \zeta'(s_2) \neq 0.$$

Estructuras Hamiltonianas que dependen de un parámetro. En esta parte probaremos que el sistema (5.6.26)-(5.6.29) es Hamiltoniano con respecto a una estructura simpléctica que depende de un parámetro $\varepsilon > 0$, la cual puede considerarse como un *reescalamiento* de la forma simpléctica $\widetilde{\Omega}$ (5.6.9).

Por otro lado, una observación interesante es que la *nueva* forma simpléctica reescalada coincide con la estructura simpléctica deformada $\Omega_{\mathcal{Q}}^{\varepsilon}$ (5.4.1) para una forma horizontal $\mathcal{Q}$, la cual ya estudiamos en la Sección 5.4.

La principal ventaja de suponer que la frecuencia ω_1 depende sólo de la variable s_1 es que nos da cierta libertad con respecto a las función coordenada I_2, lo cual nos permite introducir la hipótesis (5.6.33), y así poder obtener soluciones explícitas de la ecuación (5.6.8).

En particular, uno puede definir de manera conveniente la función ζ en (5.6.33) e introducir un parámetro ε que nos definirá una familia parametrizada de soluciones I_1, I_2 (reescalamiento) de la ecuación (5.6.8). A su vez, estas soluciones nos definen, por medio de (5.6.9), formas simplécticas parametrizadas, las cuales podemos ver como estructuras simplécticas deformadas en el sentido de las estudiadas en la Sección 5.4.

En este caso, veremos que es posible relacionar las estructuras $\widetilde{\Omega}$ y $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$, para una 1-forma horizontal particular $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1\, \mathrm{d}s_1 + \mathcal{Q}_2\, \mathrm{d}\varphi_1$.

De esta manera, supongamos que se cumplen (5.6.25), (5.6.31) y que la función coordenada I_2 en (5.6.33) es de la forma

$$I_2(s_2) = \varepsilon s_2, \tag{5.6.43}$$

para un parámetro $\varepsilon > 0$. Luego, la ecuación (5.6.34) se escribe como

$$\omega_1'(s_1)\frac{\partial I_1}{\partial s_2} = -\varepsilon\,\frac{\partial \omega_2}{\partial s_1}(s_1, s_2), \tag{5.6.44}$$

la cual podemos integrar y se obtiene la siguiente expresión para I_1:

$$I_1(s_1, s_2) = -\frac{\varepsilon}{\omega_1'(s_1)}\int_{s_2^0}^{s_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial s_1}(s_1, \widetilde{s}_2)\,\mathrm{d}\widetilde{s}_2 \;+\; I_1^0(s_1). \tag{5.6.45}$$

Se tiene así el siguiente resultado.

Proposición 5.35 *Si ω_1 satisface* (5.6.25) *y* (5.6.31)*, entonces las funciones*

$$I_1(s_1, s_2) = -\frac{\varepsilon}{\omega_1'(s_1)}\int_{s_2^0}^{s_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial s_1}(s_1, \widetilde{s}_2)\,\mathrm{d}\widetilde{s}_2 \;+\; I_1^0(s_1), \tag{5.6.46}$$

$$I_2(s_2) = \varepsilon s_2, \tag{5.6.47}$$

son soluciones de (5.6.8)*. Además, como $\varepsilon > 0$, la condición de no-degeneración* (5.6.7) *toma la forma*

$$\frac{\partial I_1(s_1, s_2)}{\partial s_1} \neq 0. \tag{5.6.48}$$

para todo $s_1 \in \Delta_1$, $s_2 \in \Delta_2$. En este caso, la transformación $\mathbb{I}$ (5.6.21) *es un difeomorfismo en D.*

Recordemos, una vez más, las dos hipótesis que hemos hecho con respecto a la función ω_1, a saber, que sólo depende de la variable s_1 (5.6.25) y que no se anula en el intervalo Δ_1 (5.6.31). Además, introducimos la función $f = f(s_1)$ la cual satisface $f'(s_1) = \omega_1(s_1)$ (5.6.30).

Sea $h = h(s_1, s_2)$ la función definida en $D = \Delta_1 \times \Delta_2$ por

$$h(s_1, s_2) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \int_{s_2^0}^{s_2}\omega_2(s_1, \widetilde{s}_2)\,\mathrm{d}\widetilde{s}_2, \tag{5.6.49}$$

donde s_2^0 es un punto arbitrario, pero fijo, en Δ_2. Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente resultado.

Teorema 5.36 *Sea $h = h(s_1, s_2)$ la función definida por* (5.6.49) *y supongamos que es suave en $\overline{\Delta}_1 \times \overline{\Delta}_2$. Sea $f = f(s_1)$ una función suave que cumple* (5.6.30).

(a) *Si ω_1 es suave en $\overline{\Delta}_1$ y satisface* (5.6.25) *y* (5.6.31), *entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada ε con $0 < \varepsilon < \delta$, el sistema* (5.6.26)-(5.6.29) *es Hamiltoniano en $D \times \mathbb{T}^2$ con respecto a la forma simpléctica*

$$\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 \,+\, \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 \,-\, \varepsilon\, \mathrm{d}\mathcal{Q}, \tag{5.6.50}$$

con

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{\omega_1'} \frac{\partial h}{\partial s_1}\, \mathrm{d}\varphi_1, \tag{5.6.51}$$

y función Hamiltoniana

$$F_\varepsilon(s_1, s_2) = f(s_1) \,+\, \varepsilon \left[h(s_1, s_2) - \frac{\omega_1(s_1)}{\omega_1'(s_1)} \frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, s_2) \right]. \tag{5.6.52}$$

(b) *El sistema Hamiltoniano $\left(M, \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}, F_\varepsilon\right)$ es completamente integrable y las funciones $F_1 = s_1$ y $F_2 = s_2$ son integrales de movimiento del sistema* (5.6.26)-(5.6.29) *por lo que el espacio fase $D \times \mathbb{T}^2$ está foliado por 2-toros de Liouville*

$$\mathbb{T}^2_{c_1, c_2} = \left\{ (s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) \in M \;\middle|\; F_1 = c_1,\ F_2 = c_2 \right\},$$

en los cuales el movimiento es quasi-periódico.

Demostración. De las Proposiciones 5.27 y 5.35 sabemos que el sistema (5.6.26)-(5.6.29) es Hamiltoniano con respecto a la forma simpléctica (5.6.9),

$$\widetilde{\Omega} = \mathrm{d}I_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \mathrm{d}I_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2$$

y función Hamiltoniana $F(s_1, s_2)$ (5.6.10). Esto nos lleva a probar, en primer lugar, que $\widetilde{\Omega}$ coincide con la forma simpléctica $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$. Enseguida mostramos que la función Hamiltoniana F en (5.6.10) coincide con F_ε (5.6.52).

Sea I_2 como en (5.6.43) (reescalamiento por medio de ε). Si tomamos $I_1^0(s_1) \stackrel{\text{def}}{=} s_1$, entonces la función I_1 en (5.6.46) toma la forma

$$I_1(s_1, s_2) = -\frac{\varepsilon}{\omega_1'(s_1)} \frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, s_2) + s_1, \tag{5.6.53}$$

y la condición de no degeneración (5.6.48) se escribe como

$$\frac{\varepsilon}{\omega_1'(s_1)} \frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, s_2) \neq s_1.$$

Luego, si tomamos

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\substack{s_1 \in \overline{\Delta}_1, \\ s_2 \in \overline{\Delta}_2}} \left| \frac{\omega_1'(s_1)\, s_1}{\frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, s_2)} \right|, \tag{5.6.54}$$

se sigue que la condición de no-degeneración se cumple para todo ε que satisface $0 < \varepsilon < \delta$. En este caso, la forma $\widetilde{\Omega}$ (5.6.9) es no-degenerada. Más aún, de la expresión (5.6.11) para la forma simpléctica $\widetilde{\Omega}$, se sigue por un cálculo directo que

$$\widetilde{\Omega} = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 + \mathrm{d}(g\, \mathrm{d}\varphi_1), \tag{5.6.55}$$

donde

$$g(s_1, s_2) = -\frac{\varepsilon}{\omega_1'} \frac{\partial h}{\partial s_1}. \tag{5.6.56}$$

Por lo tanto, tomando $\mathcal{Q} = \dfrac{1}{\omega_1'} \dfrac{\partial h}{\partial s_1} \mathrm{d}\varphi_1$ se obtiene (5.6.51) y se sigue de (5.6.50) que

$$\widetilde{\Omega} = \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}. \tag{5.6.57}$$

Calculemos ahora el Hamiltoniano F_ε. De la fórmula (5.6.18) para $\mathrm{d}F$ y de las expresiones para I_1, I_2, g y h se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F_\varepsilon &= \left(\omega_1 \frac{\partial I_1}{\partial s_1} + \omega_2 \frac{\partial I_2}{\partial s_1}\right) \mathrm{d}s_1 + \left(\omega_1 \frac{\partial I_1}{\partial s_2} + \omega_2 \frac{\partial I_2}{\partial s_2}\right) \mathrm{d}s_2 \\
&= \omega_1 \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} + 1\right) \mathrm{d}s_1 + \omega_1 \frac{\partial g}{\partial s_2}\, \mathrm{d}s_2 + \varepsilon\, \omega_2\, \mathrm{d}s_2 = \mathrm{d}f + \omega_1 \mathrm{d}g + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial s_2} \mathrm{d}s_2 \\
&= \mathrm{d}f + \mathrm{d}(\omega_1 g) + \varepsilon \left(\frac{\partial h}{\partial s_1} \mathrm{d}s_1 + \frac{\partial h}{\partial s_2} \mathrm{d}s_2\right) = \mathrm{d}(f + \varepsilon h + \omega_1 g).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F_\varepsilon = f + \varepsilon h - \varepsilon \frac{\omega_1}{\omega_1'} \frac{\partial h}{\partial s_1},$$

de donde se sigue (5.6.52). Esto concluye la prueba del teorema. ■

Observación 5.37 *Todas las estructuras Hamiltonianas para el sistema* (5.6.26)*-*(5.6.29) *se pueden obtener por medio de una combinación del Teorema* 5.36 *y de los resultados de* [10].

Ahora, al igual que lo hicimos en la subsección anterior, además de las hipótesis (5.6.25) y (5.6.31) para la frecuencia ω_1, suponemos nuevamente que ω_2 sólo depende de la variable s_1:

$$\omega_2 = \omega_2(s_1). \tag{5.6.58}$$

Más aún, si suponemos que I_2 es de la forma (5.6.43), entonces I_1 viene dada por la integral en (5.6.46) y realizando los cálculos necesarios se obtiene

$$I_1(s_1, s_2) = -\varepsilon \frac{\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)} \tilde{s}_2 \Big|_{s_2^0}^{s_2} + \varepsilon I_1^0(s_1) = -\varepsilon \frac{\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)} s_2 + \varepsilon \frac{\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)} s_2^0 + I_1^0(s_1).$$

Luego, si definimos $I_1^0(s_1) \stackrel{\text{def}}{=} s_1 - \varepsilon\,\dfrac{\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)}\,s_2^0$, se tiene que I_1 viene dada en los siguientes términos:

$$I_1(s_1,s_2) = s_1 - \varepsilon\,\frac{\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)}\,s_2. \tag{5.6.59}$$

Además, tenemos

$$I_2(s_2) = \varepsilon s_2, \tag{5.6.60}$$

y se sigue que I_1 e I_2 en (5.6.59), (5.6.60), son soluciones de la ecuación (5.6.8). En este caso, la función h en (5.6.49) está dada por

$$h(s_1,s_2) = \omega_2(s_1)s_2,$$

y podemos tomar δ en (5.6.54) como

$$\delta = \max_{\substack{s_1\in\overline{\Delta}_1,\\ s_2\in\overline{\Delta}_2}} \left|\frac{\omega_1'(s_1)\,s_1}{\omega_2'(s_1)\,s_2}\right|.$$

Así, la forma $\widetilde{\Omega}$ es simpléctica y de (5.6.11) se sigue que

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega} &= \left(1-\varepsilon\,\frac{\omega_1'\omega_2''-\omega_1''\omega_2'}{\left[\omega_1'\right]^2}\,s_2\right)\mathrm{d}s_1\wedge\mathrm{d}\varphi_1 \;-\; \varepsilon\,\frac{\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)}\,\mathrm{d}s_2\wedge\mathrm{d}\varphi_1 \;+\; \varepsilon\,\mathrm{d}s_2\wedge\mathrm{d}\varphi_2\\ &= \mathrm{d}s_1\wedge\mathrm{d}\varphi_1+\varepsilon\,\mathrm{d}s_2\wedge\mathrm{d}\varphi_2-\varepsilon\,\mathrm{d}\left[\frac{\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)}\,s_2\,\mathrm{d}\varphi_1\right].\end{aligned}$$

De esta discusión se sigue fácilmente el siguiente resultado.

Corolario 5.38 *Supongamos que se satisfacen las hipótesis del Teorema* 5.36. *Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada ε con $0 < \varepsilon < \delta$, el sistema* (5.6.26)-(5.6.29) *es Hamiltoniano en $D \times \mathbb{T}^2$ relativo a la forma simpléctica*

$$\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} = \mathrm{d}s_1\wedge\mathrm{d}\varphi_1 \;+\; \varepsilon\,\mathrm{d}s_2\wedge\mathrm{d}\varphi_2 \;-\; \varepsilon\,\mathrm{d}\mathcal{Q}, \tag{5.6.61}$$

con

$$\mathcal{Q} = \frac{\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)}\,s_2\,\mathrm{d}\varphi_1, \tag{5.6.62}$$

y a la función

$$F_\varepsilon(s_1,s_2) = f(s_1) \;+\; \varepsilon\left[\frac{\omega_2(s_1)\omega_1'(s_1)\;-\;\omega_1(s_1)\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)}\right]s_2.$$

Observación 5.39 *Consideremos la transformación $\Xi_\varepsilon : \Delta_1\times\mathbb{S}^1\times\Delta_2\times\mathbb{S}^1 \to \Delta_1(\varepsilon)\times\mathbb{S}^1\times\Delta_2\times\mathbb{S}^1$ definida por*

$$\Xi_\varepsilon(s_1,\varphi_1,s_2,\varphi_2) \stackrel{\text{def}}{=} \left(s_1-\frac{\varepsilon}{\omega_1'(s_1)}\frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1,s_2),\varphi_1,s_2,\varphi_2\right). \tag{5.6.63}$$

Notemos que $\Delta_1(\varepsilon)$ *es un intervalo abierto en* $\mathbb{R}$*, tal que* $s_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_1'(s_1)}\frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, s_2) \in \Delta_1(\varepsilon)$*. Se tiene así que* Ξ_ε *es una función suave; además, para* $0 < \varepsilon < \delta$*, la transformación* Ξ_ε *es un difeomorfismo en su imagen, con inversa dada por*

$$\Xi_\varepsilon^{-1}(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) = \big(S(s_1, s_2, \varepsilon), \varphi_1, s_2, \varphi_2\big), \tag{5.6.64}$$

donde $S = S(s_1, s_2, \varepsilon)$ *es solución de la ecuación*

$$s_1 = S - \frac{\varepsilon}{\omega_1'(S)}\frac{\partial h}{\partial s_1}(S, s_2).$$

Notemos que si $\varepsilon \to 0$*, se tiene lo siguiente*

$$S = s_1 + \frac{\varepsilon}{\omega_1'(s_1)}\frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, s_2) + O(\varepsilon^2). \tag{5.6.65}$$

Considere las estructuras simplécticas Ω_0^ε *y* $\Omega_{\mathcal{Q}}^\varepsilon$ *donde* $\mathcal{Q}$ *está dada por* (5.6.51)*. Directamente de* (5.6.57) *y de las fórmulas para* I_1*,* I_2 *en la Proposición* 5.35 *se obtiene*

$$\Xi_\varepsilon^{*}\Omega_0^\varepsilon = \Omega_{\mathcal{Q}}^\varepsilon, \tag{5.6.66}$$

o equivalentemente,

$$\big(\Xi_\varepsilon^{-1}\big)^{*}\Omega_{\mathcal{Q}}^\varepsilon = \Omega_0^\varepsilon, \tag{5.6.67}$$

Teorema 5.40 *El* "pull-back" *del sistema bajo* Ξ_ε^{-1} *es de la forma*

$$\dot{s}_1 = 0, \qquad \dot{s}_2 = 0, \tag{5.6.68}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1\big(S(s_1, s_2, \varepsilon)\big), \tag{5.6.69}$$

y este sistema es Hamiltoniano con respecto a la forma simpléctica Ω_0^ε *y la función*

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_\varepsilon \equiv F_\varepsilon \circ \Xi_\varepsilon^{-1} &= F_\varepsilon\big(S(s_1, s_2, \varepsilon), s_2\big)\\ &= f\big(S(s_1, s_2, \varepsilon)\big)\\ &\quad + \varepsilon\left[h\big(S(s_1, s_2, \varepsilon), s_2\big) + \big(s_1 - S(s_1, s_2, \varepsilon)\big)\omega_1\big(S(s_1, s_2, \varepsilon)\big)\right].\end{aligned} \tag{5.6.70}$$

Más aún, el sistema $\big(\Omega_0^\varepsilon, F_\varepsilon \circ \Xi_\varepsilon^{-1}\big)$ *es un sistema completamente integrable que posee movimiento quasi-periódico en los toros de la folición con frecuencias* ω_1 *y* ω_2*.*

Notemos que usando la propiedad (5.6.65), de la fórmula (5.6.70) se obtiene

$$F_\varepsilon \circ \Xi_\varepsilon^{-1} = f(s_1) + \varepsilon\, h(s_1, s_2) + O(\varepsilon^2). \tag{5.6.71}$$

5.7 Isomorfismo entre $\mathcal{Q}$-formas simplécticas

Las estructuras simplécticas que hemos introducido hasta ahora en este capítulo, han sido de los siguientes tipos:

(a) Estructuras simplécticas no-uniformes $\Omega_0^\varepsilon = \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\varphi + \varepsilon \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$ (5.1.1) en el espacio fase $M = (\Delta \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}^2$ con coordenadas $(s, \varphi(\mathrm{mod}\, 2\pi), p, q)$.

(b) Estructuras simplécticas no-uniformes $\widetilde{\Omega}_0^\varepsilon = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2$ (5.4.4) en dominios toroidales que son de la forma $\mathcal{N} = (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times (\Delta_2 \times \mathbb{S}^1)$, con coordenadas $(s_1, \varphi_1(\mathrm{mod}\, 2\pi), s_2, \varphi_2(\mathrm{mod}\, 2\pi))$.

(c) Estructuras simplécticas deformadas $\Omega_{\mathcal{Q}}^\varepsilon = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 - \varepsilon\, \mathrm{d}\mathcal{Q}$ (5.4.1) en $\mathcal{N}$, parametrizadas por una forma horizontal $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \mathrm{d}s_1 + \mathcal{Q}_2 \mathrm{d}\varphi_1$.

(d) Estructuras simplécticas deformadas $\widetilde{\Omega} = \mathrm{d}I_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \mathrm{d}I_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2$ (5.6.9) en un espacio fase de la forma $D \times \mathbb{T}^2$, con $I_1 = I_1(s_1, s_2)$, $I_2 = I_1(s_1, s_2)$ funciones suaves en un dominio abierto, conexo y simplemente conexo $D \subset \mathbb{R}^2$.

A lo largo del capítulo hemos probado algunas relaciones entre estas formas simplécticas, que vienen a ser relevantes para el tipo de sistemas dinámicos que estudiamos. Así, en el Corolario 5.20 se prueba que $\Omega_{\widetilde{\mathcal{Q}}}^\varepsilon = \mathcal{T}_* \Omega_0^\varepsilon$, para una transformación gauge exacta $\mathcal{T} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, donde $\Omega_{\widetilde{\mathcal{Q}}}^\varepsilon = \Omega_{\mathcal{Q}}^\varepsilon$ en $\mathcal{N}$, con $\widetilde{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}$. También se prueba en el Teorema 5.36 que para una elección particular de las funciones I_1 e I_2 en (d) y una 1-forma horizontal particular $\mathcal{Q}$, la estructura simpléctica $\widetilde{\Omega}$ coincide con $\Omega_{\mathcal{Q}}^\varepsilon$.

Ahora estamos interesados en probar que las estructuras simplécticas $\widetilde{\Omega}_0^\varepsilon$ y $\Omega_{\mathcal{Q}}^\varepsilon$ son isomorfas. Para ello utilizaremos el método de homotopía de Moser, ya descrito en el Capítulo 4.

De esta manera, sea $\mathcal{N} = (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times (\Delta_2 \times \mathbb{S}^1)$ un dominio toroidal con coordenadas $(s_1, \varphi_1(\mathrm{mod}\, 2\pi), s_2, \varphi_2(\mathrm{mod}\, 2\pi))$ y supongamos que $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_i(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2)$ y $\widetilde{\mathcal{Q}}_i = \widetilde{\mathcal{Q}}_i(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2)$ $(i = 1, 2)$ son funciones suaves en $\mathcal{N}$ que definen las 1-formas horizontales

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1\, \mathrm{d}s_1 + \mathcal{Q}_2\, \mathrm{d}\varphi_1, \qquad \widetilde{\mathcal{Q}} = \widetilde{\mathcal{Q}}_1\, \mathrm{d}s_1 + \widetilde{\mathcal{Q}}_2\, \mathrm{d}\varphi_1. \tag{5.7.1}$$

Dadas las estructuras simpécticas

$$\Omega_{\mathcal{Q}}^\varepsilon = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 - \varepsilon\, \mathrm{d}\mathcal{Q}, \tag{5.7.2}$$

$$\Omega_{\widetilde{\mathcal{Q}}}^\varepsilon = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 - \varepsilon \mathrm{d}\widetilde{\mathcal{Q}}. \tag{5.7.3}$$

en $\mathcal{N}$, vamos a probar que son isomorfas, es decir, existe un difeomorfismo $\Phi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ tal que

$$\Phi^* \Omega_{\mathcal{Q}}^\varepsilon = \Omega_{\widetilde{\mathcal{Q}}}^\varepsilon. \tag{5.7.4}$$

Consideremos la familia de 2-formas parametrizadas por $\lambda \in [0,1]$,

$$\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^{\lambda}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 - \varepsilon\, \mathrm{d}\mathcal{Q}^{\lambda}, \tag{5.7.5}$$

donde

$$\mathcal{Q}^{\lambda} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lambda \mathcal{Q} + (1-\lambda)\widetilde{\mathcal{Q}}. \tag{5.7.6}$$

Se tiene que

$$\mathcal{Q}^{\lambda} = \left[\lambda \mathcal{Q}_1 + (1-\lambda)\widetilde{\mathcal{Q}}_1\right] \mathrm{d}s_1 + \left[\lambda \mathcal{Q}_2 + (1-\lambda)\widetilde{\mathcal{Q}}_2\right] \mathrm{d}\varphi_1,$$

es una 1-forma horizontal y de esta expresión se sigue que (5.7.5) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^{\lambda}} = {} & \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 - \varepsilon\, \mathrm{d}\left[\lambda \mathcal{Q}_1 + (1-\lambda)\widetilde{\mathcal{Q}}_1\right] \mathrm{d}s_1 \\ & - \varepsilon\, \mathrm{d}\left[\lambda \mathcal{Q}_2 + (1-\lambda)\widetilde{\mathcal{Q}}_2\right] \mathrm{d}\varphi_1. \end{aligned} \tag{5.7.7}$$

Así, para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ en (5.7.7), se obtienen, respectivamente, las identidades

$$\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^{0}} \equiv \Omega^{\varepsilon}_{\widetilde{\mathcal{Q}}}, \qquad \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^{1}} \equiv \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}, \tag{5.7.8}$$

por lo que la familia de 2-formas $\{\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^{\lambda}}\}_{\lambda \in [0,1]}$ nos proporciona una *trayectoria suave* entre las formas simplécticas $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ y $\Omega^{\varepsilon}_{\widetilde{\mathcal{Q}}}$ en $\mathcal{N}$. Sin embargo, es necesario probar que las 2-formas $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^{\lambda}}$ son también simplécticas para cada $\lambda \in [0,1]$.

Además, recordemos (ver Capítulo 4) que para demostrar (5.7.4) es necesario encontrar, para cada $\lambda \in [0,1]$, un campo vectorial dependiente del tiempo, $Z^{\varepsilon}_{\lambda}$ en $\mathcal{N}$, que satisfaga la ecuación homológica

$$\mathcal{L}_{Z^{\varepsilon}_{\lambda}} \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^{\lambda}} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^{\lambda}} = 0. \tag{5.7.9}$$

Si denotamos por $\Phi^{\lambda,\varepsilon}$ el flujo del campo vectorial $Z^{\varepsilon}_{\lambda}$, entonces $\Phi^{0,\varepsilon} = \mathrm{id}$ y se cumple

$$\left(\Phi^{\lambda,\varepsilon}\right)^{*} \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^{\lambda}} = \Omega^{\varepsilon}_{\widetilde{\mathcal{Q}}}, \qquad \forall\, \lambda \in [0,1]. \tag{5.7.10}$$

Por lo tanto, el flujo a tiempo 1, $\Phi^{1,\varepsilon}$, nos da el isomorfismo en (5.7.4).

El método de homotopía. Primera etapa. Vamos a probar que la familia de 2-formas en (5.7.5) representa a una familia de formas simplécticas, es decir, para cada $\lambda \in [0,1]$, la 2-forma $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^{\lambda}}$ es no-degenerada.

Si escribimos (5.7.5) en términos explícitos se obtiene

$$
\begin{aligned}
\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^\lambda} = & \left[1 - \varepsilon\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial s_1} - \frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial \varphi_1}\right) - \varepsilon\lambda\left(\frac{\partial G_2}{\partial s_1} - \frac{\partial G_1}{\partial \varphi_1}\right)\right] \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 \\
& + \varepsilon\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial s_2} + \lambda\frac{\partial G_1}{\partial s_2}\right) \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}s_2 + \varepsilon\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial \varphi_2} + \lambda\frac{\partial G_1}{\partial \varphi_2}\right) \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 \\
& + \varepsilon\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial s_2} + \lambda\frac{\partial G_2}{\partial s_2}\right) \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}s_2 + \varepsilon\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial \varphi_2} + \lambda\frac{\partial G_2}{\partial \varphi_2}\right) \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 \\
& + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2, \qquad (5.7.11)
\end{aligned}
$$

donde las funciones G_1 y G_2 están dadas por

$$
G_1 = \mathcal{Q}_1 - \widetilde{\mathcal{Q}}_1 \qquad \text{y} \qquad G_2 = \mathcal{Q}_2 - \widetilde{\mathcal{Q}}_2. \qquad (5.7.12)
$$

De la expresión (5.7.11) se obtiene la matriz que representa localmente a la forma $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^\lambda}$, cuyo determinante nos daría la información necesaria para saber si esta forma es no-degenerada. Sin embargo, es mucho más fácil calcular tal determinante si expresamos la forma $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^\lambda}$ en una base local más adecuada, por lo que procederemos de una forma análoga a como se hizo en la Sección 5.4. Para ello, definimos los campos vectoriales horizontales

$$
\mathrm{hor}^\lambda_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial s_1} - \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial \varphi_2} + \lambda\frac{\partial G_1}{\partial \varphi_2}\right)\frac{\partial}{\partial s_2} + \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial s_2} + \lambda\frac{\partial G_1}{\partial s_2}\right)\frac{\partial}{\partial \varphi_2}, \qquad (5.7.13)
$$

$$
\mathrm{hor}^\lambda_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial \varphi_2} + \lambda\frac{\partial G_2}{\partial \varphi_2}\right)\frac{\partial}{\partial s_2} + \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial s_2} + \lambda\frac{\partial G_2}{\partial s_2}\right)\frac{\partial}{\partial \varphi_2}, \qquad (5.7.14)
$$

por lo que

$$
\left\{\mathrm{hor}^\lambda_1,\, \mathrm{hor}^\lambda_2,\, \frac{\partial}{\partial s_2},\, \frac{\partial}{\partial \varphi_2}\right\}, \qquad (5.7.15)
$$

es una base local para $T\mathcal{N}$. Más aún, si se definen las 1-formas

$$
\Gamma^\lambda_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}s_2 + \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial \varphi_2} + \lambda\frac{\partial G_1}{\partial \varphi_2}\right)\mathrm{d}s_1 + \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial \varphi_2} + \lambda\frac{\partial G_2}{\partial \varphi_2}\right)\mathrm{d}\varphi_1, \qquad (5.7.16)
$$

$$
\Gamma^\lambda_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}\varphi_2 - \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial s_2} + \lambda\frac{\partial G_1}{\partial s_2}\right)\mathrm{d}s_1 - \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial s_2} + \lambda\frac{\partial G_2}{\partial s_2}\right)\mathrm{d}\varphi_1, \qquad (5.7.17)
$$

se tiene que

$$
\{\mathrm{d}s_1,\, \mathrm{d}\varphi_1,\, \Gamma^\lambda_1,\, \Gamma^\lambda_2\}, \qquad (5.7.18)
$$

es una base local para $\Omega^1(\mathcal{N})$, dual a la base (5.7.15).

Definamos ahora la 2-forma

$$
\mathcal{F}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{\varepsilon,\lambda}_{12}\, \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1, \qquad (5.7.19)
$$

donde $\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda} = \mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2)$ es la función definida por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda} \overset{\text{def}}{=} 1 - \varepsilon & \left[\left(\frac{\partial \widetilde{Q}_2}{\partial s_1} - \frac{\partial \widetilde{Q}_1}{\partial \varphi_1} \right) + \left(\frac{\partial \widetilde{Q}_1}{\partial s_2} \frac{\partial \widetilde{Q}_2}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \widetilde{Q}_2}{\partial s_2} \frac{\partial \widetilde{Q}_1}{\partial \varphi_2} \right) \right] \\ & - \varepsilon\lambda \left[\left(\frac{\partial G_2}{\partial s_1} - \frac{\partial G_1}{\partial \varphi_1} \right) + \left(\frac{\partial \widetilde{Q}_2}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \widetilde{G}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \widetilde{Q}_2}{\partial s_2} \frac{\partial G_1}{\partial \varphi_2} \right) \right] \qquad (5.7.20) \\ & + \varepsilon\lambda \left[\left(\frac{\partial \widetilde{Q}_1}{\partial \varphi_2} + \lambda \frac{\partial G_1}{\partial \varphi_2} \right) \frac{\partial G_2}{\partial s_2} - \left(\frac{\partial \widetilde{Q}_1}{\partial s_2} + \lambda \frac{\partial G_1}{\partial s_2} \right) \frac{\partial G_2}{\partial \varphi_2} \right].\end{aligned}$$

Notemos que la 2-forma $\mathcal{F}_{Q^\lambda}^{\varepsilon}$ en (5.7.19) coincide con la 2-forma (3.2.44) de la Sección 3.2.

En estas condiciones se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.41 *Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $\lambda \in [0, 1]$, la 2-forma $\Omega_{Q^\lambda}^{\varepsilon}$ (5.7.11) se escribe como*

$$\Omega_{Q^\lambda}^{\varepsilon} = \mathcal{F}_{Q^\lambda}^{\varepsilon} + \varepsilon\, \Gamma_1^\lambda \wedge \Gamma_2^\lambda, \qquad (5.7.21)$$

donde $\mathcal{F}_{Q^\lambda}^{\varepsilon}$ está dada por (5.7.19) y Γ_1^λ, Γ_2^λ se definen por (5.7.16), (5.7.17), respectivamente. Más aún, se tiene que la 2-forma $\Omega_{Q^\lambda}^{\varepsilon}$ es no-degenerada si y sólo si la forma $\mathcal{F}_{Q^\lambda}^{\varepsilon}$ (5.7.19) es no-degenerada, es decir, $\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda} \neq 0$, con $\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}$ dada por (5.7.20).

Demostración. Un cálculo directo nos muestra que el lado derecho de (5.7.21) coincide con (5.7.11). Por otra parte, la matriz que representa a la 2-forma $\Omega_{Q^\lambda}^{\varepsilon}$ con respecto a la base (5.7.18) es

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda} & 0 & 0 \\ -\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \qquad (5.7.22)$$

cuyo determinante es $\varepsilon^2 (\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda})^2$. Esto implica que $\Omega_{Q^\lambda}^{\varepsilon}$ es una 2-forma no-degenerada si y sólo si $\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda} \neq 0$; es decir, si y sólo si la forma $\mathcal{F}_{Q^\lambda}^{\varepsilon}$ es no-degenerada. ∎

Corolario 5.42 *Si $\varepsilon > 0$, entonces la 2-forma $\Omega_{Q^\lambda}^{\varepsilon}$ es no-degenerada en el dominio abierto*

$$\mathcal{N}_{Q^\lambda}^{\varepsilon} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Dom}(\Omega_{Q^\lambda}^{\varepsilon}) = \left\{ (s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) \in \mathcal{N} \mid \mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}(s_1, \varphi_2, s_2, \varphi_2) \neq 0 \right\}, \qquad (5.7.23)$$

donde $\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}$ está dada por (5.7.20). Esto es, $\Omega_{Q^\lambda}^{\varepsilon}$ es una forma simpléctica en $\mathcal{N}_{Q^\lambda}^{\varepsilon}$.

El dominio $\mathcal{N}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^\lambda}$ en el cual la 2-forma $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^\lambda}$ es simpléctica puede extenderse a todo el espacio fase $\mathcal{N}$ si se imponen condiciones un poco más fuertes para las funciones $\mathcal{Q}_i$ y $\widetilde{\mathcal{Q}}_i$ en (5.7.1) y si tomamos el parámetro ε lo suficientemente pequeño. Se tiene así el siguiente resultado.

Corolario 5.43 *Supongamos que las funciones $\mathcal{Q}_i$ y $\widetilde{\mathcal{Q}}_i$ $(i = 1, 2)$ que definen las 1-formas horizontales $\mathcal{Q}$ y $\widetilde{\mathcal{Q}}$ en (5.7.1), respectivamente, están bien definidas y son suaves en $\overline{\mathcal{N}}$. Entonces, existe $\delta_{\mathcal{Q}^\lambda} > 0$ tal que para todo ε con $0 < \varepsilon < \delta_{\mathcal{Q}^\lambda}$ se tiene que*

$$\mathcal{N}^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^\lambda} = \mathcal{N}.$$

Por lo tanto, $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^\lambda}$ es una forma simpléctica en todo el espacio fase $\mathcal{N}$.

Demostración. Para cada $\lambda \in [0, 1]$, la función $f_{\mathcal{Q}^\lambda}$ definida por

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{Q}^\lambda} = & \left[\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial s_1} - \frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial \varphi_1} \right) + \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial s_2} \frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial s_2} \frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial \varphi_2} \right) \right] \\ & + \lambda \left[\left(\frac{\partial G_2}{\partial s_1} - \frac{\partial G_1}{\partial \varphi_1} \right) + \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \widetilde{G}_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial s_2} \frac{\partial G_1}{\partial \varphi_2} \right) \right] \\ & - \lambda \left[\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial \varphi_2} + \lambda \frac{\partial G_1}{\partial \varphi_2} \right) \frac{\partial G_2}{\partial s_2} - \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial s_2} + \lambda \frac{\partial G_1}{\partial s_2} \right) \frac{\partial G_2}{\partial \varphi_2} \right]. \end{aligned}$$

es suave en el compacto $\overline{\mathcal{N}}$ por lo que toma su valor máximo en este conjunto. Además, se requiere que

$$\mathcal{F}^{\varepsilon,\lambda}_{12} = 1 - \varepsilon\, f_{\mathcal{Q}^\lambda} \neq 0. \tag{5.7.24}$$

Si tomamos

$$\delta_{\mathcal{Q}^\lambda} = \frac{1}{\max\limits_{\substack{z \in \overline{\mathcal{N}}, \\ \lambda \in [0,1]}} \left\{ \, |f_{\mathcal{Q}^\lambda}(z)| \, \right\}},$$

se cumple $0 \leq \varepsilon\, |f_{\mathcal{Q}^\lambda}| < 1$ para todo ε con $0 < \varepsilon < \delta_{\mathcal{Q}^\lambda}$, lo cual nos garantiza (5.7.24).
■

En vista del Corolario 5.43 y por simplicidad, vamos a suponer en lo que sigue que $0 < \varepsilon < \delta_{\mathcal{Q}^\lambda}$, de tal modo que el dominio de la forma simplética $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^\lambda}$ sea todo el espacio fase $\mathcal{N}$.

El método de homotopía. Segunda etapa. Con la discusión anterior se ha dado el primer paso en la aplicación del método de homotopía. Estamos ahora en condiciones de mostrar la existencia de la familia de difeomorfismos $\{\Phi^{\lambda,\varepsilon}\}_{\lambda \in [0,1]}$ que satisface (5.7.10).

Teorema 5.44 *Sean $\mathcal{Q}$ y $\widetilde{\mathcal{Q}}$ las formas horizontales definidas en* (5.7.1) *y consideremos el campo vectorial, dependiente del tiempo, en $\mathcal{N}$ dado por*

$$
\begin{aligned}
Z_\lambda^\varepsilon = & \frac{\varepsilon\, G_2}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}} \frac{\partial}{\partial s_1} - \frac{\varepsilon\, G_1}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \\
& + \frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}} \left[\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial \varphi_2} + \lambda \frac{\partial G_2}{\partial \varphi_2} \right) G_1 - \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial \varphi_2} + \lambda \frac{\partial G_1}{\partial \varphi_2} \right) G_2 \right] \frac{\partial}{\partial s_2} \\
& + \frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}} \left[\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial s_2} + \lambda \frac{\partial G_1}{\partial s_2} \right) G_2 - \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial s_2} + \lambda \frac{\partial G_2}{\partial s_2} \right) G_1 \right] \frac{\partial}{\partial \varphi_2}.
\end{aligned}
\tag{5.7.25}
$$

Entonces para todo $\lambda \in [0,1]$ se cumple

$$
\left(\Phi^{\lambda,\varepsilon}\right)^* \Omega^\varepsilon_{\mathcal{Q}^\lambda} = \Omega^\varepsilon_{\widetilde{\mathcal{Q}}}, \tag{5.7.26}
$$

donde $\Phi^{\lambda,\varepsilon}$ es el flujo del campo (5.7.25) *que se obtiene al integrar el sistema dinámico que depende del tiempo*

$$
\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}} G_2 = \frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}} (\mathcal{Q}_2 - \widetilde{\mathcal{Q}}_2), \tag{5.7.27}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}} G_1 = \frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}} (\mathcal{Q}_1 - \widetilde{\mathcal{Q}}_1), \tag{5.7.28}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}} \left[\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial \varphi_2} + \lambda \frac{\partial G_2}{\partial \varphi_2} \right) G_1 - \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial \varphi_2} + \lambda \frac{\partial G_1}{\partial \varphi_2} \right) G_2 \right], \tag{5.7.29}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}} \left[\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial s_2} + \lambda \frac{\partial G_1}{\partial s_2} \right) G_2 - \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial s_2} + \lambda \frac{\partial G_2}{\partial s_2} \right) G_1 \right], \tag{5.7.30}
$$

donde G_1 y G_2 están definidas por (5.7.12).

Antes de demostrar este resultado conviene hacer algunas observaciones. Notemos que el Teorema 5.44 es una reformulación del Teorema 4.9 para el caso simpléctico. Este último resultado resume los métodos usados en la demostración de la Proposición 4.4 y se aplican en el contexto actual. Sin embargo, puesto que una prueba del teorema que ahora nos ocupa es bastante directa, la presentamos a continuación.

Demostración. La prueba del Teorema 5.44 consiste en resolver la ecuación homológica (5.7.9). Para ello, supongamos que el campo vectorial que buscamos es de la forma

$$
Z_\lambda^\varepsilon = Z_\lambda^1 \,\mathrm{hor}_1^\lambda + Z_\lambda^2 \,\mathrm{hor}_2^\lambda + Z_\lambda^3 \frac{\partial}{\partial s_2} + Z_\lambda^4 \frac{\partial}{\partial \varphi_2}. \tag{5.7.31}
$$

De las ecuaciones

$$
\mathcal{L}_{Z_\lambda^\varepsilon} \Omega^\varepsilon_{\mathcal{Q}^\lambda} = \mathrm{d}\left[Z_\lambda^\varepsilon \lrcorner\, \Omega^\varepsilon_{\mathcal{Q}^\lambda} \right],
$$

y

$$
\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\Omega^\varepsilon_{\mathcal{Q}^\lambda} \right) = -\varepsilon\, \mathrm{d}\left[G_1 \mathrm{d}s_1 + G_2 \mathrm{d}\varphi_1 \right],
$$

se sigue que (5.7.9) se escribe como

$$\mathrm{d}\left[Z^{\varepsilon}_{\lambda} \lrcorner\, \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^{\lambda}} - \varepsilon\, \mathrm{d}\left(G_1 \mathrm{d}s_1 + G_2 \mathrm{d}\varphi_1\right)\right] = 0,$$

de lo cual se obtiene

$$Z^{\varepsilon}_{\lambda} \lrcorner\, \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^{\lambda}} = \varepsilon\, \mathrm{d}\left(G_1 \mathrm{d}s_1 + G_2 \mathrm{d}\varphi_1\right).$$

Resolviendo esta última ecuación se tiene que las componentes del campo vectorial $Z^{\varepsilon}_{\lambda}$ están dadas por

$$Z^1_{\lambda} = \frac{\varepsilon}{\mathcal{F}^{\varepsilon,\lambda}_{12}}\, G_2, \qquad Z^2_{\lambda} = -\frac{\varepsilon}{\mathcal{F}^{\varepsilon,\lambda}_{12}}\, G_1, \qquad Z^3_{\lambda} = Z^4_{\lambda} = 0. \tag{5.7.32}$$

Por lo tanto, se sigue que

$$\begin{aligned} Z^{\varepsilon}_{\lambda} &= \frac{\varepsilon\, G_2}{\mathcal{F}^{\varepsilon,\lambda}_{12}}\, \mathrm{hor}^{\lambda}_1 - \frac{\varepsilon\, G_1}{\mathcal{F}^{\varepsilon,\lambda}_{12}}\, \mathrm{hor}^{\lambda}_2 \\ &= \frac{\varepsilon\, G_2}{\mathcal{F}^{\varepsilon,\lambda}_{12}} \frac{\partial}{\partial s_1} - \frac{\varepsilon\, G_1}{\mathcal{F}^{\varepsilon,\lambda}_{12}} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{\mathcal{F}^{\varepsilon,\lambda}_{12}} \left[\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial \varphi_2} + \lambda \frac{\partial G_2}{\partial \varphi_2}\right) G_1 - \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial \varphi_2} + \lambda \frac{\partial G_1}{\partial \varphi_2}\right) G_2\right] \frac{\partial}{\partial s_2} \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{\mathcal{F}^{\varepsilon,\lambda}_{12}} \left[\left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_1}{\partial s_2} + \lambda \frac{\partial G_1}{\partial s_2}\right) G_2 - \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{Q}}_2}{\partial s_2} + \lambda \frac{\partial G_2}{\partial s_2}\right) G_1\right] \frac{\partial}{\partial \varphi_2}. \end{aligned} \tag{5.7.33}$$

Este campo satisface la ecuación homológica (5.7.9) y define el sistema dinámico (5.7.27)-(5.7.30). Si denotamos por $\Phi^{\lambda,\varepsilon}$ el flujo que resulta de integrar este sistema, entonces se cumple (5.7.26). Además, $\Phi^{0,\varepsilon} = \mathrm{id}$ y para $\lambda = 1$ se tiene

$$(\Phi^{1,\varepsilon})^* \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^1} \equiv (\Phi^{1,\varepsilon})^* \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} = \Omega^{\varepsilon}_{\widetilde{\mathcal{Q}}}. \tag{5.7.34}$$

Si definimos $\Phi \overset{\mathrm{def}}{=} \Phi^{1,\varepsilon}$, entonces Φ es un difeomorfismo que satisface (5.7.4),

$$\Phi^* \Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} = \Omega^{\varepsilon}_{\widetilde{\mathcal{Q}}},$$

lo cual finaliza la demostración. ∎

Un caso particular. En esta parte analizamos un caso específico de la discusión anterior, el cual es importante para nuestros propósitos. En efecto, supongamos que la forma horizontal $\widetilde{\mathcal{Q}}$ en (5.7.1) es nula: $\widetilde{\mathcal{Q}} = 0$. De (5.7.6) se sigue que $\mathcal{Q}^{\lambda} = \lambda \mathcal{Q}$, de lo cual se obtiene que la estructura simpléctica deformada $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^{\lambda}}$ viene a ser

$$\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}^{\lambda}} \equiv \Omega^{\varepsilon}_{\lambda\mathcal{Q}} = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 - \lambda\, \varepsilon\, \mathrm{d}\left[\mathcal{Q}_1\, \mathrm{d}s_1 + \mathcal{Q}_2\, \mathrm{d}\varphi_1\right]. \tag{5.7.35}$$

Notemos que para los valores $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ se obtienen, respectivamente, las formas simplécticas

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega}_0^\varepsilon &= \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2, && (5.7.36)\\ \Omega_{\mathcal{Q}}^\varepsilon &= \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 - \varepsilon\, \mathrm{d}\left[\mathcal{Q}_1\, \mathrm{d}s_1 + \mathcal{Q}_2\, \mathrm{d}\varphi_1\right]. && (5.7.37) \end{aligned}$$

De hecho, la familia de formas simplécticas $\{\Omega_{\lambda\mathcal{Q}}^\varepsilon\}_{\lambda\in[0,1]}$ es una homotopía entre la forma simpléctica no-uniforme $\widetilde{\Omega}_0^\varepsilon$ (5.4.4) y la forma simpléctica deformada $\Omega_{\mathcal{Q}}^\varepsilon$ (5.4.1).

De (5.7.11) se obtiene una expresión explícita para la forma simpléctica (5.7.35):

$$\begin{aligned} \Omega_{\lambda\mathcal{Q}}^\varepsilon = {} & \left[1 - \lambda\,\varepsilon\left(\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial s_1} - \frac{\partial\mathcal{Q}_1}{\partial\varphi_1}\right)\right] \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 + \lambda\,\varepsilon\frac{\partial\mathcal{Q}_1}{\partial s_2}\mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}s_2 + \lambda\,\varepsilon\frac{\partial\mathcal{Q}_1}{\partial\varphi_2}\mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 \\ & + \lambda\,\varepsilon\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial s_2}\mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}s_2 + \lambda\,\varepsilon\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial\varphi_2}\mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 + \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2. \qquad (5.7.38) \end{aligned}$$

Los campos vectoriales horizontales (5.7.13) y (5.7.14) toman, en este caso, las formas siguientes,

$$\begin{aligned} \mathrm{hor}_1^\lambda &= \frac{\partial}{\partial s_1} + \lambda\left(-\frac{\partial\mathcal{Q}_1}{\partial\varphi_2}\frac{\partial}{\partial s_2} + \frac{\partial\mathcal{Q}_1}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right), && (5.7.39)\\ \mathrm{hor}_2^\lambda &= \frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \lambda\left(-\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial\varphi_2}\frac{\partial}{\partial s_2} + \frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right). && (5.7.40) \end{aligned}$$

De la misma manera, de (5.7.16) y (5.7.17) se obtienen las expresiones

$$\begin{aligned} \Gamma_1^\lambda &= \mathrm{d}s_2 + \lambda\left(\frac{\partial\mathcal{Q}_1}{\partial\varphi_2}\mathrm{d}s_1 + \frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial\varphi_2}\mathrm{d}\varphi_1\right), && (5.7.41)\\ \Gamma_2^\lambda &= \mathrm{d}\varphi_2 - \lambda\left(\frac{\partial\mathcal{Q}_1}{\partial s_2}\mathrm{d}s_1 + \frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial s_2}\mathrm{d}\varphi_1\right). && (5.7.42) \end{aligned}$$

La 2-forma $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}^\lambda}^\varepsilon \equiv \mathcal{F}_{\lambda\mathcal{Q}}^\varepsilon = \mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}\, \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1$ en (5.7.19) queda definida por la función

$$\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda} = 1 - \varepsilon\,\lambda\left[\left(\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial s_1} - \frac{\partial\mathcal{Q}_1}{\partial\varphi_1}\right) + \lambda\left(\frac{\partial\mathcal{Q}_1}{\partial s_2}\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial\varphi_2} - \frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial s_2}\frac{\partial\mathcal{Q}_1}{\partial\varphi_2}\right)\right], \qquad (5.7.43)$$

por lo que para $\varepsilon > 0$ y para cada $\lambda \in [0, 1]$, la 2-forma $\Omega_{\lambda\mathcal{Q}}^\varepsilon$ se expresa como

$$\Omega_{\lambda\mathcal{Q}}^\varepsilon = \mathcal{F}_{\lambda\mathcal{Q}}^\varepsilon + \varepsilon\,\Gamma_1^\lambda \wedge \Gamma_2^\lambda. \qquad (5.7.44)$$

La matriz de la estructura simpléctica (5.7.44) tiene la misma forma que la matriz en (5.7.22). Por lo tanto, su determinante es $\varepsilon^2\left(\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}\right)^2$, lo cual nos indica que $\Omega_{\lambda\mathcal{Q}}^\varepsilon$ es no-degenerada si y sólo si $\mathcal{F}_{\lambda\mathcal{Q}}^\varepsilon$ es no-degenerada, es decir, $\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda} \neq 0$.

Vemos así que el dominio en el cual la 2-forma $\Omega_{\lambda\mathcal{Q}}^\varepsilon$ es no-degenerada, es precisamente el subconjunto de aquellos puntos $(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) \in \mathcal{N}$ para lo cuales $\mathcal{F}_{12}^\lambda(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) \neq 0$. Sin embargo, es posible extender este dominio a todo el espacio fase $\mathcal{N}$ si se imponen condiciones a la forma horizontal $\mathcal{Q}$ y tomamos ε lo suficientemente pequeño. En efecto, supongamos que las funciones $\mathcal{Q}_1$ y $\mathcal{Q}_2$ en (5.4.2) están bien definidas y son suaves en $\overline{\mathcal{N}} = \overline{\Delta}_1 \times \mathbb{S}^1 \times \overline{\Delta}_2 \times \mathbb{S}^1$. Se requiere entonces dar condiciones para que

$$\mathcal{F}_{12}^{\lambda} = 1 - \varepsilon f_{\lambda\mathcal{Q}} \neq 0, \tag{5.7.45}$$

donde

$$f_{\lambda\mathcal{Q}} = \lambda \left[\left(\frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_1} - \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_1} \right) + \lambda \left(\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2} \right) \right]. \tag{5.7.46}$$

La hipótesis sobre $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ nos permiten tomar

$$\delta_{\lambda\mathcal{Q}} = \frac{1}{\max\limits_{\substack{z \in \overline{\mathcal{N}}, \\ \lambda \in [0,1]}} \left\{ \left| f_{\lambda\mathcal{Q}}(z) \right| \right\}}, \tag{5.7.47}$$

y se cumple $\delta_{\lambda\mathcal{Q}} > 0$, lo cual nos garantiza que se satisface (5.7.45) para todo ε con $0 < \varepsilon < \delta_{\lambda\mathcal{Q}}$.

En estas condiciones podemos resumir lo anterior de la siguiente manera: Para cada $\lambda \in [0,1]$ existe $\delta_{\lambda\mathcal{Q}} > 0$ tal que para todo ε con $0 < \varepsilon < \delta_{\lambda\mathcal{Q}}$ se tiene que $\Omega_{\lambda\mathcal{Q}}^{\varepsilon}$ es una forma simpléctica en todo el espacio fase $\mathcal{N}$.

Corolario 5.45 *Sea* $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1\, \mathrm{d}s_1 + \mathcal{Q}_2\, \mathrm{d}\varphi_1$ (5.7.1) *una forma horizontal en* $\mathcal{N}$*. Supongamos que* $\widetilde{\mathcal{Q}} = 0$ *en* (5.7.1) *y sea* Y_λ *el campo vectorial, dependiente del tiempo, en* $\mathcal{N}$ *definido por*

$$Y_\lambda^{\varepsilon} = \left(\frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}}\, \mathcal{Q}_2 \right) \frac{\partial}{\partial s_1} - \left(\frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}}\, \mathcal{Q}_1 \right) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + \frac{\varepsilon\,\lambda}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}} \left(\mathcal{Q}_1 \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial \varphi_2} - \mathcal{Q}_2 \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial \varphi_2} \right) \frac{\partial}{\partial s_2}$$

$$+ \frac{\varepsilon\,\lambda}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}} \left(\mathcal{Q}_2 \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial s_2} - \mathcal{Q}_1 \frac{\partial \mathcal{Q}_2}{\partial s_2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi_2}, \tag{5.7.48}$$

con $\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}$ *dada por* (5.7.43) *y donde* $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ *son funciones suaves en* $\overline{\mathcal{N}}$ *y se cumplen* (5.7.45)-(5.7.47)*. Entonces para* $0 < \varepsilon < \delta_{\lambda\mathcal{Q}}$ *y para cada* $\lambda \in [0,1]$ *se tiene*

$$\left(\Phi^{\lambda,\varepsilon}\right)^{*} \Omega_{\lambda\mathcal{Q}}^{\varepsilon} = \widetilde{\Omega}_0^{\varepsilon}, \tag{5.7.49}$$

donde $\Phi^{\lambda,\varepsilon}$ *es el flujo del campo vectorial* Y_λ^{ε}*, el cual se obtiene al integrar el sistema* *dinámico dependiente del tiempo*

$$\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}}\mathcal{Q}_2, \tag{5.7.50}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\varepsilon}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}}\mathcal{Q}_1, \tag{5.7.51}$$

$$\frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\varepsilon\,\lambda}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}}\left(\mathcal{Q}_1\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial\varphi_2} - \mathcal{Q}_2\frac{\partial\mathcal{Q}_1}{\partial\varphi_2}\right), \tag{5.7.52}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\varepsilon\,\lambda}{\mathcal{F}_{12}^{\varepsilon,\lambda}}\left(\mathcal{Q}_2\frac{\partial\mathcal{Q}_1}{\partial s_2} - \mathcal{Q}_1\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial s_2}\right). \tag{5.7.53}$$

Corolario 5.46 *Sea* $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1\,\mathrm{d}s_1 + \mathcal{Q}_2\,\mathrm{d}\varphi_1$ (5.7.1) *una forma horizontal en* $\mathcal{N}$*, con* $\mathcal{Q}_1$ *y* $\mathcal{Q}_2$ *funciones suaves en* $\mathcal{N}$ *que satisfacen las condiciones del Corolario* 5.45*. Entonces, la forma simpléctica* $\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}}$ *es isomorfa a* $\widetilde{\Omega}^{\varepsilon}_0$ *en* $\mathcal{N}$*,*

$$\left(\Phi^{1,\varepsilon}\right)^{*}\Omega^{\varepsilon}_{\mathcal{Q}} = \widetilde{\Omega}^{\varepsilon}_0, \tag{5.7.54}$$

donde $\Phi^{1,\varepsilon}$ *es el flujo a tiempo* 1 *que se obtiene del flujo* $\Phi^{\lambda,\varepsilon}$*, el cual a su vez, se obtiene al integrar el sistema de ecuaciones diferenciales* (5.7.50)-(5.7.53).

5.8 Normalización Hamiltoniana de primero y segundo tipos

En el espacio fase $M = (\Delta \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}^2$, consideremos el sistema dinámico no-perturbado del campo vectorial X_0 (5.1.14),

$$\dot{s} = 0, \tag{5.8.1}$$

$$\dot{\varphi} = \omega_1(s), \tag{5.8.2}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H_1}{\partial q}(s,\varphi,p,q), \tag{5.8.3}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H_1}{\partial p}(s,\varphi,p,q), \tag{5.8.4}$$

donde $\omega_1(s) = f'(s)$ y las funciones f, H_1 dependen de s de manera suave en la cerradura $\overline{\Delta}$. Supongamos además, que

$$\omega_1(s) \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \omega_1'(s) \neq 0 \qquad \text{en} \quad \overline{\Delta}.$$

Si asumimos que se cumplen las hipótesis de integrabilidad (H1) y (H2) para X_0 (ver Sección 5.2), entonces el sistema (5.8.1)-(5.8.4) admite una integral de movimiento $G = G(s,\varphi,p,q)$ y el dominio $\mathcal{M} \subset (\Delta \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}^2$ en (5.2.5), con $\pi(\mathcal{M}) = \Delta \times \mathbb{S}^1$, está trivialmente foliado por las trayectorias periódicas $\widetilde{\Gamma}_{s,\varphi}(E)$ del campo vectorial Hamiltoniano vertical V_G sobre $\Delta \times \mathbb{S}^1 \times (E_1, E_2)$. De la Proposición 5.1, se sigue que $\mathcal{M}$ está trivialmente foliado por los 2-toros $\Lambda_{c_1,E} = \{s =$

$c_1, G = E\} \approx \mathbb{T}^2$, para $s \in \Delta$ y $E \in (E_1, E_2)$. En cada toro $\Lambda_{c_1,E}$ el movimiento es quasi-periódico a lo largo de las trayectorias de (5.8.1)-(5.8.4), con frecuencias $\omega_1(c_1)$ y $\omega_2(c_1, E)$. Aquí, ω_2 está definida por (5.2.52). Denotemos por

$$h(s, s_2) = \int_{s_2^0}^{s_2} \omega_2(s, s_2')\, ds_2', \tag{5.8.5}$$

y

$$a(s, E) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_{s,\varphi}(E)} p\, dq.$$

La transformación de reducibilidad $\mathcal{T}$ en (5.2.34) está determinada por las funciones $A = A(s, \varphi, p, q)$ y $\phi = \phi(s, \varphi, p, q)$, donde

$$A(s, \varphi, p, q) = a(s, E)\big|_{E=G(s,\varphi,p,q)}$$

y ϕ está dada por (5.2.48). Por medio de la integral de movimiento A, podemos reparametrizar la familia de 2-toros $\Lambda_{c_1,c_2} = \Lambda_{c_1,E(c_1,c_2)}$, donde $E = E(c_1, c_2)$ es la solución de la ecuación $c_2 = a(c_1, E)$. En este caso, los parámetros (c_1, c_2) pertenecen al dominio

$$\mathcal{S} = \bigcup_{s\in\Delta} \{s\} \times \Delta_2(s)$$

donde $\Delta_2(s)$ es la imagen de $\{s\} \times (E_1, E_2)$ bajo a. Las frecuencias correspondientes del movimiento quasi-periódico a lo largo de Λ_{c_1,c_2} son $\omega_1(c_1)$ y $\omega_2(c_1, c_2) = \omega_2(c_1, E(c_1, c_2))$.

Estructuras Hamiltonianas para X_0.

Definición 5.47 *Sea $\mathcal{O} \subset M$ un dominio abierto. Diremos que $\mathcal{O}$ es un* dominio admisible *si existe un dominio abierto $\widetilde{\mathcal{O}} \subset M$ tal que*

(1) *$\mathcal{O}$ y $\widetilde{\mathcal{O}}$ son de la forma* (5.2.5) *y $\overline{\mathcal{O}} \subset \widetilde{\mathcal{O}}$, con $\overline{\mathcal{O}}$ compacto.*

(2) *Las condiciones* (H1), (H2) *se satisfacen para $\mathcal{O}$ y $\widetilde{\mathcal{O}}$.*

Es claro que si se cumplen (H1) y (H2), entonces siempre existe un dominio admisible con cerradura compacta.

Como una consecuencia directa del Teorema 5.21 se deriva el resultado siguiente.

Teorema 5.48 *Supongamos que se cumplen las hipótesis* (H1), (H2) *y que $\mathcal{M}$ es un dominio admisible dado. Entonces para $\varepsilon \in (0, \delta_0)$ suficientemente pequeño, el sistema* (5.8.1)-(5.8.4) *es Hamiltoniano en el dominio $\mathcal{M}$, relativo a la función*

$$F_\varepsilon(s, \varphi, p, q) = f(s) + \varepsilon \left[h(s, s_2) - \frac{\omega_1(s)}{\omega_1'(s)} \frac{\partial h(s, s_2)}{\partial s} \right] \Big|_{s_2=A(s,\varphi,p,q)} \tag{5.8.6}$$

y a la estructura simpléctica

$$\Omega^{\varepsilon}_{Q} = \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\varphi + \varepsilon\, \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q - \varepsilon\, \mathrm{d}Q, \tag{5.8.7}$$

donde

$$Q = Q_1\, \mathrm{d}s + Q_2\, \mathrm{d}\varphi. \tag{5.8.8}$$

En este caso,

$$Q_1 = -A\frac{\partial \phi}{\partial s}, \qquad Q_2 = -A\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\omega_1'(s)}\frac{\partial h(s,s_2)}{\partial s}\Big|_{s_2 = A(s,\varphi,p,q)}. \tag{5.8.9}$$

El sistema Hamiltoniano $(\mathcal{M}, F_\varepsilon, \Omega^{\varepsilon}_{Q})$ *es completamente integrable con dos integrales de movimiento s y G, cuyo corchete de Poisson se anula,* $\{s, G\} = 0$. *Los 2-toros de Liouville* Λ_{c_1,c_2} *llevan consigo un movimiento quasi-periódico con frecuencias* $\omega_1(c_1)$ *y* $\omega_2(c_1,c_2)$. *Las variables acción-ángulo están dadas por*

$$I_1 = I(s,s_2)\big|_{s_2 = A(s,\varphi,p,q)}, \qquad I_2 = \varepsilon\, A(s,\varphi,p,q),$$

donde

$$I = s - \frac{\varepsilon}{\omega_1'(s)}\frac{\partial h(s,s_2)}{\partial s}.$$

Además, la constante δ_0 *está dada por*

$$\delta_0^{-1} = \max_{\mathcal{M}}\left[\left(\frac{\partial Q_2}{\partial s} - \frac{\partial Q_1}{\partial \varphi}\right) + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial p}\frac{\partial Q_2}{\partial q} - \frac{\partial Q_2}{\partial p}\frac{\partial Q_1}{\partial q}\right)\right].$$

El caso lineal. Consideremos ahora el caso lineal (5.2.55)-(5.2.57) que se abordó en la Sección 5.2:

$$\dot{s} = 0, \tag{5.8.10}$$

$$\dot{\varphi} = \omega_1(s), \tag{5.8.11}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{p}\\ \dot{q}\end{bmatrix} = J\,W(s,\varphi)\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix} \tag{5.8.12}$$

El resultado siguiente se deriva directamente del Teorema 5.48.

Corolario 5.49 *Supongamos que el sistema* (5.8.10)-(5.8.12) *es fuertemente estable en* $\Delta \times \mathbb{S}^1$. *Entonces, para* $\varepsilon \in (0, \delta_0)$ *suficientemente pequeño, el campo vectorial correspondiente,*

$$X_0 = \omega_1(s)\,\frac{\partial}{\partial \varphi} + \left\langle J\,W(s,\varphi)\begin{bmatrix}p\\ q\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\partial/\partial p\\ \partial/\partial q\end{bmatrix}\right\rangle$$

es Hamiltoniano en el dominio admisible $\mathcal{M}$ con respecto a la estructura simpléctica Ω^ε_Q (5.8.7) *con*

$$Q_1 = A\,\frac{\partial}{\partial}\left[\frac{1}{\omega_1(s)}\int_0^{\varphi} w_1(s,\varphi')\,\mathcal{D}_2(s,\varphi')\,\mathrm{d}\varphi'\right], \tag{5.8.13}$$

$$Q_2 = A\left[-1 + \frac{w_1(s,\varphi)\,\mathcal{D}_2(s,\varphi)}{\omega_1(s)} + \frac{\omega_2'(s)}{\omega_1'(s)}\right] \tag{5.8.14}$$

y la función

$$F_\varepsilon = f(s) + \varepsilon\,A\left[\omega_2(s) - \frac{\omega_1(s)\,\omega_2'(s)}{\omega_1'(s)}\right].$$

En este caso, $\omega_2(s)$ está dada por (5.2.69)*, $\mathcal{D}_1(s,\varphi) + i\,\mathcal{D}_2(s,\varphi)$ es la solución de la ecuación de Riccati* (5.2.60) *y*

$$A(s,\varphi,p,q) = \frac{\left[\,p - \mathcal{D}_1(s,\varphi)\,q\,\right]^2 + \left[\,\mathcal{D}_2(s,\varphi)\,q\,\right]^2}{2\,\mathcal{D}_2(s,\varphi)}.$$

Normalización Hamiltoniana de primer tipo. Consideremos el sistema Hamiltoniano perturbado en $\left(M, \Omega^\varepsilon_0, H_\varepsilon = f(s) + \varepsilon H_1 + O(\varepsilon^2)\right)$:

$$\dot{s} = -\varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial\varphi} + O(\varepsilon^2), \tag{5.8.15}$$

$$\dot{\varphi} = \omega_1(s) + \varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial s} + O(\varepsilon^2), \tag{5.8.16}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H_1}{\partial p} + O(\varepsilon), \tag{5.8.17}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H_1}{\partial q} + O(\varepsilon). \tag{5.8.18}$$

Sea X_ε el campo vectorial Hamiltoniano de $H_\varepsilon = f(s) + \varepsilon H_1 + O(\varepsilon^2)$. A la 1-forma Q en (5.8.9) le asociamos el siguiente sistema dinámico en un dominio admisible $\mathcal{M}$:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\varepsilon}{\kappa^\lambda_\varepsilon}Q_2, \tag{5.8.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\varepsilon}{\kappa^\lambda_\varepsilon}Q_1, \tag{5.8.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{\kappa^\lambda_\varepsilon}\left[Q_2\frac{\partial Q_1}{\partial q} - Q_1\frac{\partial Q_2}{\partial q}\right], \tag{5.8.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{\kappa^\lambda_\varepsilon}\left[Q_1\frac{\partial Q_2}{\partial p} - Q_2\frac{\partial Q_1}{\partial p}\right], \tag{5.8.22}$$

donde

$$\kappa^\lambda_\varepsilon = 1 - (1-\lambda)\varepsilon\left[\left(\frac{\partial Q_2}{\partial s_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial\varphi_1}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{\partial Q_1}{\partial p}\frac{\partial Q_2}{\partial q} - \frac{\partial Q_2}{\partial p}\frac{\partial Q_1}{\partial q}\right)\right].$$

Para $\varepsilon \in (0, \delta_1)$ suficientemente pequeño, el flujo $\Phi^{\lambda,\varepsilon} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ de este sistema está bien definido en todo $\mathcal{M}$, para todo $\lambda \in [0,1]$. Más aún, $\Phi^{\lambda,\varepsilon}$ es una transformación cercana a la identidad, $\Phi^{0,\varepsilon} = \mathrm{id}$. Sea Ω^{ε}_{Q} la estructura simpléctica en (5.8.7). De los Corolarios 5.45 y 5.46, el flujo a tiempo 1, $\Phi^{1,\varepsilon}$, es un simplectomorfismo entre la estructura simpléctica original Ω^{ε}_0 y Ω^{ε}_{Q},

$$\left(\Phi^{1,\varepsilon}\right)^* \Omega^{\varepsilon}_0 = \Omega^{\varepsilon}_{Q}.$$

Tomando en cuenta estos hechos junto con el Teorema 5.48 se obtiene el resultado siguiente.

Teorema 5.50 *Bajo las hipótesis* (H1), (H2), *se tiene que para* $\varepsilon \in (0, \delta_1)$, *suficientemente pequeño, el* "pull-back" *del sistema Hamiltoniano original* $\left(M, \Omega^{\varepsilon}_0, H_{\varepsilon}\right)$ (5.8.15)-(5.8.18), *bajo la transformación cercana a la identidad* $\Phi^{1,\varepsilon} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, *viene a ser el sistema Hamiltoniano* $\left(\mathcal{M}, \Omega^{\varepsilon}_{Q}\right)$ *con función Hamiltoniana*

$$H_{\varepsilon} \circ \Phi^{1,\varepsilon} = F_{\varepsilon} + O(\varepsilon^2),$$

donde F_{ε} *es el Hamiltoniano* (5.8.6) *del sistema Hamiltoniano no-perturbado* X_0, *el cual es completamente integrable. En este caso,*

$$\delta_1^{-1} = \max_{\substack{\mathcal{M}, \\ \lambda \in [0,1]}} \left[\lambda \left(\frac{\partial Q_2}{\partial s} - \frac{\partial Q_1}{\partial \varphi} \right) + \lambda \left(\frac{\partial Q_1}{\partial p}\frac{\partial Q_2}{\partial q} - \frac{\partial Q_2}{\partial p}\frac{\partial Q_1}{\partial q} \right) \right].$$

De esta manera, después de una *normalización de primer tipo*, el sistema perturbado (5.8.15)-(5.8.18) se transforma en un sistema Hamiltoniano casi-integrable, en el cual el sistema Hamiltoniano no-perturbado $\left(\mathcal{M}, \Omega^{\varepsilon}_{Q}, F_{\varepsilon}\right)$ coincide precisamente con (5.8.1)-(5.8.4) y tiene la familia de toros de Liouville Λ_{c_1,c_2}, los cuales son independientes de ε y llevan consigo un movimiento quasi-periódico con frecuencias $\omega_1(c_1)$ y $\omega_2(c_1, c_2)$.

Observación 5.51 *Del Teorema* 5.44 *se sigue que la transformación inversa* $\widetilde{\Phi}^{\lambda,\varepsilon} = (\Phi^{\lambda,\varepsilon})^{-1}$ *está determinada como el flujo del sistema dependiente del tiempo*

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\varepsilon}{\chi^{\lambda}_{\varepsilon}} Q_2, \tag{5.8.23}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\varepsilon}{\chi^{\lambda}_{\varepsilon}} Q_1, \tag{5.8.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\varepsilon\lambda}{\chi^{\lambda}_{\varepsilon}} \left[-Q_2 \frac{\partial Q_1}{\partial q} + Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial q} \right], \tag{5.8.25}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\varepsilon\lambda}{\chi^{\lambda}_{\varepsilon}} \left[Q_2 \frac{\partial Q_1}{\partial p} - Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial p} \right], \tag{5.8.26}$$

con

$$\chi^{\lambda}_{\varepsilon} = 1 - \lambda\varepsilon \left[\left(\frac{\partial Q_2}{\partial s} - \frac{\partial Q_1}{\partial \varphi} \right) + \lambda \left(\frac{\partial Q_1}{\partial p}\frac{\partial Q_2}{\partial q} - \frac{\partial Q_2}{\partial p}\frac{\partial Q_1}{\partial q} \right) \right].$$

Normalización Hamiltoniana de segundo tipo. Sea $N = (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$ y consideremos el dominio toroidal $\mathcal{N} = (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times (\Delta_2 \times \mathbb{S}^1) \subset N$ (ver (5.2.32)), con coordenadas $\big(s_1, \varphi_1 \,(\operatorname{mod} 2\pi), s_2, \varphi_2 \,(\operatorname{mod} 2\pi)\big)$ y estructura simpléctica

$$\widetilde{\Omega}_0^\varepsilon = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 \,+\, \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2. \tag{5.8.27}$$

Sea $\mathcal{T} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ la transformación de reducibilidad (5.2.34). De la Proposicón 5.16 y el Corolario 5.20, el "*pull-back*" de $\widetilde{\Omega}_0^\varepsilon$ bajo $\mathcal{T}$ es de la forma

$$\mathcal{T}^* \widetilde{\Omega}_0^\varepsilon = \Omega_0^\varepsilon \,+\, \mathrm{d}P, \tag{5.8.28}$$

donde P es la 1-forma horizontal con coeficientes (ver (5.3.13), (5.3.14)):

$$P_1 = A \frac{\partial \phi}{\partial s_1} + \frac{\partial K}{\partial s_1}, \tag{5.8.29}$$

$$P_2 = A \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial K}{\partial \varphi_1}, \tag{5.8.30}$$

y donde K satisface (5.3.8) y (5.3.18). Una relación explícita entre K, A y ϕ viene dada en los términos siguientes (ver (5.3.16) y (5.3.17)):

$$\frac{\partial K}{\partial p} = -A \frac{\partial \phi}{\partial p}, \qquad \frac{\partial K}{\partial q} = -A \frac{\partial \phi}{\partial q} + p. \tag{5.8.31}$$

Tomando en cuenta que $\{A, \phi\}_2 = 1$ (5.2.39), (5.3.15), por medio de un cálculo directo se deriva de (5.8.29), (5.8.30) y (5.8.31) el siguiente resultado.

Lema 5.52 *Los coeficientes P_1 y P_2 satisfacen la relación de curvatura cero*

$$\frac{\partial P_2}{\partial s} - \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} + \{P_2, P_1\}_2 = 0. \tag{5.8.32}$$

De esta manera, se sigue claramente de (5.8.28) que

$$\widetilde{\Omega}_{\widetilde{Q}}^\varepsilon = \mathcal{T}_* \Omega_0^\varepsilon = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_1 \,+\, \varepsilon\, \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_2 \,-\, \varepsilon\, \mathrm{d}\widetilde{Q}. \tag{5.8.33}$$

Aquí, $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}_1 \mathrm{d}s_1 + \widetilde{Q}_2 \mathrm{d}s_2$ es una 1-forma en el dominio toroidal $\mathcal{N} = \mathcal{T}(\mathcal{M})$, con coeficientes

$$\widetilde{Q}_1 = P_1 \circ \mathcal{T}^{-1}, \qquad \widetilde{Q}_2 = P_2 \circ \mathcal{T}^{-1}. \tag{5.8.34}$$

Notemos que del Lema 5.52 se obtiene también que

$$\frac{\partial \widetilde{Q}_2}{\partial s_1} - \frac{\partial \widetilde{Q}_1}{\partial \varphi_1} \,+\, \{\widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2\}_2 = 0. \tag{5.8.35}$$

De esta relación y de (5.4.17)-(5.4.19) se obtienen los corchetes de Poisson que corresponden a la forma simpléctica $\widetilde{\Omega}_{\widetilde{Q}}^\varepsilon$, los cuales vienen dado por las siguientes relaciones:

$$\{s_1, \varphi_1\} = 1, \tag{5.8.36}$$

$$\{s_1, s_2\} = -\frac{\partial \widetilde{Q}_2}{\partial \varphi_2}, \qquad \{s_1, \varphi_2\} = \frac{\partial \widetilde{Q}_2}{\partial s_2}, \tag{5.8.37}$$

$$\{\varphi_1, s_2\} = \frac{\partial \widetilde{Q}_1}{\partial \varphi_2}, \qquad \{\varphi_1, \varphi_2\} = -\frac{\partial \widetilde{Q}_1}{\partial s_2}, \tag{5.8.38}$$

$$\{s_2, \varphi_2\} = \frac{1}{\varepsilon} + \left(\frac{\partial \widetilde{Q}_1}{\partial s_2}\frac{\partial \widetilde{Q}_2}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \widetilde{Q}_1}{\partial \varphi_2}\frac{\partial Q_2}{\partial s_2}\right). \tag{5.8.39}$$

El "*push-forward*" del sistema perturbado original (5.8.15)-(5.8.18) es un sistema Hamiltoniano en $\left(\mathcal{N}, \Omega^{\varepsilon}_{\widetilde{Q}}\right)$ con Hamiltoniano $\widetilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \mathcal{T}^{-1} = f + \varepsilon H_1 \circ \mathcal{T}^{-1}$. Se sigue del Corolario 5.20 y del Teorema 5.21 que el sistema dinámico correspondiente toma la forma

$$\dot{s}_1 = O(\varepsilon), \tag{5.8.40}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(s_1) + O(\varepsilon), \tag{5.8.41}$$

$$\dot{s}_2 = O(\varepsilon), \tag{5.8.42}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2(s_1, s_2) + O(\varepsilon). \tag{5.8.43}$$

De la Proposición 5.26 se deduce el resultado siguiente:

Lema 5.53 *La* 1*-forma Q en* (5.8.8) *y la función $h = h(s_1, s_2)$* (5.8.5) *se pueden tomar de tal manera que*

$$\frac{\partial h}{\partial s_2}(s_1, s_2) = \omega_2(s_1, s_2), \tag{5.8.44}$$

y

$$H \circ \mathcal{T}^{-1} = -\omega_1 Q_2 + h. \tag{5.8.45}$$

Demostración. Fijemos h y Q en (5.8.5) y (5.8.9), respectivamente. Calculando las componentes del campo vectorial Hamiltoniano de $\widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ con respecto al corchete de Poisson (5.8.36)-(5.8.39) y comparando con el lado derecho de (5.8.45), obtenemos la siguiente relación entre H y Q, h:

$$H \circ \mathcal{T}^{-1} = \omega_1 Q_2 + h + \mu, \tag{5.8.46}$$

donde $\mu = \mu(s_1, \varphi_1)$ es una función suave y 2π-periódica en φ_1. Los datos Q, h están determinados por (5.8.46), salvo por una transformación del tipo

$$h \mapsto h + c_1, \qquad Q \mapsto Q + \mathrm{d}_1 c_2,$$

para funciones arbitrarias suaves $c_1 = c_1(s_1$ y $c_2 = c_2(s_1, \varphi_1) = c_2(s_1, \varphi_1 + 2\pi)$. Para calcular μ en (5.8.46), tomamos

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu \,\mathrm{d}\varphi_1, \qquad c_2 = \frac{1}{\omega_1}\int_0^{\varphi_1} (\mu \,\mathrm{d}\varphi_1' - \varphi_1 c_1)$$

■

Supongamos ahora que h y Q están dadas y satisfacen (5.8.44), (5.8.45), respectivamente. Consideremos las formas simplécticas $\widetilde{\Omega}_0^\varepsilon$ y $\widetilde{\Omega}_Q^\varepsilon$ en $\mathcal{N}$. Tomando en cuenta (5.8.35), por el Corolario 5.46, las formas $\widetilde{\Omega}_0^\varepsilon$ y $\widetilde{\Omega}_{\widetilde{Q}}^\varepsilon$ en $\mathcal{N}$ son isomorfas por medio del flujo a tiempo 1, $\widetilde{\Phi}_\varepsilon^1 : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, del sistema dinámico del campo vectorial dependiente del tiempo Z_λ^ε, que es de la forma

$$\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\varepsilon}{\chi_\varepsilon^\lambda}\widetilde{Q}_2, \tag{5.8.47}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\varepsilon}{\chi_\varepsilon^\lambda}\widetilde{Q}_1, \tag{5.8.48}$$

$$\frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{\chi_\varepsilon^\lambda}\left[-\widetilde{Q}_2\frac{\partial\widetilde{Q}_1}{\partial\varphi_2} + \widetilde{Q}_1\frac{\partial\widetilde{Q}_2}{\partial\varphi_2}\right], \tag{5.8.49}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{\chi_\varepsilon^\lambda}\left[\widetilde{Q}_2\frac{\partial\widetilde{Q}_1}{\partial s_2} - \widetilde{Q}_1\frac{\partial\widetilde{Q}_2}{\partial s_2}\right], \tag{5.8.50}$$

con

$$\chi_\varepsilon^\lambda = 1-(1-\lambda)\varepsilon\left[\left(\frac{\partial\widetilde{Q}_2}{\partial s_1} - \frac{\partial\widetilde{Q}_1}{\partial\varphi_1}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{\partial\widetilde{Q}_1}{\partial s_2}\frac{\partial\widetilde{Q}_2}{\partial\varphi_2} - \frac{\partial\widetilde{Q}_2}{\partial s_2}\frac{\partial\widetilde{Q}_1}{\partial\varphi_2}\right)\right].$$

De las hipótesis (H1) y (H2) se sigue que la cerradura del dominio $\mathcal{N}$ es compacta. Más aún, las funciones A y ϕ se pueden extender de manera suave a una vecindad abierta de $\mathcal{M}$. Luego, las funciones $\widetilde{Q}_1$ y $\widetilde{Q}_2$ se pueden extender de manera suave a una vecindad de $\mathcal{N}$ en N. De esta manera

$$\delta_2 = 4\max_{\mathcal{N}}\left|\frac{\partial\widetilde{Q}_2}{\partial s_1} - \frac{\partial\widetilde{Q}_1}{\partial\varphi_1}\right| > 0.$$

Por lo tanto, el flujo $\widetilde{\Phi}_\varepsilon^\lambda$ de (5.8.47)-(5.8.50) está bien definido en $\mathcal{N}$ para $\varepsilon \in [0,\delta_2)$ lo suficientemente pequeño y con $\lambda \in [0,1]$. Dado que el campo vectorial del sistema (5.8.47)-(5.8.50) se anula para $\varepsilon = 0$, el flujo es una transformación cercana a la identidad cuando $\varepsilon \to 0$.

Teorema 5.54 *Bajo las hipótesis* (H1),(H2), *se sigue que para $\varepsilon \in (0,\delta_2)$, suficientemente pequeño, la* transformación twist

$$\Upsilon_\varepsilon = \widetilde{\Phi}_\varepsilon^1 \circ \mathcal{T} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$$

es un simplectomorfismo entre las estructuras canónicas Ω_0^ε y $\widetilde{\Omega}_0^\varepsilon$,

$$(\Upsilon_\varepsilon)_*\Omega_0^\varepsilon = \widetilde{\Omega}_0^\varepsilon.$$

El sistema Hamiltoniano perturbado X_ε (5.1.3) *es transformado bajo Υ_ε a la forma normal*

$$H_\varepsilon \circ (\Upsilon_\varepsilon)^{-1} = f(s_1) + \varepsilon h(s_1,s_2) + O(\varepsilon^2), \tag{5.8.51}$$

donde h está dada por (5.8.5).

Demostración. Necesitamos probar que se cumple (5.8.51). Sea Z_λ^ε el campo vectorial de (5.8.47)-(5.8.50). Si usamos y (5.8.45) podemos calcular

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon \circ \widetilde{\Phi}^{-1} = \widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon - \mathcal{L}_{Z_\lambda^\varepsilon} \widetilde{\mathcal{H}}_\varepsilon + O(\varepsilon^2) \tag{5.8.52}$$

$$= f + \varepsilon(-\omega_1 Q_2 + h) - \varepsilon \mathcal{L}_{Z_\lambda^\varepsilon} f + O(\varepsilon^2) \tag{5.8.53}$$

$$= f + \varepsilon h + O(\varepsilon^2) \tag{5.8.54}$$

donde h está definida por (5.8.5). ■

De esta manera, la *normalización de segundo tipo* es un simplectomorfismo que transforma el sistema no-perturbado a un nuevo sistema Hamiltoniano no-perturbado de la forma $\left(\mathcal{N}_\varepsilon, \widetilde{\Omega}_0^\varepsilon, \widetilde{F}_\varepsilon = f + \varepsilon h\right)$, el cual se escribe como

$$\dot{s}_1 = 0, \tag{5.8.55}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(s_1) + \varepsilon \frac{\partial h(s_1, s_2)}{\partial s_1}, \tag{5.8.56}$$

$$\dot{s}_2 = 0, \tag{5.8.57}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2(s_1, s_2). \tag{5.8.58}$$

Este sistema tiene la misma familia de toros de Liouville Λ_{c_1,c_2}, en los cuales el movimiento es quasi-periódico con frecuencias independientes de ε, $\omega_1(c_1)$ y $\widetilde{\omega}_2(c_1, c_2) = \omega_1(c_1) + \varepsilon\, \partial h(c_1, c_2)/\partial s_1$. La forma normal (5.8.55)-(5.8.58) aparece usualmente en el marco de teoría KAM.

Observación 5.55 *Consideremos, en lugar de Υ_ε, la transformación siguiente:*

$$\widetilde{\Upsilon}_\varepsilon = \Xi_\varepsilon \circ \mathcal{T},$$

donde Ξ_ε está dada por (5.6.63)*. Luego, $\widetilde{\Upsilon}_\varepsilon$ transforma el Hamiltoniano H_ε del sistema original a la forma normal*

$$H_\varepsilon \circ (\widetilde{\Upsilon}_\varepsilon)^{-1} = f(s_1) + \varepsilon h(s_1, s_2) + O(\varepsilon^2).$$

Sin embargo, en general, esta transformación no es un simplectomorfismo entre las dos estructuras canónicas Ω_0^ε y $\widetilde{\Omega}_0^\varepsilon$. Esto es así, por ejemplo, en el siguiente caso particular, en el que la transformación de reducibilidad $\mathcal{T}$ (5.2.34) *es independiente de s,*

$$\frac{\partial A}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0.$$

El caso de un Cilindro de Órbitas Invariante. Consideremos ahora el caso cuando la función H_1 en (5.1.2) es cuadrática en las coordenadas p y q,

$$H_1 = \frac{1}{2}\left(w_1 p^2 + 2 w_2 p\, q + w_3 q^2\right).$$

Supongamos que el sistema (5.8.15)-(5.8.18) es fuertemente estable para todo $s \in \overline{\Delta}$. Sea $\mathcal{D}(s,\varphi) = \mathcal{D}_1(s,\varphi) + i\,\mathcal{D}_2(s,\varphi)$ la solución de la ecuación de Riccati (5.2.60) y consideremos la integral de movimiento $G(s,\varphi,p,q) = (1/2\mathcal{D}_2)\left[(p-\mathcal{D}_1 q)^2 + (\mathcal{D}_2 q)^2\right]$.

Fijemos E_1 y E_2 de manera arbitraria pero sujetos a la condición $0 < E_1 < E_2$. Para todo (s,φ) y $E > 0$, el conjunto de nivel $\Gamma_{s,\varphi}(E)$ en $\mathbb{R}^2$ de $G_{s,\varphi}$ es una trayectoria elíptica de V_G con período $T = 2\pi$. La acción a lo largo de $\Gamma_{s_1,\varphi_1}(E)$ está dada por $a(s,E) = E$. Si $U_{s,\varphi}$ es el anillo abierto elíptico definido como la unión de los conjuntos $\Gamma_{s,\varphi}(E)$, al variar E sobre (E_1,E_2), entonces tomando $\mathcal{M} = \bigcup_{(s,\varphi)} U_{s,\varphi}$, vemos que se cumplen las condiciones (H1) y (H2). Escogemos ahora una sección L haciendo

$$L(s,\varphi,E) = \left(s,\varphi,\sqrt{2E\mathcal{D}_2(s,\varphi)},\,0\right).$$

Tomando en cuenta que $E(s,s_2) = s_2$, se sigue que la inversa $\mathcal{T}_{s,\varphi}^{-1}(s_2,\varphi_2)$ del difeomorfismo en (5.3.3) está dado por

$$p = \sqrt{2\,s_2\mathcal{D}_1}\,\cos(\varphi+\chi), \qquad q = \sqrt{\frac{2\,s_2}{\mathcal{D}_2}}\,\mathrm{sen}(\varphi_2+\chi).$$

Aquí, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1(s,\varphi)$, $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2(s,\varphi)$ y

$$\chi(s,\varphi) = \frac{1}{\omega_1(s)}\left[\omega_2(s)\varphi - \int_0^{\varphi} w_1(s,\varphi')\mathcal{D}_2(s,\varphi')\,\mathrm{d}\varphi'\right]. \tag{5.8.59}$$

$$\omega_2(s) = \omega_1(s)\beta(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varphi} w_1(s,\varphi')\mathcal{D}_2(s,\varphi')\,\mathrm{d}\varphi'. \tag{5.8.60}$$

Las variables acción-ángulo, paramétricamente dependientes, están dadas por

$$A = G, \qquad \phi = \arctan\left(\frac{1}{\mathcal{D}_2}\left(\frac{p}{q} - \mathcal{D}_1\right)\right) + \chi.$$

En este caso tenemos:

$$P_1 = \frac{1}{\mathcal{D}_2}\left[\frac{\partial\mathcal{D}_2}{\partial s}\,p\,q + \left(\frac{\partial\mathcal{D}_1}{\partial s}\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1\frac{\partial\mathcal{D}_1}{\partial s}\right)q^2\right] + G\,\frac{\partial\chi}{\partial s}, \tag{5.8.61}$$

$$P_2 = \frac{1}{\mathcal{D}_2}\left[\frac{\partial\mathcal{D}_2}{\partial\varphi}\,p\,q + \left(\frac{\partial\mathcal{D}_1}{\partial\varphi}\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1\frac{\partial\mathcal{D}_1}{\partial\varphi}\right)q^2\right] + G\,\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}. \tag{5.8.62}$$

También es posible demostrar que para que se cumpla (5.8.35), podemos sustituir en (5.8.31) la expresión

$$K = \frac{p\,q}{2}$$

y

$$\widetilde{Q}_1 = \frac{s_2}{2\mathcal{D}_2}\left[\mathrm{sen}\,2(\varphi_2+\chi)\frac{\partial\mathcal{D}_2}{\partial s_1} + (1-\cos 2(\varphi_2+\chi))\frac{\partial\mathcal{D}_1}{\partial s_1}\right] + \frac{\partial\chi}{\partial s_1}, \tag{5.8.63}$$

$$\widetilde{Q}_2 = \frac{s_2}{2\mathcal{D}_2}\left[\mathrm{sen}\,2(\varphi_2+\chi)\frac{\partial\mathcal{D}_2}{\partial\varphi_1} + (1-\cos 2(\varphi_2+\chi))\frac{\partial\mathcal{D}_1}{\partial\varphi_1}\right] + \frac{\partial\chi}{\partial\varphi_1}, \tag{5.8.64}$$

Como una consecuencia de la discusión anterior, derivamos el siguiente resultado.

Teorema 5.56 *En el espacio fase* $\big(\mathbb{R}^4, \Omega_0^\varepsilon = \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\varphi + \varepsilon \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q\big)$ *consideremos el sistema Hamiltoniano*

$$H_\varepsilon = f(s) + \frac{\varepsilon}{2}\big(w_1\, p^2 \,+\, 2\, w_2\, p\, q \,+\, w_3\, q^2\big) \,+\, O(\varepsilon^2). \tag{5.8.65}$$

Supongamos que el sistema sistema normal linealizado X_0 (5.1.14) *sobre el cilindro de órbitas invariante* $\Delta_1 \times \mathbb{S}^1$ *es fuertemente estable. Entonces, la transformación* Υ_ε *transforma* $\big(\mathbb{R}^4, \Omega_0^\varepsilon, H_\varepsilon\big)$ *al sistema Hamiltoniano* $\big(\mathcal{N}, \widetilde{\Omega}_0^\varepsilon, \widetilde{H}_\varepsilon\big)$ *de la forma*

$$H_\varepsilon \circ \Upsilon_\varepsilon^{-1} = f(s_1) \,+\, \varepsilon\, \omega_2(s_1)\, s_2 \,+\, O(\varepsilon^2).$$

En este caso $\omega_2(s_1)$ *está dada por* (5.8.60), Φ_ε^1 *es el flujo a tiempo* 1 *de* (5.8.19)-(5.8.22), *con* P_1, P_2 *dadas por* (5.8.61), (5.8.62), $\mathcal{T}$ *es la transformación de Floquet-Lyapunov en* (5.2.34) *y*

$$\Xi_\varepsilon(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) = \left(s_1 - \varepsilon \frac{\omega_2'(s_1)}{\omega_1'(s_1)} s_2, \varphi_1, s_2, \varphi_2\right).$$

Observación 5.57 *La transformación* $\mathcal{T}$ *es precisamente la modificación de la transformación estándar de Floquet-Lyapunov* $\mathscr{L} : (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}^2 \to (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$\mathscr{L}_{s,\varphi} = \exp\left(\frac{\varphi_1}{\omega_1(s_1)} \mathcal{K}(s_1)\right) \circ F^{-1}(s_1, \varphi_1). \tag{5.8.66}$$

En este caso, $\mathcal{K}(s_1) = \frac{\omega_1(s_1)}{2\pi} \ln \mathfrak{M}(s)$ *y existe una rama real del logaritmo de* $\mathfrak{M}(s)$ *debido a la hipótesis de estabilidad. Luego,* $\mathcal{K}(s_1) \in \mathfrak{sp}(1, \mathbb{R})$ *y los valores propios de* $\mathcal{K}(s_1)$ *son* $\pm i\, \omega_2(s_1)$. *Además, bajo la transformación* $\mathcal{L}$, *el sistema* (5.8.55)-(5.8.58) *se reduce a la forma constante*

$$\dot{s}_1 = 0, \tag{5.8.67}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(s_1), \tag{5.8.68}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \mathcal{K}(s_1) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{5.8.69}$$

De esta manera, podemos escoger funciones vectoriales suaves $\Delta_1 \ni s_1 \mapsto \mathbf{e}_i(s_1) \in \mathbb{R}^2$ $(i = 1, 2)$, *tales que*

$$\mathcal{K}(s_1)\, \mathbf{e}_1(s_1) = -\omega_2(s_1)\, \mathbf{e}_2(s_1), \tag{5.8.70}$$

$$\mathcal{K}(s_1)\, \mathbf{e}_2(s_1) = \omega_2(s_1)\, \mathbf{e}_1(s_1) \tag{5.8.71}$$

y $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \circ \mathscr{L}$, *donde* $\mathcal{T}_0 : (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to (\Delta_1 \times \mathbb{S}^1) \times (\mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{S}^1)$ *es la transformación con inversa*

$$(s, \varphi, p, q) \mapsto \sqrt{\frac{2s_2}{\omega_2(s_1)}} \cos \varphi_2\, \mathbf{e}_1(s_1) + \sqrt{\frac{2s_2}{\omega_2(s_1)}} \operatorname{sen} \varphi_2\, \mathbf{e}_2(s_1).$$

Observación 5.58 *Sea $\mathscr{L}_{s,\varphi}$ la transformación de Floquet–Lyapunov en* (5.8.66). *Luego, el "*push-forward*"del Hamiltoniano H_ε* (5.8.65), *por medio del difeomorfismo con inversa*

$$s_1 \mapsto s_1 - \frac{\varepsilon}{2}\left\langle J\mathscr{L}_{s,\varphi}^{-1}\frac{\partial \mathscr{L}_{s,\varphi}}{\partial\varphi}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\right\rangle, \tag{5.8.72}$$

$$\varphi_1 \mapsto \varphi_1, \tag{5.8.73}$$

$$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} \mapsto \mathscr{L}_{s,\varphi}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} \tag{5.8.74}$$

está dado por

$$f(s_1) - \frac{\varepsilon}{2}\left\langle J\,\mathcal{K}(s_1)\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\right\rangle + O(\varepsilon^2).$$

Sin embargo, en general esta transformación no es simpléctica. En particular esto es así el el caso cuando la transformación de Floquet-Lyapunov es independiente de s.

Capítulo 6

Ecuaciones de Euler como sistemas Hamiltonianos casi-integrables: El caso $\mathfrak{so}(4)$

Un ejemplo importante en el que es posible aplicar varios de los resultados obtenidos en los capítulos previos es el de los sistemas de Euler [68], los cuales son sistemas Hamiltonianos en álgebras de Lie con la estructura de Lie–Poisson (1.2.6). En particular, analizaremos el caso de este tipo de sistemas en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(4)$, los cuales nos dan una clase especial de sistemas sesqui-producto.

El problema de la representación de un sistema Hamiltoniano dado como un sistema casi integrable se presenta normalmente cuando se estudia la dinámica en vecindades "apropiadas" de subvariedades invariantes, por ejemplo, *cilindros de órbitas*. En esta parte abordamos este problema para el caso de las ecuaciones de Euler en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$, consideradas como un sistema Hamiltoniano con respecto al corchete de Lie–Poisson en $\mathfrak{so}(4)$ y un Hamiltoniano genérico $\mathcal{H}$. Para consultar sobre algunos aspectos de la teoría de ecuaciones de Euler en álgebras de Lie, incluyendo resultados sobre su integrabilidad y sus aplicaciones físicas, referimos al lector a [3, 6, 11, 12, 28, 40, 44, 45].

6.1 Formulación del problema

Si identificamos el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)^*$ con el espacio $\mathbb{R}^3$ (ver Sección 1.2), entonces el sistema de Euler en $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ se expresa por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{\xi} \times \frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \tag{6.1.1}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x} \times \frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}. \tag{6.1.2}$$

En este caso, en el contexto de la teoría Hamiltoniana de perturbaciones, estudiamos la dinámica de Euler alrededor de un conjunto de nivel el cual es un conjunto singular (una órbita adjunta singular), $\{\|\boldsymbol{\xi}\| = \text{const} > 0,\ \mathbf{x} = 0\}$, de las dos funciones de Casimir. De esta manera, estamos interesados en un dominio en el cual

$$\|\boldsymbol{\xi}\| = \text{const} > 0, \qquad \|\mathbf{x}\| \ll 1. \tag{6.1.3}$$

La restricción de (6.1.1),(6.1.2) a la órbita singular es un sistema Hamiltoniano en la 2-esfera. Si fijamos un dominio abierto foliado trivialmente por trayectorias periódicas de este sistema y si tomamos las correspondientes variables acción–ángulo $s \in \Delta = (\Delta_1, \Delta_2) \subset \mathbb{R}$, $\tau \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$, reducimos el problema original (6.1.1)–(6.1.3) al siguiente sistema dinámico en el espacio fase de 5 dimensiones $\mathcal{M} = \Delta \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3$:

$$\frac{ds}{dt} = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\phi}(s,\tau)}{\partial \tau}, \mathbf{x} \right\rangle + O_2, \tag{6.1.4}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \omega(s) - \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\phi}(s,\tau)}{\partial s}, \mathbf{x} \right\rangle + O_2, \tag{6.1.5}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \boldsymbol{\phi}(s,\tau) \times \mathbf{x} + O_2. \tag{6.1.6}$$

En este caso, $O_k = O(\|\mathbf{x}\|^k)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y las funciones ω y $\boldsymbol{\phi}$ están determinadas por las primeras variaciones de $\mathcal{H}$ en $\mathbf{x} = 0$. El sistema (6.1.4)–(6.1.6) es Hamiltoniano con respecto a la estructura de Poisson dada por el corchete del *producto directo* en $\mathcal{M}$:

$$\{s, \tau\}_{\mathcal{M}} = 1, \tag{6.1.7}$$

$$\{s, x_i\}_{\mathcal{M}} = \{\tau, x_i\}_{\mathcal{M}} = 0, \tag{6.1.8}$$

$$\{x_i, x_j\}_{\mathcal{M}} = \epsilon_{ijk} x_k, \tag{6.1.9}$$

y la función

$$H(s, \tau, \mathbf{x}) = f(s) - \langle \boldsymbol{\phi}(s,\tau), \mathbf{x} \rangle + O_2, \tag{6.1.10}$$

donde $f'(s) = \omega(s)$.

Si restringimos el sistema (6.1.4)–(6.1.6) a los conjuntos de nivel regulares de la función de Casimir $K = \|\mathbf{x}\|^2$ del corchete (6.1.7)–(6.1.9) obtenemos una familia de sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad. El conjunto singular de nivel $\Delta \times \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ de K está, si lo vemos como un cilindro de órbitas, foliado trivialmente por órbitas cerradas del sistema (6.1.4)–(6.1.6) las cuales tienen movimiento periódico con frecuencias dadas por $\omega(s)$. Para que el sistema (6.1.4)–(6.1.6) sea completamente integrable se requiere una integral de movimiento adicional, que sea funcionalmente independiente de las integrales de movimiento H y K.

El problema de encontrar condiciones de integrabilidad para sistemas de este tipo es una tarea difícil, aún en el caso de Hamiltonianos "cuadráticos" $\mathcal{H}$ [3, 11, 44]. En este caso estamos interesados en el comportamiento cualitativo de la dinámica de Euler alrededor del cilindro de órbitas en el contexto de los resultados KAM sobre la persistencia de toros quasi–periódicos y la excitación de modos normales [6, 7, 13, 40, 59, 60].

El primer paso en esta dirección es pensar en el sistema (6.1.4)–(6.1.6) como un sistema Hamiltoniano perturbado cuya parte no–perturbada es un sistema Hamiltoniano completamente integrable que satisface ciertas condiciones de no–degeneración tales como las condiciones de Kolmogorov [6, 7, 40], o bien, condiciones de no-degeneración en el sentido de Rüssmann [13, 59, 60], que son más débiles. Nuestra principal observación aquí es que un candidato natural para tomar el papel de sistema Hamiltoniano no–perturbado, que es no–degenerado en el sentido de Rüssmann, es el *sistema linear de Euler* en el cilindro de órbitas:

$$\frac{ds}{dt} = 0, \qquad \frac{d\tau}{dt} = \omega(s), \tag{6.1.11}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \boldsymbol{\phi}(s,\tau) \times \mathbf{x}. \tag{6.1.12}$$

Este sistema se obtiene de (6.1.4)–(6.1.6) a través del proceso de linealización normal en $\Delta \times \mathbb{S}^1 \times \{0\}$. El retrato fase del sistema (6.1.11),(6.1.12) es bastante sencillo y consiste de órbitas periódicas y de una familia de 2–toros quasi–periódicos que depende de 3 parámetros la cual está determinada por los conjuntos de nivel de las tres integrales de movimiento. Sin embargo, en el contexto del formalismo Hamiltoniano, el sistema (6.1.11),(6.1.12) nos proporciona un ejemplo sencillo de un sistema dinámico para el que no resulta evidente una formulación Hamiltoniana. Esto se debe a un fenómeno general [68]: el proceso de linealizació normal está estrechamente ligado con límites singulares de sistemas Hamiltonianos. De esta manera, el sistema lineal de Euler no es Hamiltoniano en el corchete natural (6.1.7)–(6.1.9).

Un enfoque general para la construcción de estructuras Hamiltonianas para sistemas de Euler lineales ha sido desarrollado en [68]. Aquí se da una derivación directa de una estructura Hamiltonian para (6.1.11),(6.1.12), se muestra que este sistema es completamente integrable y se calculan las variables acción–ángulo. Finalmente, es posible reconocer al sistema (6.1.4)–(6.1.6) como un sistema Hamiltoniano casi integrable después de aplicar una "transformación de torsión" la cual es definida como la composición de una transformación de tipo Floquet–Lyapunov y el flujo a tiempo 1 de un campo vectorial que depende del tiempo, asociado a (6.1.11),(6.1.12).

6.2 Construcción de una transformación de tipo Floquet–Lyapunov

Consideremos el campo vectorial Hamiltoniano del sistema (6.1.4)–(6.1.6),

$$X_H = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \tau}, \mathbf{x} \right\rangle \frac{\partial}{\partial s} + \left(\omega - \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial s}, \mathbf{x} \right\rangle \right) \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle \; + \; O_2. \tag{6.2.1}$$

cuya parte lineal es el campo vectorial del sistema linear de Euler (6.1.11),(6.1.12),

$$X^{\mathrm{lin}} = \omega(s) \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle \boldsymbol{\phi}(s,\tau) \times \mathbf{x}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle. \tag{6.2.2}$$

Entonces,

$$X_H = X^{\mathrm{lin}} + X^{\mathrm{tor}} \; + \; O_2. \tag{6.2.3}$$

donde $X^{\mathrm{tor}} = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \tau}, \mathbf{x} \right\rangle \frac{\partial}{\partial s} - \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial s}, \mathbf{x} \right\rangle \frac{\partial}{\partial \tau}$ es la llamada “torsión dinámica” de X_H sobre el cilindro de órbitas.

Nuestro propósito es reducir la parte lineal de X_H a una forma normal usando una transformación de tipo Floquet–Lyapunov. Para ello, supongamos que las funciones $\omega = \omega(s) \in C^\infty(\overline{\Delta})$ y $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(s,\tau) \in C^\infty(\overline{\Delta} \times \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^3$ en (6.1.4)-(6.1.6) satisfacen las siguientes condiciones:

$$\omega(s) > 0, \qquad \boldsymbol{\phi}(s,\tau) = \boldsymbol{\phi}(s,\tau+2\pi) \quad \text{y} \quad \omega' \neq 0 \quad \text{en} \quad \overline{\Delta}. \tag{6.2.4}$$

Si pensamos en (6.1.11),(6.1.12) como una familia de ecuaciones de Euler lineales periódicas en $\mathbb{R}^3$, podemos considerar la solución fundamental correspondiente $G = G(s,\tau)$,

$$\omega(s)\frac{\partial G}{\partial \tau} = (\Lambda \circ \boldsymbol{\phi})\, G, \qquad G(s,0) = I.$$

Aquí,

$$\Lambda \circ \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix},$$

es la matriz del producto cruz en $\mathbb{R}^3$. Es claro que $G \in C^\infty(\overline{\Delta} \times \mathbb{R}) \otimes SO(3)$ y el espectro de la matriz de monodromía $M(s) = G(s, 2\pi)$ pertenece al círculo unitario $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ e incluye al 1. Suponemos que existe una función vectorial suave $(s,\tau) \mapsto \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(s,\tau) \in \mathbb{R}^3$ que satisface

$$\omega(s)\frac{d\boldsymbol{\nu}}{d\tau} = \boldsymbol{\phi}(s,\tau) \times \boldsymbol{\nu}, \tag{6.2.5}$$

$$\boldsymbol{\nu}(s,\tau) = \boldsymbol{\nu}(s,\tau+2\pi), \qquad \|\boldsymbol{\nu}(s,\tau)\| = 1. \tag{6.2.6}$$

De este modo, $\boldsymbol{\nu}$ es una solución de Floquet periódica de ecuación lineal de Euler, la cual varía de manera suave con respecto al parámeter s. Tal solución siempre existe si el espectro de $M(s)$ es simple para toda s. Los valores propios de $M(s)$ son de la forma $1, \exp(\pm i\,\beta(s))$, donde la evolución del exponente de Floquet $\beta(s)$ en s está dada por la fórmula de variación de parámetros [26, 68]

$$\beta'(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\langle \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\boldsymbol{\phi}(\tau,s)}{\omega(s)}\right), \boldsymbol{\nu}(\tau,s) \right\rangle d\tau. \tag{6.2.7}$$

Introduzcamos la notación

$$\kappa(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\beta'(s)\,\omega^2(s)}{\omega'(s)}, \tag{6.2.8}$$

y

$$d_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left[\max_{s\in\overline{\Delta}} \frac{|\kappa'(s)|}{|\omega(s)|}\right]^{-1}. \tag{6.2.9}$$

Se sigue de esto que y de (6.2.4) que $d_0 > 0$.

Sea $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(s,\tau)$ una solución periódica unitaria de Floquet en (6.2.5),(6.2.6). Entonces, uno puede escoger funciones vectoriales suaves $\mathbf{e}_1^0(s), \mathbf{e}_2^0(s)$ en Δ las cuales, junto con el vector "inicial" $\boldsymbol{\nu}^0(s) = \boldsymbol{\nu}(s,0)$ formen una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$, positivamente orientada, esto es, $\|\mathbf{e}_1^0(s)\| = \|\mathbf{e}_2^0(s)\| = 1$ y

$$\mathbf{e}_1^0(s) \times \mathbf{e}_2^0(s) = \boldsymbol{\nu}^0(s), \quad \mathbf{e}_2^0(s) \times \boldsymbol{\nu}^0(s) = \mathbf{e}_1^0(s), \quad \boldsymbol{\nu}^0(s) \times \mathbf{e}_1^0(s) = \mathbf{e}_2^0(s).$$

Se puede mostrar que

$$M(s)\mathbf{e}_1^0(s) = \cos\big(2\pi\beta(s)\big)\,\mathbf{e}_1^0(s) + \sin\big(2\pi\beta(s)\big)\,\mathbf{e}_2^0(s), \tag{6.2.10}$$
$$M(s)\mathbf{e}_2^0(s) = -\sin\big(2\pi\beta(s)\big)\,\mathbf{e}_1^0(s) + \cos\big(2\pi\beta(s)\big)\,\mathbf{e}_2^0(s), \tag{6.2.11}$$

donde $\beta(s)$ es el multiplicador de Floquet que satisface (6.2.7). Estas fórmulas implican que $\mathbf{e}_1^0(s) - i\,\mathbf{e}_2^0(s)$ es un vector propio de la matriz de monodromía $M(s)$ que corresponde al multiplicador de Floquet $\exp\big(i\,2\pi\beta(s)\big)$. Consideremos un marco ortonormal móvil $\mathbf{e}_1(s,\tau)$, $\mathbf{e}_2(s,\tau)$, $\boldsymbol{\nu}(s,\tau)$ en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbf{e}_1(s,\tau) = G(s,\tau)\big[\cos(\beta\tau)\,\mathbf{e}_1^0(s) - \sin(\beta\tau)\,\mathbf{e}_2^0(s)\big], \tag{6.2.12}$$
$$\mathbf{e}_2(s,\tau) = G(s,\tau)\big[\sin(\beta\tau)\,\mathbf{e}_1^0(s) + \cos(\beta\tau)\,\mathbf{e}_2^0(s)\big]. \tag{6.2.13}$$

Estas funciones vectoriales suaves son 2π–periódicas en τ debido a (6.2.10),(6.2.11). Se sigue de (6.2.12),(6.2.13) que

$$\omega\frac{d\mathbf{e}_1}{d\tau} = \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{e}_1 - \omega\beta\,\mathbf{e}_2, \qquad \omega\frac{d\mathbf{e}_2}{d\tau} = \omega\beta\,\mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{e}_2. \tag{6.2.14}$$

Definamos la siguiente función suave de valores matriciales $(s,\tau) \mapsto B(s,\tau) \in SO(3)$:

$$B(s,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \big[\mathbf{e}_1(s,\tau), \mathbf{e}_2(s,\tau), \boldsymbol{\nu}(s,\tau)\big]^T. \tag{6.2.15}$$

Es claro que $B(s,\tau + 2\pi) = B(s,\tau)$. Introduzcamos también las funciones vectoriales suaves $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1(s,\tau)$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2(s,\tau)$, determinadas unívocamente por

$$\frac{\partial B}{\partial s}B^{-1} = -\Lambda \circ \mathbf{b}_1, \qquad \frac{\partial B}{\partial \tau}B^{-1} = -\Lambda \circ \mathbf{b}_2. \tag{6.2.16}$$

Entonces, $\mathbf{b}_1$ and $\mathbf{b}_2$ son 2π-periódicas en τ y satisfacen la condición de compatibilidad

$$\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \tau} - \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial s} = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2. \tag{6.2.17}$$

En términos del marco ortonormal $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \boldsymbol{\nu}$, se tienen las representaciones siguientes:

$$\mathbf{b}_1 = \left(\left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial s}, \boldsymbol{\nu}\right\rangle, -\left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial s}, \boldsymbol{\nu}\right\rangle, \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial s}, \mathbf{e}_2\right\rangle\right), \tag{6.2.18}$$
$$\mathbf{b}_2 = \left(\left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \tau}, \boldsymbol{\nu}\right\rangle, -\left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \tau}, \boldsymbol{\nu}\right\rangle, \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \tau}, \mathbf{e}_2\right\rangle\right). \tag{6.2.19}$$

Más aún, se sigue de (6.2.5) y de (6.2.14) que

$$\mathbf{b}_2 = -\beta\,\mathbf{i}_3 + \frac{1}{\omega}\,B\,\boldsymbol{\phi}. \tag{6.2.20}$$

Ahora, definimos el difeomorfismo $\mathcal{T} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ por

$$T(s,\tau,\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \big(s,\tau,B(s,\tau)\mathbf{x}\big). \tag{6.2.21}$$

Es claro que $\mathcal{T}$ es una transformación gauge. Además, un cálculo directo, usando (6.2.16)-(6.2.20), muestra que el sistema dinámico que corresponde al campo vectorial $\mathcal{T}_*X_H$ es de la forma

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \langle\mathbf{q},\mathbf{x}\rangle + O_2, && (6.2.22)\\ \dot{\tau} &= \omega - \langle\mathbf{p},\mathbf{x}\rangle + O_2, && (6.2.23)\\ \dot{\mathbf{x}} &= \omega\beta\,\mathbf{i}_3\times\mathbf{x} + O_2, && (6.2.24) \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{p} = \omega\frac{\partial\mathbf{b}_1}{\partial\tau} + \omega\beta\,\mathbf{b}_1\times\mathbf{i}_3 + \omega'\,\mathbf{b}_2 + (\omega\beta)'\,\mathbf{i}_3, \qquad \mathbf{q} = \omega\frac{\partial\mathbf{b}_2}{\partial\tau} + \omega\beta\,\mathbf{b}_2\times\mathbf{i}_3.$$

El "push–forward" del corchete natural de Poisson (6.1.7)–(6.1.9) por $\mathcal{T}$ está dado por las siguientes relaciones de corchetes

$$\{s,\tau\}_{\mathcal{T}} = 1, \tag{6.2.25}$$

$$\{s,\mathbf{x}\}_{\mathcal{T}} = -\mathbf{b}_2\times\mathbf{x}, \qquad \{\tau,\mathbf{x}\}_{\mathcal{T}} = \mathbf{b}_1\times\mathbf{x}, \tag{6.2.26}$$

$$\{\mathbf{x}\otimes\mathbf{x}\}_{\mathcal{T}} = -\Lambda\circ\mathbf{x} + \big[(\mathbf{b}_1\times\mathbf{x})\otimes(\mathbf{b}_2\times\mathbf{x}) - (\mathbf{b}_2\times\mathbf{x})\otimes(\mathbf{b}_1\times\mathbf{x})\big]. \tag{6.2.27}$$

Aquí, $(\mathbf{x}\otimes\mathbf{y})_{ij} = x_iy_j$. Por lo tanto, después de aplicar la transformación (6.2.21), el sistema original es transformado en el sistema Hamiltoniano $\mathcal{T}_*X_H$ relativo al corchete de Poisson $\{\,,\}_{\mathcal{T}}$ y a la función Hamiltoniana

$$H\circ\mathcal{T}^{-1} = f - \omega\,\langle\beta\,\mathbf{i}_3 + \mathbf{b}_2,\mathbf{x}\rangle + O_2. \tag{6.2.28}$$

Se sigue de (6.2.22)–(6.2.24) que el sistema dinámico de $\mathcal{T}_*X^{\text{lin}}$ es

$$\begin{aligned} \dot{s} &= 0, \qquad \dot{\tau} = \omega(s), && (6.2.29)\\ \dot{\mathbf{x}} &= \omega(s)\beta(s)\,\mathbf{i}_3\times\mathbf{x}. && (6.2.30) \end{aligned}$$

De esta manera, el sistema lineal de Euler se transforma bajo $\mathcal{T}$ en el sistema (6.2.29),(6.2.30) que es de forma "constante". En el contexto de la teoría de reducibilidad para sistemas periódicos lineales, $\mathcal{T}$ juega el papel de la transformación de Floquet–Lyapunov.

6.3 Estructura Hamiltoniana para la dinámica linealizada

Es fácil verificar que el sistema (6.2.29),(6.2.30) es Hamiltoniano en el corchete natural de Poisson (6.1.7)–(6.1.9) si y sólo si

$$(\omega\beta)' = 0.$$

Así, la formulación Hamiltoniana para (6.2.29),(6.2.30) no es, en general, evidente.

La idea aquí es buscar una estructura Hamiltoniana para (6.2.29),(6.2.30) en una clase de deformaciones triviales de $\{\,,\}_{\mathcal{M}}$. Intentemos las siguientes relaciones para los corchetes en $\mathcal{M}$:

$$\{s,\tau\}_{a,b} = b(s,x_3), \tag{6.3.1}$$

$$\{s,x_1\}_{a,b} = a(s,x_3)x_2, \qquad \{s,x_2\}_{a,b} = -a(s,x_3)x_1, \tag{6.3.2}$$

$$\{s,x_3\}_{a,b} = 0, \qquad \{\tau,x_i\}_{a,b} = 0, \tag{6.3.3}$$

$$\{x_i,x_j\}_{a,b} = \epsilon_{ijk}x_k. \tag{6.3.4}$$

En este caso, a y b son ciertas funciones suaves en las variables s, x_3.

Proposición 6.1 *Los corchetes* (6.3.1)–(6.3.4) *satisfacen la identidad de Jacobi si y sólo si las funciones a, b están relacionadas por la siguiente condición de integrabilidad*

$$\frac{\partial b}{\partial x_3} = \frac{\partial a}{\partial s}b - a\frac{\partial b}{\partial s}. \tag{6.3.5}$$

La demostración de este resultado es una verificación directa que muestra que la condición (6.3.5) se deriva de la identidad de Jacobi para las funciones coordenadas s, τ y x_1. Debemos señalar que $a = 0$ y $b = 1$ son soluciones de (6.3.5) y el corchete $\{\,,\}_{0,1}$ coincide con $\{\,,\}_{\mathcal{M}}$.

Afirmamos que los corchetes de Poisson del tipo (6.3.1)–(6.3.4) nos dan una deformación trivial del corchete natural $\{\,,\}_{\mathcal{M}}$. Supongamos que tenemos funciones a y b que satisfacen (6.3.5) y tal que

$$a,b \in C^\infty(\mathcal{D}) \quad \text{and} \quad b \neq 0 \quad \text{on} \quad \mathcal{D},$$

donde $\mathcal{D} \subset \Delta \times \mathbb{R}$ es un dominio abierto. Entonces, existe una función suave $m \in C^\infty(\mathcal{D})$ que es determinada, salvo por una constante, por las relaciones

$$\frac{\partial m}{\partial s} = \frac{1}{b} - 1, \qquad \frac{\partial m}{\partial x_3} = -\frac{a}{b}. \tag{6.3.6}$$

La existencia de m se sigue de la observación de que la condición de solubilidad de (6.3.6) para m coincide con la relación (6.3.5). Unos cálculos sencillos, por medio de (6.3.1)–(6.3.4) y (6.3.6), nos llevan al siguiente hecho:

Proposición 6.2 *El "push–forward" del corchete de Poisson $\{\,,\}_{a,b}$ por el difeomorfismo*

$$(s,\tau,\mathbf{x}) \mapsto (s+m(s,x_3),\tau,\mathbf{x}), \tag{6.3.7}$$

coincide con el corchete natural (6.1.7)–(6.1.9).

Observamos que la transformación (6.3.7) es un difeomorfismo debido a que su Jacobiano es igual a $\frac{1}{b} \neq 0$. La Proposición 6.2 tendrá un importante papel en la Sección 6.5, en la cual construiremos la transformación de torsión Y (6.5.5).

Por ahora, regresemos a nuestro sistema (6.2.29),(6.2.30). Supongamos que este sistema se puede escribir en forma de corchete como

$$\dot{s} = \{F,s\}_{a,b}, \quad \dot{\tau} = \{F,\tau\}_{a,b}, \quad \dot{x}_i = \{F,x_i\}_{a,b}, \tag{6.3.8}$$

relativo al corchete (6.3.1)–(6.3.4) y a la función $F(s,x_3) = f(s) + f_1(s)x_3$, para algunas $a,b>0$ y f_1. Entonces es fácil ver que (6.3.8) junto con la relación (6.3.5) nos lleva a ciertas ecuaciones para a, b y f_1, las cuales tienen las soluciones siguientes:

$$a = -\frac{(\omega\beta+\kappa)}{\omega+\kappa' x_3}, \qquad b = \frac{\omega}{\omega+\kappa' x_3}, \qquad f_1 = \kappa.$$

Aquí, κ está dada por (6.2.8). Más aún, en este caso, la función m en (6.3.6) tiene la forma

$$m(s,x_3) = \left[\beta(s) + \frac{\kappa(s)}{\omega(s)}\right] x_3 \tag{6.3.9}$$

De esta manera, llegamos a la observación principal:

Proposición 6.3 *El sistema* (6.2.29),(6.2.30) *es Hamiltoniano relativo al corchete de Poisson*

$$\{s,\tau\}_{a,b} = \frac{\omega}{\omega+\kappa' x_3}, \tag{6.3.10}$$

$$\{s,x_1\}_{a,b} = -\frac{(\omega\beta+\kappa)}{\omega+\kappa' x_3}\,x_2, \qquad \{s,x_2\}_{a,b} = \frac{(\omega\beta+\kappa)}{\omega+\kappa' x_3}\,x_1, \tag{6.3.11}$$

$$\{s,x_3\}_{a,b} = 0, \qquad \{\tau,x_i\}_{a,b} = 0, \tag{6.3.12}$$

$$\{x_i,x_j\}_{a,b} = \epsilon_{ijk}x_k, \tag{6.3.13}$$

y la función

$$F(s,x_3) = f(s) + \kappa(s)\,x_3. \tag{6.3.14}$$

Observación 6.4 *El sistema lineal original de Euler* (6.1.11),(6.1.12) *es Hamiltoniano relativo al "pull–back" del corchete* (6.3.10)–(6.3.13) *por la transformación de Floquet–Lyapunov $\mathcal{T}$, la cual tiene una forma más complicada* [68]. *Se puede probar que esta estructura Hamiltonian para el sistema lineal de Euler es única en una clase natural de estructuras de Poisson* [68].

En general, la estructura de Poisson (6.3.10)–(6.3.13) posee singularidades en los puntos de la hipersuperficie

$$\mathrm{Sin} = \big\{(s,\tau,\mathbf{x}) \mid \kappa'(s)x_3 + \omega(s) = 0\big\},$$

la cual es controlada por la información "dinámica" ω, β del sistema lineal de Euler. Así, el espacio fase del sistema (6.2.29),(6.2.30) visto como un sistema Hamiltoniano es $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}} = \mathcal{M} \setminus \mathrm{Sin}$, el cual consiste del cilindro de órbitas $\Delta \times \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ y las variedades simplécticas invariantes de 4 dimensiones (hojas simplécticas)

$$\mathcal{S}_r^{\mathrm{reg}} = \mathcal{S}_r \cap \mathcal{M}^{\mathrm{reg}}, \qquad r \in (0,\infty),$$

donde $\mathcal{S}_r = (\Delta \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}_r^2$.

Por otro lado, es claro, independientemente de la formulación Hamiltoniana discutida arriba, que $F_1 = s$, $F_2 = x_3$ y K son integrales de movimiento, funcionalmente independientes, del sistema (6.2.29),(6.2.30), cuyos conjuntos de nivel regulares comunes definen 2–toros invariantes $\mathbb{T}^2_{r,c_1,c_2} = \gamma_1(c_1) \times \gamma_2(r,c_2)$, para todo $r > 0$, $c_1 \in \Delta$ and $c_2 \in (0,\infty)$. Aquí,

$$\gamma_1(c_1) = \{c_1\} \times \mathbb{S}^1, \quad \gamma_2(r,c_2) = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x} - c_2\,\mathbf{i}_3\| = (r^2 - c_2^2)^{\frac{1}{2}}\big\}. \tag{6.3.15}$$

Cada toro $\mathbb{T}^2_{r,c_1,c_2}$ conlleva un movimiento quasi–periódico a lo largo de las trayectorias de $\mathcal{T}_* X^{\mathrm{lin}}$ con frecuencias

$$\omega_1(c_1) = \omega(c_1), \qquad \omega_2(c_1) = \omega(c_1)\,\beta(c_1). \tag{6.3.16}$$

Ahora bien, la descripción Hamiltoniana nos permite decir que $\mathcal{T}_* X^{\mathrm{lin}}$ define un sistema Hamiltoniano completamente integrable en $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}$. Para cada $(c_1,c_2) \in \Delta \times (0,\infty) \setminus \Gamma$, el toro $\mathbb{T}^2_{r,c_1,c_2}$ viene a ser un toro de Liuoville. Aquí, $\Gamma = \big\{(c_1,c_2) \in \Delta \times (0,\infty) \mid \kappa'(c_1)c_2 = -\omega(c_1)\big\}$ es la curva singular curve en espacio de parámetros. Para cada $(c_1,c_2) \in \Gamma$, el toro $\mathbb{T}^2_{r,c_1,c_2}$ no puede ser visto como un toro de Liuoville debido a que $\mathbb{T}^2_{r,c_1,c_2}$ no es una órbita de la acción Hamiltoniana del 2–toro.

Debemos señalar que en el caso particular cuando

$$\kappa'(s) = 0,$$

la estructura de Poisson (6.3.10)–(6.3.13) está bien definida en todo el espacio fase $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}} = \mathcal{M}$. En términos de las frecuencias del movimiento quasi–periódico, esta condición se lee como

$$\frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \mathrm{const.}$$

Esto significa que la imagen de la función de frecuencias es una línea recta en el plano.

6.4 Variables acción-ángulo

Fijemos $r \in (0, d_0)$. Entonces $\mathcal{S}_r^{\text{reg}} = \mathcal{S}_r$ es una variedad simpléctica de dimensión 4 cuya 2–forma simpléctica Ω_r está definida por la condición de compatibilidad [45]:

$$\Omega_r(\text{Ham}_{g_1}, \text{Ham}_{g_2}) = \{g_1, g_2\}_{a,b}, \qquad \forall\, g_1, g_2. \tag{6.4.1}$$

Aquí, Ham_g denota el campo vectorial Hamiltoniano de una función g. La restricción del sistema (6.2.29),(6.2.30) a $\mathcal{S}_r$ nos da un sistema Hamiltoniano completamente integrable con dos grados de libertad. El dominio $\mathcal{S}_r^0 = \mathcal{S}_r \setminus \{x_3 = \pm r\}$ está trivialmente foliado por toros de Liouville $\mathbb{T}^2_{r,c_1,c_2}$, donde $(c_1, c_2) \in \Delta \times (-r, r)$. Vamos a calcular las variables acción-ángulo correspondientes siguiendo la definición estándar [6, 40]. Primeramente, derivamos de (6.3.10)–(6.3.13) y de (6.4.1) que la forma simpléctica en $\mathcal{S}_r$ está dada por la fórmula

$$\Omega_r = ds \wedge d\tau + \frac{1}{2r^2}\langle \mathbf{x} \times d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{x} \rangle + d\rho, \tag{6.4.2}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2_r$ y

$$\rho = \left[\beta(s) + \frac{\kappa(s)}{\omega(s)}\right] x_3\, d\tau. \tag{6.4.3}$$

Los primeros dos términos en (6.4.2) representan la forma simpléctica canónica en el 2–cilindro $\Delta \times \mathbb{S}^1$ y la forma simpléctica de área en la 2–esfera $\mathbb{S}^2_r$, respectivamente. La suma de estas formas es precisamente la estructura simpléctica en $\mathcal{S}_r$ que corresponde a la estructura de Poisson producto (6.1.7)–(6.1.9). El último término en (6.4.2) es una corrección determinada por el sistema lineal de Euler.

Observemos que la restricción de la forma simpléctica Ω_r a $\mathcal{S}_r^0$ es exacta,

$$\Omega_r\big|_{\mathcal{S}_r^0} = d\,\Theta_r. \tag{6.4.4}$$

Aquí,

$$\Theta_r = s\, d\tau - z\, d\varphi + \left[\beta(s) + \frac{\kappa(s)}{\omega(s)}\right] z\, d\tau,$$

y $\big(s, \tau\, (\mathrm{mod}\, 2\pi), z, \varphi\, (\mathrm{mod}\, 2\pi)\big)$ es un sistema de coordenadas cilíndricas en $\mathcal{S}_r^0$, definidas por

$$x_1 = (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi, \qquad x_2 = (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi, \qquad x_3 = z,$$

para $z \in (-r, r)$. Integrando Θ_r a lo largo de los 1–ciclos básicos $\gamma_1 = \gamma_1(c_1)$, $\gamma_2 = \gamma_2(r, c_2)$ (6.3.15) en el toro $\mathbb{T}_{r,c_1,c_2}$ nos da

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1} \Theta_r \;=\; c_1 + \left[\beta(c_1) + \frac{\kappa(c_1)}{\omega(c_2)}\right] c_2, \tag{6.4.5}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_2} \Theta_r \;=\; -c_2. \tag{6.4.6}$$

Finalmente, derivamos las siguientes fórmulas para las variables de acción I_1, I_2 en $\mathcal{S}_r^0$:

$$I_1 = s + \left[\beta(s) + \frac{\kappa(s)}{\omega(s)}\right] x_3, \tag{6.4.7}$$

$$I_2 = -x_3. \tag{6.4.8}$$

En términos de las variables de acción, el Hamiltoniano (6.3.14) en $\mathcal{S}_r^0$ toma la forma

$$F(I_1, I_2) = f\big(S(I_1, I_2)\big) - \kappa\big(S(I_1, I_2)\big) I_2.$$

Aquí, $S = S(I_1, I_2)$ es la solución de la ecuación

$$I_1 = S - \left[\beta(S) + \frac{\kappa(S)}{\omega(S)}\right] I_2.$$

Las variables de ángulo que corresponden a I_1, I_2 son τ y $\varphi \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$, las cuales definen el "tiempo" a lo largo de las trayectorias de los campos vectoriales Hamiltonianos de I_1 y I_2, respectivamente. De esta manera, $\Omega_r = dI_1 \wedge d\tau + dI_2 \wedge d\varphi$. Las frecuencias del movimiento quasi–periódico en (6.3.16) están dados por las fórmulas usuales,

$$\omega_1 = \frac{\partial F_r}{\partial I_1}, \qquad \omega_2 = \frac{\partial F_r}{\partial I_2}.$$

Finalmente, como una consecuencia de la Proposición 6.2 y la fórmula (6.3.9), obtenemos la siguiente interpretación de la variable de acción I_1.

Proposición 6.5 *El "push–forward" del corchete de Poisson* (6.3.10)–(6.3.13) *por el difeomorfismo P* (6.5.1) *coincide con el corchete natural de Poisson* (6.1.7)–(6.1.9).

6.5 El resultado principal

Sea $\mathcal{B}_\delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| < \delta\}$ y consideremos la transformación $P : \Delta \times \mathbb{S}^1 \times \mathcal{B}_\delta \to \Delta \times \mathbb{S}^1 \times \mathcal{B}_\delta$ definida por

$$P(s, \tau, \mathbf{x}) = \left(s + \left[\beta(s) + \frac{\kappa(s)}{\omega(s)}\right] x_3,\ \tau,\ \mathbf{x}\right), \tag{6.5.1}$$

donde $\kappa = \kappa(s)$ está dada por (6.2.8). Esta misma relación implica que el Jacobiano de P es

$$\det\left(\frac{\partial P(s, \tau, \mathbf{x})}{\partial(s, \tau, \mathbf{x})}\right) = 1 + \frac{\kappa'(s)}{\omega(s)} x_3. \tag{6.5.2}$$

Luego, tomando en cuenta (6.2.4), se concluye de (6.5.2) que para todo $\delta < d_0$, la transformación P es un difeomorfismo sobre su imagen, donde d_0 está definido por (6.2.9). Por lo tanto, la inversa de esta transformación viene dada por

$$P^{-1}(s, \tau, \mathbf{x}) = \big(S(s, x_3), \tau, \mathbf{x}\big), \tag{6.5.3}$$

donde $S = S(s, x_3)$ es una solución de la ecuación

$$s = S + \left[\beta(S) + \frac{\kappa(S)}{\omega(S)}\right] x_3. \tag{6.5.4}$$

Denotemos por

$$\mathcal{O}_\delta \overset{\text{def}}{=} P\big(\Delta \times \mathbb{S}^1 \times \mathcal{B}_\delta\big) \cap \big(\Delta \times \mathbb{S}^1 \times \mathcal{B}_\delta\big).$$

Es claro que $\mathcal{O}_\delta$ es una vecindad abierta del cilindro $\Delta \times \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ en $\mathcal{M}$, la cual se aproxima a $\Delta \times \mathbb{S}^1 \times \mathcal{B}_\delta$ cuando $\delta \to 0$.

Teorema 6.6 *Para $\delta \in (0, d_0)$ suficientemente pequeño, existe un difeomorfismo Υ en $\Delta \times \mathbb{S}^1 \times \mathcal{B}_\delta$ tal que*

(1) Υ *es la identidad en $\Delta \times \mathbb{S}^1 \times \{0\}$,*

$$\Upsilon(s, \tau, 0) = \big(s, \tau, 0\big); \tag{6.5.5}$$

(2) Υ *preserva el corchete natural de Poisson* (6.1.7)–(6.1.9)*;*

(3) *la función Hamiltoniana H en* (6.1.10) *se transforma bajo Υ a una de la forma*

$$H \circ \Upsilon^{-1} = H_0 + O_2 \quad \text{on } \mathcal{O}_\delta, \tag{6.5.6}$$

donde

$$H_0(s, \tau, \mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} f\big(S(s, x_3)\big) + \kappa\big(S(s, x_3)\big) x_3. \tag{6.5.7}$$

La demostración de este teorema se hace por etapas ya que el difeomorfismo Υ se definirá como la composición de una transformación cercana a la identidad en una vecindad del cilindro $(\Delta \times \mathbb{S}^1) \times \{0\}$ y la transformación gauge del tipo Floquet-Lyapunov $\mathcal{T}$ dada por (6.2.21).

Una transfomación cercana a la identidad. Para construir una transformación cercana a la identidad alrededor del cilindro $(\Delta \times \mathbb{S}^1) \times \{0\}$ es necesario utilizar el método de homotopía en su versión contravariante [66]. Recordemos que en este contexto, el problema que debe resolverse es el siguiente: Dadas dos estructuras de Poisson isomorfas, encontrar un isomorfismo en una cierta clase de transformaciones. Para formular el resultado seguimos un enfoque desarrollado en [68].

Proposición 6.7 *Existe un difeomorfismo cercano a la identidad Φ alrededor de $(\Delta \times \mathbb{S}^1) \times \{0\}$,*

$$\Phi(s, \tau, \mathbf{x}) = (s + O_1, \tau + O_1, \mathbf{x} + O_2), \tag{6.5.8}$$

tal que el "push–forward" del corchete (6.2.25)–(6.2.27) *por Φ coincide con el corchete natural de Poisson* (6.1.7)–(6.1.9)*,*

$$\{g_1 \circ \Phi, g_2 \circ \Phi\}_{\mathcal{T}} = \{g_1, g_2\}_{\mathcal{M}} \circ \Phi \qquad \forall\, g_1, g_2. \tag{6.5.9}$$

La demostración de esta proposisición se sigue del lema que se prueba a continuación.

Consideremos el siguiente sistema dinámico dependiente del tiempo en $\mathcal{M}$:

$$\frac{ds}{d\epsilon} = -\frac{1}{\chi_\epsilon}\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_2\rangle, \qquad \frac{d\tau}{d\epsilon} = \frac{1}{\chi_\epsilon}\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1\rangle, \tag{6.5.10}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\epsilon} = \frac{(1-\epsilon)}{\chi_\epsilon}\left[\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_2\rangle \mathbf{b}_1 \times \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1\rangle \mathbf{b}_2 \times \mathbf{x}\right]. \tag{6.5.11}$$

Aquí,

$$\chi_\epsilon \overset{\text{def}}{=} 1 + \epsilon(1-\epsilon)\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\rangle, \tag{6.5.12}$$

y las funciones vectoriales $\mathbf{b}_1$ and $\mathbf{b}_2$ están definidas por (6.2.18),(6.2.19). Sea Z_ϵ el campo vectorial dependiente del tiempo del sistema (6.5.10),(6.5.11). Es claro que $K = \|\mathbf{x}\|^2$ es una integral de movimiento de Z_ϵ. El campo vectorial Z_ϵ está bien definido en el dominio de $\mathcal{M}$ en donde $\chi_\epsilon \neq 0$. Se sigue de (6.2.18),(6.2.19) que esta condición se cumple en $\Delta \times \mathbb{S}^1 \times \mathcal{O}_\delta$, para todo $\delta \in (0, d_1)$, donde hemos denotado por

$$d_1 = 4\left[\max_{\substack{s\in\overline{\Delta}\\ \tau\in[0,2\pi]}} l(s,\tau)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1},$$

$$l = \left(2\left\|\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \tau}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \tau}\right\|^2\right)\left(2\left\|\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial s}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial s}\right\|^2\right).$$

Por lo tanto, para todo $\epsilon \in [0,1]$, Z_ϵ es un campo vectorial suave y acotado en $\Delta \times \mathbb{S}^1 \times \mathcal{O}_\delta$ con las propiedades

$$Z_\epsilon = 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{x} = 0, \tag{6.5.13}$$

$$\mathcal{L}_{Z_\epsilon}(\mathbf{x}) = O_2. \tag{6.5.14}$$

Fijemos $\delta < d_1$. Se sigue de (6.5.13),(6.5.14) que el flujo ψ_ϵ de Z_ϵ,

$$\frac{d\psi_\epsilon}{d\epsilon} = Z_\epsilon \circ \psi_\epsilon, \qquad \psi_0 = \mathrm{id},$$

es una transformación cercana a la identidad en $\Delta \times \mathbb{S}^1 \times \mathcal{O}_\delta$ para todo $\epsilon \in [0,1]$.

Lema 6.8 *El flujo a tiempo* 1, $\Phi = \psi_1$, *del sistema* (6.5.10),(6.5.11) *es un difeomorfismo en* $\Delta \times \mathbb{S}^1 \times \mathcal{O}_\delta$ *que satisface las condiciones* (6.5.8) *y* (6.5.9).

Demostración. Consideremos la siguiente familia de campos de bi-vectores, la cual depende del parámetro ϵ:

$$\Pi_\epsilon = \frac{1}{\chi_\epsilon}\mathrm{hor}_1^\epsilon \wedge \mathrm{hor}_2^\epsilon + \Lambda, \qquad \Lambda = \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{x} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \wedge \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right\rangle.$$

Aquí,

$$\mathrm{hor}_1^\epsilon = \frac{\partial}{\partial s} - (1-\epsilon)\left\langle \mathbf{b}_1 \times \mathbf{x}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle, \quad \mathrm{hor}_2^\epsilon = \frac{\partial}{\partial \tau} - (1-\epsilon)\left\langle \mathbf{b}_2 \times \mathbf{x}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle.$$

Entonces, Π_1 y Π_0 son los tensores de Poisson [45] que corresponden a los corchetes de Poisson $\{,\}_{\mathcal{M}}$ y $\{,\}_{\mathcal{T}}$, respectivamente. De acuerdo con [68], estamos buscando un campo vectorial que depende del tiempo

$$Z_\epsilon = Z_\epsilon^1(s,\tau,\mathbf{x})\,\mathrm{hor}_1^\epsilon + Z_\epsilon^2(s,\tau,\mathbf{x})\,\mathrm{hor}_2^\epsilon,$$

que satisfaga la ecuación homológica

$$L_{Z_\epsilon}\Pi_\epsilon + \frac{\partial \Pi_\epsilon}{\partial \epsilon} = 0.$$

De acuerdo con las propiedades estándar de la derivada de Lie [2], si tal campo vectorial existe, entonces el flujo ψ_ϵ of Z_ϵ nos da $\psi_\epsilon^*\Pi_\epsilon = \Pi_0$. En particular, para $\Phi = \psi_1$, tenemos $\Phi_*\Pi_0 = \Pi_1$. Si usamos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} [\mathrm{hor}_1^\epsilon, \mathrm{hor}_2^\epsilon] &= \epsilon(1-\epsilon)\left\langle (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) \times \mathbf{x}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle, && (6.5.15)\\ L_{\mathrm{hor}_1^\epsilon}\Lambda &= L_{\mathrm{hor}_2^\epsilon}\Lambda = 0, && (6.5.16)\end{aligned}$$

derivamos las fórmulas

$$\begin{aligned} L_{Z_\epsilon}\Pi_\epsilon &= -\frac{1}{\chi_\epsilon^2}\Big[L_{\mathrm{hor}_1^\epsilon}(\chi_\epsilon Z_\epsilon^1) + L_{\mathrm{hor}_2^\epsilon}(\chi_\epsilon Z_\epsilon^2)\Big]\mathrm{hor}_1^\epsilon \wedge \mathrm{hor}_2^\epsilon && (6.5.17)\\ &\quad + \frac{1}{\chi_\epsilon}\left\langle \mathbf{x} \times \frac{\partial(\chi_\epsilon Z_\epsilon^1)}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle \wedge \mathrm{hor}_1^\epsilon && (6.5.18)\\ &\quad + \frac{1}{\chi_\epsilon}\left\langle \mathbf{x} \times \frac{\partial(\chi_\epsilon Z_\epsilon^2)}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle \wedge \mathrm{hor}_2^\epsilon, && (6.5.19)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Pi_\epsilon}{\partial \epsilon} &= \frac{1}{\chi_\epsilon^2}\frac{\partial \chi_\epsilon}{\partial \epsilon}\mathrm{hor}_1^\epsilon \wedge \mathrm{hor}_2^\epsilon && (6.5.20)\\ &\quad + \frac{1}{\chi_\epsilon}\left\langle \mathbf{b}_2 \times \mathbf{x}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle \wedge \mathrm{hor}_1^\epsilon && (6.5.21)\\ &\quad - \frac{1}{\chi_\epsilon}\left\langle \mathbf{b}_1 \times \mathbf{x}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle \wedge \mathrm{hor}_2^\epsilon. && (6.5.22)\end{aligned}$$

Comparando estas fórmulas, la ecuación homológica se reduce a las siguientes ecuaciones para Z_ϵ^1 y Z_ϵ^2:

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{hor}_1^\epsilon}(\chi_\epsilon Z_\epsilon^1) + L_{\mathrm{hor}_2^\epsilon}(\chi_\epsilon Z_\epsilon^2) &= -\frac{\partial \chi_\epsilon}{\partial \epsilon}, && (6.5.23)\\ \mathbf{x} \times \frac{\partial(\chi_\epsilon Z_\epsilon^1)}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{b}_2 \times \mathbf{x} && (6.5.24)\\ \mathbf{x} \times \frac{\partial(\chi_\epsilon Z_\epsilon^2)}{\partial \mathbf{x}} &= -\mathbf{b}_1 \times \mathbf{x}. && (6.5.25)\end{aligned}$$

En consecuencia, si se escogen

$$Z^1_\epsilon = -\frac{1}{\chi_\epsilon}\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_2\rangle \qquad \text{y} \qquad Z^2_\epsilon = \frac{1}{\chi_\epsilon}\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1\rangle$$

vemos que se satisfacen las últimas dos ecuaciones. Finalmente, por medio de la fórmula (6.5.12) se verifica que la primera relación también se cumple. ■

No es muy difícil ver que que la inversa de Φ es el flujo a tiempo 1 del campo vectorial que depende del tiempo $W_\epsilon = -Z_{1-\epsilon}$.

La construcción de la transformación Υ. En esta sección construimos un difeomorfismo Υ que satisface las condiciones (1)–(3) del Teorema 6.6. Se sigue de la Proposición 6.5 que la composición de la transformación de Floquet–Lyapunov $\mathcal{T}$ y el difeomorfismo P (6.5.1) envía el sistema lineal de Euler al sistema Hamiltoniano relativo al corchete natural de Poisson $\{\,,\}_{\mathcal{M}}$ (6.1.7)–(6.1.9). De hecho, el campo vectorial $\mathcal{T}_* X^{\text{lin}}$ del sistema (6.2.29),(6.2.30) es Hamiltoniano en el corchete de Poisson (6.3.10)–(6.3.13) con Hamiltoniano F (6.3.14). Por la Proposición 6.5 y las fórmulas (6.5.3),(6.5.4), el "push–forward" $(P \circ \mathcal{T})_* X^{\text{lin}}$ coincide con el campo vectorial Hamiltoniano X_{H_0} relativo a $\{\,,\}_{\mathcal{M}}$ y a la función

$$H_0 = F \circ P^{-1} = f\big(S(s, x_3)\big) + \kappa\big(S(s, x_3)\big)x_3. \tag{6.5.26}$$

Aquí, S está definido por (6.5.4). Por lo tanto, tenemos

$$(P \circ \mathcal{T})_* X^{\text{lin}} = X_{H_0} = \omega_1(s, x_3)\frac{\partial}{\partial \tau} + \omega_2(s, x_3)\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \tag{6.5.27}$$

donde $\omega_1(s, x_3)$ y $\omega_2(s, x_3)$ están dadas por (6.5.33). Observemos que X_{H_0} no da una primera aproximación a X_H en $(\Delta \times \mathbb{S}^1) \times \{0\}$. Necesitamos probar que después de una transformación de Poisson apropiada Υ, el sistema original X_H viene a ser un sistema Hamiltoniano perturbado cuya parte no–perturbada es precisamente X_{H_0}.

Entonces, definiendo

$$\Upsilon = \Phi \circ \mathcal{T}, \tag{6.5.28}$$

garantizamos que la condición (6.5.6) se cumple. De hecho, por medio de (6.5.9) tenemos que $\{s \circ \Phi, \mathbf{x} \circ \Phi\}_{\mathcal{T}} = 0$. Sustituyendo (6.5.8) en esta igualdad y combinándola con (6.2.25)–(6.2.27), deducimos que $s \circ \Phi = s - \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_2\rangle + O_2$ y de aquí que,

$$s \circ \Phi^{-1} = s + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_2\rangle + O_2. \tag{6.5.29}$$

Usando (6.2.28) y (6.5.29), se calcula

$$\begin{aligned} H \circ \Upsilon^{-1} &= (H \circ \mathcal{T}^{-1}) \circ \Phi^{-1} \\ &= [f - \omega\,\langle \beta\,\mathbf{i}_3 + \mathbf{b}_2, \mathbf{x}\rangle] \circ \Phi^{-1} + O_2 \\ &= f \circ (s \circ \Phi^{-1}) - \omega\,\langle \beta\,\mathbf{i}_3 + \mathbf{b}_2, \mathbf{x}\rangle + O_2 \\ &= f - \omega\,\langle \beta\,\mathbf{i}_3, \mathbf{x}\rangle + O_2. \end{aligned} \tag{6.5.30}$$

Por otro lado, tomando en cuenta que $S = s - \left[\beta + \frac{\kappa}{\omega}\right] x_3 + O_2$, de (6.5.26) obtenemos la representación $H_0 = f - \omega \langle \beta\, \mathbf{i}_3, \mathbf{x} \rangle + O_2$, la cual, junto con (6.5.30) prueba (6.5.6).

Finalmente, para completar la prueba del Teorema 6.6 debemos tomar $\delta < \min\{d_0, d_1\}$.

Ejemplo 6.9 *Considere el caso trivial en el que* $\boldsymbol{\phi}$ *en* (6.1.4)–(6.1.6) *es independiente de* τ, $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}^0(s) \neq 0$. *Entonces, la ecuación lineal de Euler* (6.1.11),(6.1.12) *es Hamiltoniana en la estructura natural de Poisson y de aquí se sigue que representa automáticamente una parte integrable no–perturbada del sistema* (6.1.4)–(6.1.6). *Se tiene que* $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^0(s)$, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^0(s)$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2^0(s)$, *donde* $\boldsymbol{\nu}^0 = \frac{\boldsymbol{\phi}^0}{\|\boldsymbol{\phi}^0\|}$. *Luego,* $B = B^0(s) = [\mathbf{e}_1^0(s), \mathbf{e}_2^0(s), \boldsymbol{\nu}^0(s)]^T$. *Se sigue que* $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1^0(s)$ *y* $\mathbf{b}_2 \equiv 0$. *Resolviendo el sistema* (6.5.10),(6.5.11) *se obtiene la transformación de Poisson*

$$\Upsilon(s, \tau, \mathbf{x}) = \big(s, \tau + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_1^0(s) \rangle, B^0(s)\mathbf{x}\big),$$

la cual se puede ver como la reducción del sistema (6.1.4)–(6.1.6) *a una forma normal en la primera aproximación. En particular, si* $\boldsymbol{\nu}^0 = \mathbf{i}_3$, *entonces* $\Upsilon = \mathrm{id}$.

Consecuencias del Teorema 6.6. Denotemos por X_G el campo vectorial Hamiltoniano relativo al corchete (6.1.7)–(6.1.9) y a una función G en $\mathcal{M}$. Se sigue de las partes (ii) y (iii) del Teorema 6.6 que

$$\Upsilon_* X_H = X_{H \circ \Upsilon^{-1}} = X_{H_0} + O_2.$$

Como una consecuencia del Teorema 6.6, se deduce que después de aplicar la transformación de "torsión" Υ al sistema original (6.1.4)–(6.1.6), obtenemos un sistema Hamiltoniano casi–integrable $\big(\mathcal{O}_\delta, \{\,,\}_{\mathcal{M}}, H \circ \Upsilon^{-1}\big)$. De hecho, el sistema no–perturbado es definido como el sistema Hamiltoniano relativo al corchete natural (6.1.7)–(6.1.9) y a la función H_0 (6.5.7),

$$\frac{ds}{dt} = 0, \qquad \frac{d\tau}{dt} = \omega_1(s, x_3), \tag{6.5.31}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \omega_2(s, x_3)\, \mathbf{i}_3 \times \mathbf{x}. \tag{6.5.32}$$

Aquí, $\mathbf{i}_3 = (0, 0, 1)$ y

$$\omega_1(s, x_3) = \omega\big(S(s, x_3)\big), \quad \omega_2(s, x_3) = \omega\big(S(s, x_3)\big)\beta\big(S(s, x_3)\big). \tag{6.5.33}$$

Es claro que este sistema es completamente integrable (una integral de movimiento, adicional, es la función coordenada x_3). En particular, para todo $r < \delta$, la restricción de (6.5.31),(6.5.32) a la variedad simpléctica $\mathcal{S}_r = (\Delta \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}_r^2$ nos da un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad, completamente integrable. Un dominio abierto de $\mathcal{S}_r$ está foliado trivialmente por los 2–toros de Liouville

$$\mathbb{T}^2_{r, c_1, c_2} = \big\{ s = c_1,\ \|\mathbf{x} - c_2\, \mathbf{i}_3\| = (r^2 - c_2^2)^{\frac{1}{2}} \big\},$$

para $(c_1, c_2) \in \mathcal{D}_\delta$, donde $\mathcal{D}_\delta$ es la imagen de $\mathcal{O}_\delta \setminus \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ bajo la proyección natural $\Delta \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3 \to \Delta \times \mathbb{R}^1_{x_3}$. Cada toro $\mathbb{T}^2_{r,c_1,c_2}$ conlleva un movimiento quasi–periódico con frecuencias $\omega_1(c_1, c_2)$ y $\omega_2(c_1, c_2)$ dadas por (6.5.33). Se sigue que la función de frecuencias

$$(c_1, c_2) \mapsto \big(\omega_1(c_1, c_2), \omega_2(c_1, c_2)\big) \in \mathbb{R}^2, \tag{6.5.34}$$

no es sobreyectiva. Sin embargo, en el caso cuando el exponente de Floquet $\beta = \beta(s)$ varía con s,

$$\beta \neq \text{const}, \tag{6.5.35}$$

el sistema no–perturbado (6.5.31),(6.5.32) es *no–degenerado en el sentido de Rüssmann*: la imagen de la función de frecuencias (6.5.34) no pertenece a recta alguna que pase por el origen en $\mathbb{R}^2$. Si, además de (6.5.35), el Hamiltoniano (6.1.10) es una función analítica, entonces de acuerdo a los resultados análogos a los de KAM [13, 59, 60], para δ suficientemente pequeño, el sistema original (6.1.4)–(6.1.6) posee muchos 2–toros Diofantinos invariantes, cercanos al toro no–perturbado $\Upsilon^{-1}(\mathbb{T}^2_{r,c_1,c_2})$.

6.6 Algunas aplicaciones

Para ilustrar algunos de los conceptos hasta aquí abordados, mostramos que nuestros resultados se pueden aplicar en el caso de Hamiltonianos cuadráticos

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\langle A\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}\rangle + \frac{1}{2}\langle B\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \langle C\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}\rangle,$$

los cuales aparecen en la teoría del movimiento del cuerpo rígido [3, 6, 11, 12, 28, 40, 44, 45]. El problema original (6.1.1)–(6.1.3) nos lleva al sistema

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{\xi} \times A\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \times C\mathbf{x}, \tag{6.6.1}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -C\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{x} + O_2. \tag{6.6.2}$$

Supongamos que $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $C = \operatorname{diag}(C_1, C_2, C_3)$, donde $0 < A_3 < A_2 < A_1$. La restricción de (6.6.1),(6.6.2) a $\{\mathbf{x} = 0\}$ nos da la ecuación estándar de Euler en $\mathbb{R}^3$. En la esfera unitaria $\{\|\boldsymbol{\xi}\| = 1\} = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, el retrato fase de esta ecuación involucra cuatro centros y dos puntos silla conectados por cuatro órbitas heteroclínicas. El dominio regular consiste de cuatro subconjuntos abiertos $D^{(i)} \subset \mathbb{S}^2$, $(i = 1, ..., 4)$, tal que cada $D^{(i)}$ está pinchado en un centro y es acotado por dos órbitas heteroclínicas. Para una i fija, tomemos un dominio abierto U de tal manera que $\overline{U} \subset D^{(i)}$. Entonces, U está trivialmente foliado por órbitas periódicas $\boldsymbol{\xi} = \Xi(\omega\, t; \lambda)$ de la ecuación de Euler con frecuencias $\omega = \omega(\lambda) > 0$ que dependen del parámetro λ. Las funciones vectoriales $\Xi(\tau; \lambda)$ son 2π–periódicas en τ y pueden se escritas en términos de funciones elípticas de Jacobi (ver, por ejemplo [45]). Introduzcamos la notación

$$K = K(\lambda) = \int_0^1 \frac{dz}{[(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)]}.$$

Las frecuencias $\omega(\lambda)$ están definidas como sigue:

- Para $A_3 < \lambda < A_2$,
$$\omega(\lambda) = \frac{\pi}{2K(\lambda)} \left[(A_1 - \lambda)(A_2 - A_3)\right]^{\frac{1}{2}},$$
y $k = k(\lambda) = \left[\frac{(A_1-A_2)(\lambda-A_3)}{(A_2-A_3)(A_1-\lambda)}\right]^{\frac{1}{2}}$;
- para $A_2 < \lambda < A_1$,
$$\omega(\lambda) = \frac{\pi}{2K(\lambda)} \left[(A_1 - A_2)(\lambda - A_3)\right]^{\frac{1}{2}},$$
y $k = k(\lambda) = \left[\frac{(A_2-A_3)(A_1-\lambda)}{(A_1-A_2)(\lambda-A_3)}\right]^{\frac{1}{2}}$.

Se puede mostrar que $\omega'(\lambda) \neq 0$. Consideremos $\big(\lambda, \tau \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)\big)$ como un sistema de coordenadas en U definidas por $(\lambda, \tau) \mapsto \Xi(\tau; \lambda)$. La variable de acción s se introduce por medio de la ecuación
$$s = \frac{1}{2} \int \frac{d\lambda}{\omega(\lambda)},$$
la cual define la función $\lambda = \lambda(s)$. Ahora, en estas coordenadas, el sistema (6.6.1),(6.6.2) toma la forma (6.1.4)–(6.1.6), donde $\omega(s) = \omega(\lambda(s))$ y
$$\boldsymbol{\phi}(s, \tau) = -\, C\, \Xi(\tau; \lambda(s)).$$
El siguiente paso es encontrar una solución de Floquet periódica $\boldsymbol{\nu}$ en (6.2.5),(6.2.6). Para matrices genéricas A y C, este problema no es simple. Escribiendo la ecuación (6.2.5) en la forma
$$\left\langle A\, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \times \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right\rangle \boldsymbol{\nu} - C\, \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\nu} = 0, \tag{6.6.3}$$
podemos intentar buscar una solución $\boldsymbol{\nu}$ como un polinomio homogéneo en las variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 [12]. Por ejemplo, supongamos que los elementos de las matrices diagonales A y C están relacionados por la ecuación
$$(A_2 - A_3)(A_3 - A_1)(A_1 - A_2) + (A_2 - A_3)C_1^2 + (A_3 - A_1)C_2^2 + (A_1 - A_2)C_3^2 = 0.$$
Entonces, existe la siguiente solución de (6.6.3):
$$\boldsymbol{\nu}(\tau, \lambda) = \frac{V\, \Xi(\tau, \lambda)}{\|V\, \Xi(0, \lambda)\|}.$$
Aquí, $V = \mathrm{diag}(V_1, V_2, V_3)$ está definida por las ecuaciones algebraicas:
$$\begin{bmatrix} A_2 - A_3 & C_3 & -C_2 \\ -C_3 & A_3 - A_1 & C_1 \\ C_2 & -C_1 & A_1 - A_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = 0.$$
La fórmula (6.2.7) para el exponente de Floquet nos da
$$\beta'(\lambda) = \frac{-\omega^2(\lambda)}{2\pi\|V\, \Xi(0, \lambda)\|} \frac{d}{d\lambda} \left[\int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{\Xi(\lambda, \tau)}{\omega(\lambda)} \right), C\, V \left(\frac{\Xi(\lambda, \tau)}{\omega(\lambda)} \right) \right\rangle d\tau \right].$$

Bibliografía

[1] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundation of Mechanics*. Addison Wesley, New York, second edition, 1978.

[2] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1988.

[3] M. Adler and P. Moerbeke. *A new geodesic flow on* $\mathfrak{so}(4)$*, In: "Probability, Statistical Mechanics and Number Theory"*, volume 9 of *Advances in Mathematics Supplementary Studies*, pages 81–96. 1986.

[4] R. Alvarado-Flores, J. M. Hernández, and M. Agüero. Local Hamiltonization and foliation: A new solution to the hamiltonization problem. *Electromagnetic Phenomena*, 6(2 (17)):189–201, 2006.

[5] V. I. Arnold. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Russian Math. Surveys*, 18(6):85–191, 1963.

[6] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1989.

[7] V. I. Arnold, V. V. Kozlov, and A. I. Neĭshtadt. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Dynamical Systems III. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1993.

[8] V. V. Belov, S. Yu. Dobokhotov, and V. A. Maksimov. Explicit formulas for generalized action-angle variables in the neighborhood of an isotropic torus and their applications. *Theor. and Math. Physics*, 135(3):765–791, 2003.

[9] A. Bette. Twistor phase space dynamics and the Lorentz force equation. *J. Math. Phys.*, 34(10):100–130, 1993.

[10] O. I. Bogoyavlenskij. Theory of tensor invariants of integrable Hamiltonian systems I. Incompatible Poisson structures. *Commun. Math. Phys.*, 180:529–586, 1996.

[11] O. I. Bogoyavlensky. Integrable Euler equations on 6-dimensional Lie algebras. *Sov. Math. Dokl.*, 27:1–5, 1983.

[12] A. V. Borisov and I. S. Mamaev. *Poisson Structures and Lie Algebras in Hamiltonian Mechanics (Regular and Chaotic Dynamics)*. Udmurtian State University, Izhevsk, 1999.

[13] H. W. Broer, G. B. Huitema, and M. B. Sevryuk. *Quasiperiodic Motions in Families of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[14] A. D. Bryuno. The normal form of a Hamiltonian system. *Russian Math. Surveys*, 43(1):25–66, 1988.

[15] J. F. Cariñena and A. Ramos. A new geometric approach to Lie systems and physical applications. *Acta Appl. Math.*, 70:43–69, 2002.

[16] J. F. Cariñena and M. F. Rañada. Poisson maps and canonical transformations for time-dependent Hamiltonian systems. *J. Math. Phys.*, 30(10):2258–2266, 1989.

[17] R. H. Cushman and L. M. Bates. *Global Aspects of Classical Integrable Systems*. Birkhäuser, Berlin, 1997.

[18] A. Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Number 1764 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[19] G. Dávila-Rascón and Yu. M. Vorobiev. A Hamiltonian approach for skew-product dynamical systems. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 15(1): 35–44, 2008.

[20] G. Dávila-Rascón, R. Flores-Espinoza, and Yu. M. Vorobiev. Euler equations on $\mathfrak{so}(4)$ as a nearly integrable Hamiltonian system. *Qual. Th. Dyn. Syst.*, 7: 129–146, 2008.

[21] B.A. Dubrovin, M. Giordano, G.Marmo, and A. Simoni. Poisson brackets on presymplectic manifolds. *Intern. J. Modern Phys. A*, 8:3747–3771, 1993.

[22] J.-P. Dufour and N. T. Zung. *Poisson Structures and their Normal Forms*. Birkhäuser, Berlin, 2005.

[23] R. Flores-Espinoza. Monodromy factorization for periodic Lie systems and reconstruction. To be published in Proceedings of XXVII Workshop on Geometric Methods in Physics.

[24] R. Flores-Espinoza and Yu. M. Vorobiev. *Linear Hamiltonian Systems and Symplectic Geometry*. Editorial UNISON, Hermosillo, Sonora, México, 1998.

[25] R. Flores-Espinoza and Yu. M. Vorobiev. Hamiltonian formalism for fiberwise linear systems. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 6:213–234, 2000.

[26] R. Flores-Espinoza and Yu. M. Vorobiev. On dynamical and geometric phases of time-periodic linear equations. *Russian J. Math. Physics*, 12(3):326–349, 2005.

[27] R. Flores-Espinoza, J. de Lucas, and Yu. M. Vorobiev. Geometric and dynamical phases of periodic Lie systems. To be published.

[28] A. T. Fomenko. *Integrability and Nonintegrability in Geometry and Mechanics*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1988.

[29] I. M. Gelfand and L. A. Dikii. A family of Hamiltonian structures connected with integrable nonlinear differential equations (in Russian). *Akad. Nauk. USSR Inst. Prikl. Mat.*, Preprint No. 136, 1978.

[30] M. J. Gotay, R. Lashof, J. Sniatycki, and A. Weinstein. Closed forms on symplectic fiber bundles. *Comm. Math. Helv.*, 58:617–621, 1980.

[31] V. Guillemin, E. Lerman, and S. Sternberg. *Symplectic Fibrations and Multiplicity Diagrams*. Cambridge Univ. Press, 1996.

[32] F. Haas. Frobenius method and invariants for one-dimensional time-depending Hamiltonian systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 34:1005–1017, 2001.

[33] S. Hojman. The construction of a Poisson structure out of a symmetry and a conservation law of a dynamical system. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 29:667–674, 1996.

[34] M. V. Karasev. New global asymptotics and anomalies in the problem of quantization of the adiabatic invariant. *Functional Anal. Appl.*, 24:104–114, 1990.

[35] M. V. Karasev and V. P. Maslov. *Nonlinear Poisson Brackets. Geometry and Quantization*, volume 119 of *Transl. of Math. Monographs*. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1993.

[36] M. V. Karasev and Yu. M. Vorobjev. Adapted connections, Hamilton dynamics, geometric phases, and quantization over isotropic submanifolds. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 187(2):203–326, 1998.

[37] E. Kerner. Can the position variable be a canonical coordinate in a relavistic many-particle theory? *J. Math. Phys.*, 6(8):1218–1227, 1965.

[38] A. A. Kirillov. Local Lie algebras. *Russian Mathematical Surveys*, 31:55–75, 1976.

[39] B. Kostant. The solution to a generalized Toda lattice and representation theory. *Adv. in Math.*, 34:195–338, 1979.

[40] V. V. Kozlov. *Symmetries, Topology and Resonances in Hamiltonian Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[41] S. B. Kuskin. An infiniesimal Liouville-Arnold theorem as a criterion of reducibility for variational Hamiltonian equations. *Chaos, Solitons, Fractals*, 2(3): 259–269, 1992.

[42] P. Libermann and C.-M. Marle. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Mathematics and Its Applications. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo, 1987.

[43] A. Lichnerowicz. Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associeés. *J. Differential Geometry*, 12:253–300, 1977.

[44] A. J. Maciejewski, S. I. Popov, and J.-M. Strelcyn. The Euler equations on Lie algebra $\mathfrak{so}(4)$: An elementary approach to integrability condition. *J. of Math. Phys.*, 42(6):2701–2717, 2001.

[45] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1994.

[46] J. E. Marsden and A. Weinstein. The Hamiltonian structure of the Maxwell–Vlasov equations. *Physica D*, 4:394–406, 1982.

[47] J. E. Marsden, R. Montgomery, and T. Ratiu. *Reduction, Symmetry and Phases in Mechanics*, volume 88 of *Memoirs of AMS*. American Mathematical Society, 1990.

[48] J. E. Marsden, T. S. Ratiu, and G. Raugel. Symplectic connections and the linearization of Hamiltonian systems. *Proc. Royal Soc. Edinburgh A*, 117:329–380, 1991.

[49] L. J. Mason and N. M. J. Woodhouse. *Integrability, Self-Duality and Twistor Theory*. Clarendon Press., Oxford, 1996.

[50] O. Maspfuhl. Wong's equations in Poisson geometry. *J. of Symplectic Geometry*, 2(4):545–578, 2005.

[51] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University Press., New York, 1995.

[52] R. Montgomery. Canonical formalism of a classical particle in a Yang–Mills field and Wong's equations. *Let. Math. Phys.*, 8:59–67, 1984.

[53] R. Montgomery, J. E. Marsden, and T. Ratiu. Gauged Lie–Poisson structures. volume 28 of *Cont. Math. AMS*, pages 101–114, Providence, R.I., 1984. American Mathematical Society.

[54] J. Moser. On the volume elements on a manifold. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120: 286–294, 1965.

[55] A. I. Neĭshtadt and A. Vasiliev. Destruction of adiabatic invariance at resonances in slow-fast Hamiltonian systems. *Physics Research*, A561:158–165, 2006.

[56] N. N. Nekhoroshev. Action-angle variables and their generalizations. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 26, 1976.

[57] V. Perlick. The Hamiltonization problem from a global viewpoint. *J. Math. Phys.*, 33(2):599–611, 1992.

[58] W. A. Poor. *Differential Geometric Structures*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1981.

[59] H. Rüssmann. *Nondegeneracy in the perturbation theory of integrable dynamical systems, In: "Number Theory and Dynamical Systems"*, volume 134 of *London Math. Soc. Lect. Note Series*, pages 5–18. Cambridge Univ. Press, 1989.

[60] M. B. Sevryuk. KAM-stable Hamiltonians. *J. Dynam. Control Syst.*, 1(3):351–366, 1995.

[61] S. Sternberg. Minimal coupling and the symplectic mechanics of a classical particle in the presence of a Yang–Mills field. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 74:5253–5254, 1977.

[62] I. Vaisman. *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, volume 118 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, Boston, 1994.

[63] I. Vaissman. Coupling Poisson and Jacobi structures on foliated manifolds. *J. of Geometric Methods in Modern Physics*, 1(5):607–637, 2004.

[64] A.N. Varchenko and A. B. Givental. The period mapping and the intersection form. *Funct. Anal. Applic.*, 16:83–93, 1982.

[65] Yu. M. Vorobiev. Hamiltonian structures of the first variation equations. *Sbornik Mathematics*, 191(4):447–502, 2000.

[66] Yu. M. Vorobiev. *Coupling tensors and Poisson geometry near a single symplectic leaf*, volume 54 of *Lie Algebroids*, pages 249–274. Banach Center Publ., Warsawa, 2001.

[67] Yu. M. Vorobiev. On the linearization of Hamiltonian systems on Poisson manifolds. *Math. Notes*, 78(3):297–303, 2005.

[68] Yu. M. Vorobiev. Poisson structures and linear Euler systems over symplectic manifolds. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 216(2):137–239, 2005.

[69] Yu. M. Vorobiev. Poisson equivalence over a symplectic leaf. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 216(2):241–277, 2005.

[70] A. Weinstein. The local structure of Poisson manifolds. *J. Diff. Geom.*, 18: 523–557, 1983.

[71] E. T. Whittaker. *A Treatise on the Anlytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. Cambridge University Press., Cambridge, fourth edition, 1937.

[72] V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinskii. *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients*. John Wiley & Sons, New York–Toronto, 1975.