Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

"Números Complejos: Actividades Didácticas con Representaciones Dinámicas"

Tesis que presenta

Daniela Romero Robles

Para obtener el Grado de:
Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Directora de Tesis:

M.C. Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez

Hermosillo, Sonora, México. Febrero 2013

Hermosillo, Sonora. ___ de _________________ del 20____.

Asunto: Cesión de derechos

Universidad de Sonora
Presente

Por este conducto hago constar que soy autor y titular de la obra denominada ____, en los sucesivo LA OBRA, realizada como trabajo terminal con el propósito de obtener el Grado de ____, en virtud de lo cual autorizo a la Universidad de Sonora (UNISON) para que efectúe la divulgación, publicación, comunicación pública, distribución pública, distribución electrónica y reproducción, así como la digitalización de la misma, con fines académicos o propios de la institución y se integre a los repositorios de la universidad, estatales, regionales, nacionales e internacionales.

La UNISON se compromete a respetar en todo momento mi autoría y a otorgarme el crédito correspondiente en todas las actividades mencionadas anteriormente.

De la misma manera, manifiesto que el contenido académico, literario, la edición y en general cualquier parte de LA OBRA son de mi entera responsabilidad, por lo que deslindo a la UNISON por cualquier violación a los derechos de autor y/o propiedad intelectual y/o cualquier responsabilidad relacionada con la OBRA que cometa el suscrito frente a terceros.

Atentamente

____
Nombre y firma del autor

LIC. GILBERTO LEÓN LEÓN
Abogado General
UNIVERSIDAD DE SONORA

AGRADECIMIENTOS

A mis padres y hermanos, Arturo, María, Arturito y Sebas. Siempre presentes.

A mi compañero de vida, Mario. Es genial ir caminando de la mano contigo.

A mi directora de tesis, Ana Guadalupe del Castillo (Lupita, con cariño).

A todos los que favorecieron mi aprendizaje académico y de la vida.

Mil gracias

CONTENIDO

Capítulo 4. LA PUESTA EN ESCENA DE LA SECUENCIA Y SU VALORACIÓN DIDÁCTICA

INTRODUCCIÓN

Los números complejos tuvieron que pasar un largo proceso para ser aceptados por la comunidad matemática, siendo su primera aparición en 1545 en el libro *Ars Magna* de Girolamo Cardano, donde sirvieron como herramienta para la resolución de ecuaciones cúbicas. Previo a esto, los números imaginarios ya eran conocidos por los matemáticos; sin embargo, no eran aceptados por carecer de utilidad.

Estos números pasaron por diversas etapas, según Pardo y Gómez (2005), las cuales parten de una expresión algebraica de raíces cuadradas de cantidades negativas, para después, ser aceptadas y generalizadas como expresiones imaginarias. En una etapa posterior, la geométrica, se introduce un eje perpendicular para representar números imaginarios que tiene asociado $\sqrt{-1}$ como unidad y, en consecuencia, los números complejos se representan en el plano. Por último, se encuentra la etapa formal, donde se considera a los números complejos como parejas ordenadas de números reales.

Por otra parte, diversos autores han realizado investigaciones sobre el tema de números complejos en el ámbito escolar, señalando como resultado diversas dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al momento de abordar el tema, resaltando entre ellas, lo difícil que resulta para los estudiantes aceptar a la unidad imaginaria, como la raíz cuadrada de -1, ya que antes no era considerado como un número.

Con el fin de superar las diversas dificultades señaladas por las investigaciones realizadas y la resistencia que los estudiantes exhiben sobre este tema, se consideró una forma alternativa para abordarlo.

En este trabajo la estrategia seleccionada consistió en el diseño de una secuencia de actividades didácticas en línea con representaciones dinámicas en la que el estudiante no sólo pueda operar con números complejos, sino que además sea capaz de encontrar relaciones, diferencias y/o similitudes entre las propiedades de sus operaciones y las de los números reales. Las actividades diseñadas involucran diferentes formas de representación de los números complejos y sus operaciones. Con el uso del software GeoGebra, se parte de representaciones gráficas dinámicas y éstas se vinculan, dinámicamente, con las correspondientes representaciones algebraicas y numéricas. Esto crea un ambiente en el cual los estudiantes tienen la oportunidad de explorar, analizar, conjeturar, verificar conjeturas y generalizar, privilegiando así, la actividad del alumno como medio para promover su aprendizaje.

La presentación de este trabajo se ha estructurado de la siguiente manera:

En el primer capítulo se describe un poco la historia de los números complejos y el largo camino que tuvieron que recorrer para ser aceptados por la comunidad matemática. También se consideran diferentes investigaciones de Matemática Educativa sobre el tema de números complejos, retomando de ellas algunas conclusiones y dificultades que presentan los estudiantes al momento de abordar el tema. Por último, se aborda la justificación para la elaboración de una secuencia de actividades, el uso de tecnología, de GeoGebra y de representaciones dinámicas, así como la justificación para incluir una serie de orientaciones para el docente.

En el segundo capítulo se describen algunos elementos teóricos que fueron la base para la elaboración de este trabajo, siendo el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) el marco teórico seleccionado. Además, se describe la metodología a seguir, misma que considera, a grandes rasgos, una revisión bibliográfica sobre el tema de números complejos, la elaboración de una secuencia de actividades, una primera puesta en escena de las actividades con el fin de detectar potenciales mejoras, la incorporación de las mejoras sugeridas por la primera puesta en escena, una segunda puesta en escena de las actividades, un segundo análisis de los resultados obtenidos, la incorporación de modificaciones sugeridas por la segunda puesta en escena, una valoración a posteriori de la secuencia de actividades y, por último, la elaboración de una serie de orientaciones para el docente.

En el tercer capítulo, se describen los significados institucionales de referencia y pretendido, mismos que fueron considerados para la elaboración de la secuencia de actividades. Se realiza, además, una descripción de dicha secuencia, enfatizando los tipos de problemas y sistemas de prácticas, así como las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.

Por último, en el cuarto capítulo, se describen las características y análisis de una primera puesta en escena de la secuencia, así como la pertinencia de incorporar ciertas modificaciones considerando los resultados. Una vez incorporadas las modificaciones correspondientes, se lleva a cabo el análisis de una segunda puesta en escena para, posteriormente, realizar una valoración de la idoneidad didáctica.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Antecedentes

1.1.1 Un poco de historia sobre los Números Complejos.

Una de las reglas de las matemáticas es que cualquier objeto nuevo debe estar claramente definido para ser aceptado por toda la comunidad. Debido al carácter formal de esta ciencia, su avance a través del tiempo ha sido un proceso lento, ya que muchas ideas quedaron suspendidas por no encajar con el sistema de razonamiento de la época, tal es el caso de los números complejos.

La primera vez que los algebristas se dedicaron a investigar estos números fue durante la época del renacimiento, en Italia. Apareciendo inicialmente en el libro *Ars Magna* de Girolamo Cardano, publicado en 1545, donde él afirma que "la raíz de -9 no es 3 ni -3 sino una recóndita tercera especie de cosa" (ver Figura 1).

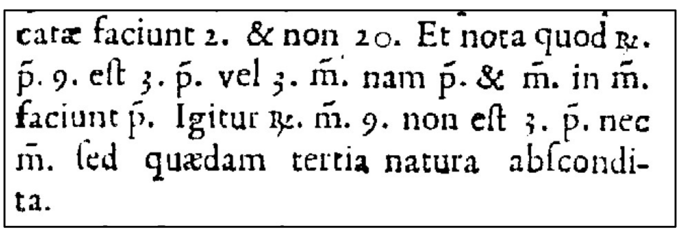

catæ faciunt 2. & non 20. Et nota quod ℞.
p̄. 9. eſt 3. p̄. vel 3. m̄. nam p̄. & m̄. in m̄.
faciunt p̄. Igitur ℞. m̄. 9. non eſt 3. p̄. nec
m̄. ſed quædam tertia natura abſcondi-
ta.

Figura 1. Fragmento del Ars Magna de Girolamo Cardano, publicado en 1545.

Regresando un poco en el tiempo, en el año de 1539, antes de la publicación del *Ars Magna*, Cardano conoce al matemático Tartaglia, el cual era reconocido por haber ganado concursos sobre la resolución de ecuaciones usando métodos que mantenía en secreto. A raíz de que Cardano conoce a Tartaglia surge su interés por las ecuaciones cúbicas, logrando que éste último le comunicara sus métodos y técnicas para el manejo de las mismas, los cuales involucraban el cálculo de raíces cuadradas de números negativos, haciéndole jurar que no revelaría a nadie dichos secretos.

Faltando a su juramento, Cardano publica las técnicas implementadas para el manejo de ecuaciones cúbicas en su libro, con lo cual Tartaglia se enfurece y lo acusa de deshonesto. Sin embargo, un discípulo de Cardano, el matemático Lodovico Ferrari, sale en su defensa, asegurando que estuvo presente la noche de la reunión y que no hubo ningún juramento.

En realidad, la fórmula para resolver la ecuación cúbica ya había sido descubierta tiempo atrás por el matemático Scipione del Ferro, quien publicó un pequeño libro, que en alguna ocasión fue consultado por Cardano, con lo cual quedaba libre de toda culpa.

Sin embargo, y pese a la publicación del libro de Cardano, los números complejos tuvieron un largo camino por recorrer para ser aceptados por la comunidad matemática de la época. Este camino largo que hubo que recorrer y las diversas dificultades a las que se enfrentaron los matemáticos de la época, en ocasiones, pudieran guardar cierto paralelismo con las dificultades que enfrentan los estudiantes al momento de abordar el tema de números complejos.

A continuación se presentan algunas investigaciones con respecto al tema y los resultados obtenidos.

1.1.2 Investigaciones relacionadas con el tema de Números Complejos

Para este trabajo, se han considerado resultados obtenidos a partir de investigaciones en Matemática Educativa sobre el tema de números complejos.

Particularmente, en el trabajo de Pardo y Gómez (2005) se hizo una revisión histórica que permitió identificar cuatro grandes etapas caracterizadas por los cambios observados en las concepciones epistemológicas de los números complejos las cuales son:

1. ***Algebraica:*** Primeras alusiones de las raíces cuadradas de cantidades negativas, consideradas cómo inútiles, aunque coherentes con los métodos algebraicos.

2. ***Analítica:*** Aceptación y generalización del uso de las expresiones imaginarias gracias al desarrollo del análisis infinitesimal, consideradas como cantidades que por su naturaleza son imposibles, ya que no se pueden ubicar entre los números posibles: positivos, negativos o nulos. Por eso se les llama cantidades imaginarias porque sólo existen en la imaginación.

3. ***Geométrica:*** Introducción de un eje imaginario que tiene asociado $\sqrt{-1}$ como unidad perpendicular a 1 y consideración de los imaginarios como flechas del plano. Así, en el plano de ejes real e imaginario un vector queda representado por $a + bi$; y $\sqrt{-1}$ actúa como $90°$ alrededor de O, es decir, como un signo o índice de perpendicularidad.

4. ***Formal**:* Formalización de los números complejos considerándolos como pares ordenados de números reales.

Dichas etapas fueron utilizadas como referencia para organizar la búsqueda y selección de cuestiones relevantes para contrastar la siguiente hipótesis que mencionan Pardo y Gómez (2005):

> "Es posible que algunas dificultades e inconsistencias conceptuales y algorítmicas en relación con los complejos, a las que se han enfrentado los matemáticos a lo largo de la historia, guarden paralelismos con las que afrontan los estudiantes cuando están intentando ser competentes en esta materia"

Los resultados obtenidos por los autores, señalan algunas dificultades e inconsistencias que se presentaron a lo largo de su investigación, mismas que serán consideradas en los elementos de justificación de este trabajo.

En el trabajo de Martínez y Antonio (2009), los cuales consideran como base de su trabajo el marco teórico de Aproximación Socioepistemológica en Matemática Educativa (Cantoral y Farfán, 2004), se hace énfasis en las alternativas que pueden ser factibles para la construcción escolar del significado de los números complejos, bajo la hipótesis de que su significado puede ser construido a través del proceso de convención matemática

A partir de un análisis histórico-epistemológico de la búsqueda de la solución general de ecuaciones de tercer grado, Martínez y Antonio (2009) afirman que *"el significado del número complejo, en un plano algebraico, puede ser interpretado como elemento unificador entre el grado de la ecuación y sus soluciones"*.

La secuencia de actividades que diseñaron declara como objetivo propiciar la aceptación de los números complejos y la operatividad de la raíz cuadrada de números negativos en estudiantes de nivel medio superior, dentro de un contexto de cálculo de raíces de polinomios, de manera más específica con polinomios de la forma $\mathrm{x}^{\mathrm{n}} - 1 = 0$, considerando que mediante este contexto es posible construir el significado de número complejo y su operatividad como convención matemática, es decir, como elemento unificador entre el grado de la ecuación y sus soluciones.

Como resultado observaron que a pesar de que los estudiantes insistían en que "las raíces cuadradas de números negativos no existen", la secuencia de actividades los indujo a operar con ellos, para encontrar y comprobar las raíces de algunos polinomios propuestos. De esta manera ellos propiciaban la aceptación de los números complejos.

Un trabajo más es el de Bagni (2001), donde se analiza la efectividad de la introducción del tema matemático *números imaginarios*, a través de un ejemplo histórico, al aplicar un examen a estudiantes de nivel medio superior. La estrategia seleccionada consistió en verificar la historia de los números imaginarios en uno de los pasos para la resolución de una ecuación cúbica, y en el resultado de una ecuación cuadrática. Esto con el fin de observar si el estudiante acepta o rechaza la técnica implementada.

En este documento se resaltan los siguientes puntos como premisas:

1. Lo complicado que resulta para los estudiantes aceptar la presencia del símbolo $\sqrt{-1}$, al cual se le denota como i, ya que anteriormente era un objeto matemático ilícito o no utilizable.

2. Los estudiantes aceptan con mayor convicción las cantidades imaginarias cuando éstas se encuentran dentro del procedimiento resolutivo de una ecuación, es decir, no son parte del resultado sino que se utilizan como herramientas para llegar a él. Dicha premisa considera antecedentes históricos, como la resolución de ecuaciones de tercer grado, ya que los números imaginarios servían de ayuda para encontrar las soluciones de éstas.

Como conclusión obtuvieron que desde el punto de vista cualitativo, es evidente que la simple propuesta de un reclamo histórico, aunque útil desde el punto de vista didáctico, no es siempre suficiente para garantizar un aprendizaje pleno, ni tampoco para aceptar un hecho (tal como sucede con la presencia de los números imaginarios en la resolución de ecuaciones).

Por último, en el documento de Anna Sfard (1991) se habla del proceso cíclico que han tenido los diferentes sistemas numéricos, ya que han sucedido acontecimientos similares para el nacimiento de cada uno de ellos.

Particularmente, habla de las diferentes etapas que los diferentes sistemas numéricos han atravesado, las cuales son:

1. La primera etapa es la preconceptual, en la cual los números eran utilizados para realizar ciertas operaciones y son vistos como procesos (ver Figura 2).

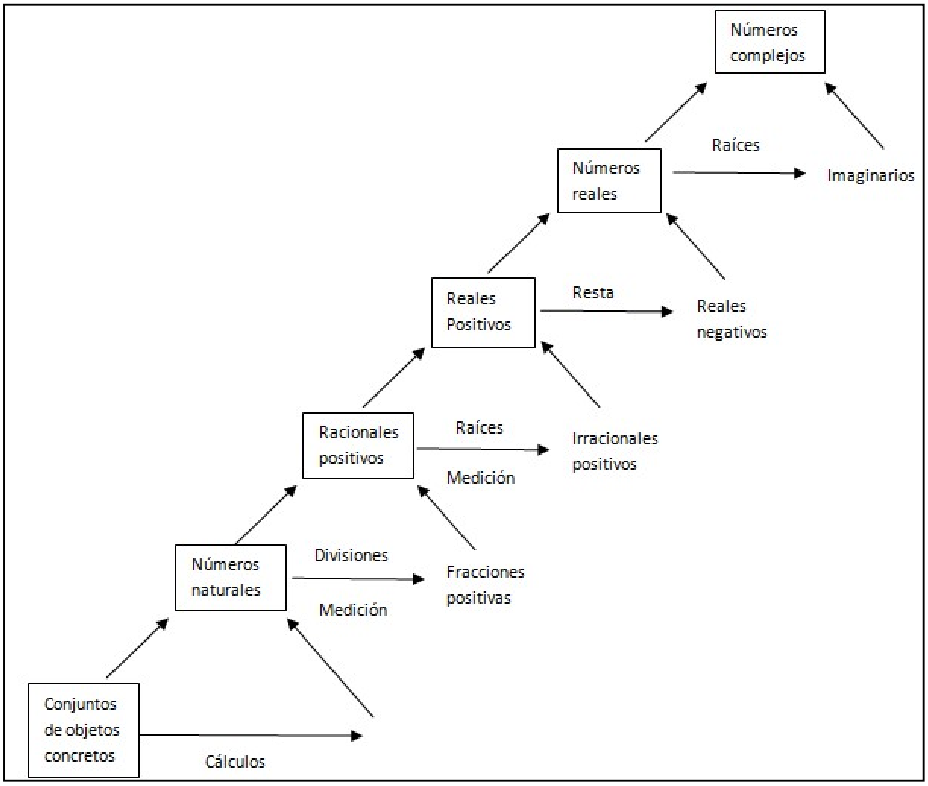


Figura 2. El desarrollo del concepto de número.

2. La segunda etapa es predominantemente operacional, en la que una nueva clase de números emerge para poder realizar ciertas operaciones. Estos nuevos números son sólo símbolos abstractos sin una asociación a una "realidad".

3. La tercera y última etapa, corresponde a la fase estructural, donde el número en cuestión es reconocido como un objeto matemático.

Estos son las investigaciones principales, de donde se obtuvieron elementos de justificación para el presente trabajo, misma que a continuación se presenta.

1.2 Problemática y Justificación

1.2.1 Los números complejos en el ámbito escolar

La introducción de los números complejos en el currículo escolar marca un momento delicado. Como lo afirma Bagni (2001), la mayoría de los estudiantes han confirmado en repetidas ocasiones en sus cursos de secundaria y preparatoria, la imposibilidad de extraer raíces cuadradas de números negativos, y de pronto, en el primer año de Universidad se les pide que acepten el símbolo $\sqrt{-1}$ como unidad imaginaria. Algunas investigaciones en el área de Matemática Educativa (Bagni, 2001; Pardo, 2007; Martínez, 2009; Aznar, s.f.) mencionan que en el proceso de aprendizaje de los números complejos, los estudiantes tienen dificultades cuando:

1. Resuelven un problema planteado con números reales pero cuya solución no es real sino compleja no real.
2. No reconocen que las reglas generales de la multiplicación no funcionan en el producto de raíces con radicando negativo. Por ejemplo, al realizar la multiplicación $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ obtienen como resultado 1, y como justificación a su respuesta argumentan que la multiplicación de raíces tiene la propiedad siguiente: $\sqrt{\mathrm{a}}\sqrt{\mathrm{b}} = \sqrt{\mathrm{ab}}$. Dicha propiedad se cumple únicamente para el conjunto de los números reales.
3. Tratan de extender las propiedades de orden de los números reales a los números complejos.
4. Transitan entre sus diferentes representaciones gráficas, numéricas, algebraicas.
5. Manejan módulos y argumentos, parte real y parte imaginaria, y sus relaciones.

Como lo mencionan Kozak, Peyregne ,Garaventa y Endelli (2008, p. 2):

> Es sabido que para la mayoría de los estudiantes, el concepto primario que tienen de los números complejos es que representan una respuesta abstracta a algo que aparentemente no existe en el mundo real, como es, por ejemplo, la raíz par de un número negativo, una especie de sortilegio metafísico, una nada inasible, tal como le sucedía a los matemáticos del siglo XVI.

Para enfrentar el escaso conocimiento que hay sobre el tema de números complejos, así como facilitar la modelización y resolución de problemas, es necesario promover sus aplicaciones en distintas áreas en las que pueden involucrarse, tales como: Ingeniería electrónica, ecuaciones diferenciales, fractales, relatividad general y relatividad especial, mecánica cuántica, etc. Sin embargo, los contextos extra-matemáticos e intra-matemáticos señalados, generalmente no son familiares ni triviales para los estudiantes de primer año de Universidad, por lo que resulta difícil orientar la enseñanza a través de ellos, sobre todo si el tiempo del que se dispone es limitado.

Particularmente, este trabajo está pensado para las carreras de Ciencias e Ingeniería de la Universidad de Sonora, donde los planes y programas de ésta última fueron modificados. Un cambio significativo fue la fusión de los cursos de Álgebra Superior y Álgebra Lineal, motivo por el cual se omitieron algunos temas. En este nuevo curso de Álgebra se inicia con el tema de números complejos. Una de las principales desventajas para lograr la comprensión de este tema es el tiempo que viene señalado en el programa, que es de sólo 10 horas. Es por eso, que se considera necesario enriquecer tanto la actividad en clase como la actividad extra clase.

Con el fin de superar las dificultades señaladas y la resistencia que los estudiantes exhiben sobre este tema, se consideró una forma alternativa para abordarlo. La estrategia seleccionada consistió en el diseño de una secuencia de actividades didácticas en la que el estudiante no sólo pueda operar con números complejos, sino que además sea capaz de encontrar relaciones, diferencias y/o similitudes entre las propiedades de sus operaciones y las de los números reales.

Las actividades diseñadas involucran diferentes formas de representación de los números complejos y sus operaciones. Con el uso del software GeoGebra se parte de representaciones gráficas dinámicas y éstas se vinculan, dinámicamente, con las correspondientes representaciones algebraicas y numéricas. Esto crea un ambiente en el cual los estudiantes tienen la oportunidad de explorar, analizar, conjeturar, verificar conjeturas y generalizar, privilegiando así, la actividad del alumno como medio para promover su aprendizaje.

1.2.2 Representaciones gráficas y visualización

El uso de representaciones gráficas y la visualización han sido fuente de diversas reflexiones en el ámbito de la educación matemática, ya que para muchos autores, tal como lo menciona (Ben-Chaim, 1991), "la visualización cobra importancia en el proceso de razonamiento inductivo y deductivo".

Según Planchart (2002), la visualización genera representaciones internas sobre determinado objeto matemático y dichas representaciones enriquecen el proceso de enseñanza y/o aprendizaje de las matemáticas. Para Planchart, "Las gráficas, los diagramas, las figuras geométricas construidas manualmente o en computadoras generan representaciones internas y, éstas fortalecen el proceso cognitivo que conduce al aprendizaje."

Por otro lado, Arcavi (2003, p. 217), menciona que "la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas".

Duval (2002), “distingue entre visión y visualización. La visión es la percepción directa de un objeto espacial; la percepción visual necesita exploración mediante movimientos físicos, del sujeto que ve, o del objeto que se mira, porque nunca da una aprehensión completa del objeto. Entiende la visualización como representación semiótica de un objeto, una organización bi-dimensional de relaciones entre algunos tipos de unidades.”

Por su parte Godino (2012), señala que “la configuración de objetos y procesos asociados a una práctica matemática estará formada usualmente por dos componentes, uno visual y otro analítico, los cuales se apoyan sinérgicamente en la solución de la tarea correspondiente (ver Figura 3). El componente visual puede desempeñar un papel clave en la comprensión de la naturaleza de la tarea y en el momento de formulación de conjeturas, mientras que el componente analítico lo será en el momento de generalización y justificación de las soluciones”.

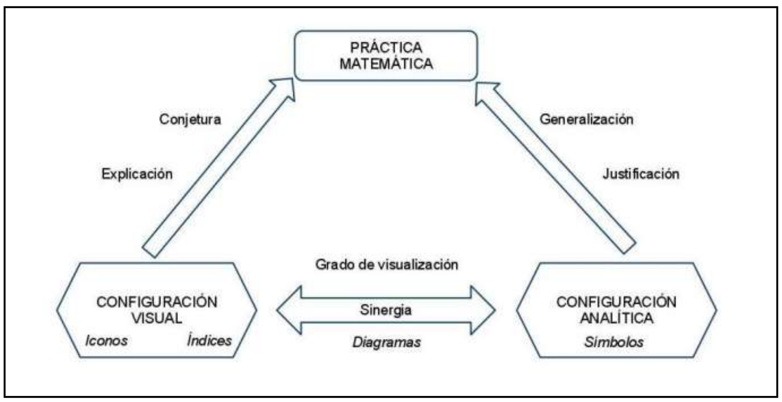


Figura 3. Sinergia entre configuraciones visuales y analíticas (Godino, 2012)

Sin embargo, un problema detectado en las aulas, se relaciona con el hecho de que los docentes le dan más importancia a los desarrollos de carácter algebraico que a la visualización, tal como lo afirman diversos autores:

1. Hitt (2003): “las investigaciones en educación matemática señalan que en general el sistema algebraico es el preferido por los profesores de matemáticas en su práctica docente”
2. Planchart (2002): “… los profesores promueven más el pensamiento algorítmico-algebraico que el argumento visual.”

Aunado a esto, según Vinner (1989, p. 92), no sólo los docentes se inclinan por un desarrollo algorítmico-algebraico, sino que los mismos estudiantes tienen dicha preferencia, la cual, afirma, se debe a las siguientes razones

1. La creencia que la prueba algebraica es “más” matemática y que para un examen final es preferible ir a lo seguro, más claro, más simplificado e inmediato que la prueba visual;
2. La preparación para un examen final es a menudo por enseñanza memorizada y
3. Los estudiantes prefieren la memorización de fórmulas y técnicas algebraicas, lo cual es una receta efectiva para tener éxito en los exámenes.

Pero es importante destacar también, que así como hay autores que resaltan la importancia del uso de representaciones gráficas, hay otros que nos advierten de las posibles dificultades que podrían surgir, por ejemplo:

1. La percepción visual, en algunas ocasiones, puede perturbar la aprehensión del objeto;
2. los procesos visuales intuitivos no son suficientes para alcanzar los otros niveles de abstracción que permiten otras representaciones semióticas;
3. los estudiantes aprehenden el objeto localmente y no globalmente, (Planchart, 2002).

Las actividades didácticas, producto del presente trabajo, tienen la característica esencial de iniciar con representaciones gráficas dinámicas, pero se promueve además la articulación de diferentes representaciones para enfrentar las dificultades descritas por Planchart, en relación con los procesos de visualización.

1.2.3 Uso de Tecnología y Representaciones Dinámicas.

Sin duda alguna, los avances tecnológicos se han visto reflejados en muchos aspectos de nuestra vida, y la educación es uno de ellos. Particularmente, en la enseñanza de las matemáticas, la tecnología ha generado un gran impacto y polémica alrededor de su uso. Hay quienes afirman que la tecnología favorece y enriquece la enseñanza y/o aprendizaje de las matemáticas, mientras que otros consideran que es perjudicial.

Con respecto a las posturas que hay alrededor del uso de la tecnología en el aula, particularmente sobre el uso de computadoras, Pea (1987) menciona lo siguiente:

> En educación matemática hay una tendencia dominante donde se ve a las computadoras simplemente como amplificadoras de las capacidades humanas (metáfora amplificadora). Desde esta perspectiva, son consideradas herramientas que permiten realizar tareas de una manera mucho más rápida y precisa, pero sin un cambio cualitativo en lo que antes se hacía sin ellas. En cambio, otra perspectiva consiste en ver a las computadoras como herramientas

cognitivas, las cuales, cuando son usadas apropiadamente, no sólo permiten amplificar las capacidades humanas, sino que tienen el potencial de provocar cambios estructurales en el sistema cognitivo de los estudiantes (metáfora reorganizadora) a través de una reorganización y transformación de las actividades que ellos realizan.

Por otra parte, en el trabajo de Romero (2010) se menciona que a lo largo de la historia la tecnología ha avanzado y, en consecuencia, los ambientes educativos han evolucionado. Particularmente, señala que, los tipos de representaciones que se han utilizado a lo largo de la historia de las matemáticas han evolucionado a lo largo de cinco etapas (Moreno, Hegedus & Kaput, 2008, pp. 102-103), citado en Romero (2010), de acuerdo al tipo de interacción que tiene el usuario con el medio para representar, las cuales parten desde las inscripciones grabadas, seguidas por la capacidad de borrar lo representado, para posteriormente hacer uso de representaciones estáticas en dispositivos electrónicos, generando representaciones dinámicas discretas y, por último, representaciones dinámicas que se perciben como continuas.

Otra de los aspectos relevantes que señala Romero (2010) son los riesgos del uso de representaciones dinámicas dentro de las cuales considera la inhibición de la necesidad de demostraciones y argumentaciones, ya que los diferentes *escenarios* vistos en pantalla son suficientes para afirmar determinada proposición. En este sentido, el potencial que tienen las representaciones dinámicas para representar objetos variables puede ser contraproducente.

Particularmente, en este trabajo el incluir gráficas dinámicas en las actividades no se limita a hacer la labor del estudiante de manera más rápida y precisa, sino que además le brinda la oportunidad de explorar, analizar, conjeturar, verificar conjeturas y generalizar, privilegiando así, la actividad del alumno como medio para promover su aprendizaje. De esta manera se busca favorecer la comprensión del objeto matemático, en nuestro caso, de los números complejos y sus operaciones, ya que el estudiante tiene la oportunidad de establecer diversas relaciones con respecto al objeto matemático de interés, enriqueciendo así su aprendizaje.

1.2.3.1 Uso del Software GeoGebra

El software que sirvió de apoyo tecnológico para la realización de este diseño de actividades es GeoGebra. Las razones por las cuales se consideró hacer uso de éste son, como lo menciona Romero (2010), las siguientes:

1. Los numerosos reconocimientos que este software ha recibido.

2. Los beneficios de ser un software libre.

3. Es un DGS (Software de Geometría Dinámica).

4. Es un CAS (Sistema Algebraico Computacional).

5. Además de ser un DGS y un CAS, es un *Software de Matemáticas Dinámicas* (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009), ya que permite la representación de objetos geométricos y algebraicos, los vincula dinámicamente, es decir, al modificar alguna representación de un objeto las otras se modifican instantáneamente de manera acorde.

1.2.3.2 Actividades en Línea

Hoy en día, las posibilidades de acceder a una computadora con internet son muchas, ya que si no se cuenta con un equipo propio existen varios lugares que nos facilitan su uso. Tomando en cuenta lo anterior, la secuencia de actividades fue colocada en una página web, con el fin de que se encuentre disponible desde cualquier computadora, favoreciendo en gran medida el trabajo extra clase. Particularmente, la Universidad de Sonora cuenta con varios laboratorios de equipos de cómputo con internet, los cuales pueden ser utilizados por los estudiantes de manera gratuita obteniendo, de esta manera, el acceso a las actividades.

Por otra parte, el hecho de que sea una secuencia en línea permite que personas interesadas en las actividades y que no pertenezcan a la institución tengan un fácil acceso a ellas.

1.2.4 Orientaciones para el docente

Las actividades diseñadas no son suficientes por sí mismas, requieren de un conductor que coordine el trabajo en clase y que dé seguimiento al logro de los objetivos en cada hoja de trabajo. Por tal motivo, se consideró pertinente la incorporación de una serie de orientaciones para el docente, donde se especifiquen los objetivos pretendidos de cada actividad, con el fin de orientar las discusiones grupales y los propósitos de cada una de ellas.

1.3 Objetivo

El objetivo de este trabajo es el diseño de una secuencia de actividades didácticas en línea para el aprendizaje de los números complejos, sus formas de representación y operaciones básicas, que involucren el uso de representaciones dinámicas elaboradas con el software GeoGebra; así como el diseño de una serie de orientaciones que sirva de apoyo para el docente al momento de implementar la secuencia de actividades.

Se parte del supuesto de que los estudiantes construyen un significado más rico de los números complejos y sus operaciones básicas, a partir de la visualización dinámica de sus diferentes formas de representación, gráfica, algebraica y numérica. Para promover el aprendizaje del estudiante, se consideró necesario crear ambientes en los que se promueva la exploración, la construcción y verificación de conjeturas, la argumentación, la generalización, privilegiando la actividad de los estudiantes y la interacción entre ellos.

CAPÍTULO 2. ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

2.1 Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática

Para fundamentar este trabajo se consideran algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), desarrollado por Godino y colaboradores (2002). Dicho marco teórico, articula las facetas institucionales y personales del conocimiento matemático, otorgando un papel clave a la actividad de resolución de problemas, a los recursos expresivos y asumiendo coherentemente supuestos pragmáticos (los objetos emergen y evolucionan a partir de situaciones problémicas) y referenciales (los objetos pueden ser referenciados, por lo que poseen una realidad cultural) sobre el significado de los objetos matemáticos.

Específicamente, entre los elementos que se consideran para este trabajo están los sistemas de prácticas, los objetos personales e institucionales, sus significados sistémicos, los elementos básicos del significado, las relaciones que se establecen entre ellos (funciones semióticas) y conflictos semióticos, los cuales se consideran como herramientas finas para analizar la actividad matemática y los objetos que se ponen en juego durante la misma. Asimismo, se utilizarán algunos niveles de análisis didáctico.

2.1.1 Práctica Matemática y Sistemas de Prácticas

Se considera como *práctica matemática* a toda actuación o expresión (lingüística, gráfica, etc.) realizada por un sujeto para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validarla y generalizarla a otros contextos y problemas. Sin embargo, en el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los *sistemas de prácticas* (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por los sujetos en su actuación ante un campo de problemas.

2.1.2 Objetos y Significados Personales e Institucionales

Los *objetos personales* se consideran como emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas. Mientras que, los *objetos institucionales* se consideran emergentes del sistema de prácticas socialmente compartidas en una institución, en relación con la resolución de cierto campo de problemas matemáticos.

El *significado institucional* hace referencia al sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto institucional en un momento dado. Por otra parte, el *significado personal* lo constituye el sistema de prácticas personales que un sujeto realiza para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto personal.

Con relación a los *significados institucionales* se consideran cuatro tipos: el *Significado institucional referencial o de referencia,* relativo al sistema de prácticas de los expertos, el cual determina lo que es el objeto en cuestión para las instituciones matemáticas y didácticas. Con base en este significado de referencia, el profesor elige, ordena y demarca la parte específica que va a plantear a sus estudiantes durante un proceso de enseñanza y aprendizaje, considerando los recursos disponibles, como son el tiempo, recursos tecnológicos, conocimientos previos de los estudiantes, etc. estableciéndose éste como el *significado institucional pretendido.* El *significado institucional implementado* es el sistema de prácticas efectivamente implementadas en el aula y el *significado institucional evaluado* es el constituido por las tareas o cuestiones seleccionadas por el profesor para tomar en cuenta en las evaluaciones.

Por otra parte, dentro de los significados personales se pueden distinguir tres tipos: el *significado personal global* el cual corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que el sujeto es capaz de manifestar potencialmente referentes a un objeto matemático, el *significado personal declarado* que se refiere a las prácticas efectivamente expresadas en las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo las correctas e incorrectas desde el punto de vista institucional, el *significado personal logrado* que corresponde a las prácticas manifestadas que son acordes con la pauta institucional establecida.

Considerando lo anterior, el EOS establece que la enseñanza implica la participación del estudiante en el sistema de prácticas que constituyen los significados institucionales, y el aprendizaje supone la construcción de dichos significados por parte del estudiante.

Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. De esta manera, los componentes del conocimiento que un sujeto requiere para realizar y evaluar la práctica que permite resolver una determinada *situación-problema* son el uso de *lenguajes*, verbal y/o simbólico. Estos lenguajes son la parte ostensiva (perceptible por alguno de los sentidos) de un serie de *conceptos, proposiciones y procedimientos*, mismo que intervienen en la construcción de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que compuesta, son satisfactorias. Con el fin de realizar un análisis sobre la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias comentadas anteriormente: situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando *configuraciones epistémicas.*

2.1.3 Funciones Semióticas y Conflictos Semióticos

Otro elemento importante del EOS es el de *función semiótica*, entendida esta como la relación entre un antecedente (expresión, representante) y un consecuente (persona o sujeto), establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo a un cierto criterio o código de correspondencia. Las funciones semióticas son un instrumento relacional que facilita el estudio conjunto de la manipulación de ostensivos matemáticos (representaciones perceptibles por los sentidos), y del pensamiento que la acompaña, característico de las prácticas matemáticas.

Por otra parte, un *conflicto semiótico* es cuando ocurre una disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones).

Los elementos teóricos descritos con anterioridad han sido parte fundamental para la elaboración de este trabajo.

2.1.4 Niveles de Análisis Didáctico

Por último, con el propósito de describir, explicar y valorar un proceso de instrucción se estarán considerando tres niveles de análisis didáctico: *Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas* el cual se orienta a estudiar las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de estudio analizado, *elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos* el cual se centra en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también que emergen de ellas y, por último, *valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio* el cual constituye una síntesis final orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

Particularmente, con respecto a la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio se consideran 6 idoneidades las cuales son:

1. Idoneidad Epistémica: Grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
2. Idoneidad Cognitiva: Grado en que los significados implementados (pretendidos) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

3. Idoneidad Interaccional: Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.

4. Idoneidad Mediacional: Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

5. Idoneidad Emocional: Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes

6. Idoneidad Ecológica: Grado de adaptación curricular, socio-profesional y conexiones intra e interdisciplinares.

2.2 Consideraciones Metodológicas

La metodología toma sentido de acuerdo al marco teórico que la sustenta. Particularmente, una implicación metodológica para este trabajo fue el análisis del significado institucional de referencia, de donde se desprende el significado institucional pretendido, mismo que se espera ver reflejado en la elaboración de la secuencia didáctica. Por otra parte, el EOS proporciona elementos útiles para el diseño, implementación y valoración de un proceso de instrucción. A continuación se describen cada una de las fases fundamentales para la realización de este trabajo:

1. Revisión Bibliográfica. Esta etapa se enfocó hacia los antecedentes ligados a la enseñanza de los números complejos y sus operaciones, con el propósito de encontrar elementos que guiaran y justificaran la secuencia didáctica propuesta.

2. Análisis del Significado Institucional de Referencia. El análisis del significado institucional de referencia de los números complejos, sus formas de representación y sus operaciones básicas se llevó a cabo mediante la revisión del programa de la materia de Álgebra para Ingeniería, de notas de clase (Soto, 2002), libros de texto (Hitt, 2002), datos históricos (Bagni, 2001; Soto-Johnson, 2011; Nahin, 1998), resultados de investigación en Matemática Educativa (Martínez, Antonio, 2009; Pardo, Gómez, 2007; Del Castillo, Flores, 2009), sitios web (Sada, 2008) y el uso de tecnología (Hohenwarter et al, 2001).

3. Diseño de una secuencia de actividades didácticas. La secuencia se materializó en 13 hojas de trabajo y 33 applets elaborados con el software GeoGebra. Cada hoja de trabajo contiene algunos applets, indicaciones y preguntas que tienen como objetivo orientar la actividad matemática del estudiante. Ésta se encuentra disponible en la dirección electrónica www.mat.uson.mx/proyectoalgebra/Complejos.

4. Primera puesta en escena. La secuencia de actividades se probó con dos grupos de estudiantes de Ingeniería, uno en Ingeniería en Mecatrónica y el otro en Ingeniería Industrial y de

Sistemas, con objeto de identificar errores y/o limitaciones en el diseño de las actividades, así como conflictos semióticos potenciales.

5. Incorporación de las modificaciones sugeridas por la primera puesta en escena. Se trabajó en la adecuación de la secuencia didáctica, con base en las observaciones realizadas durante la puesta en escena.

6. Segunda puesta en escena de la secuencia. Se trabajó con dos grupos de nuevo ingreso durante el semestre 2011-2 de los programas de Ingeniería.

7. Análisis y valoración a posteriori de la secuencia didáctica. En esta etapa se realizó un análisis y valoración de la secuencia de actividades posterior a la segunda puesta en escena, donde se contemplen las seis componentes de la idoneidad didáctica propuestas por Godino (2009).

8. Incorporación de las modificaciones sugeridas por la segunda puesta en escena y su respectivo análisis.

9. Diseño de una serie de orientaciones como apoyo para el trabajo docente al momento de implementar la secuencia de actividades.

CAPÍTULO 3. El DISEÑO Y ANÁLISIS DE LA PROPUESTA

3.1 Significados Institucionales

Para el diseño de la secuencia de actividades se consideró esencial la caracterización de los *significados institucionales de referencia y pretendido*. Específicamente, el significado institucional de referencia nos brindó una panorámica general sobre el tema de números complejos, ya que en esa sección se describieron los objetos primarios presentes en las cuatro etapas que atravesó dicho conjunto numérico (algebraica, analítica, geométrica y formal). Posteriormente, se retomaron los elementos necesarios para caracterizar al significado institucional pretendido considerando el plan de estudios de las carreras de Ciencias e Ingeniería, a los cuales va dirigida la secuencia.

A continuación se describen con detalle los significados institucionales anteriormente mencionados:

3.1.1 Significado Institucional de Referencia

Con el objetivo de caracterizar el significado institucional de referencia de los números complejos, sus formas de representación y sus operaciones básicas, se llevó a cabo la revisión del programa de la materia de Álgebra para Ingeniería de la Universidad de Sonora, de notas de clase (Soto, 2002), libros de texto (Hitt, 2002), datos históricos (Bagni, 2001; Soto-Johnson, 2011; Nahin, 1998), resultados de investigación en Matemática Educativa (Connor, et al., 2007; Godino, 2002), sitios web (Sada, 2008) y el uso de tecnología (Hohewarter, et al., 2001).

Con relación al significado institucional de referencia, en la Tabla 1 se muestra un resumen del análisis ontológico-semiótico hecho, en el cual, se han identificado los objetos primarios constitutivos del significado de los números complejos y se han organizado de acuerdo con cuatro configuraciones identificadas. Éstas se corresponden con las cuatro grandes etapas del desarrollo histórico, caracterizadas por los cambios en las concepciones epistemológicas de los números complejos (Pardo y Gómez, 2007).

Las configuraciones aquí presentadas no son exhaustivas. Una configuración que no se incluyó en la tabla es la que considera las situaciones extra-matemáticas, ya que los contextos de aplicación extra-matemáticos de los números complejos, no son fácilmente accesibles a los estudiantes de primer semestre de Universidad.

Configura-ciones / Objetos Primarios	***Configuración Algebraica***	***Configuración Analítica***	***Configuración Geométrica***	***Configuración Formal***
Situaciones	-Resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas (en general, polinomiales) con soluciones complejas no reales. -Operar con números complejos -Representar números complejos en forma polar y cartesiana -Conversiones	-Uso de expresiones y funciones de variable compleja	-Representar números complejos en el plano, en forma polar y cartesiana. -Representar los procedimientos de las operaciones con números complejos	-Considerar a los números complejos como pares ordenados de números reales. -Analizar la estructura de campo del conjunto de los números complejos
Lenguaje	-Verbal -Numérico -Algebraico	-Verbal -Numérico -Algebraico	-Verbal -Numérico -Algebraico -Geométrico	-Verbal -Algebraico
Procedimientos	-Resolver ecuaciones de segundo y tercer grado -Operar con números complejos -Demostrar algunas propiedades de los números complejos conjugados -Expresar números complejos en sus diferentes formas de representación. -Convertir números complejos representados en forma cartesiana a su forma polar y viceversa.	-Evaluación de funciones de variable compleja	-Graficar números imaginarios puros. -Graficar números complejos. -Graficar los procedimientos de las operaciones con números complejos -Ley del paralelogramo	-Operar con los números complejos de acuerdo a las definiciones formales
Conceptos	-Raíz de un número negativo	-Variable compleja	-Plano Complejo	-Parejas ordenadas

	- Número imaginario -Número complejo -Parte Real -Parte Imaginaria -Módulo -Argumento -Suma, resta, multiplicación, división, conjugados, potencias y raíces de números complejos.	-Funciones de variable compleja	-Punto -Segmento dirigido -Parte Real -Parte Imaginaria -Módulo -Argumento -Ley del paralelogramo -Rotaciones	-Conjunto -Operación binaria -Axiomas de campo
Propiedades	-Extensión de las propiedades de las operaciones con números reales hacia las propiedades de las operaciones de los números complejos. -Reglas de las operaciones con números complejos	-Propiedades y teoremas asociados con las funciones de variable compleja	-Interpretación Geométrica de las operaciones con números complejos	-Los números complejos con la suma y multiplicación ordinaria tienen estructura algebraica de campo
Argumentos	Justificaciones de los algoritmos para operar con números complejos	Demostración de teoremas de variable compleja	-Demostrar gráficamente algunas propiedades de los números complejos conjugados	Demostración de las propiedades de la suma y producto de complejos

Tabla 1. Configuraciones Epistémicas asociadas a los Números Complejos

3.1.2 Significado Institucional Pretendido

Dado que la secuencia se dirige a estudiantes de Ingeniería de nuevo ingreso, para el significado institucional pretendido se tomaron en cuenta sólo las configuraciones algebraica y geométrica, ya que las configuraciones formal y analítica no forman parte del programa de Ingeniería.

A continuación, en la Tabla 2, se muestran las dos configuraciones que se ven reflejadas en la secuencia de actividades didácticas diseñada.

Configuraciones / **Objetos Primarios**	**Configuración Algebraica**	**Configuración Geométrica**
	-Resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas (en general, polinomiales) con soluciones complejas no reales.	-Representar números complejos en el plano, en forma polar y cartesiana.

Situaciones	-Operar con números complejos -Representar números complejos en forma polar y cartesiana -Conversiones	-Representar los procedimientos de las operaciones con números complejos
Lenguaje	-Verbal -Numérico -Algebraico	-Verbal -Numérico -Algebraico -Geométrico
Procedimientos	-Resolver ecuaciones de segundo y tercer grado -Operar con números complejos -Demostrar algunas propiedades de los números complejos conjugados -Expresar números complejos en sus diferentes formas de representación. -Convertir números complejos representados en forma cartesiana a su forma polar y viceversa.	-Graficar números imaginarios puros. -Graficar números complejos. -Graficar los procedimientos de las operaciones con números complejos -Ley del paralelogramo
Conceptos	-Raíz de un número negativo - Número imaginario -Número complejo -Parte Real -Parte Imaginaria -Módulo -Argumento -Suma, resta, multiplicación, división, conjugados, potencias y raíces de números complejos.	-Plano Complejo -Punto -Segmento dirigido -Parte Real -Parte Imaginaria -Módulo -Argumento -Ley del paralelogramo -Rotaciones
Propiedades	-Extensión de las propiedades de las operaciones con números reales hacia las propiedades de las operaciones de los números complejos. -Reglas de las operaciones con números complejos	-Interpretación Geométrica de las operaciones con números complejos
Argumentos	Justificaciones de los algoritmos para operar con números complejos	-Demostrar gráficamente algunas propiedades de los números complejos conjugados

Tabla 2. Configuraciones Epistémicas consideradas para el Significado Institucional Pretendido

3.2 Descripción de la Propuesta

La secuencia didáctica, se materializó en 13 hojas de trabajo y 33 applets elaborados con el software GeoGebra, las cuales están disponibles en la dirección electrónica www.mat.uson.mx/proyectoalgebra/Complejos (una versión estática de las mismas puede encontrarse en el Anexo 1 de este trabajo). Cada hoja de trabajo contiene algunos applets, indicaciones y preguntas que tienen como objetivo orientar la actividad matemática y construir un significado personal más rico de los números complejos y sus operaciones.

La secuencia de actividades quedó estructurada de la siguiente manera:

1. Representación Gráfica de los Números Reales
2. Representación Gráfica de la Unidad Imaginaria
3. Representación Gráfica de Números Imaginarios
4. Representación Gráfica de Números Complejos
    1. Forma Polar
    2. Forma Cartesiana
    3. Conversiones
5. Operaciones con Números Complejos
    1. Suma
    2. Resta
    3. Producto
    4. Conjugados
    5. División
    6. Potencias
    7. Raíces
6. Actividades complementarias

La primera actividad es introductoria, y revisa aspectos fundamentales de los números reales. En las tres actividades siguientes, se motiva la necesidad de extender el sistema de los números reales, mediante la situación de resolución de ecuaciones de segundo grado, las cuales conducen al cálculo de raíces cuadradas con cantidades negativas. Se plantea también la conveniencia de representar, tanto gráfica como algebraicamente, a los números imaginarios y, en consecuencia, a los números complejos. Además, en las actividades introductorias se abordan las representaciones de números complejos en su forma polar, cartesiana y la manera de pasar de una forma de representación a otra, para lo cual se insertó un *applet* de GeoGebra con las diferentes formas de representación, con el fin de que el estudiante tenga la oportunidad de establecer relaciones entre ellas.

El resto de las actividades consiste en la exploración dinámica de las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces de números complejos, a la vez que los estudiantes se familiarizan con las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas.

Enseguida se presentan detalles y aspectos relevantes de cada una de las actividades.

Actividad 1. Representación Gráfica de los Números Reales.

La primera actividad fue elaborada con el propósito de reforzar los conocimientos previos de los estudiantes sobre el sistema de los números reales, para tratar de disminuir las posibles dificultades y conflictos semióticos en la construcción de significados durante la implementación del resto de las actividades. En otras palabras, la actividad consiste en el reconocimiento de los distintos sistemas numéricos y sus operaciones, donde se hace énfasis en la propiedad de cerradura de las operaciones con números naturales, enteros, racionales y reales, con el fin de hacer notar la necesidad de ir extendiendo nuestro sistema numérico, en cada caso.

En ella se hace uso de dos applets: el primero de ellos está diseñado para que el estudiante represente números naturales, enteros y racionales en la recta real (ver Figura 4).

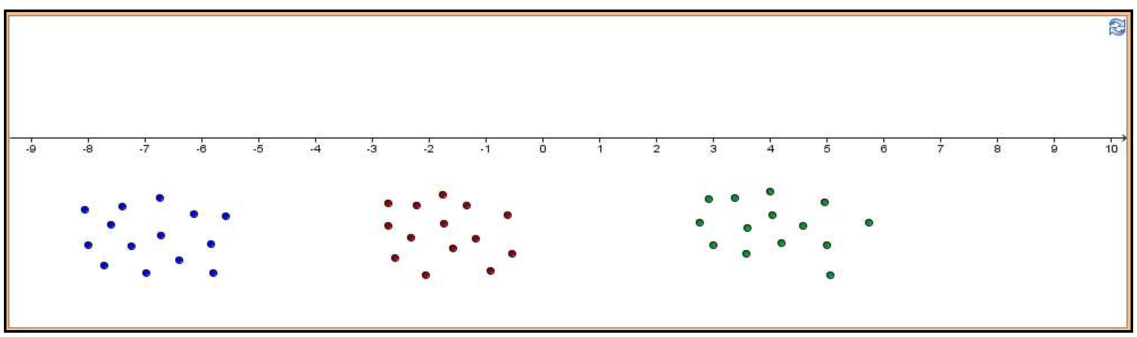


Figura 4. Applet 1, Actividad 1.

La exploración en los apletts es guiada por cuestionamientos como los siguientes, donde se enfatiza la propiedad de cerradura en los diferentes sistemas numéricos:

1. ¿Qué pasa cuando multiplicamos dos números naturales? ¿Necesitamos agregar más números a esta recta?

2. ¿Qué pasa cuando restamos dos números naturales? ¿Necesitamos agregar más números a esta recta?

Mientras, que el segundo applet (ver Figura 5) pretende que el estudiante lleve a cabo una construcción geométrica para ubicar el número $\sqrt{2}$ en la recta real lo cual involucra el uso de las herramientas de GeoGebra.

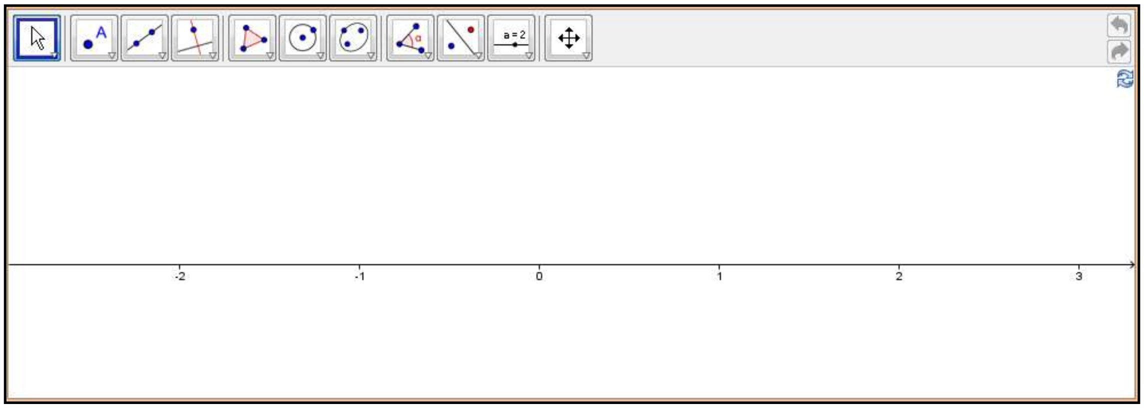


Figura 5. Applet 2, Actividad 1.

Actividad 2. Representación Gráfica de la Unidad Imaginaria:

Esta actividad fue diseñada con el objetivo de que el estudiante identifique la representación gráfica de la unidad imaginaria a través de la resolución gráfica de ecuaciones cuadráticas, considerando las propiedades del módulo y argumento de un producto de números reales.

En la actividad se utilizan cuatro applets: el primero de ellos tiene el propósito de que el estudiante instituya una representación de números reales en la recta real mediante segmentos dirigidos identificando, a la vez, el módulo y argumento de los mismos (ver Figura 6).

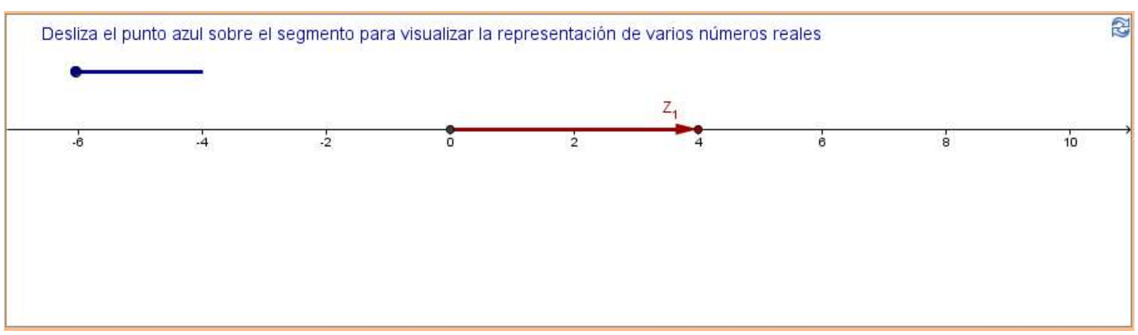


Figura 6. Applet 1, Actividad 2.

A partir de la exploración de dicho applet, el estudiante abordará cuestionamientos como los siguientes:

1. ¿Cuál es el argumento de un número positivo?

2. ¿Cuál es el argumento de un número negativo?

El segundo applet promueve la multiplicación de números reales mediante segmentos dirigidos, donde se espera que el estudiante establezca las relaciones entre los módulos y argumentos de los factores con el módulo y argumento del producto (ver Figura 7).

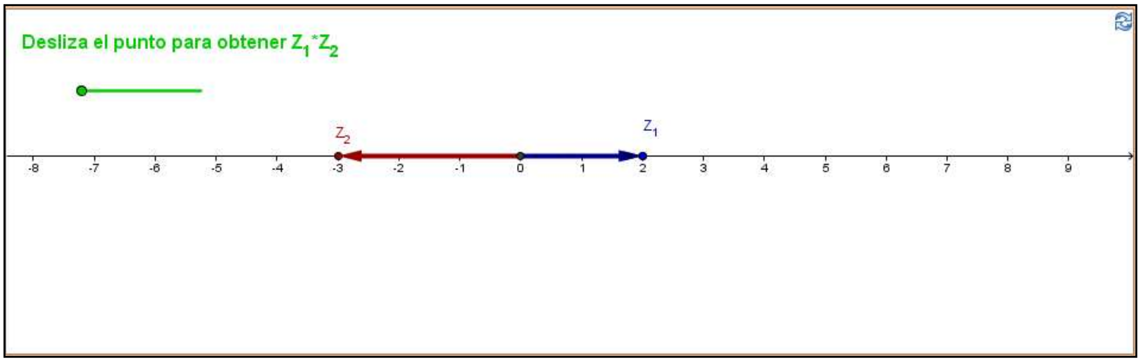


Figura 7. Applet 2, Actividad 2.

Las cuestiones que tendrá que responder el estudiante, se enfocan a las relaciones gráficas y numéricas que logre identificar, tales como:

3. ¿Qué relación existe entre los módulos de Z_1, Z_2 y el módulo de $Z_1 \cdot Z_2$?

4. ¿Qué relación existe entre los argumentos de Z_1, Z_2 y el argumento de $Z_1 \cdot Z_2$?

5. Describe cómo se efectúa gráficamente la multiplicación de $Z_1 \cdot Z_2$.

El tercer applet tiene por objetivo mostrar que al elevar un número real al cuadrado su resultado siempre será positivo (ver Figura 8).

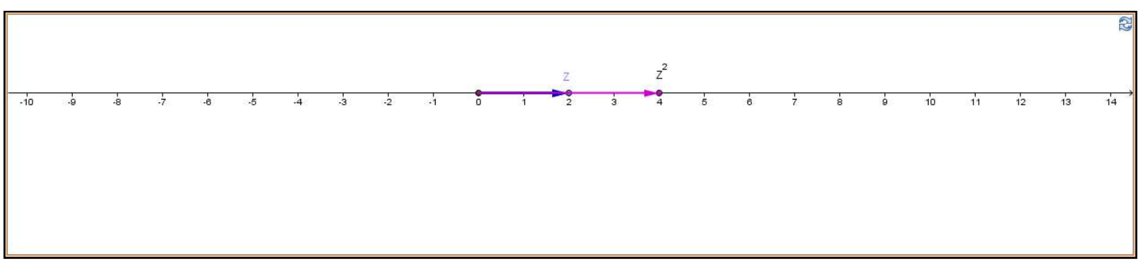


Figura 8. Applet 3, Actividad 2.

Con ayuda del applet anterior, al estudiante se le plantean algunas ecuaciones de segundo grado que deberá intentar resolver:

6. $Z^2 = 9$

7. $Z^2 = 2$

8. $Z^2 = -1$

Particularmente en el planteamiento de las ecuaciones anteriores, se espera que el estudiante concluya que no hay solución para la tercera ecuación dentro de la recta real, dando lugar a un nuevo applet (ver Figura 9), el cual permite dar solución a dicha ecuación $z^2 = -1$, ya que en éste la exploración no se limita a la recta real, sino que pueden salir de ella, esperando, con esto, que el estudiante identifique la ubicación geométrica de la unidad imaginaria

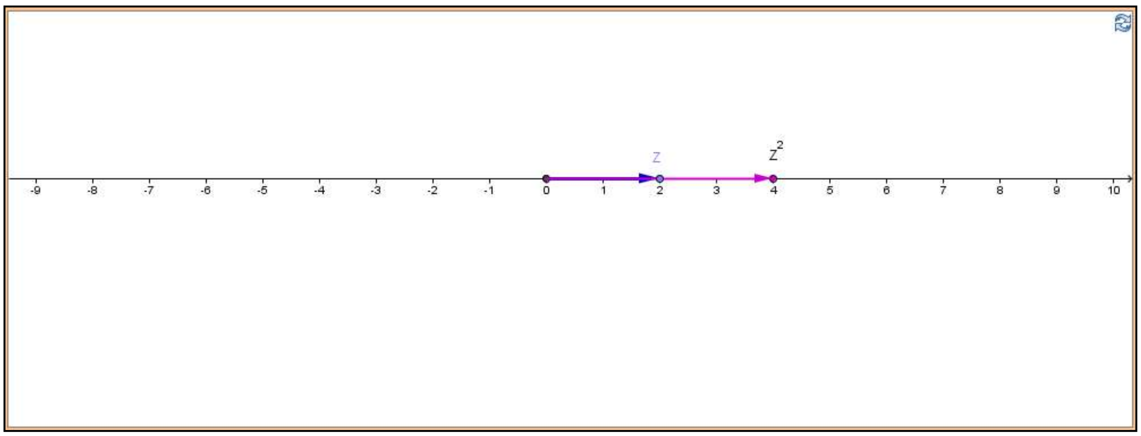


Figura 9. Applet 4, Actividad 2.

Mediante la exploración en el applet anterior, el estudiante deberá indicar las características de la unidad imaginaria. Específicamente se le solicita lo siguiente:

9. Escribe el módulo y argumento del número -1.

10. Escribe el módulo y argumento de las soluciones encontradas.

Actividad 3. Representación Gráfica de los Números Imaginarios:

El objetivo de esta actividad es que el estudiante identifique a los números imaginarios a través de su representación gráfica y de la solución de ecuaciones cuadráticas del tipo $Z^2 = -a^2$, donde a es un número real.

Se hace uso de un applet, el cual se diseñó para que el estudiante identifique el eje de números imaginarios por medio de la resolución de ecuaciones cuadráticas, en este nuevo applet se pueden realizar exploraciones fuera de la recta real (ver Figura 10).

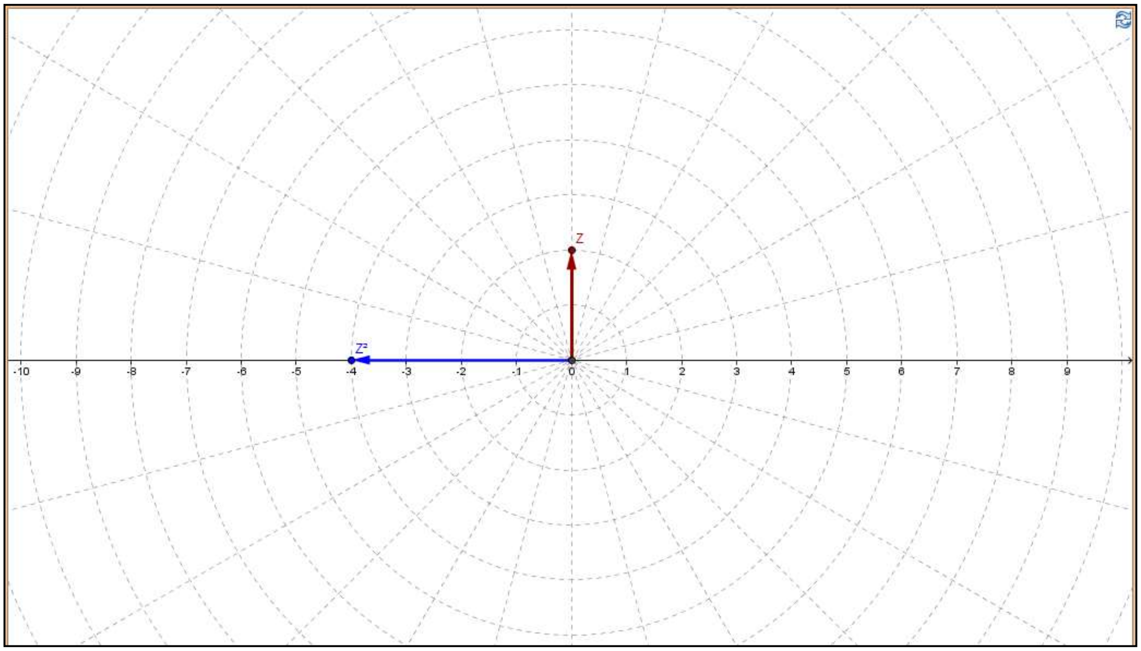


Figura 10. Applet 1, Actividad 3.

La tabla que el estudiante debe completar, mediante la exploración en el software, contiene algunas ecuaciones cuadráticas, la cual se presenta a continuación:

Ecuación	**Soluciones**	
	Módulo	**Argumento**
$Z^2 = 9$		
$Z^2 = -9$		
$Z^2 = 4$		
$Z^2 = -4$		
$Z^2 = 2$		

$Z^2 = -2$		

Una vez que el estudiante completa la tabla, se le cuestiona sobre las soluciones no reales.

Actividad 4a. Forma Polar de Números Complejos:

Esta actividad tiene por objetivo que el alumno represente gráfica y numéricamente a los números complejos, considerando su módulo y argumento.

Los applet utilizados son dos, en el primero se permite al estudiante visualizar la forma de representación polar de distintos números complejos, con el fin de que identifique módulo y argumento de los mismos (ver Figura 11).

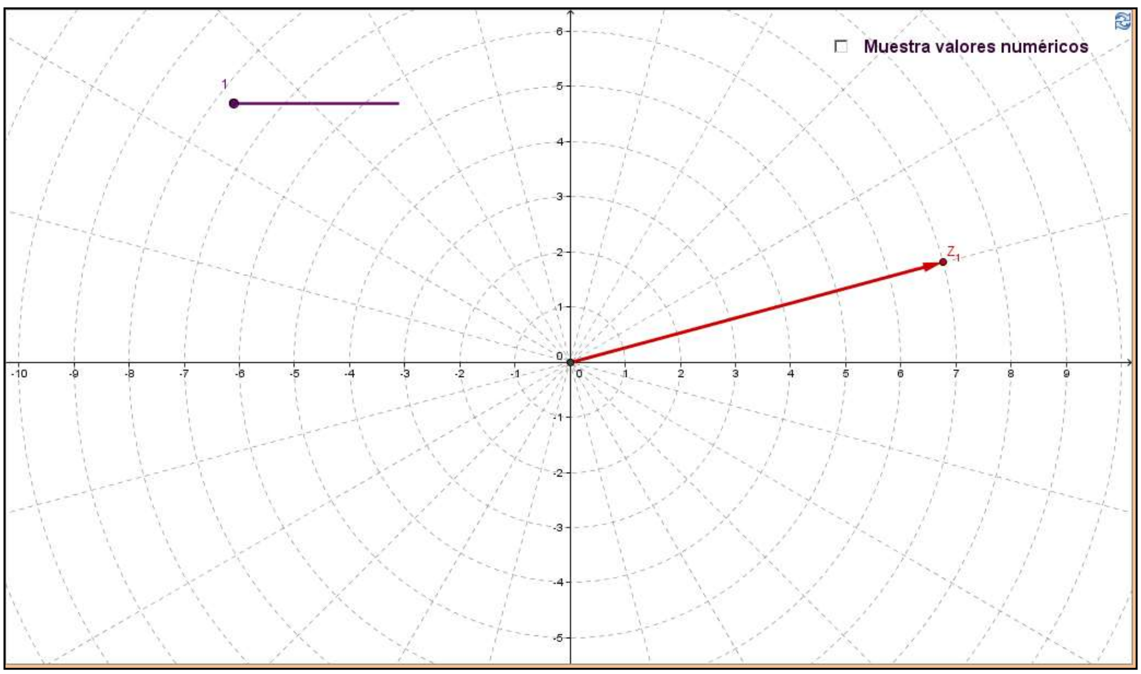


Figura 11. Applet 1, Actividad 4a.

Haciendo uso del applet anterior, se solicita al estudiante que complete la siguiente tabla:

Número	Módulo	Argumento
Z_1		
Z_2		

El segundo applet está diseñado para que el estudiante realice el procedimiento inverso, ya que ahora se le brindan distintos números complejos expresados en forma polar para que los represente de manera gráfica en la retícula polar, haciendo uso de las herramientas de GeoGebra (ver Figura 12).

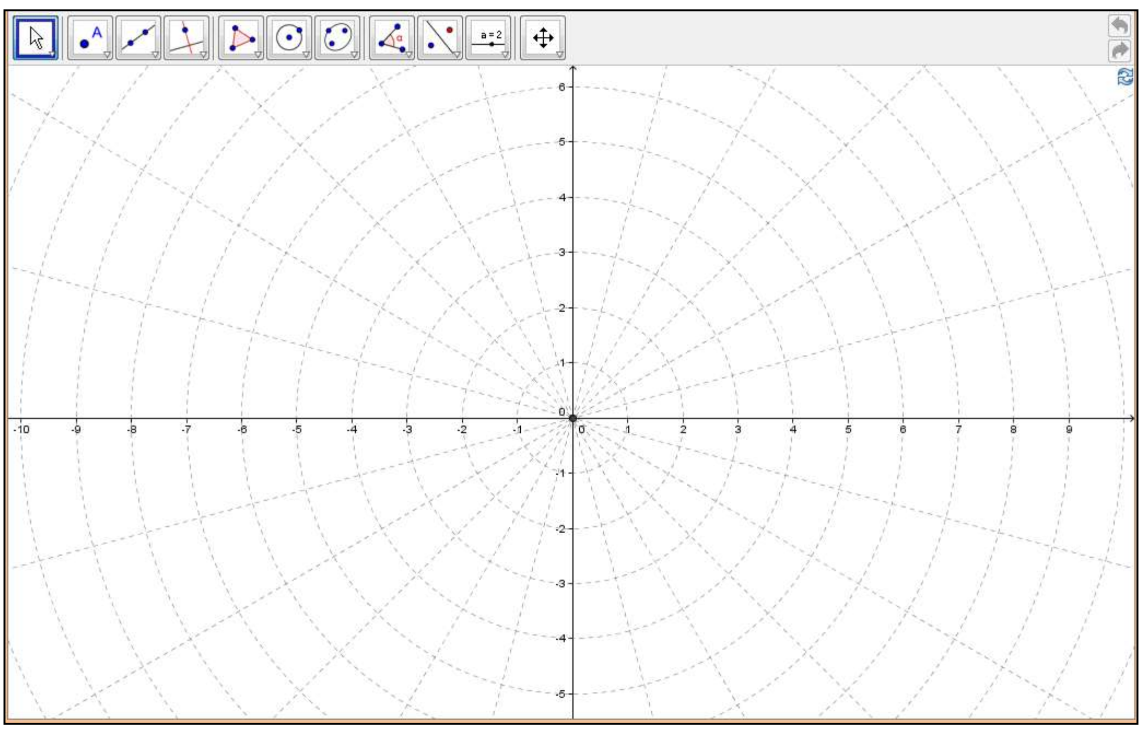


Figura 12. Applet 2, Actividad 4a.

Los números complejos que se le solicitan graficar al estudiante son los siguientes:

Módulo	Argumento
3	45°
1.5	120°
2	225°
5	0°
4	195°
1	135°
2.5	240°
3	300°
2	75°
0.5	270°
6	180°
3.5	60°

<u>Actividad 4b. Forma Cartesiana de Números Complejos:</u>

El propósito de esta actividad es que el estudiante identifique gráfica y numéricamente a los números complejos, considerando su parte real y su parte imaginaria.

La actividad hace uso de seis applets, el primero de ellos tiene por objetivo la visualización del producto de un número real por la unidad imaginaria i, es decir, la obtención de los números imaginarios puros, esperando que el estudiante establezca la relación que existe entre los módulos y argumentos de los factores con el módulo y argumento del producto (ver Figura 13).

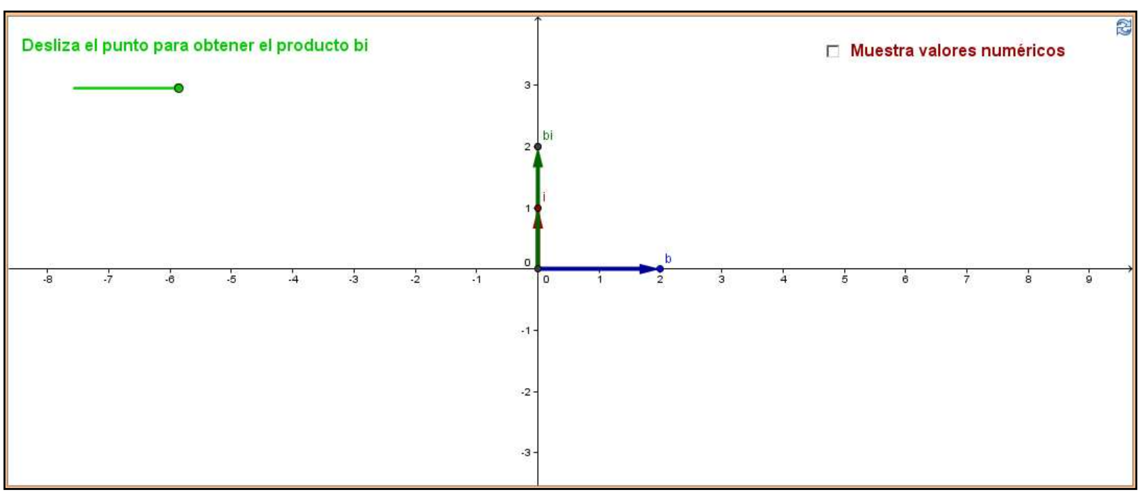


Figura 13. Applet 1, Actividad 4b.

Las preguntas a las que se enfrentará el estudiante son las siguientes:

11. ¿Qué relación existe entre los módulos de **i**, el número **b** y el producto **bi**?

12. ¿Qué relación existe entre los argumentos de **i**, el número **b** y el producto **bi**?

En el segundo applet se le solicita al estudiante que ubique algunos números imaginarios puros, utilizando herramientas del software GeoGebra (ver Figura 14).

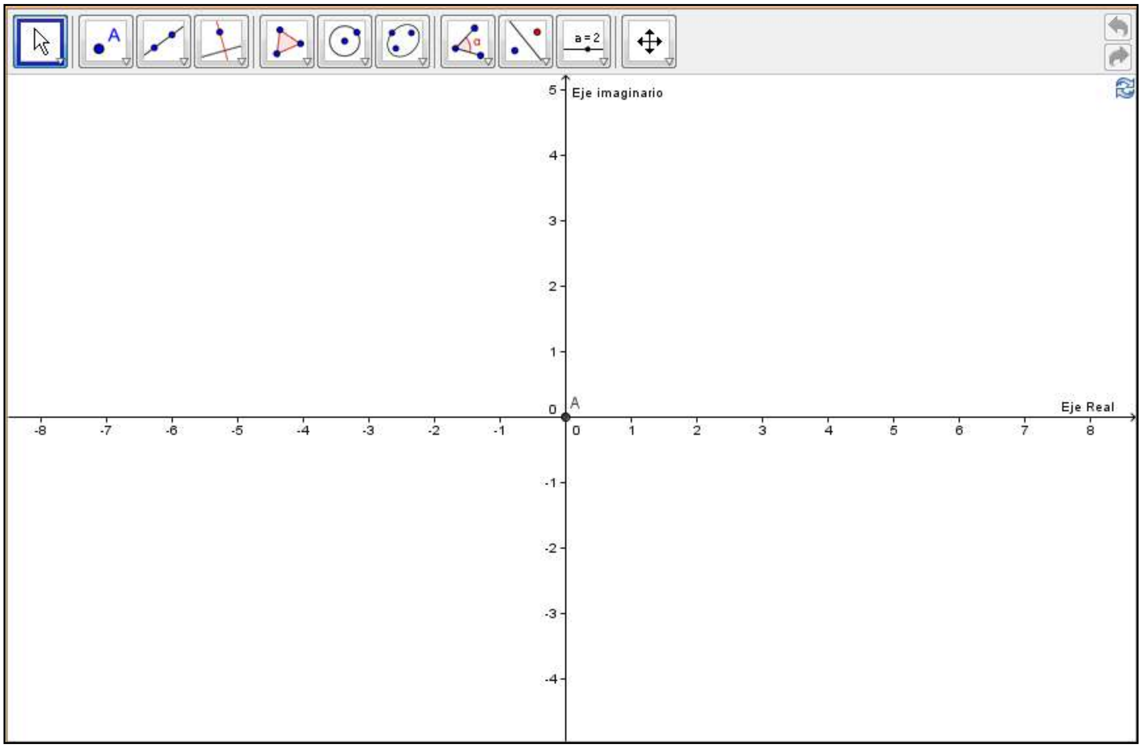


Figura 14. Applet 2, Actividad 4b.

El tercer applet se usa para visualizar la suma de dos números reales representados mediante segmentos dirigidos, con el fin de extender las propiedades de dicha operación a la suma de números complejos (ver Figura 15).

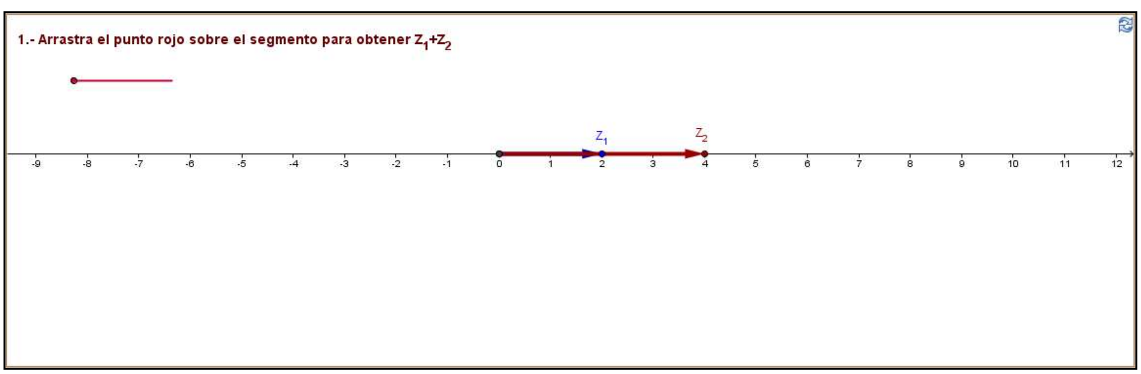


Figura 15. Applet 3, Actividad 4b.

El cuarto applet tiene por objetivo que el estudiante explore la suma de un número real con un número imaginario puro, obteniendo como resultado a los números complejos en el plano expresados en su forma de representación cartesiana (ver Figura 16).

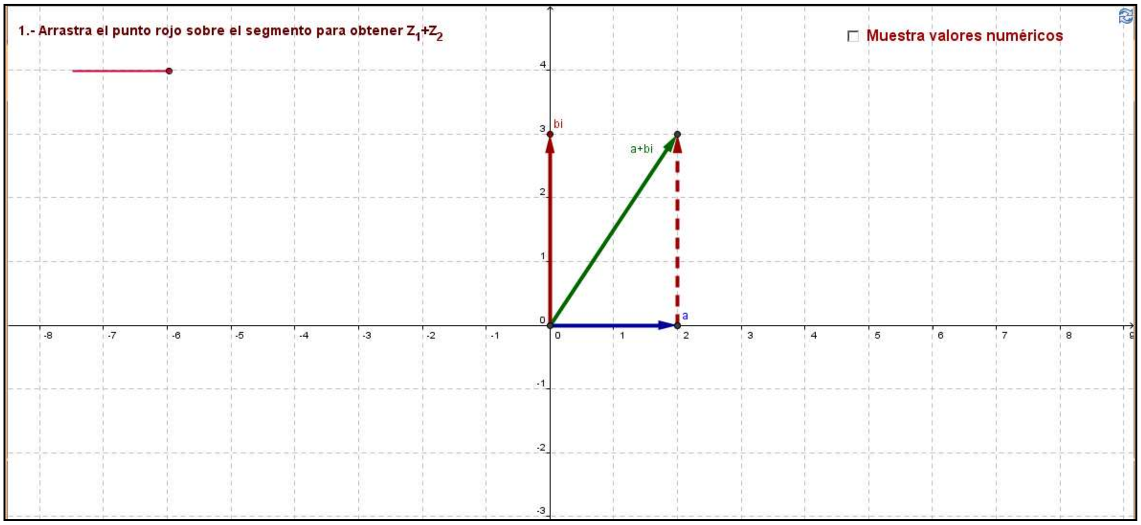


Figura 16. Applet 4, Actividad 4b.

Posterior a la exploración en el applet anterior, el estudiante deberá reportar algunos resultados en una tabla presente en la actividad, con lo cual se espera que pueda realizar las siguientes indicaciones:

13. Con ayuda de la tabla anterior, expresa con tus palabras cómo se efectúa numéricamente la suma de un número real y un número imaginario puro.

14. Con ayuda del applet anterior, expresa con tus palabras cómo se efectúa gráficamente la suma de un número real y un número imaginario puro.

El quinto applet se utiliza para que el estudiante visualice distintos números complejos representados en forma cartesiana e identifique su parte real y su parte imaginaria (ver Figura 17), los cuales deberá registrar en una tabla presente en la actividad.

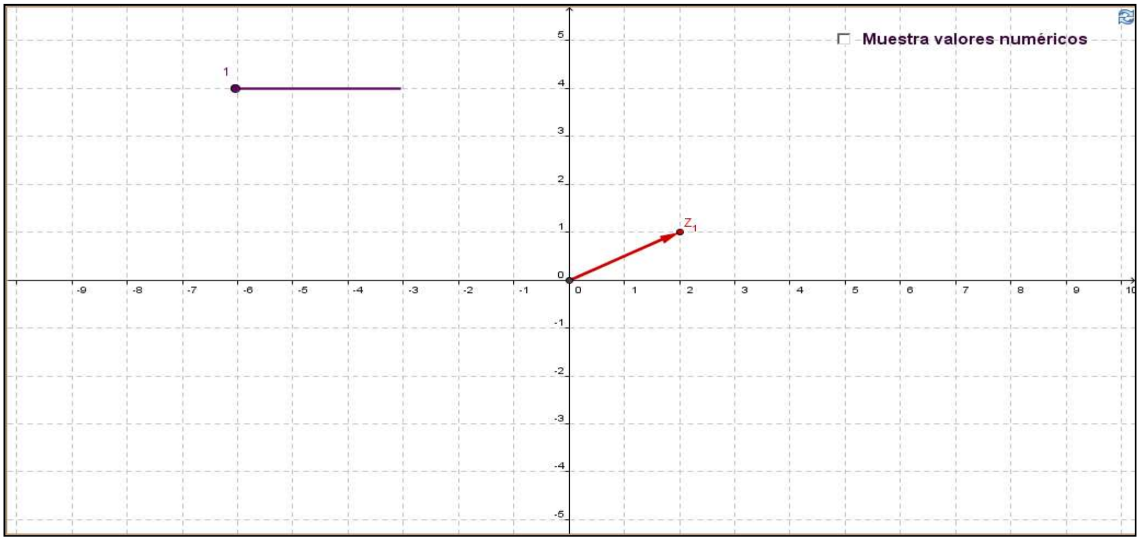


Figura 17. Applet 5, Actividad 4b.

Por último, el sexto applet está diseñado para que el estudiante represente gráficamente distintos números complejos en el plano, haciendo uso de herramientas del software GeoGebra (ver Figura 19).

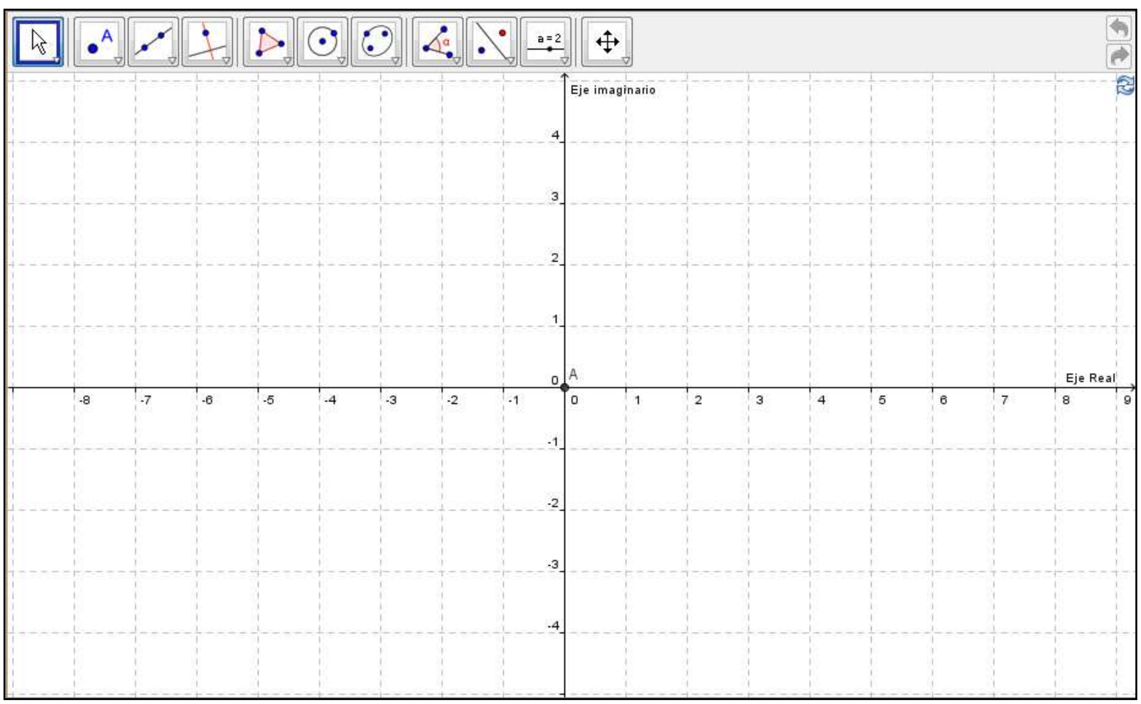


Figura 18. Applet 6, Actividad 4b.

<u>Actividad 4c. Conversiones:</u>

Esta actividad tiene como objetivo que el estudiante relacione la representación polar y la representación cartesiana de un número complejo, identificándolas y realizando conversiones de una a otra.

Específicamente, en esta actividad se usan tres applets, en el primero de ellos se le brinda al estudiante la oportunidad de visualizar un número complejo en su forma de representación polar, al mismo tiempo que puede consultar su parte real y parte imaginaria. Lo anterior, es con el propósito de cuestionar al estudiante cómo obtener la parte real y la parte imaginaria de un número complejo dada su forma de representación polar, es decir, dado su módulo y argumento (ver Figura 19).

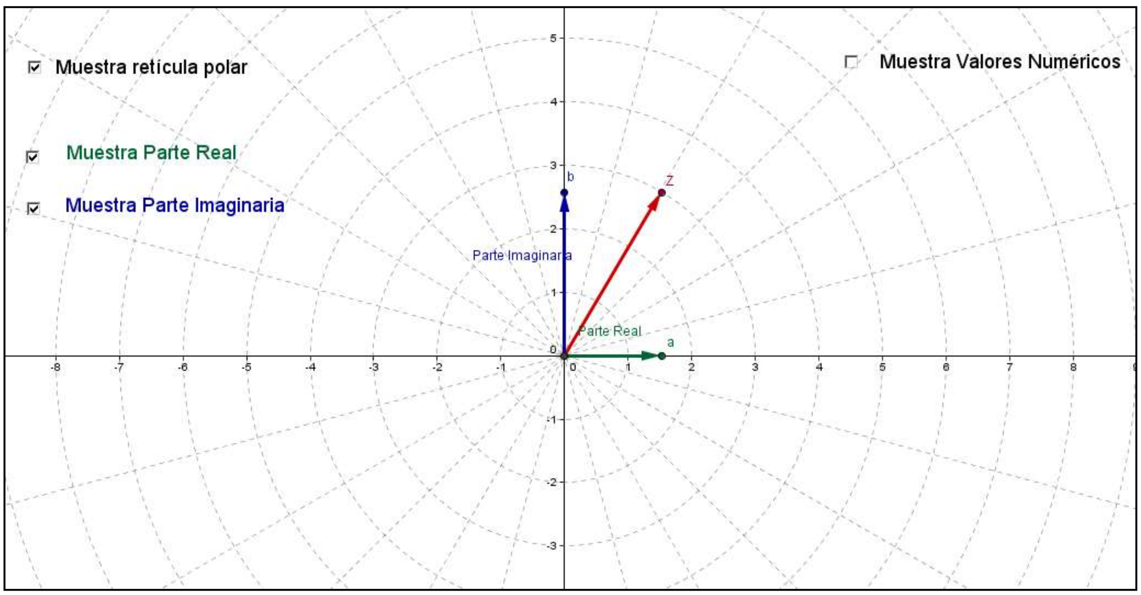


Figura 19. Applet 1, Actividad 4c.

Algunas de las indicaciones que deberá realizar el estudiante a raíz de la exploración en el applet anterior, son las siguientes:

15. Activa la casilla "Muestra retícula polar" y desactiva todas las demás. Selecciona ahora, un número complejo en cada uno de los cuadrantes, y en cada parte positiva y negativa de los ejes real e imaginario. Completa la siguiente tabla, calculando (no estimando), con al menos cuatro decimales, la parte real y la parte imaginaria de cada número seleccionado. Al final, verifica tus resultados activando las casillas adecuadas.

Número	Módulo	Argumento	Parte Real	Parte Imaginaria

Z_1				

16. Expresa de manera general la parte real a y la parte imaginaria b, de un número complejo cuyo módulo es r y su argumento es θ.

El segundo applet está diseñado para efectuar el procedimiento inverso, es decir, a partir de que se conoce la representación cartesiana, obtener la representación polar (ver Figura 20).

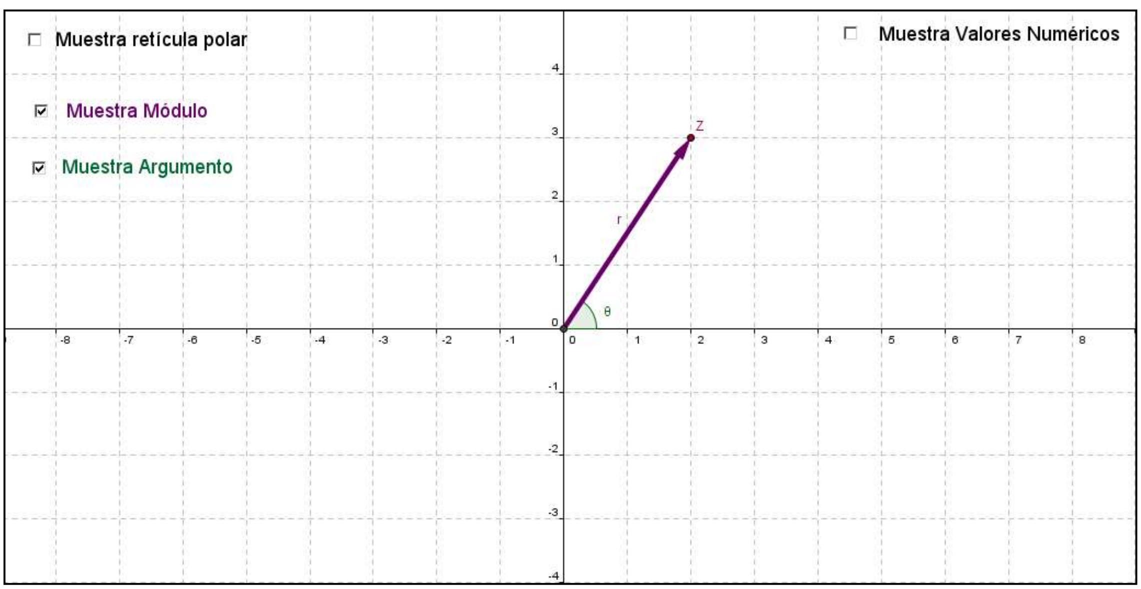


Figura 20. Applet 2, Actividad 4c.

Esta vez, el estudiante deberá de completar una tabla similar a la relacionada con el primer applet, pero ahora calculando el módulo y el argumento de un número complejo dada su parte real y su parte imaginaria, esperando que pueda dar respuesta a la siguiente indicación:

17. Expresa de manera de general el módulo r y el argumento θ, de un número complejo cuya parte real es a y parte imaginaria b.

Por último, el tercer applet permite explorar y visualizar distintos números complejos con sus dos formas de representación (polar y cartesiana) (ver Figura 21 y Figura 22).

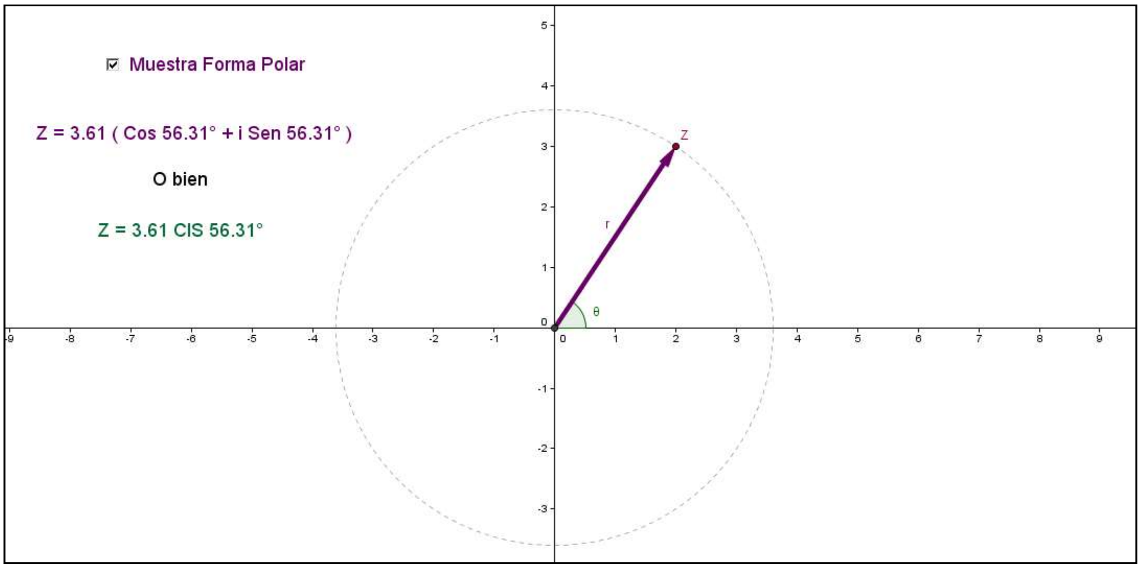


Figura 21. Applet 3, Actividad 4c.

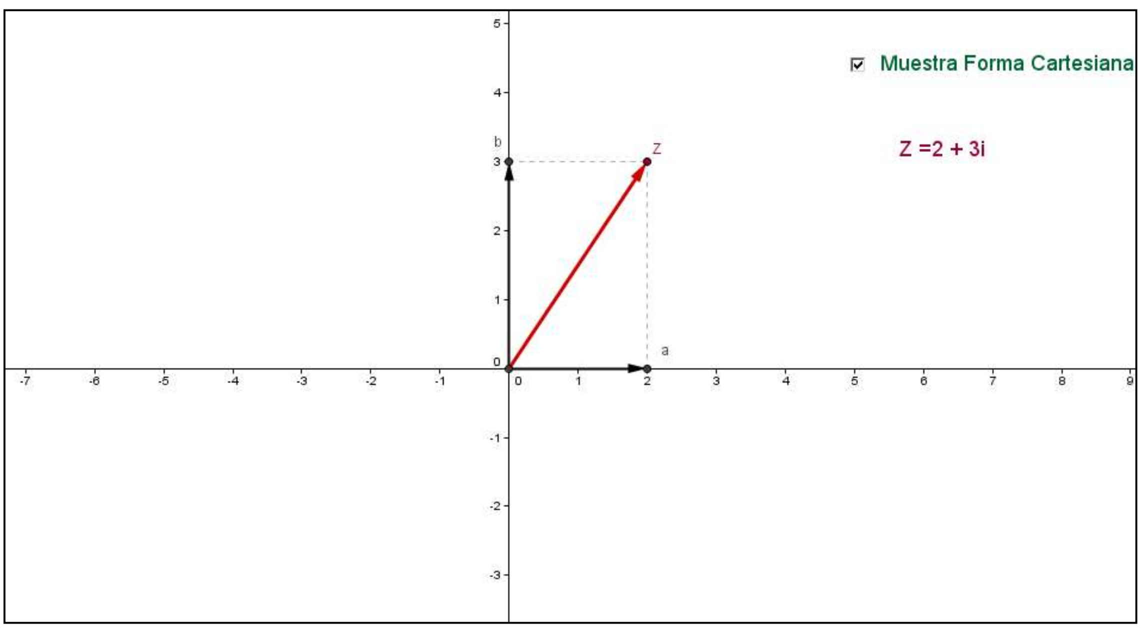


Figura 22. Applet 3, Actividad 4c.

<u>Actividad 5a. Suma de Números Complejos:</u>

El objetivo de esta actividad es que el estudiante conozca y relacione los procedimientos gráfico, numérico y algebraico de la suma de números complejos, considerando su parte real y su parte imaginaria.

Se hace uso de tres applets, el primero de ellos permite la visualización gráfica de la suma de números complejos representados mediante segmentos dirigidos (ver Figura 23 y Figura 24)

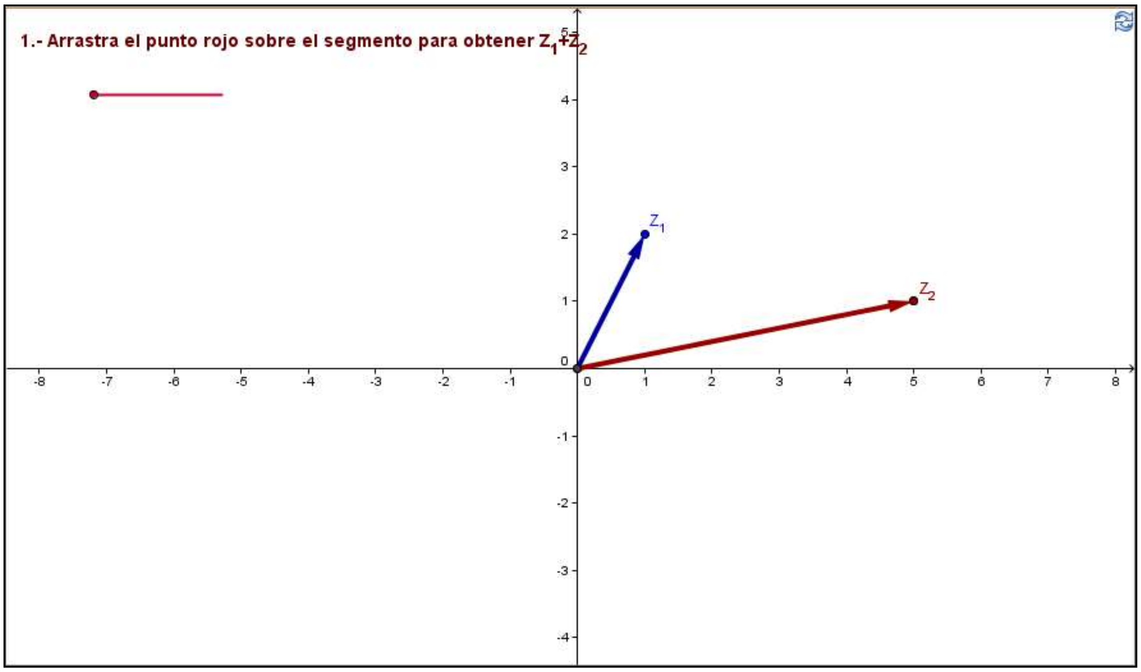


Figura 23. Applet 1, Actividad 5a.

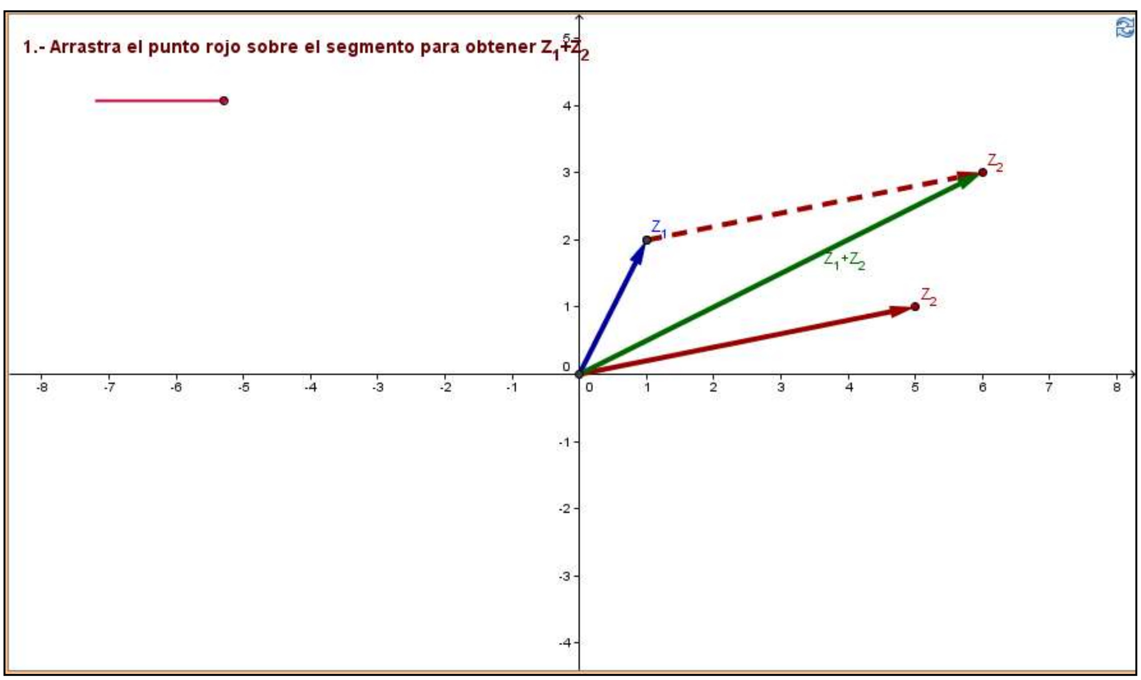


Figura 24. Applet 1, Actividad 5a.

Una vez realizada la exploración gráfica de la suma, al estudiante se le solicita lo siguiente:

18. Describe cómo se efectúa gráficamente la suma de $Z_1 + Z_2$.

El segundo applet tiene por objetivo que el estudiante visualice la suma de números complejos de manera gráfica y numérica, con el fin de que establezca la relación que existe entre las partes real e imaginaria de los sumandos con la parte real e imaginaria de la suma (ver Figura 25).

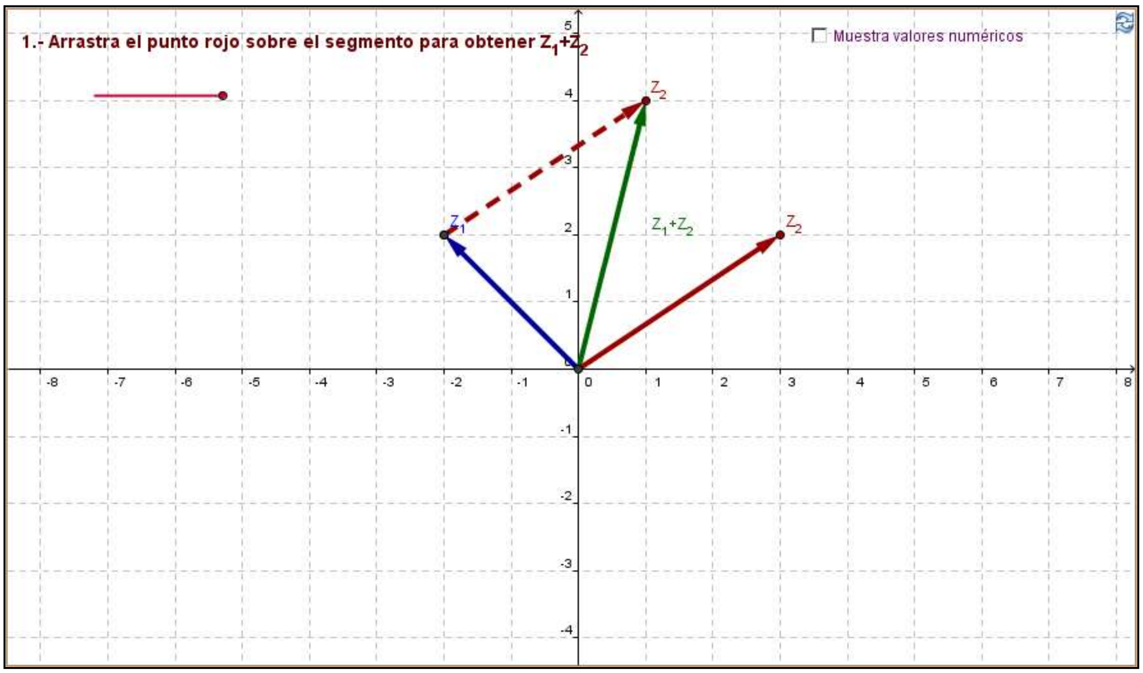


Figura 25. Applet 2, Actividad 5a.

Algunas de las preguntas que se le realizan al estudiante, considerando la exploración en el applet anterior, son las siguientes:

19. ¿Qué relación existe entre las partes reales de Z_1, Z_2 y la suma de $Z_1 + Z_2$?

20. ¿Qué relación existe entre las partes imaginarias de Z_1, Z_2 y la suma de $Z_1 + Z_2$?

21. Describe de manera general cómo se efectúa la suma de números complejos dadas su parte real e imaginaria, y represéntala algebraicamente (Sugerencia: considera $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$).

En el tercer applet se brinda la oportunidad de verificar, para distintos casos, la conmutatividad de la suma, esperando que el estudiante generalice dicha propiedad. Además, en este applet el estudiante visualizará la ley del paralelogramo para las suma de números complejos (ver Figura 26 y Figura 27).

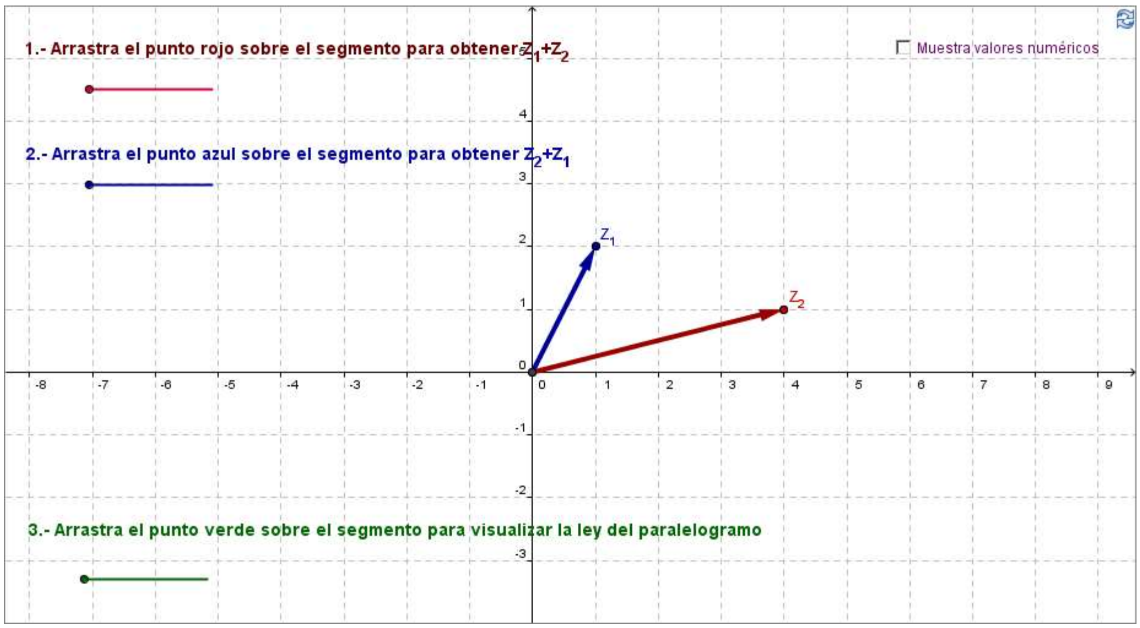


Figura 26. Applet 3, Actividad 5a.

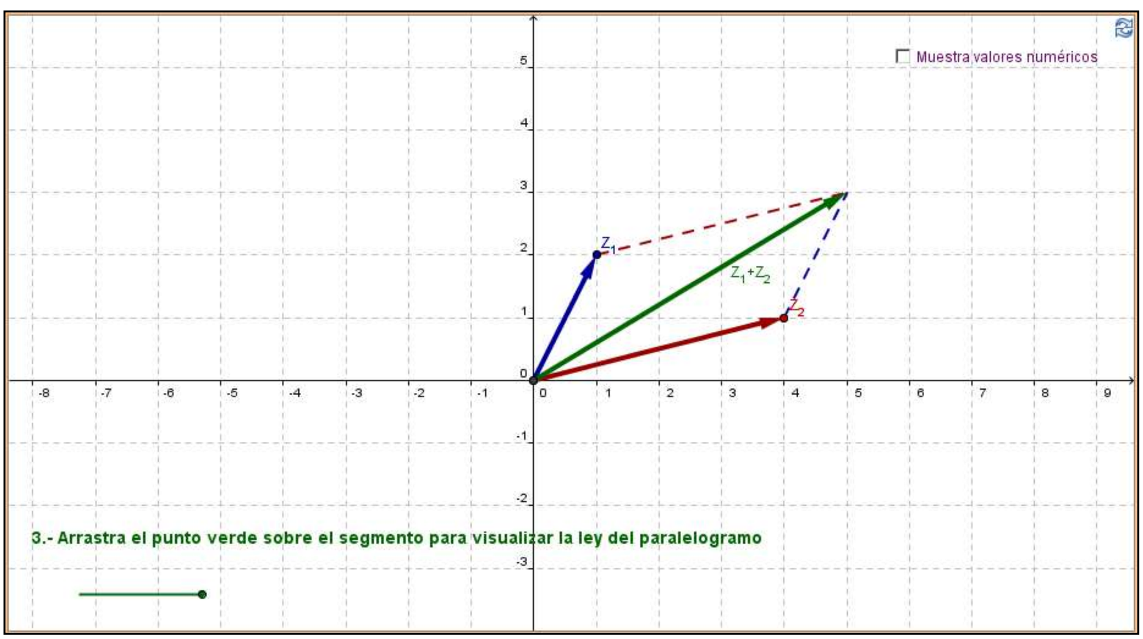


Figura 27. Applet 3, Actividad 5a.

Con el objetivo de que el estudiante identifique la conmutatividad de la suma, se le solicita el llenado de la siguiente tabla y que identifique las relaciones correspondientes:

Z_1		Z_2		$Z_1 + Z_2$		$Z_2 + Z_1$	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

22. ¿Qué relación existe entre la suma $Z_1 + Z_2$ y la suma $Z_2 + Z_1$?

Actividad 5b. Resta de Números Complejos:

Esta actividad tiene como propósito que el estudiante conozca y relacione los procedimientos gráfico, numérico y algebraico de la resta de números complejos, considerando su parte real e imaginaria.

Para esta actividad se utilizan dos applets, el primero de ellos permite la visualización gráfica de la resta números complejos representados mediante segmentos dirigidos (ver Figura 28 y Figura 29).

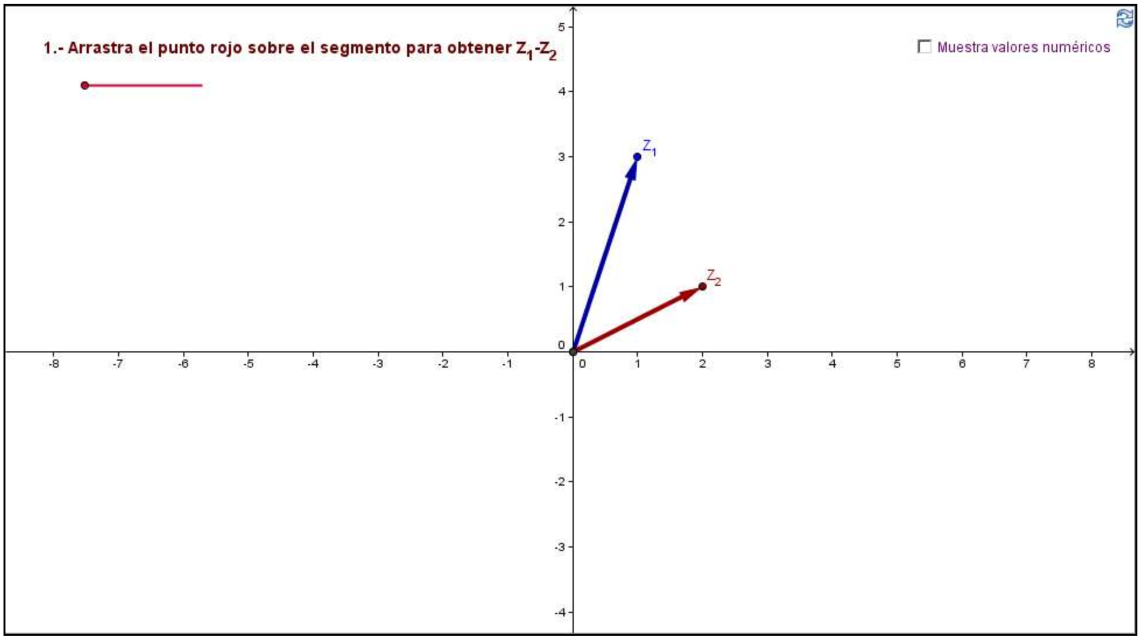


Figura 28. Applet 1, Actividad 5b.

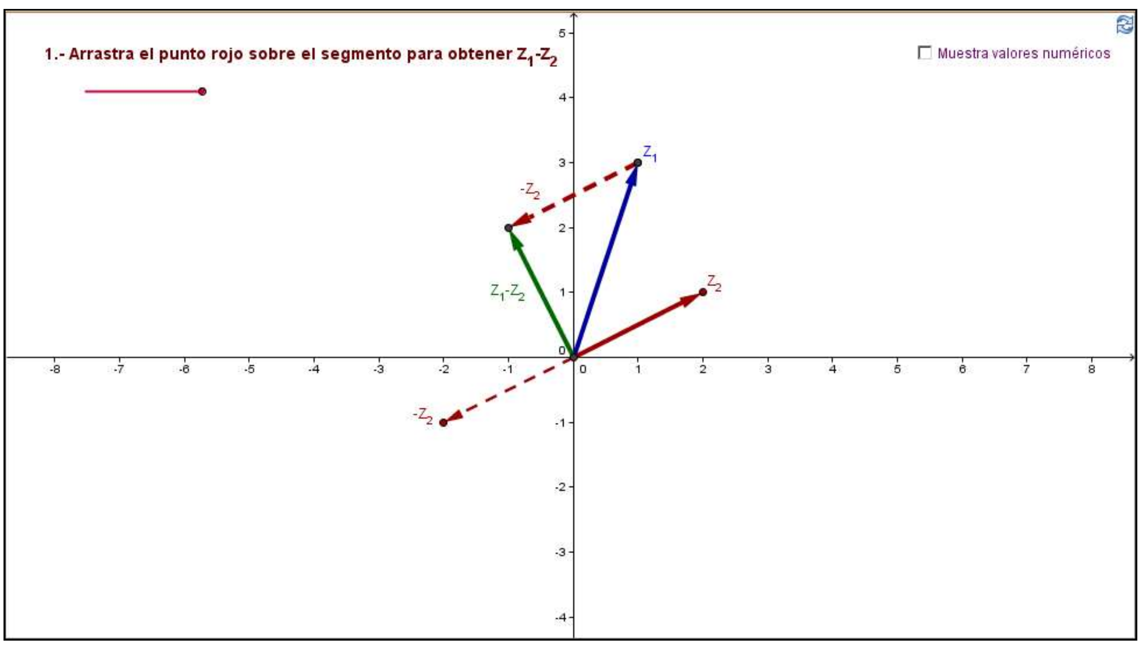


Figura 29. Applet 1, Actividad 5b.

Al igual que la actividad de suma, al estudiante se le solicita una descripción gráfica de la resta de números complejos.

El segundo applet tiene por objetivo que el estudiante visualice la resta de números complejos de manera gráfica y numérica, con el fin de que establezca propiedades y relaciones de esta operación (ver Figura 30).

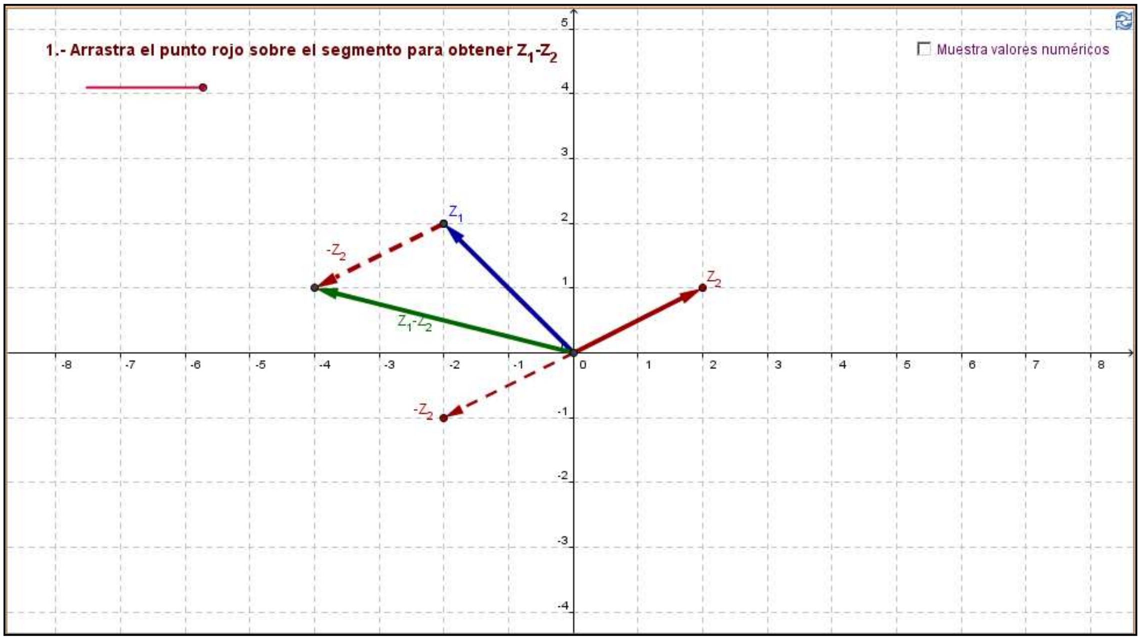


Figura 30. Applet 2, Actividad 5b.

Posterior a la exploración en el applet, al estudiante se le cuestiona por las relaciones presentes en la resta de números complejos y la generalización de dicho procedimiento:

23. ¿Qué relación existe entre las partes reales de Z_1, Z_2 y la resta $Z_1 - Z_2$?

24. ¿Qué relación existe entre las partes imaginarias de Z_1, Z_2 y la resta $Z_1 - Z_2$?

25. Describe de manera general cómo se efectúa la resta de números complejos dadas su parte real e imaginaria, y represéntala algebraicamente.

<u>Actividad 5c. Producto de Números Complejos:</u>

El diseño de esta actividad tiene como fin que el estudiante conozca y relacione los procedimientos gráfico, numérico y algebraico de la multiplicación de número complejos, considerando las formas de representación polar y cartesiana.

En esta actividad se utilizan dos applets, el primero de ellos es para visualizar gráfica y numéricamente la multiplicación de números complejos representados en forma polar (ver Figura 31).

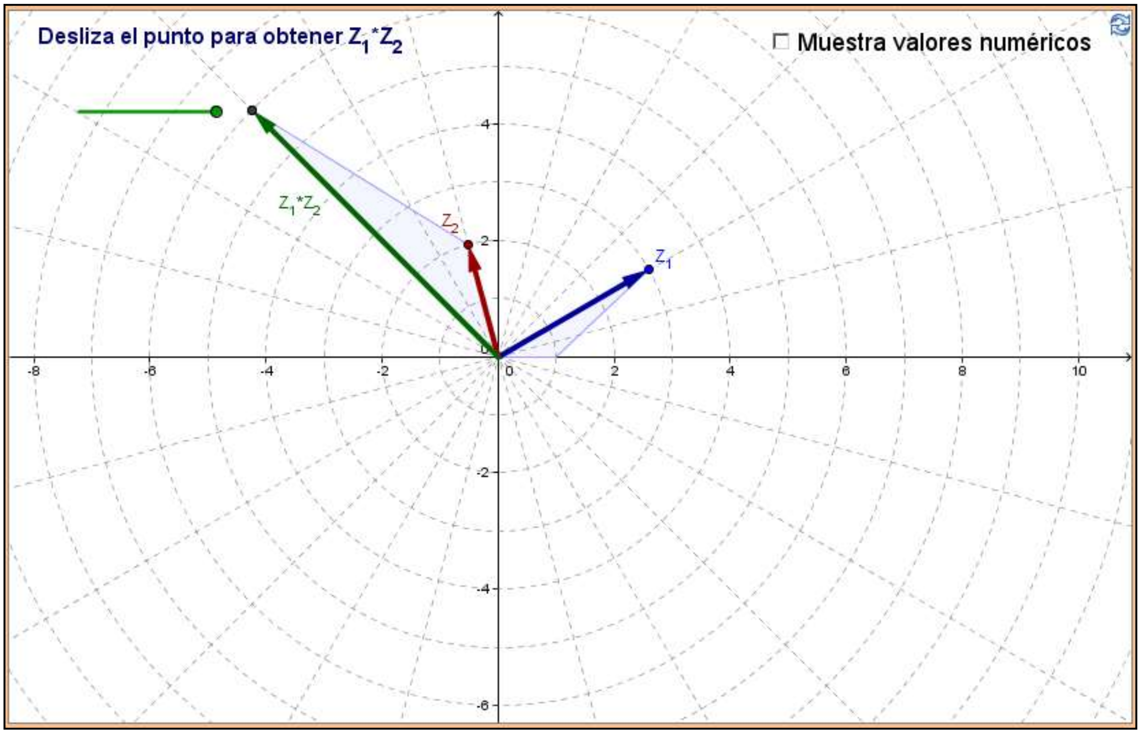


Figura 31. Applet 1, Actividad 5c.

Algunas de las cuestiones que se le plantean al estudiante y están relacionadas con la exploración de la multiplicación de números complejos en el applet anterior son las siguientes:

26. ¿Qué relación existe entre los módulos de Z_1, Z_2 y el producto $Z_1 \cdot Z_2$?

27. ¿Qué relación existe entre los argumentos de Z_1, Z_2 y el producto de $Z_1 \cdot Z_2$?

28. Describe cómo se efectúa gráficamente el producto $Z_1 \cdot Z_2$.

El segundo applet tiene por objetivo que el estudiante visualice gráfica y numéricamente la multiplicación de números complejos representados en forma cartesiana (ver Figura 32).

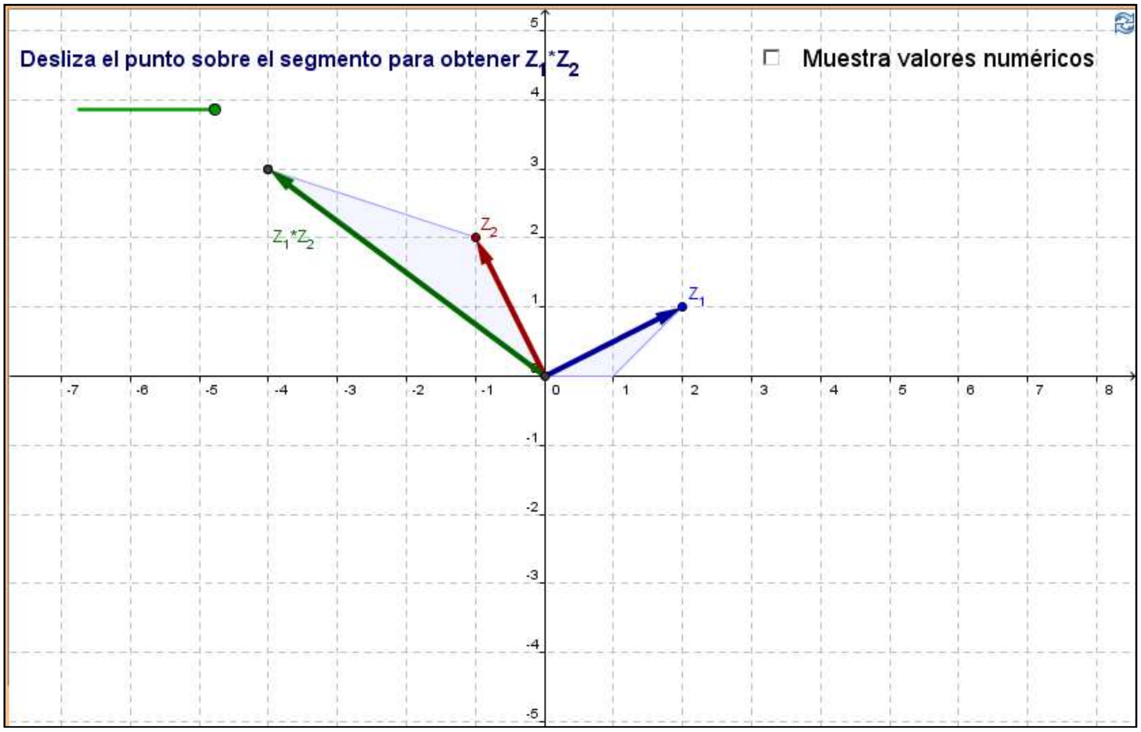


Figura 32. Applet 2, Actividad 5c.

La exploración en este applet para la multiplicación de números complejos contempla los siguientes casos: Un número real positivo con un número complejo arbitrario, un número real negativo con un número complejo arbitrario, un número imaginario puro con un complejo arbitrario y por último dos números complejos arbitrarios. De las exploraciones anteriores se realizan los siguientes cuestionamientos:

29. Con base en lo anterior indica cuál es el procedimiento algebraico para la multiplicación de $Z_1 = a$ y $Z_2 = c + di$ donde a, c y d son números reales.

30. Con base en lo anterior, indica cuál es el procedimiento algebraico para la multiplicación de $Z_1 = bi$ y $Z_2 = c + di$ donde b, c y d son números reales.

31. En general, ¿Cuál es el procedimiento algebraico para la multiplicación de $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$ con a, b, c y d números reales? Explora, anota tus observaciones y compara con tus compañeros.

Actividad 5d. Número Complejo Conjugado:

El objetivo de esta actividad es que el estudiante identifique gráfica, numérica y algebraicamente el conjugado de un número complejo, considerando ambas formas de representación, es decir, polar y cartesiana.

En esta actividad se hace uso de dos applets, el primero de ellos brinda la oportunidad de que el estudiante explore, represente y caracterice, tanto gráfica como numéricamente, al conjugado de un número complejo representado en forma polar (ver Figura 33).

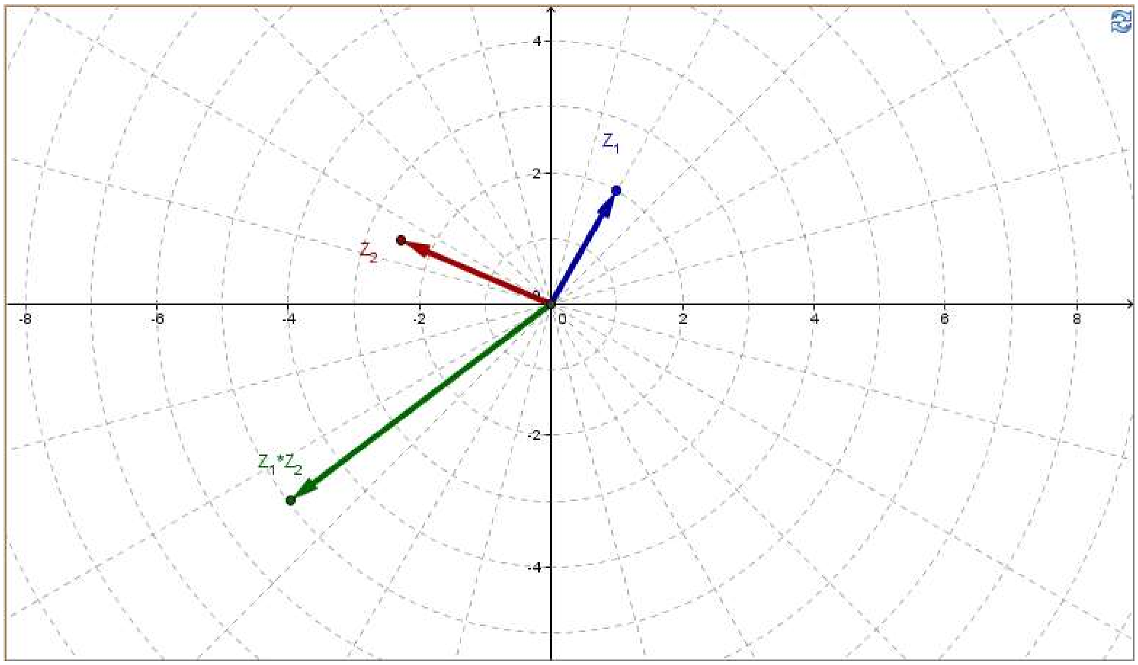


Figura 33. Applet 1, Actividad 5d.

Algunas de las cuestiones que se le presentan al estudiante, con el fin de que caracterice al conjugado de un número complejo, son las siguientes:

32. ¿Cómo debe de ser Z_2 para que el producto $Z_1 \cdot Z_2$ sea un número real positivo?

33. ¿Qué relación existe el argumento de Z_1 y Z_2?

34. Ahora, haz que el módulo de Z_2 sea el mismo que el de Z_1 y consigue que el producto de $Z_1 \cdot Z_2$ sea un número real positivo. ¿Cuántos números encontraste que cumplan con estas condiciones?

En el segundo applet el propósito es el mismo que en el primero, pero en éste se trabajará con la forma de representación cartesiana (ver Figura 34).

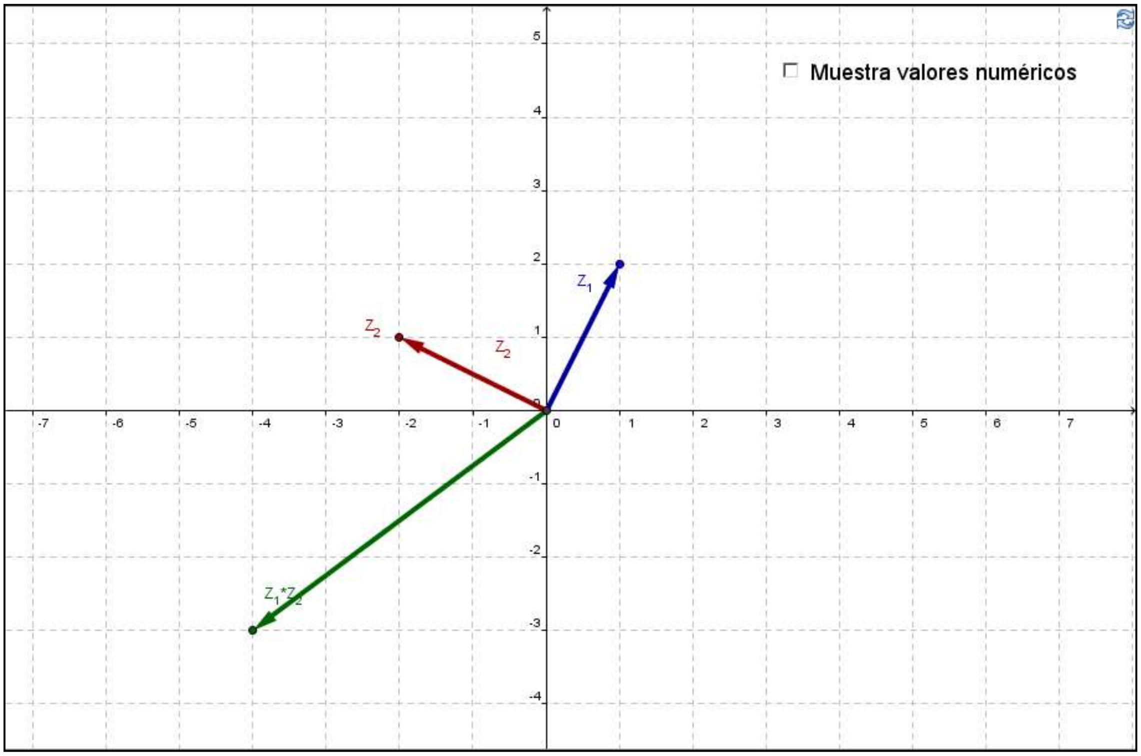


Figura 34. Applet 2, Actividad 5d.

Posterior a la exploración en el applet anterior, al estudiante se le realizan algunas cuestiones donde deberá describir las relaciones encontradas:

35. ¿Qué relación existe entre la parte real de los números Z_1 y Z_2?

36. ¿Qué relación existe entre la parte imaginaria de los números Z_1 y Z_2?

<u>Actividad 5e. División de Números Complejos:</u>

El propósito de esta actividad es que el estudiante relacione gráfica, numérica y algebraicamente la división de números complejos, considerando ambas formas de representación, polar y cartesiana.

Para llevar a cabo esta actividad se utilizan dos applets, el primero de ellos permite que el estudiante visualice gráfica y numéricamente la división de números complejos representados en forma polar (ver Figura 35).

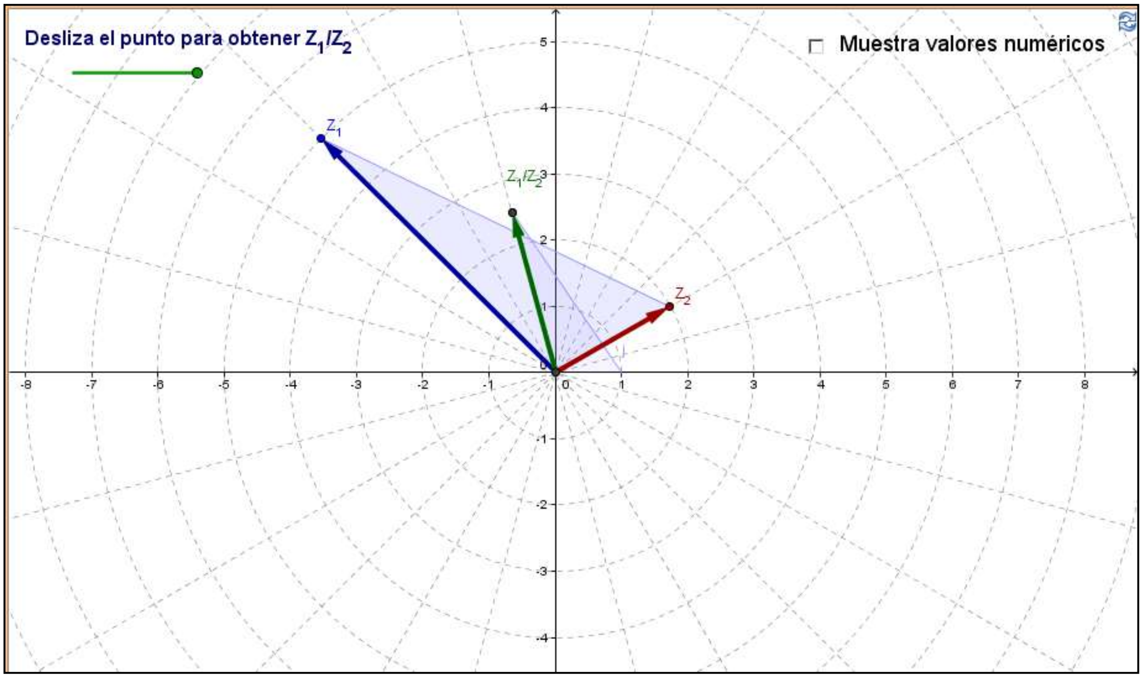


Figura 35. Applet 1, Actividad 5e.

Después de realizar una exploración en el applet anterior, al estudiante se le solicitan las relaciones presentes en la división de números complejos:

37. ¿Qué relación existe entre los módulos de Z_1, Z_2 y el producto Z_1/Z_2?

38. ¿Qué relación existe entre los argumentos de Z_1, Z_2 y el producto de Z_1/Z_2?

39. Describe cómo se efectúa gráficamente el producto Z_1/Z_2.

El segundo tiene el mismo propósito que el anterior, pero en esta ocasión se trabajará con la forma de representación cartesiana (ver Figura 36).

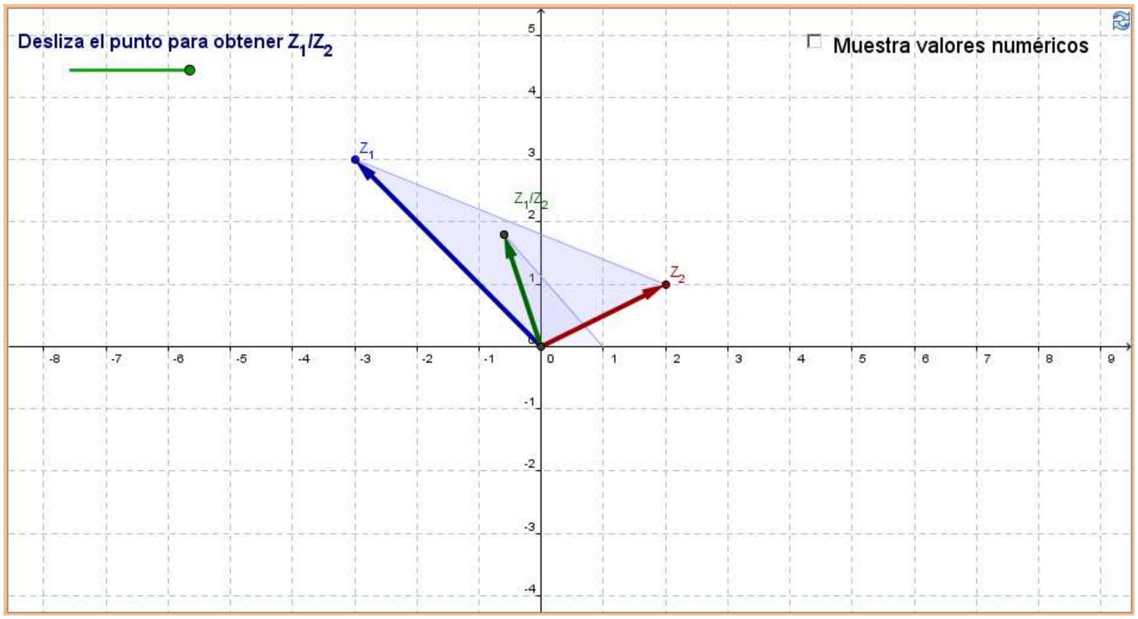


Figura 36. Applet 2, Actividad 5e.

Al igual que en la actividad de *Producto*, se consideran diferentes casos a explorar para la división de dos números complejos los cuales son: Un número complejo arbitrario entre un número real positivo, negativo e imaginario puro. De la anterior exploración, se le plantean al estudiante las siguientes situaciones:

40. Con base en lo anterior indica cuál es el procedimiento algebraico para la división de $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c$ donde a, b y c son números reales.

41. Con base en lo anterior, indica cuál es el procedimiento algebraico para la división de $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = di$ donde a, b y d son números reales.

42. En general, ¿cuál es el procedimiento algebraico para la división de $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$ con a, b, c y d números reales? Explora, anota tus observaciones y compara con tus compañeros.

<u>Actividad 5f. Potencias de Números Complejos:</u>

El objetivo de esta actividad es que el estudiante relacione gráfica, numérica y algebraicamente diferentes potencias de números complejos, considerando ambas formas de representación, polar y cartesiana.

En esta actividad se utilizan dos applets, el primero de ellos permite al estudiante explorar gráfica y numéricamente la operación Z^n (con $n = 1,2,3,4,5,6$), donde Z es un número complejo y está representado en su forma polar (ver Figura 37 y Figura 38).

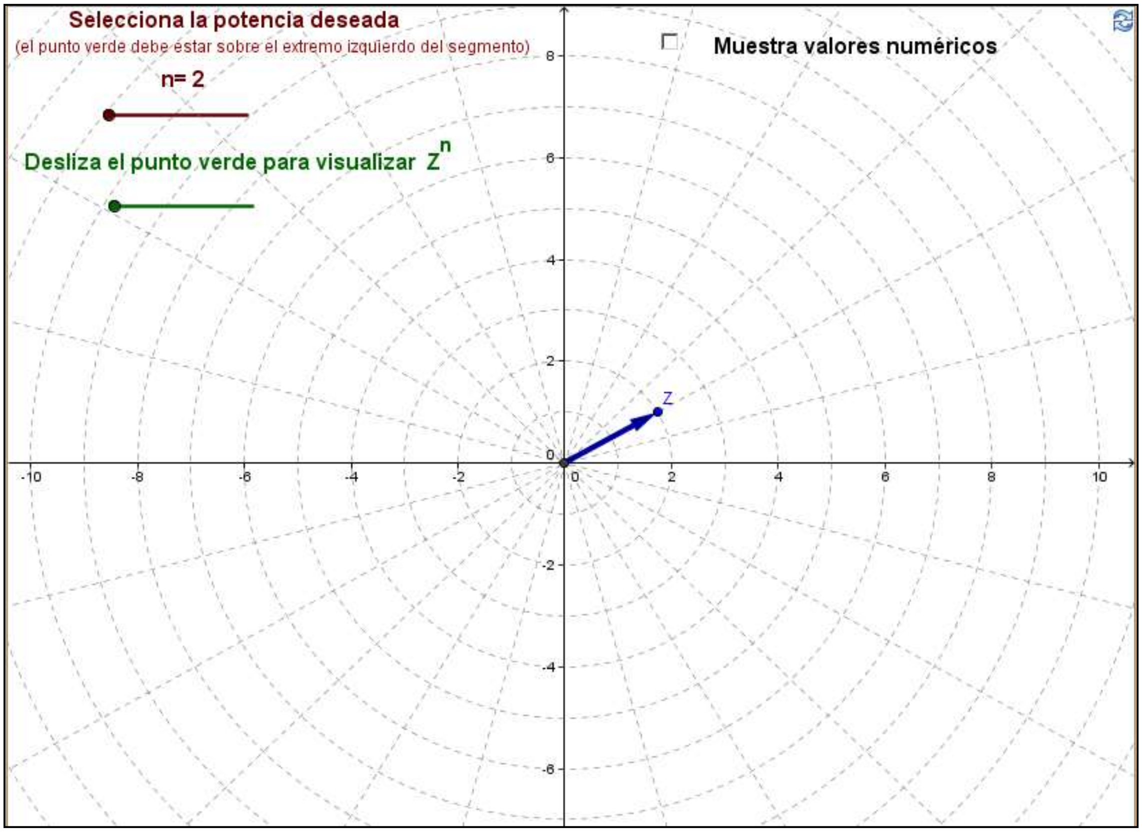


Figura 37. Applet 1, Actividad 5f.

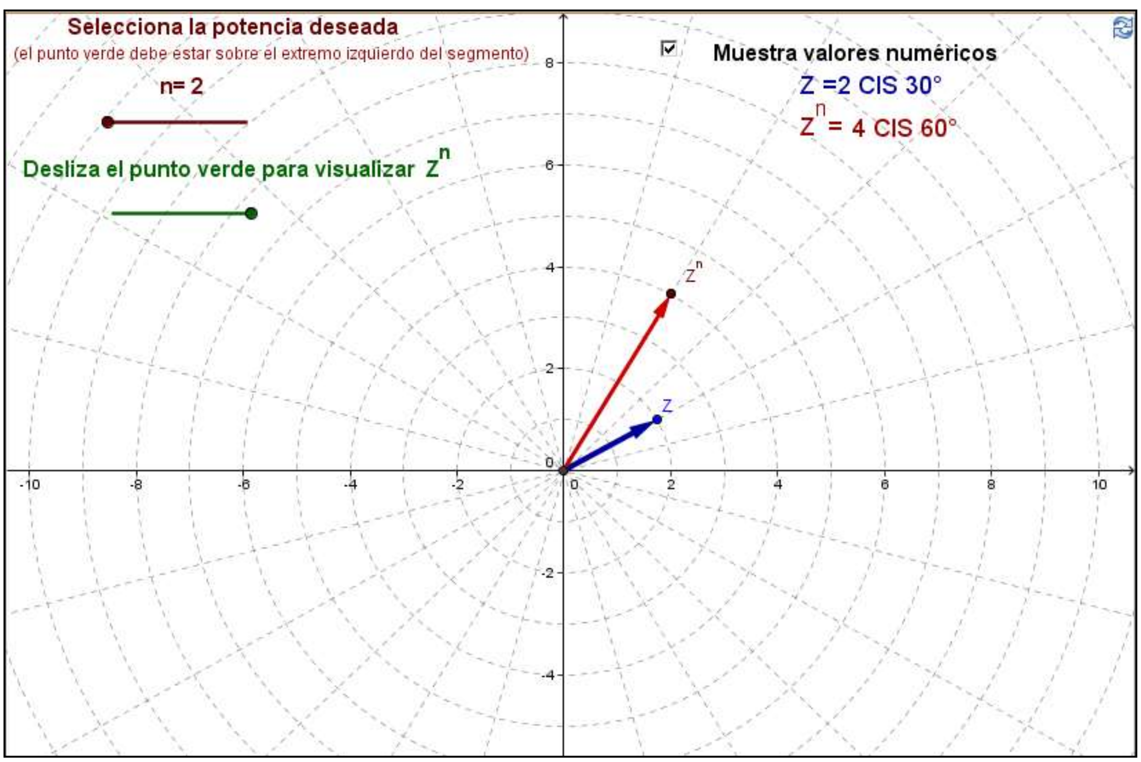


Figura 38. Applet 1, Actividad 5f.

Mediante la exploración en el applet, al estudiante se le solicita elevar un número complejo a diferentes potencias, así como el registro de los resultados obtenidos. Cuando el estudiante a realizado varios casos particulares se le pide lo siguiente:

43. Elabora una conclusión sobre el procedimiento general para elevar un número complejo a determinada potencia en términos de módulo y argumento.

El segundo applet tiene el mismo propósito que el anterior, pero ahora el número complejo *Z* está representado en su forma cartesiana (ver Figura 39 y Figura 40).

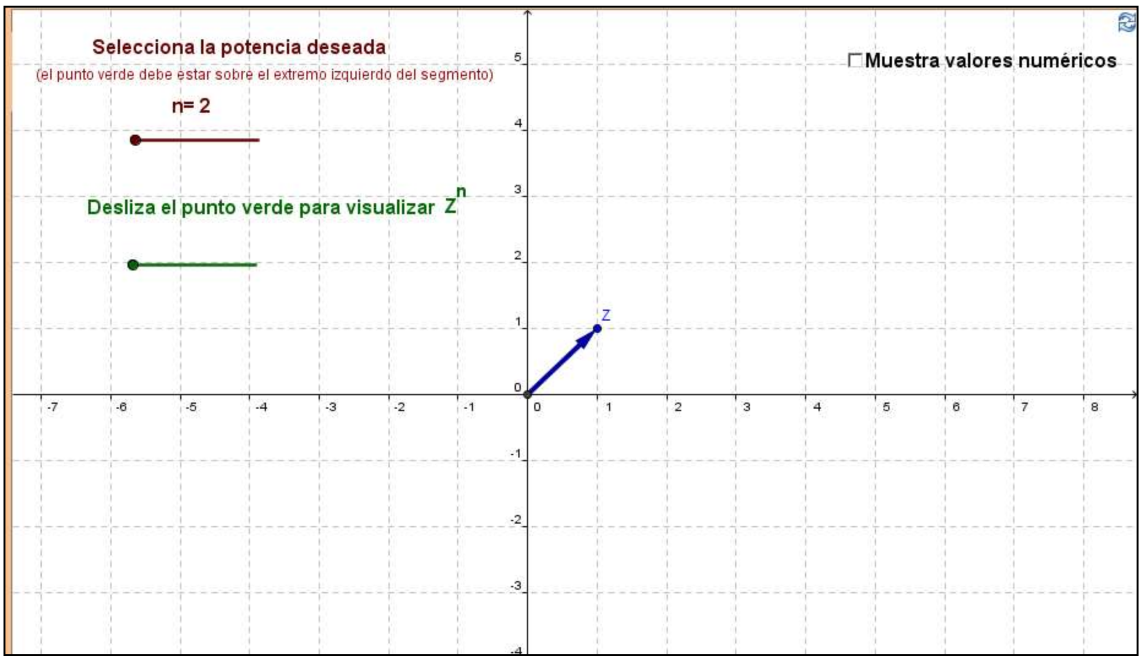


Figura 39. Applet 2, Actividad 5f.

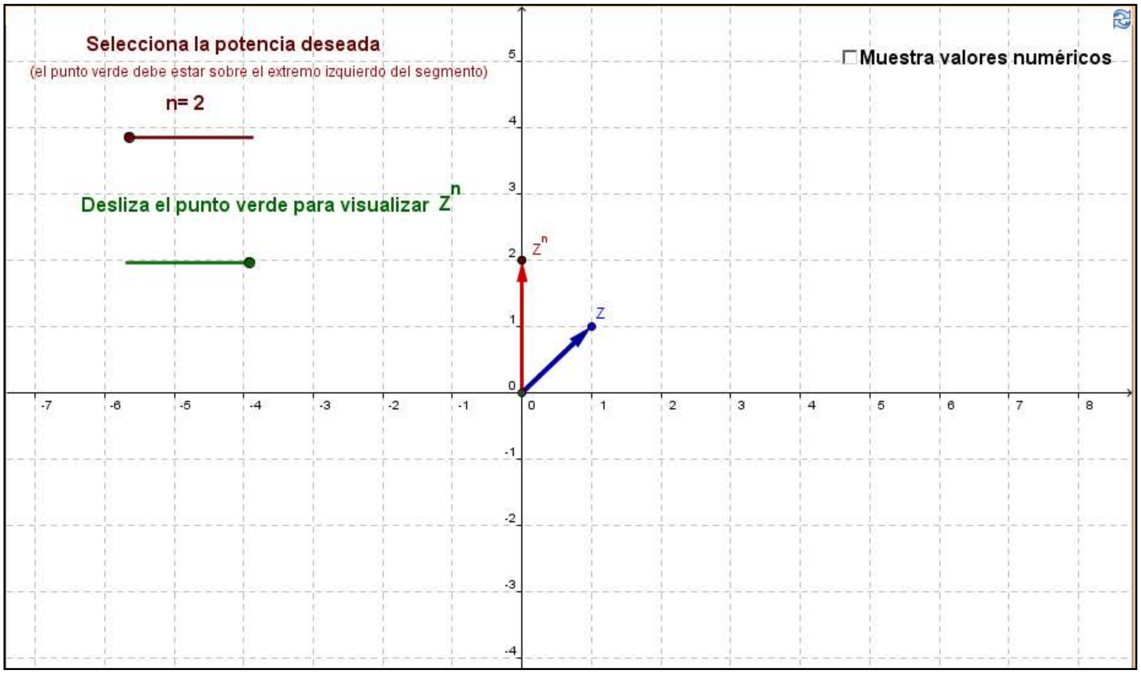


Figura 40. Applet 2, Actividad 5f.

En este caso, se resalta lo complicado que resulta elevar un número complejo a determinada potencia, sin embargo, se realiza una exploración para potencias de 2 y 3. Una vez hecha la exploración correspondiente, al estudiante se le cuestiona lo siguiente:

44. ¿Cómo crees que sea más fácil de calcular Z^n, en su forma polar o cartesiana? Comenta con tus compañeros y anota tus conclusiones.

Actividad 5g. Raíces de Números Complejos:

Esta actividad tiene como propósito que el estudiante relacione gráfica y numéricamente las raíces de un número complejo representado en forma polar.

Para llevar la actividad se utiliza un applet, el cual está diseñado para que el estudiante visualice, explore gráfica y numéricamente todas las posibles raíces del número $\sqrt[n]{Z}$ (con $n = 1,2,3,4,5,6$), donde Z es un número complejo representado en forma polar (ver Figura 41 y Figura 42).

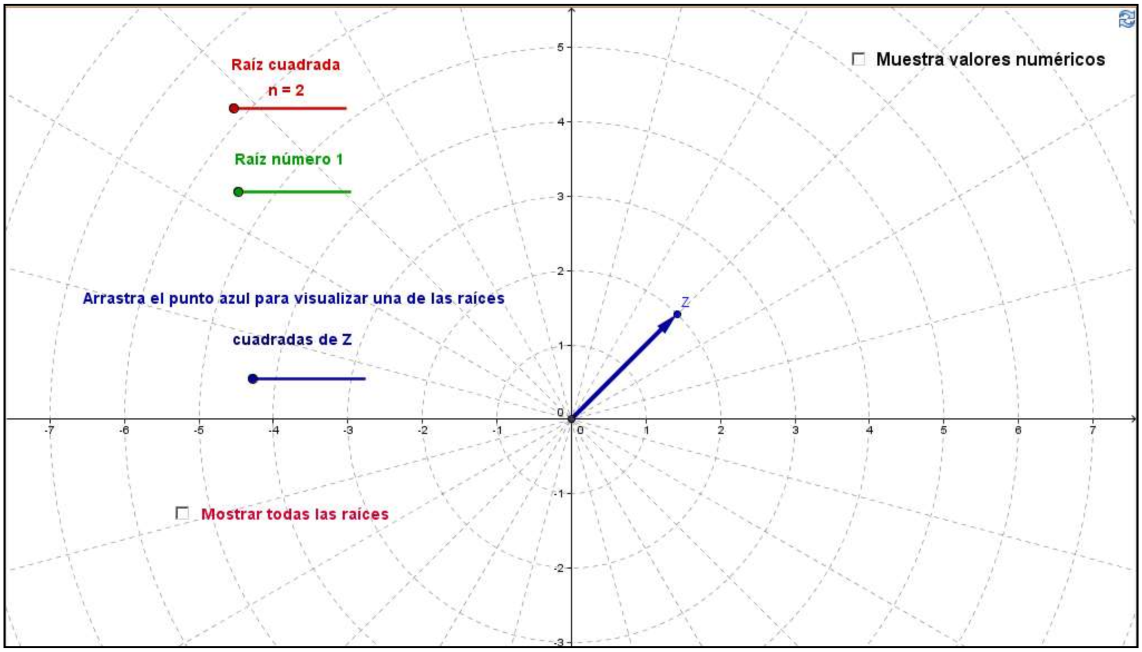


Figura 41. Applet 1, Actividad 5g.

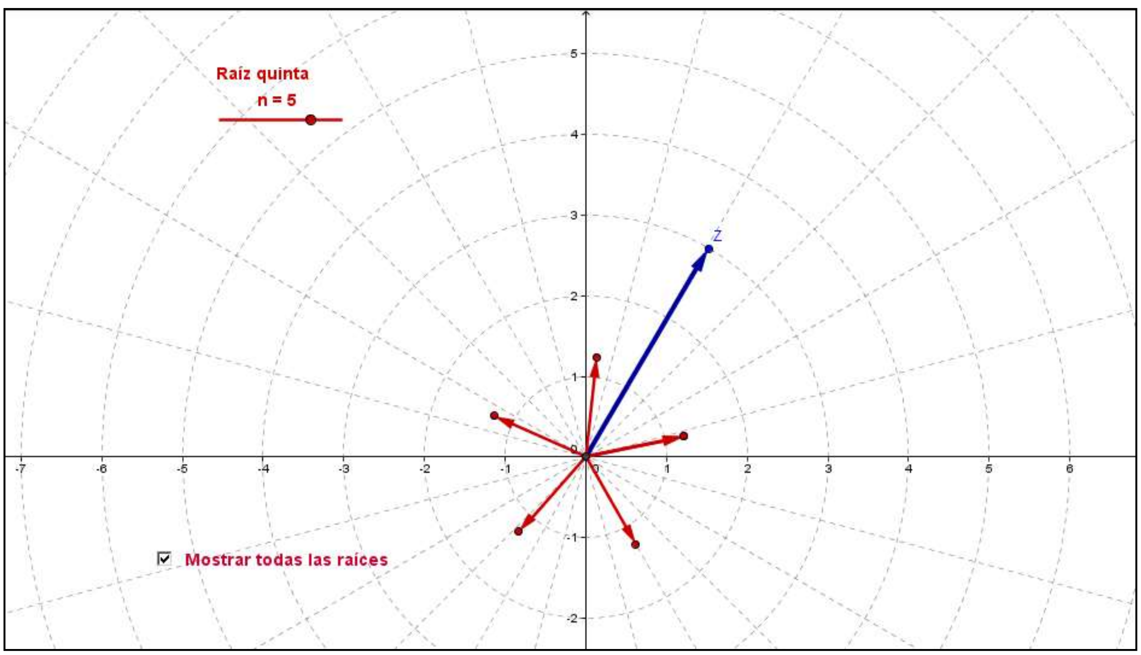


Figura 42. Applet 1, Actividad 5g.

Posterior a que el estudiante realiza una exploración para obtener raíces cuadradas y cúbicas, se le solicita que explore para distintos números de raíces, con el fin de que pueda generalizar el procedimiento para calcular raíces n-ésimas de números complejos. Una de las instrucciones menciona lo siguiente:

45. Repite la exploración para $n = 4, 5$ y 6 y determina una forma general para obtener las raíces n-ésimas de cualquier número complejo Z dado en forma polar.

Por último, se presenta una sección de Actividades Complementarias para los estudiantes, donde se hace un enlace con el trabajo realizado en el marco del proyecto "Diseño e Implementación de Exámenes Estandarizados en Línea en el Curso de Álgebra de los Programas de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora" (Del Castillo, et al, 2009). Este enlace consiste en la recomendación de llevar a cabo las actividades desarrolladas en el citado proyecto, con el fin de reafirmar los conocimientos sobre números complejos que emergen de nuestra propuesta. Las actividades se realizan en un ambiente distinto, con representaciones gráficas estáticas, pero cuyo dinamismo consiste en la presentación de problemas con datos generados aleatoriamente, y en donde la retroalimentación sobre las respuestas de los estudiantes es inmediata.

3.3 Elementos de Análisis Didáctico

3.3.1 Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas

Dentro de la secuencia se presentan diferentes situaciones – problema, de tipo intramatemático, que van desde operaciones con números reales y el análisis de la cerradura de estas operaciones, hasta las formas de operar con números complejos. De manera general, se promueve la vinculación entre las representaciones gráfica, numérica y algebraica, enfatizando y resaltando las características de los procedimientos para operar con números complejos.

3.3.2 Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos

En la secuencia intervienen y emergen varios objetos y procesos matemáticos, para lo cual se llevó a cabo el análisis de cada una de las actividades, con el objetivo de identificarlos. De manera general, se consideran los siguientes procesos y elementos primarios involucrados en la secuencia.

Procesos:

Particularización: Se solicita la exploración de los procedimientos geométricos para operar con casos particulares de números complejos

Generalización: A partir de explorar la conversión para casos particulares, se solicita la generalización de dicho procedimiento.

Objetos Primarios:

Con respecto a los elementos primarios, se contemplan los diferentes lenguajes, situaciones, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos que intervienen y emergen de cada una de las actividades, las cuales fueron colocadas en el anexo 3.

3.4 Orientaciones para el Docente

Con el propósito de que el docente conozca los objetivos, tanto generales como específicos, de cada una de las actividades así como su requisitos, se diseñó una serie de orientaciones que sirvan como apoyo al momento de implementar la secuencia.

Dichas orientaciones contienen una sección de consideraciones generales, las cuales aplican para todas las actividades. Específicamente se describen los métodos de enseñanza y los recursos tecnológicos necesarios para llevar a cabo la realización de las actividades. Además, se brinda una recomendación para el trabajo en el aula.

Por otra parte, para cada una de las actividades se detalla la siguiente información:

1. Tiempo estimado. Se obtuvo con base en el tiempo registrado durante las dos puestas en escena de la secuencia.
2. Prerrequisitos. En este apartado se especifican los conocimientos necesarios para poder realizar la actividad.
3. Contenidos disciplinares. Se especifica el contenido involucrado dentro de la actividad.
4. Objetivo general y objetivos específicos. Se describe el objetivo global de la actividad, así como los objetivos particulares que se van presentando a lo largo de la secuencia.
5. Sugerencias. Se realizan algunas recomendaciones para la implementación de la actividad, así como el señalamiento de algunos puntos específicos donde hay que tener especial cuidado.
6. Uso de los Applets. Se describe la utilidad y el propósito de cada applet incluido en la actividad.
7. Actividades Complementarias. Son actividades desarrolladas en ambiente Maple T.A. (2013) en el marco del proyecto “Diseño e Implementación de Exámenes Estandarizados en Línea en el Curso de Álgebra de los Programas de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora” (Del Castillo, et al, 2009).

8. Sugerencia de evaluación de la actividad. Se describen algunas recomendaciones para evaluar las actividades.

Para tener acceso a la descripción completa de las orientaciones realizadas puede verse el Anexo 2 o bien consultar este mismo documento en la dirección electrónica www.mat.uson.mx/proyectoalgebra/Complejos/orientaciones.

CAPÍTULO 4. LA PUESTA EN ESCENA DE LA SECUENCIA Y SU VALORACIÓN DIDÁCTICA

4.1 Primera puesta en escena

4.1.1 Características del de la primera puesta en escena

La primera puesta en escena se llevó a cabo con dos grupos de estudiantes de Ingeniería, uno de Ingeniería en Mecatrónica y el otro de Ingeniería Industrial y de Sistemas, con objeto de identificar errores y/o limitaciones en el diseño de las actividades, así como *conflictos semióticos potenciales*. Las condiciones fueron muy favorables, ya que se contó con un aula de computadoras con acceso a Internet para ambos grupos, donde los estudiantes podían formar equipos de dos o tres personas y trabajar con las actividades en línea para analizarlas, discutirlas y comentar sus dudas, conjeturas, conclusiones, etc., enriqueciendo, así, la actividad grupal.

Los estudiantes iniciaron con la exploración en los *applets* para responder a los cuestionamientos hechos en las hojas de trabajo, sin una preparación previa sobre el uso de los mismos, ya que estos están diseñados para que el estudiante los manipule aunque no tengan conocimiento del software.

Algunas actividades requirieron más tiempo del asignado a cada sesión y quedaban como actividad extra clase. Posteriormente, al término de cada una de éstas, se llevaba a cabo una discusión grupal para aclarar dudas e institucionalizar lo abordado. Esto constituyó una primera puesta en escena de las actividades donde las observaciones hechas van encaminadas a mejorar el diseño.

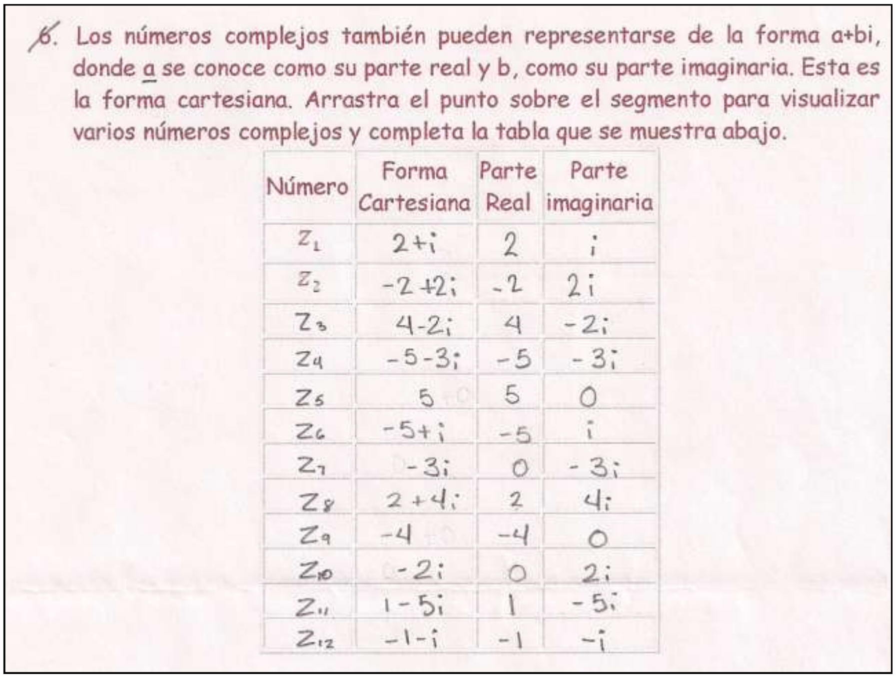
4.1.2 Observaciones y Análisis de la primera puesta en escena

En esta primera puesta en escena, la atención se centró en la identificación de potenciales mejoras de la propuesta, por lo que el énfasis está centrado en la detección de dificultades.

Así, durante la primera puesta en escena de las actividades pudieron identificarse algunos conflictos semióticos derivados de una interpretación incompleta de las instrucciones dadas para la exploración de los *applets*, o de los cuestionamientos asociados a esta exploración. A continuación se describen dichos conflictos:

1. La inclusión del símbolo i, como integrante de la parte imaginaria de un número complejo.

A continuación, se presenta una imagen con el fin de ejemplificar dicha dificultad.



6. Los números complejos también pueden representarse de la forma a+bi, donde a se conoce como su parte real y b, como su parte imaginaria. Esta es la forma cartesiana. Arrastra el punto sobre el segmento para visualizar varios números complejos y completa la tabla que se muestra abajo.

Número	Forma Cartesiana	Parte Real	Parte imaginaria
z_1	2+i	2	i
z_2	-2+2i	-2	2i
z_3	4-2i	4	-2i
z_4	-5-3i	-5	-3i
z_5	5	5	0
z_6	-5+i	-5	i
z_7	-3i	0	-3i
z_8	2+4i	2	4i
z_9	-4	-4	0
z_{10}	-2i	0	2i
z_{11}	1-5i	1	-5i
z_{12}	-1-i	-1	-i

Figura 43. Actividad 4b, reactivo 6

En la Figura 43, se presentan las respuestas de un estudiante sobre la representación cartesiana para números complejos, considerando su parte real y parte imaginaria. La indicación para el estudiante es revisar un *applet* previo, donde aparecen las representaciones cartesianas de algunos números complejos. La tabla presentada, muestra que la función semiótica que el estudiante establece con la parte imaginaria y la representación numérica de un número complejo no se corresponde con lo establecido por la institución, ya que, institucionalmente, la parte imaginaria no incluye el símbolo i (la representación simbólica de la unidad imaginaria). Es importante mencionar, que a pesar de que el enunciado inicial que viene dentro de la actividad dice "Los números complejos también pueden representarse de la forma $a + bi$, donde a se conoce como su parte real y b, como su parte imaginaria" algunos estudiantes siguen manifestando un significado personal que no es acorde al significado institucional.

2. La falta de generalidad en algunas respuestas elaboradas por los estudiantes.

A continuación, se presenta una imagen con el fin de ejemplificar dicha dificultad.

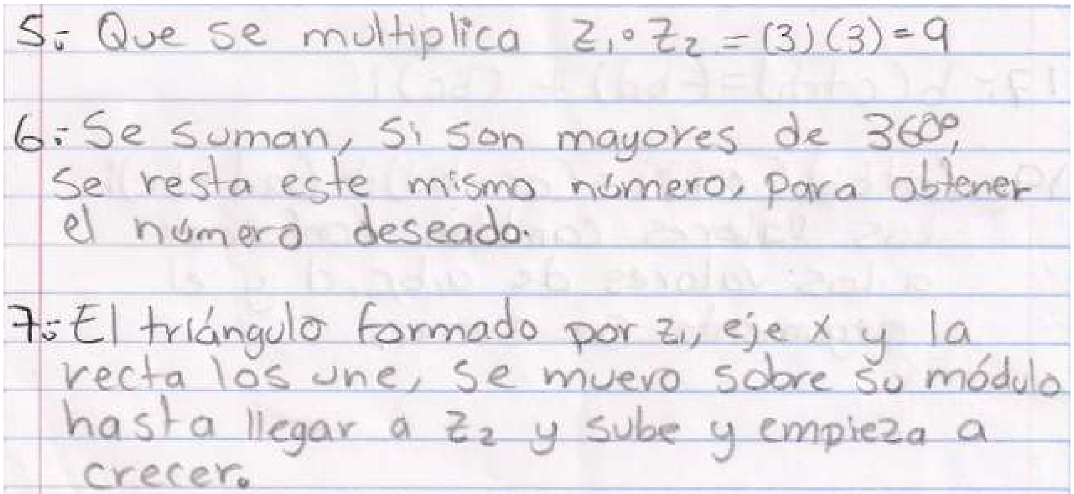


Figura 44. Actividad 5c, reactivos 5, 6 y 7

En la figura 44, se muestran las respuestas de un estudiante a las preguntas siguientes:

1. ¿Qué relación existe entre los módulos de Z_1, Z_2 y el producto $Z_1 \cdot Z_2$?
2. ¿Qué relación existe entre los argumentos de Z_1, Z_2 y el producto $Z_1 \cdot Z_2$?
3. Describe cómo se efectúa gráficamente el producto $Z_1 \cdot Z_2$.

El interés se centra en las respuestas a las preguntas 5 y 7, donde se puede observar que en la respuesta de la pregunta 5, el alumno está considerando un caso particular, a pesar de que en la instrucción previa se solicita una exploración para diferentes casos, es decir, no se logra el proceso de generalización. Además, el estudiante afirma que $Z_1 \cdot Z_2 = (3)(3) = 9$, lo cual nos indica que hay un conflicto semiótico a la hora de tomar la notación para números complejos (Z_1, Z_2) y los módulos de tales números.

Por otro lado, en la respuesta 7, aunque es un poco confusa, se puede apreciar que el estudiante afirma que el módulo crece al multiplicar dos números complejos, lo cual nos dice que su significado personal no logra corresponderse con el institucional, ya que no se están considerando valores de módulo menor o igual a uno. Hace falta una mayor reflexión y exploración en el *applet*, y por lo tanto, podemos concluir que no hay una generalización sobre el procedimiento gráfico para el producto de dos números complejos y este estudiante ha construido un significado personal muy pobre.

Durante esta puesta en escena se lograron identificar algunos errores y dificultades reportados en artículos de investigación, los cuales son:

4. La consideración del módulo de un número complejo como una cantidad negativa.

A continuación, se presentan algunas imágenes para ejemplificar dicha dificultad.

2. Llamaremos módulo a la longitud de los segmentos dirigidos y argumento al ángulo que forman éstos con la parte positiva de la recta real. Encuentra módulo y argumento de cada número representado en el punto anterior y completa la siguiente tabla.

Número	Módulo	Argumento
$Z_1 =$	4	0°
$Z_2 =$	−3	180°
$Z_3 =$	−1	180°
$Z_4 =$	0	0°
$Z_5 =$	2	0°

Figura 45. Actividad 2, reactivo 2

En la Figura 45 se muestra una parte de la secuencia en la cual se estaba trabajando con el conjunto de los números reales, considerando su módulo y argumento. La indicación para el estudiante es revisar un *applet* previamente puesto en escena, donde aparecen las representaciones gráficas de algunos números reales. La tabla presentada, brinda información sobre el significado personal que el estudiante tiene del valor para el módulo y argumento de un número real. Es interesante observar que, a pesar de que al inicio de la instrucción aparece el enunciado "Llamaremos módulo a la longitud de los segmentos dirigidos" el estudiante contesta erróneamente la tabla, lo cual hace suponer que su significado personal del objeto matemático "longitud" no es acorde a la pauta institucional. Cabe mencionar, que el estudiante omite la primera columna de la tabla, pero los números reales que brinda el *applet* son los mismos que los declarados en los módulos.

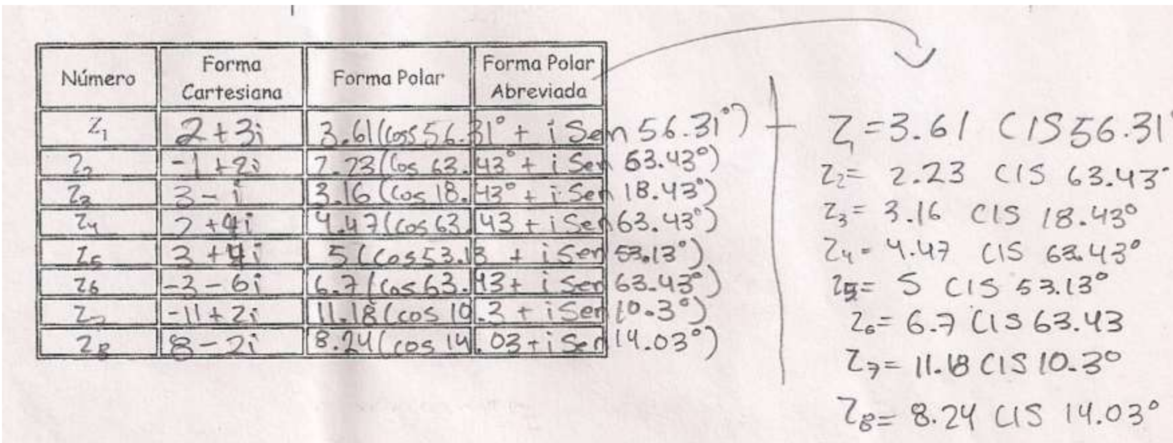
20. ¿Cuál debe ser el módulo y argumento del número i?

modulo = positivo y negativo; argumento = 90° y 270°

Figura 46. Actividad 2, reactivo 20

En la Figura 46, se estaba trabajando con la representación de la unidad imaginaria tanto gráfica como numéricamente. En esta pregunta, se hace énfasis en el número i, considerando su módulo y argumento. La respuesta del estudiante con respecto al módulo no se corresponde con la pauta institucional, ya que señala que éste puede ser negativo. Además del conflicto mencionado anteriormente, podemos señalar que el estudiante se refiere a los objetos matemáticos i y $-i$.

5. La identificación incorrecta de argumentos al no considerar el signo de las partes real e imaginaria del número complejo.



Número	Forma Cartesiana	Forma Polar	Forma Polar Abreviada
Z_1	$2+3i$	$3.61(\cos 56.31° + i\,\text{Sen}\,56.31°)$	
Z_2	$-1+2i$	$7.23(\cos 63.43° + i\,\text{Sen}\,63.43°)$	
Z_3	$3-i$	$3.16(\cos 18.43° + i\,\text{Sen}\,18.43°)$	
Z_4	$2+4i$	$4.47(\cos 63.43 + i\,\text{Sen}\,63.43°)$	
Z_5	$3+4i$	$5(\cos 53.13 + i\,\text{Sen}\,53.13°)$	
Z_6	$-3-6i$	$6.7(\cos 63.43 + i\,\text{Sen}\,63.43°)$	
Z_7	$-11+2i$	$11.18(\cos 10.3 + i\,\text{Sen}\,10.3°)$	
Z_8	$8-2i$	$8.24(\cos 14.03 + i\,\text{Sen}\,14.03°)$	

Figura 47. Actividad 4c, reactivo 13

En la Figura 47 se muestra una tabla en la que se aborda el problema de pasar de una forma de representación cartesiana a una polar. Los datos son tomados después de una exploración en un *applet*. La tabla presentada, brinda información sobre el significado personal que tiene el estudiante para calcular el argumento a partir de su forma cartesiana. Sin embargo, dicha significado no se corresponde con el significado institucional, ya que todos los argumentos considerados en la columna “Forma Polar” de la tabla son menores de $90°$, lo cual hace suponer que todos los números se encuentran en el primer cuadrante, pero recurriendo a la columna de “Forma Cartesiana” podemos observar que no se corresponden, ya que hay números en el segundo, tercero y cuarto cuadrante.

4.1.3 Modificaciones para la Secuencia

En primer término, se consideró la modificación en la redacción de algunas preguntas, para tratar disminuir los conflictos semióticos generados en la interpretación de las mismas. Además, se incorporaron tablas en las actividades, en los puntos donde se le pide al estudiante realizar una exploración libre, para que anoten los resultados obtenidos, de modo que se promuevan la identificación de patrones y los procesos de generalización.

4.2 Segunda Puesta en Escena

4.2.1 Características

Una vez incorporadas las modificaciones que se consideraron pertinentes (modificación de *applets*, cambios en las redacción de algunas instrucciones e incorporación de tablas), se llevó a cabo la *segunda puesta en escena* con un grupo de estudiantes de Ingeniería en Mecatrónica, con objeto de contrastar los resultados obtenidos en la *primera puesta en escena*, así como ver si se detectan nuevos *conflictos semióticos* y en qué medida se atienden los detectados en durante la primera puesta en escena.

Cabe señalar, que al igual que la primera puesta en escena, las condiciones fueron muy favorables, ya que se contó con un aula de computadoras con acceso a Internet, donde la forma de trabajo fue la misma que en la primera puesta en escena.

4.2.2 Observaciones y Análisis

Los resultados de algunos análisis llevados a cabo se presentan en tablas, en las cuales se incluye el porcentaje de estudiantes que realizaron las prácticas matemáticas esperadas, así como los que manifestaron conflictos semióticos. Particularmente, los análisis se enfocaron en los procesos de generalización realizados por los estudiantes, los cuales debían establecer las relaciones correspondientes entre los procedimientos gráficos, numéricos y algebraicos de las operaciones con números complejos.

A continuación se muestran los análisis realizados para algunas de las actividades:

Actividad: *Conversiones*

El objetivo general de esta actividad es que el los estudiantes relacionen la representación polar y la representación cartesiana de un número complejo, identificándolas y realizando conversiones de una a otra.

Sus objetivos específicos son:

1. Convierte un número complejo representado en forma polar a su forma de representación cartesiana (casos particulares elegidos por los estudiantes mediante la exploración en el software, para lo cual se les solicitan números complejos en distintos cuadrantes).

2. Expresa de manera general la parte real a y la parte imaginaria b de un número complejo cuyo módulo es r y su argumento es θ.

3. Convierte un número complejo representado en forma cartesiana a su forma de representación polar (casos particulares elegidos por los estudiantes mediante la exploración en el software, para lo cual se le solicitan números complejos en distintos cuadrantes).

4. Expresa de manera general el módulo r y el argumento θ de un número complejo cuya parte real es a y su parte imaginaria es b.

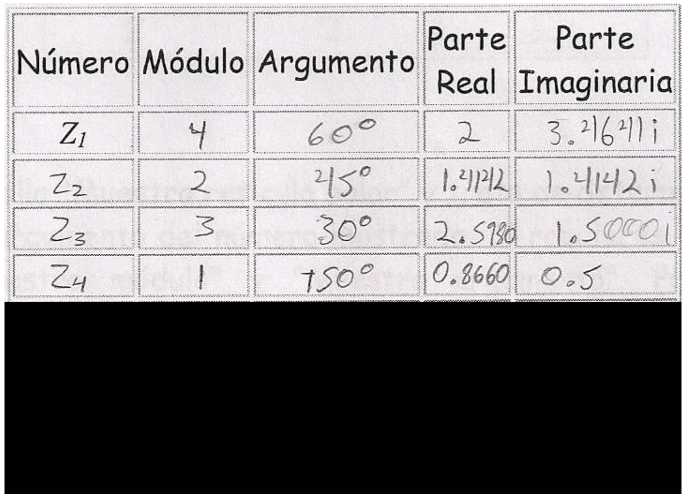
A continuación, se abordan los objetivos específicos de cada actividad y en qué medida los resultados de los estudiantes se corresponden con las prácticas matemáticas esperadas.

1. Convierte un número complejo representado en forma polar a su forma de representación cartesiana (casos particulares elegidos por los estudiantes mediante la exploración en el software, para lo cual se les solicitan números complejos en distintos cuadrantes).

Prácticas Matemáticas	Número de Estudiantes	Porcentaje
1. Lectura a partir de una representación gráfica de un complejo en su forma polar. Uso de funciones trigonométricas. Cálculo de la parte real y la parte imaginaria.	20	66.7%
Conflictos Semióticos		
2. No explora la conversión en todos los cuadrantes	5	16.7%
3. Agrega la notación i como elemento constitutivo de la parte imaginaria	3	10%
4. Contesta de manera errónea en segundo y tercer cuadrante	2	6.7%

Tabla 3. Prácticas Matemáticas y Conflictos Semióticos Objetivo 1. Actividad Conversiones

La siguiente imagen muestra la presencia del conflicto semiótico b, ya que el estudiante sólo reporta exploraciones en el primer y segundo cuadrante.



Número	Módulo	Argumento	Parte Real	Parte Imaginaria
Z_1	4	60°	2	3.46411i
Z_2	2	45°	1.4142	1.4142i
Z_3	3	30°	2.5980	1.5000i
Z_4	1	150°	0.8660	0.5

[redacted]

Figura 48. Conflicto Semiótico b, Objetivo 1. Actividad Conversiones

5. Expresa de manera general la parte real a y la parte imaginaria b de un número complejo cuyo módulo es r y su argumento es θ.

Prácticas Matemáticas	Número de Estudiantes	Porcentaje
1. Utiliza adecuadamente el lenguaje algebraico para generalizar los resultados del punto 5.	11	36.7%
Conflictos Semióticos		
2. Confunde la tarea propuesta (Expresa de manera general el módulo y argumento de un número complejo dada su parte real y su parte imaginaria)	7	23.3%
3. No contesta	6	20%
4. Escribe simplemente ($Z = r(\cos\theta + i\ sen\theta)$)	2	6.7%
5. Expresa de manera general su respuesta, pero incluye el símbolo i como elemento constitutivo de la parte imaginaria	1	3.3%
6. No expresa de manera general una de las partes (real o imaginaria) de un número complejo	1	3.3%
7. Escribe simplemente $(a + bi)$	1	3.3%
8. Utiliza incorrectamente las funciones trigonométricas	1	3.3%

Tabla 4. Prácticas Matemáticas y Conflictos Semióticos Objetivo 2. Actividad Conversiones

Como se puede observar en las tablas anteriores (Tabla 3 y 4), el número de estudiantes que logra generalizar el procedimiento de conversión de un número complejo representado en forma polar a forma cartesiana disminuye con respecto al número de estudiantes que puede realizar casos particulares. Lo anterior, sugiere que hay dificultades para que los alumnos logren realizar procesos de generalización.

La siguiente figura muestra el conflicto semiótico e, generalizando el procedimiento de calcular la parte real y la parte imaginaria pero incluyendo el símbolo i como elemento constitutivo de la misma.

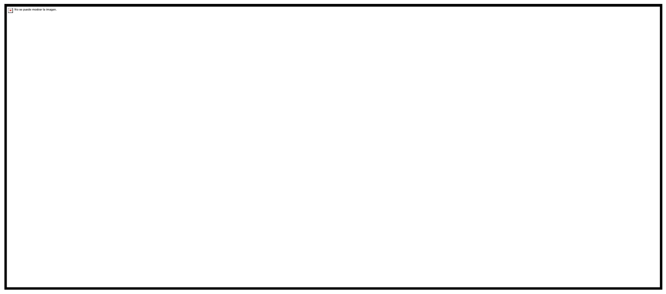


Figura 49. Conflicto Semiótico e, Objetivo 2. Actividad Conversiones

9. Convierte un número complejo representado en forma cartesiana a su forma de representación polar (casos particulares elegidos por los estudiantes mediante la exploración en el software, para lo cual se le solicitan números complejos en distintos cuadrantes).

Prácticas Matemáticas	Número de estudiantes	Porcentaje
1. Lectura a partir de una representación gráfica de un complejo en su forma cartesiana. Uso de funciones trigonométricas. Cálculo de módulo y argumento.	15	50%
Conflictos Semióticos		
2. Agrega la notación i como elemento constitutivo de la parte imaginaria.	4	13.3%
3. No explora la conversión en todos los cuadrantes.	4	13.3%
4. Utiliza mecánicamente la fórmula para calcular argumentos, sin considerar el cuadrante en el que se encuentra el número complejo.	3	10%
5. Confunde la tarea asignada (convierte un número complejo en forma polar a cartesiana).	3	10%
6. Utiliza argumentos negativos en forma inconsistente.	1	3.3%

Tabla 5. Prácticas Matemáticas y Conflictos Semióticos Objetivo 3. Actividad Conversiones

La siguiente figura muestra el conflicto semiótico d, donde el estudiante simplemente utiliza la fórmula para calcular argumentos, sin tomar en cuenta el cuadrante con el que se está trabajando (ver Z_2, Z_3, Z_4).

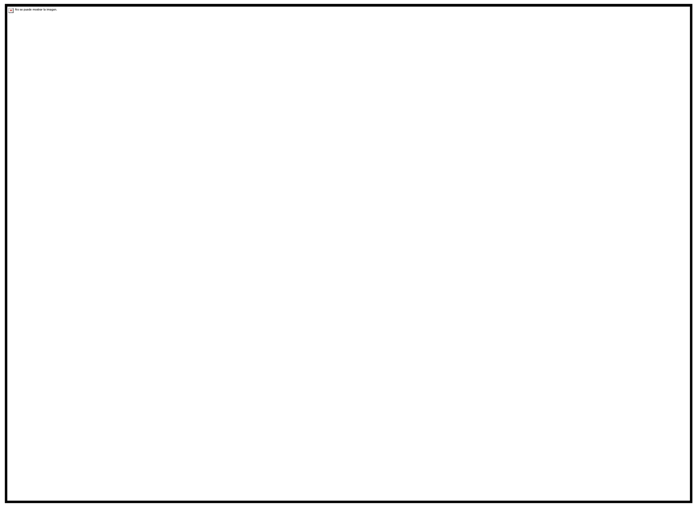


Figura 50. Conflicto Semiótico d, Objetivo 3. Actividad Conversiones

7. Expresa de manera general el módulo r y el argumento θ de un número complejo cuya parte real es a y su parte imaginaria es b.

Conflictos semióticos	Números de Estudiantes	Porcentajes
Considera diferentes casos para expresar de manera general el argumento de un número complejo (dada su parte real e imaginaria), pero no considera todos los cuadrantes o los considera erróneamente	15	50%
No contesta	6	20%
Para expresar de manera general el argumento de un número complejo sólo considera el caso del primer cuadrante	5	16.7%
Escribe simplemente $(Z = r(\cos\theta + i\ sen\theta))$	1	3.3%
Indica que dependiendo del cuadrante será modificada la fórmula, pero no menciona los diferentes casos	1	3.3%
Escribe simplemente las literales (r y θ)	1	3.3%
Utiliza el módulo para expresar de manera general la forma de obtener el argumento de un número complejo dada su parte real e imaginaria	1	3.3%

Tabla 6. Prácticas Matemáticas y Conflictos Semióticos Objetivo 4. Actividad Conversiones

En la tabla anterior (Tabla 6) se pueden observar las dificultades que hubo para generalizar el procedimiento de convertir un número en forma cartesiana a polar, ya que la función trigonométrica utilizada tiene ciertas consideraciones dependiendo del cuadrante con el que se esté trabajando. Cabe mencionar, que la representación gráfica ayudó a disminuir el número de estudiantes que utilizan de manera mecánica la fórmula en casos particulares, sin embargo, al momento de generalizar no lograron una descripción algebraica de lo sucedido.

En la Figura 61 se muestra el conflicto semiótico d, donde el estudiante confunde la generalización del procedimiento para convertir un número representado en forma cartesiana a polar con la forma polar de representar un número complejo.

Figura 61. Conflicto Semiótico d, Objetivo 4. Actividad Conversiones

Actividad: *Suma*

El objetivo general de esta actividad es que, el estudiante, a partir de la exploración libre en el software de GeoGebra, logre generalizar el proceso de la suma de números complejos partiendo de representaciones gráficas, para posteriormente expresarlo algebraicamente, así como extender la propiedad de conmutatividad para la suma de números reales hacia la suma de números complejos.

Sus objetivos específicos son:

1. Describir el procedimiento gráfico de la suma de números complejos, mediante la exploración en GeoGebra.
2. Sumar números complejos en casos particulares de forma gráfica, mediante la exploración en el software GeoGebra.
3. Generalizar el proceso de la suma para números complejos y expresarlo en lenguaje algebraico.
4. Explorar la conmutatividad de la suma en casos particulares de forma gráfica.
5. Establecer la relación de conmutatividad para la suma de números complejos.

A continuación, se abordan los objetivos específicos de cada actividad y en qué medida los resultados de los estudiantes se corresponden con las prácticas matemáticas esperadas.

1. Describir el procedimiento gráfico de la suma de números complejos (Z_1 y Z_2), mediante la exploración en el software GeoGebra.

Prácticas Matemáticas	**Número de Estudiantes**	**Porcentaje**
1. Visualización del procedimiento gráfico para la suma de números complejos. Descripción gráfica de la suma de números complejos a partir de la exploración en el software.	20	69%
Conflictos Semióticos		

2. Confunde a los segmentos dirigidos Z_1 y Z_2 con los ejes real e imaginario.	1	3.4%
3. Vacío de significación en cuanto a la descripción gráfica de la suma (no utiliza elementos gráficos para describir la suma; sin embargo, declara el procedimiento numérico).	5	17.2%
4. No logra describir el procedimiento gráfico general para la suma, declara que el segmento de Z_2 se le agrega a Z_1.	3	10.3%

Tabla 7. Prácticas Matemáticas y Conflictos Semióticos Objetivo 1. Actividad Suma

5. Sumar números complejos (casos particulares elegidos por los estudiantes mediante la exploración en el software).

Prácticas Matemáticas	**Número de Estudiantes**	**Porcentaje**
6. Lectura de un número complejo en forma cartesiana a partir de su representación gráfica. Identificación de la parte real y parte imaginaria. Cálculo de la suma.	5	17.2%
Conflictos Semióticos		
7. Agrega la notación i como elemento constitutivo de la parte imaginaria; sin embargo, realiza las demás prácticas matemáticas eficazmente.	23	79.3%
8. Manifiesta errores aritméticos.	1	3.4%

Tabla 8. Prácticas Matemáticas y Conflictos Semióticos Objetivo 2. Actividad Suma

Tomando en cuenta los resultados de la Tabla 8, se puede apreciar que el conflicto semiótico predominante en esta situación es el incluir la notación i como elemento constitutivo de la parte imaginaria (conflicto semiótico b). Cabe señalar, que el conflicto se limita, en la mayoría de los casos, a la notación de la parte imaginaria, pero que las demás prácticas son realizadas correctamente.

9. Describe de manera general cómo se efectúa la suma de números complejos dadas su parte real e imaginaria (Representar algebraicamente su respuesta).

Prácticas Matemáticas	**Número de Estudiantes**	**Porcentaje**

1. Utiliza adecuadamente el lenguaje algebraico para generalizar los resultados del objetivo 1.	13	45%
Conflictos Semióticos		
2. No logra abstraer la parte imaginaria en forma algebraica, aunque si logra abstraer la parte real, ya que solo escribe (a+c)+(bi+di).	9	31%
3. Vacío de significación (no contesta).	4	13.8%
4. No logra abstraer parte real y parte imaginaria en forma algebraica, solo deja indicada la operación de la siguiente manera (a+bi)+(c+di).	1	3.4%
5. Expresa adecuadamente su respuesta de manera verbal, pero no logra pasar al lenguaje algebraico.	1	3.4%
6. No suma la parte real de Z_1 con la parte real de Z_2 , de igual manera para la parte imaginaria, sino que las multiplica, de tal manera que expresa: $Z_1 + Z_2 = ac + bdi$	1	3.4%

Tabla 9. Prácticas Matemáticas y Conflictos Semióticos Objetivo 3. Actividad Suma

Si consideramos la tabla del objetivo 2 y agregamos como respuesta correcta a los estudiantes que presentan el conflicto semiótico b) de la tabla 8 (puesto que las demás prácticas matemáticas las realizaron eficazmente) podremos observar que el 95.7% de los estudiantes logró realizar el procedimiento de la suma de números complejos en casos particulares. Sin embargo, al momento de generalizar, vemos que el porcentaje de estudiantes que realiza las prácticas matemáticas esperadas, reduce al 45% (ver Tabla 9). Con lo cual se aprecia que no todos los estudiantes pudieron realizar el proceso de generalización a partir de casos particulares.

7. Explorar en el software la suma de $\mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_2$ y la suma $\mathrm{Z}_2 + \mathrm{Z}_1$ (La intención de este reactivo es probar la conmutatividad de la suma en casos particulares seleccionados por los estudiantes).

Prácticas Matemáticas	Número de Estudiantes	Porcentaje
1. Lectura de un número complejo a partir de su representación gráfica. Identificación de la parte real y la parte imaginaria.	5	17.2%

Validación de la conmutatividad de la suma para casos particulares.		
Conflictos Semióticos		
2. Agrega la notación i como elemento constitutivo de la parte imaginaria; sin embargo, realiza las demás prácticas matemáticas eficazmente.	20	69%
3. Manifiesta errores aritméticos.	2	7%
4. Vacío de significación (no contesta)	1	3.4%
5. Agrega la notación i como elemento constitutivo de la parte real.	1	3.4%

Tabla 10. Prácticas Matemáticas y Conflictos Semióticos Objetivo 4. Actividad Suma

Como se puede observar en la Tabla 10, el conflicto semiótico predominante fue, nuevamente, la inclusión de la notación i como elemento constitutivo de la parte imaginaria (conflicto semiótico b). Sin embargo, es importante resaltar, que aunque varios estudiantes presentaron dicho conflicto, las demás prácticas matemáticas las realizaron de manera correcta.

6. Cuestionar al estudiante, a partir de los resultados obtenidos en la tabla, sobre la relación que existe entre la suma de $Z_1 + Z_2$ y la suma $Z_2 + Z_1$.

Prácticas Matemáticas	**Número de Estudiantes**	**Porcentaje**
1. Interpreta los resultados del objetivo 3.	25	86.2%
Válida la conmutatividad para la suma de números complejos (implícita o explícitamente).		
Conflictos Semióticos		
2. Vincula los elementos de la suma con los elementos del producto, ya que argumenta que “el orden de los factores no altera el producto”.	2	7%
3. No logra abstraer las características generales para la conmutatividad de la suma, ya que sólo argumenta que $Z_1 + Z_2$ y $Z_2 + Z_1$ “tienen el mismo módulo”.	1	3.4%
4. Vacío de significación, el estudiante declara que no encuentra ninguna relación.	1	3.4%

Tabla 11. Prácticas Matemáticas y Conflictos Semióticos Objetivo 5. Actividad Suma

En la Tabla 11, se observa que el porcentaje de estudiantes que realiza las prácticas matemáticas esperadas fue muy bueno. Sin embargo, surgen dos conflictos semióticos, que aunque son aislados, vale la pena retomar. Primeramente, para el conflicto b) (ver Tabla 11) se puede ver que el estudiante relaciona reglas que son válidas para la multiplicación de los números reales y las extiende hacia la suma de números complejos, lo cual nos indica que existe disparidad entre el significado personal que tiene el estudiante sobre el objeto matemático “factor” con el que marca la institución. Por otra parte, la respuesta dada por el estudiante y enmarcada como conflicto c) (ver Tabla 11) no es incorrecta, ya que los módulos son los mismos; sin embargo, su respuesta es incompleta, faltaría agregar la característica de que tienen el mismo argumento.

Es importante mencionar que los estudiantes suelen ver la propiedad de conmutatividad como una propiedad que se cumple siempre.

En la siguiente figura se muestra un ejemplo del conflicto semiótico b, donde el estudiante vincula elementos de la suma con elementos del producto.

Figura 62. Conflicto Semiótico b, Objetivo 5. Actividad Suma

Actividad: *Resta*

El objetivo general de esta actividad, es que el estudiante, a partir de la exploración libre en el software de GeoGebra, generalice el proceso de la resta de números complejos y lo exprese algebraicamente, así como que declare (implícita o explícitamente) cuál es el inverso de un número complejo.

Los objetivos específicos son:

1. Objetivo 1: Restar números complejos en casos particulares mediante la exploración en el software GeoGebra.
2. Objetivo 2: Generalizar el proceso de la resta para números complejos y expresarlo en lenguaje algebraico.
3. Objetivo 3: Establecer, mediante la exploración en el software, la relación que $Z_2 - Z_1$ es el inverso de $Z_1 - Z_2$, donde Z_1, Z_2 pertenecen a los números complejos.

A continuación, se abordan los objetivos específicos de cada actividad y en qué medida los resultados de los estudiantes se corresponden con las prácticas matemáticas esperadas.

Objetivo 1: Restar números complejos (casos particulares elegidos por los estudiantes mediante la exploración en el software).

Prácticas Matemáticas	**Número de Estudiantes**	**Porcentaje**
1. Lectura de un número complejo en forma cartesiana a partir de su representación gráfica.	6	21%

Identificación de la parte real y parte imaginaria. Cálculo de la resta.		
Conflictos Semióticos		
2. Agrega la notación i como elemento constitutivo de la parte imaginaria.	21	72.4%
3. Resta incorrectamente.	2	7%

Tabla 12. Prácticas Matemáticas y Conflictos Semióticos Objetivo 1. Actividad Resta

Objetivo 2: Describe de manera general cómo se efectúa la resta de números complejos dadas su parte real e imaginaria (Representar algebraicamente su respuesta).

Prácticas Matemáticas	Número de Estudiantes	Porcentaje
1. Utiliza adecuadamente el lenguaje algebraico para generalizar los resultados del punto 7.	16	55.1%
Conflictos Semióticos		
2. Expresa algebraicamente: $Z_1 - Z_2 = (a - c) - (b - d)i$.	3	10.3%
3. Responde de manera verbal sin generalizar, ni representar algebraicamente.	2	7%
4. Da respuesta para el caso de la suma de números complejos.	2	7%
5. Señala que $Z_1 - Z_2 = Z_1 + Z_2$.	1	3.4%
6. Responde de manera verbal y si generaliza; sin embargo, no representa algebraicamente su respuesta.	1	3.4%
7. Expresa algebraicamente: $(a + c) - (b - d)$.	1	3.4%
8. Declara verbalmente que a Z_2 se le resta Z_1, pero expresa algebraicamente la resta $Z_1 - Z_2$.	1	3.4%
9. Expresa algebraicamente: $(a + bi) + (c + di) - 1$ y declara verbalmente:"se toma Z_1 y se le suma Z_2 multiplicado por -1".	1	3.4%

10. Expresa algebraicamente: $X_1 - X_2 = X_3$ y $Y_1 - Y_2 = Y_3$	1	3.4%

Tabla 13. Prácticas Matemáticas y Conflictos Semióticos Objetivo 2. Actividad Resta

Al igual que en los análisis realizados para la actividad de suma, en la Tabla 12, el conflicto semiótico predominante fue la inclusión de la notación i como elemento constitutivo de la parte imaginaria (conflicto semiótico b). Sin embargo, las demás prácticas matemáticas fueron realizadas de manera correcta. Si consideramos la tabla del objetivo 1 y agregamos como respuesta correcta a los estudiantes que presentan el conflicto semiótico b) de dicha tabla podremos observar que el 93.4% de los estudiantes logró realizar el procedimiento de la suma de números complejos en casos particulares.

Por otra parte, al momento de generalizar el procedimiento para restar dos números complejos arbitrarios, reduce el número de estudiantes. Lo cual, nuevamente, muestra dificultad para pasar del proceso de particularización al de generalización.

A continuación, en la Figura 63, se muestra un ejemplo del conflicto semiótico b, donde el estudiante expresa de manera incorrecta la generalización para el procedimiento de dos números complejos arbitrarios.

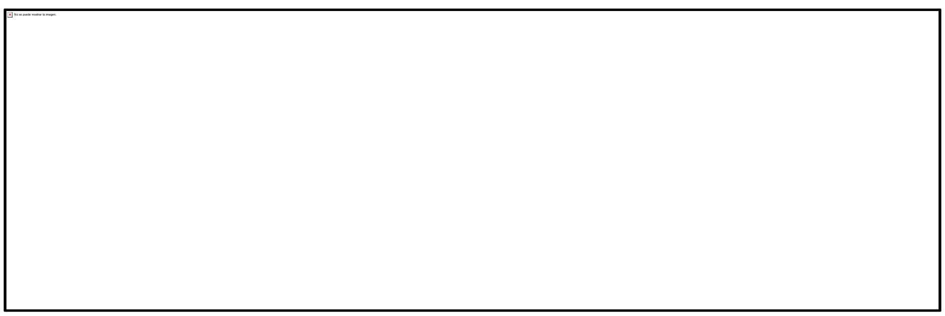


Figura 63. Conflicto Semiótico b, Objetivo 2. Actividad Resta

Un ejemplo más, que a continuación se presenta (ver Figura 64) es el del conflicto semiótico j, donde el estudiante hace una vinculación con la parte gráfica, pero considerando al eje X y al Y. Lo cual sugiere un fuerte vínculo con el plano cartesiano.

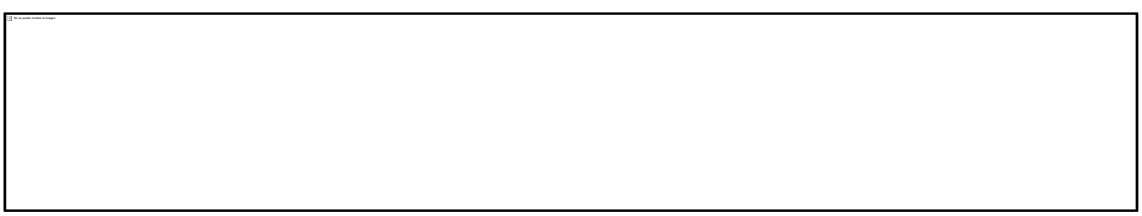


Figura 64. Conflicto Semiótico j, Objetivo 2. Actividad Resta

Objetivo 3: Cuestionar al estudiante por la relación que existe entre la resta $Z_1 - Z_2$ y la resta $Z_2 - Z_1$ (El objetivo es que el estudiante declare implícita o explícitamente la propiedad del inverso aditivo)

Prácticas Matemáticas	Número de Estudiantes	Porcentaje

1. Expresa implícita o explícitamente que $Z_1 - Z_2 = Z_3$ y $Z_2 - Z_1 = Z_4$, entonces $Z_3 = -Z_4$. Justifica su respuesta gráfica, numérica y/o algebraicamente su respuesta.	9	31%
Conflictos Semióticos		
2. Expresa implícita o explícitamente que $Z_1 - Z_2 = Z_3$ y $Z_2 - Z_1 = Z_4$, entonces $Z_3 = -Z_4$. Sin embargo, no justifica su respuesta.	10	34.5%
3. No encuentra ninguna relación.	8	27.6%
4. No contesta.	2	7%

Tabla 14. Prácticas Matemáticas y Conflictos Semióticos Objetivo 3. Actividad Resta

En los resultados de la tabla anterior, se pude observar que los estudiantes tienen conflicto para argumentar sus respuestas, ya que se puede apreciar un buen número de estudiantes que lograron identificar la propiedad del inverso aditivo; sin embargo, no todos pudieron justificarla.

4.2.3 Modificaciones para la Secuencia

Las nuevas incorporaciones sugeridas por la segunda puesta en escena de la secuencia fueron modificaciones en la redacción de algunas preguntas, ya que se observaron conflictos semióticos generados por la interpretación de las mismas.

4.3Valoración de la Idoneidad didáctica

Con el objetivo de identificar potenciales mejoras en el proceso de estudio así como resaltar sus bondades se hace una valoración de la secuencia de actividades y su implementación en el aula, para lo cual se consideran las seis componentes propuestas por Godino (2009)

Idoneidad Epistémica

Los objetos matemáticos involucrados en las actividades, sus definiciones, propiedades y procedimientos, cuya emergencia se busca promover, forman parte del significado institucional de referencia y pretendido.

La secuencia de actividades está pensada para que se vaya avanzando gradualmente entre actividad y actividad. De esta manera, los objetos matemáticos involucrados tienen relación y articulación a lo largo de toda la secuencia.

Los contextos utilizados para la secuencia fueron intra matemáticos, ya que las aplicaciones extra matemáticas no se encuentran al nivel de los estudiantes de primer ingreso de la Universidad a quienes va dirigida la propuesta; sin embargo, en las actividades se promueve el uso y la emergencia de diferentes formas de lenguaje, ya que las situaciones son planteadas verbalmente y en un ambiente geométrico-dinámico, los cuales se vinculan con el lenguaje numérico y algebraico, favoreciendo el establecimiento de múltiples y variadas funciones semióticas entre ellos.

De lo anterior, se considera que la idoneidad epistémica es alta.

Idoneidad Cognitiva

Las situaciones matemáticas que se ponen en juego en las actividades requieren de conceptos matemáticos fundamentales, como el conjunto de los números reales y las propiedades de sus operaciones, mismos que aunque han sido estudiados en niveles educativos previos, no están suficientemente afianzados al ingresar a la Universidad. Por tal motivo, la secuencia incluye una actividad introductoria que aborda los distintos subsistemas de los números reales. Además, con las ventajas visuales y dinámicas que ofrece GeoGebra y el carácter intuitivo utilizado para la construcción de los objetos matemáticos, se considera que los significados pretendidos tienen una dificultad apropiada para los estudiantes.

Sin embargo, dentro de la secuencia, no se contemplan adaptaciones para diferencias individuales entre los estudiantes.

De lo anterior, se considera que la idoneidad cognitiva es media alta.

Idoneidad Mediacional

La secuencia de actividades fue colocada en una página web, para que los estudiantes puedan ingresar a ella desde cualquier computadora. Además, la ayuda del software GeoGebra, favoreció los procesos de visualización y generalización.

La recomendación de trabajo para la implementación de la secuencia es contar con un buen número de computadoras, de tal forma que la distribución de los estudiantes para la realización de las actividades pueda llevarse a cabo en pequeños grupos (2 a 3 personas).

Particularmente, para la implementación de la secuencia el tiempo requerido se excedió del tiempo señalado en el programa de la materia.

De lo anterior, se considera que la idoneidad mediacional es media alta.

Idoneidad Emocional

Las actividades promueven la implicación de los estudiantes, mediante la exploración libre en el software y la elaboración de conjeturas a partir de la misma. Además, promueven la participación grupal para comparar los resultados obtenidos.

Sin embargo, resulta complejo lograr un interés genuino por las actividades en algunos estudiantes, ya que éstas se encuentran en un contexto intramatemático y, por lo regular, surgen cuestiones sobre las aplicaciones extramatemáticas, tal como sucedió durante la implementación de la secuencia.

De lo anterior, se considera que la idoneidad emocional es media.

Idoneidad Interaccional

Durante la implementación de la secuencia el profesor tiene la función de conductor, apoyando a los estudiantes con dudas en la redacción de las preguntas o detalles técnicos del software. Para el momento de institucionalización el docente realiza consensos sobre los diferentes objetos matemáticos que emergen de cada actividad.

Con respecto al trabajo que realizan los estudiantes, se promueve el trabajo en equipo y la inclusión de cada integrante en las actividades, lo cual favorece el diálogo entre ellos; sin embargo, algunos estudiantes mantienen un bajo perfil durante las discusiones grupales.

Por tal motivo, se considera que la idoneidad interaccional es media alta.

Idoneidad Ecológica

La secuencia de actividades se corresponde con lo solicitado en el programa de la materia. Además, los objetos matemáticos que emergen de dicha secuencia tienen relación con contenidos intramatemáticos y extramatemáticos con los cuales, el estudiante, trabajará posteriormente, tales como, Ecuaciones Diferenciales, Mecánica, Electrónica y otras ramas de la ingeniería.

De lo anterior, se considera que la idoneidad ecológica es alta.

Con el objetivo de mostrar una panorámica general de la valoración de cada una de las idoneidades se presenta la Figura 7, donde el hexágono regular es la idoneidad ideal, mientras que el hexágono irregular es la idoneidad alcanzada por la secuencia de actividades diseñada. Cabe señalar que la escala utilizada es cualitativa.

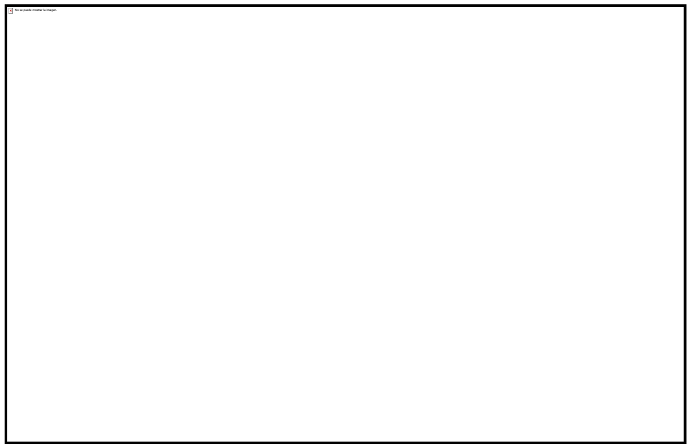


Figura 65. Valoración de la Idoneidad Didáctica

CONCLUSIONES

Para finalizar este trabajo, se presentan en esta sección las conclusiones derivadas del mismo.

El objetivo principal de este trabajo fue diseñar una secuencia de actividades didácticas para la enseñanza de números complejos con un enfoque diferente al que usualmente privilegia el uso del lenguaje algebraico y la manipulación de expresiones algebraicas. Se descartó la posibilidad de utilizar contextos extra-matemáticos, ya que los que fueron identificados, generalmente no resultan familiares a los estudiantes y no son triviales, por lo que orientar la enseñanza a través de ellos, requeriría de un tiempo mucho mayor del que se dispone en un curso inicial de algebra en el primer año de universidad. Por lo que se tomó la decisión de enfocar el diseño desde una perspectiva gráfico-algebraica, y crear ambientes dinámicos en los que el estudiante sea capaz de encontrar relaciones, diferencias y/o similitudes entre las propiedades de sus operaciones y las de los números reales.

Para el diseño de la secuencia resultó muy útil la revisión de la parte histórica, en la que se pudo apreciar la resistencia y dificultades que experimentaron los matemáticos para la aceptación de estos números, y poder comparar con las dificultades y resistencia de los estudiantes, reportadas en varios trabajos de investigación. La identificación de las cuatro etapas epistemológicas asociadas a la emergencia de los números complejos, presentadas por Pardo y Gómez (2005) fueron muy útiles para caracterizar cuatro configuraciones epistémicas en el significado institucional de referencia.

La secuencia incluye applets con representaciones gráficas dinámicas al considerar que la visualización es un recurso importante para la construcción de significados y el establecimiento de variadas funciones semióticas, aportando un aspecto intuitivo y brindando la oportunidad de que el estudiante manipule y explore diferentes casos particulares para, posteriormente, generalizar los procedimientos involucrados. Dentro de la secuencia de actividades se promueve también la vinculación entre los lenguajes gráfico, numérico, algebraico y verbal, enriqueciendo la actividad matemática del estudiante y para prevenir los posibles riesgos asociados a la visualización, reportados en los trabajos de Planchart (2002).

Otra característica importante de la secuencia de actividades es que se encuentra en línea, brindando acceso a los estudiantes desde cualquier computadora, ofreciendo fuerte apoyo al trabajo extra-clase.

Otro de los objetivos de este trabajo, fue el diseño de una serie de orientaciones para el docente sobre la implementación de la secuencia, lo cual resultó difícil. Se intentó plasmar en un documento en un lenguaje apropiado, los objetivos de cada actividad, sugerencias para la implementación y otros elementos que se consideraron importantes. Consideramos este documento como un primer acercamiento de apoyo a la práctica docente.

Durante la puesta en escena de la secuencia se destacan las siguientes observaciones:

1. Números complejos es el primer tema del curso de Álgebra. Generalmente los estudiantes no están acostumbrados a una dinámica de clase como la propuesta en esta secuencia y externaron cierto desconcierto. Sin embargo, el ambiente de laboratorio de computadoras, el uso de applets, y hojas de trabajo, logró involucrar a los estudiantes permitiéndoles trabajar con mayor autonomía. El trabajo en pequeños grupos pareció favorecer el diálogo, la elaboración de conjeturas y la discusión de las mismas. Los applets diseñados brindaron la oportunidad a los estudiantes de visualizar y verificar las propiedades gráficas de las operaciones con números complejos.

1. El trabajo extra-clase se promovió a través de la propuesta de revisar la actividad previamente a la sesión presencial, o bien, posteriormente, para finalizarla o afianzarla. El tiempo establecido en el programa es reducido (diez sesiones de una hora) y a pesar de que se promovió el trabajo extraclase, se requirieron alrededor de cinco sesiones adicionales de una hora.

2. Se observó que el uso de representaciones gráficas dinámicas jugó un papel principal a lo largo de la secuencia, ya que la visualización fue un recurso importante para la construcción de significados y el establecimiento de variadas funciones semióticas, aportando un aspecto intuitivo, brindando la oportunidad de que el estudiante manipule y explore diferentes casos particulares y generalice los procedimientos involucrados.

3. Además, un buen número de estudiantes logró trabajar con los diferentes lenguajes, y la vinculación entre ellos.

Asimismo, durante la implementación de la secuencia se detectaron dificultades en algunos estudiantes para identificar las relaciones gráficas involucradas en las operaciones de números complejos y expresarlas con lenguaje verbal o algebraico. Esto afectó también los procesos de generalización. Se observaron también algunas de las dificultades que reportan algunos investigadores (las cuales son descritas en este trabajo, pág. 6) fueron identificadas en los resultados obtenidos por los estudiantes. Específicamente, la notación utilizada para representar a la parte imaginaria de un número complejo, la consideración de módulos con cantidades negativas, y el cálculo de argumentos sin considerar el cuadrante en el que se ubica el número complejo.

Después de la primera implementación, se hicieron modificaciones a la secuencia. Una adecuación importante fue la inserción de tablas para organizar los resultados de las exploraciones con los applets. Con esto se buscó garantizar que los estudiantes efectivamente exploraran con diferentes números complejos en cada situación, y que les facilitara la búsqueda e identificación de relaciones entre las cantidades propuestas.

Con respecto a la valoración a *posteriori* de la idoneidad didáctica, sólo las idoneidades epistémica y ecológica se consideraron altas. Resulta muy difícil lograr un diseño equilibrado en el que todas las idoneidades se valoren como altas. Aunque la valoración es de carácter cualitativo, lo anterior da pie a que se pueden replantear posibles adecuaciones con el fin de refinar el diseño.

Una vez concluido este trabajo, quedan abiertos algunos problemas o líneas de trabajo relacionadas, las cuales son:

1. La continuación del diseño de actividades donde se incluyan las configuraciones analítica, formal y de contextos extra-matemáticos, las cuales estarían dirigidas a estudiantes de semestres más avanzados.

2. Una investigación sistemática sobre la implementación de la secuencia, que considere los cinco niveles de análisis propuestos por el EOS.

3. La caracterización de los significados personales de los estudiantes.

4. Una investigación sobre el efecto de las actividades complementarias propuestas en el ambiente Maple T.A. (2013), dado que las representaciones gráficas manejadas son estáticas, y las de nuestra propuesta, son dinámicas.

5. Un taller para profesores, con el objetivo de que conozcan las actividades, tengan la oportunidad de contemplarla en sus planes de trabajo, y puedan implementarla de acuerdo a los fines con las que fueron diseñadas, ya que se mencionó que las orientaciones para el docente aquí propuestas pueden no ser suficientes.

6. Una investigación sobre los modos en que los profesores interpretan la propuesta.

A la fecha, la secuencia se encuentra en línea en la dirección electrónica www.mat.uson.mx/proyectoalgebra/Complejos y ha sido utilizada por varios docentes de la Universidad de Sonora, los cuales nos han hablado de las bondades del diseño, así como de sugerencias a incorporar. Además, la difusión de la secuencia en diferentes foros, tanto nacionales como internacionales, ha favorecido el acceso a las actividades a personas ajenas a la institución. Actualmente nuestra página supera las 11,000 visitas y esperamos que este número siga creciendo.

REFERENCIAS

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Bagni, G. (2001). *La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos*. Una investigación experimental desempeñada en la educación media. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (pp. 45-61).

Cardano, G. (1545), Ars magna or The Rules of Algebra, Dover (published 1993).

Duval, R. (2002) Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt, (ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 311-335). North American Chapter of PME: Cinvestav-IPN.

Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. Enseñanza de las Ciencias (aceptado)

Godino, J.D., Batanero, C., & Font, V. (2009). *Un enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 11 de noviembre del 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino J. D., Bencomo D., Font V. y Wilhelmi M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.* Recuperado al 11 de noviembre del 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf

Hitt, F. (2002). *Álgebra Lineal*. México: Pearson Educación.

Hitt, F. (2003). *Una Reflexión sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 (pp. 213-223).

Hohenwarter, M., Borcherds, M., Kreis, Y. (2001) *GeoGebra*. Software. Recuperado el 23 de enero de2011 de www.geogebra.org

Planchart, O. (2002). *La Visualización y la Modelación en la Adquisición del Concepto de Función*. Tesis de Maestría en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Cuernavaca, Morelos.

Laborde, C. (2000). *¿Por qué la tecnología es hoy indispensable en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?* Contribución a la Conferencia Cumbre Mundial de T3 en Tokio.

MapleSoft (2013), *Maple T.A.: Content Center*. Recuperado el 20 de Enero de 2013 de la dirección electrónica http://www.maplesoft.com/tacontent/index.aspx

Nahin, P. J. (1998). *An imaginary tale: The story of* $\sqrt{-1}$. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Pardo, T., Gómez, B. (2007). *La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos*. Un estudio en el nivel universitario. Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (pp. 3-15). Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia. España.

Romero, C. (2010). *Una introducción Gráfica al Concepto de Transformación Lineal Usando GeoGebra*. Tesis de Maestría en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Hermosillo, Sonora, México.

Sada, M. (2008). *Números Complejos: representación gráfica.* Ejemplos diversos de webs interactivas de Matemáticas. Recuperado el 23 de enero de 2011 de http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/

Sfard, A.(1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Soto, J.L. (2002). *Números Complejos: una presentación gráfica*. Material Didáctico No. 1. Dpto. de Matemáticas, Universidad de Sonora

Soto-Johnson, H., Oehrtman, M. (2011). *Construct Analysis of Complex Variables: Hypotheses and Historical Perspectives*. Electronic Proceedings for the Fourteenth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, E.U.A

Vinner S.(1989). The Avoindance of visual considerations in Calculus. Focus Learning Problems of Mathematics. *Antología de Educación Matemática*. Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN (pp: 85-93).

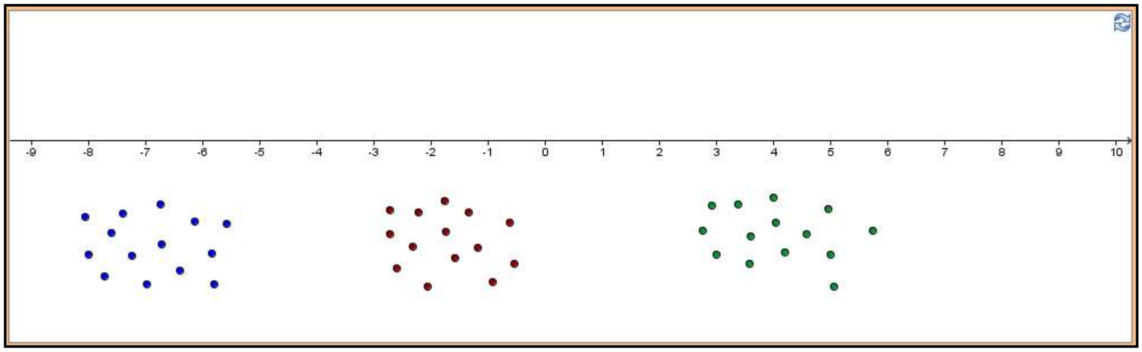
ANEXO I

Secuencia de Actividades Didácticas

En esta sección se presenta la secuencia de actividades, la cual se encuentra disponible en la página electrónica www.mat.uson.mx/proyectoalgebra/Complejos.

Representación gráfica de números Reales

1. Arrastra los puntos azules y utilízalos para marcar en la siguiente recta los números naturales que están a la vista.



2. Imagina que la recta se extiende infinitamente y en ella están marcados todos los números naturales y sólo estos. Si sumamos dos números naturales, ¿obtenemos un número dentro de este conjunto o necesitamos agregar más números a esta recta?

3. ¿Qué pasa cuando multiplicamos dos números naturales? ¿Necesitamos agregar más números a esta recta?

4. ¿Qué pasa cuando restamos dos números naturales? ¿Necesitamos agregar más números a esta recta?

5. Utiliza los puntos rojos para marcar en la recta los números que debemos agregar, para poder restar.

6. ¿Cómo se llama el conjunto de todos los números marcados?

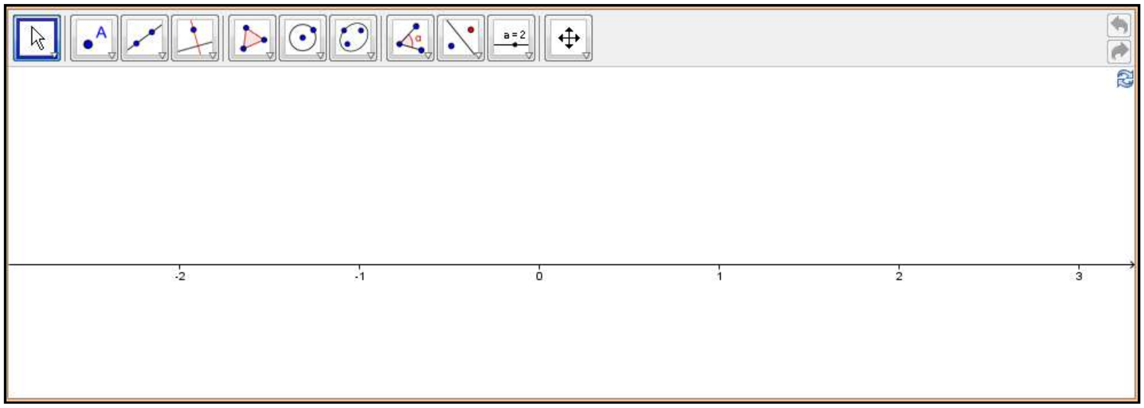
7. ¿Qué pasa si queremos dividir? ¿Qué números debemos agregar a este conjunto de números para poder dividir? Escribe algunos de ellos y represéntalos en la recta, utilizando los puntos verdes.

8. Los números que has marcado hasta el momento se llaman números racionales, y son aquellos que pueden obtenerse dividiendo dos números enteros, siempre y cuando no dividamos por cero. ¿Cómo están distribuidos estos números sobre la recta?

9. Hasta ahora hemos considerado cuatro operaciones básicas: suma, producto, resta y división. ¿Qué otras operaciones aritméticas conoces?

10. ¿Qué pasa si queremos sacar raíces cuadradas? Digamos que queremos encontrar $\sqrt{2}$. ¿Son suficientes los números racionales o debemos agregar más números?

11. Representa $\sqrt{2}$ sobre la siguiente recta y explica por qué no es un número racional.



12. ¿Conoces otros números que no sean racionales que puedan ser representados en l recta anterior?

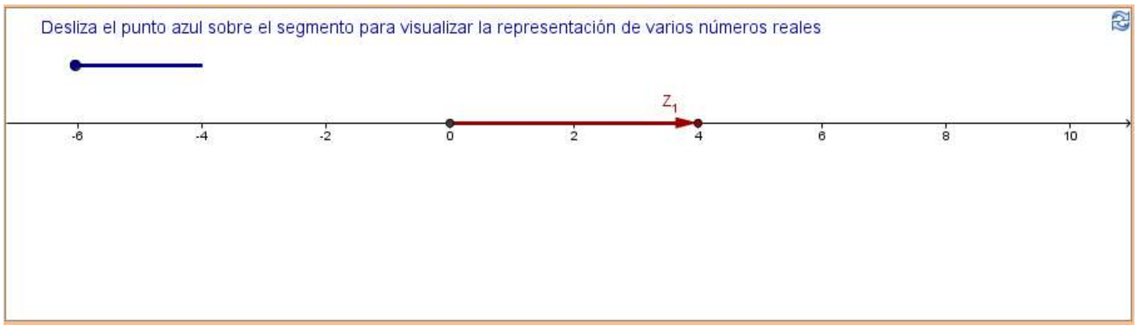
13. Los números del punto anterior se conocen como números irracionales. Si consideramos la unión de los números racionales y los irracionales obtenemos el conjunto de los números reales. A cada número real le corresponde un punto sobre la recta, y también a cada punto sobre la recta le corresponde un número real ¿Qué pasa si queremos obtener la raíz cuadrada de un número negativo? ¿Son suficientes los números reales o debemos agregar más números? ¿Por qué?

14. Utiliza una calculadora para obtener $\sqrt{-1}$. ¿Qué obtuviste? Compara tu resultado con el de tus compañeros.

15. $\sqrt{-1}$ no es un número real y no puede ser representado sobre la recta de los números reales. Para poder obtener raíces de números negativos debemos agregar más números a nuestro sistema. ¿Dónde podremos representarlos?

Representación Gráfica de la Unidad Imaginaria

1. Un número real puede ser representado mediante un punto sobre una recta, la cual llamaremos recta real. También puede ser representado mediante un segmento dirigido sobre la recta. Arrastra el punto azul que aparece en el siguiente *applet* para visualizar la representación gráfica mediante segmentos dirigidos de algunos números reales. ¿Qué números representan los segmentos dirigidos presentados?



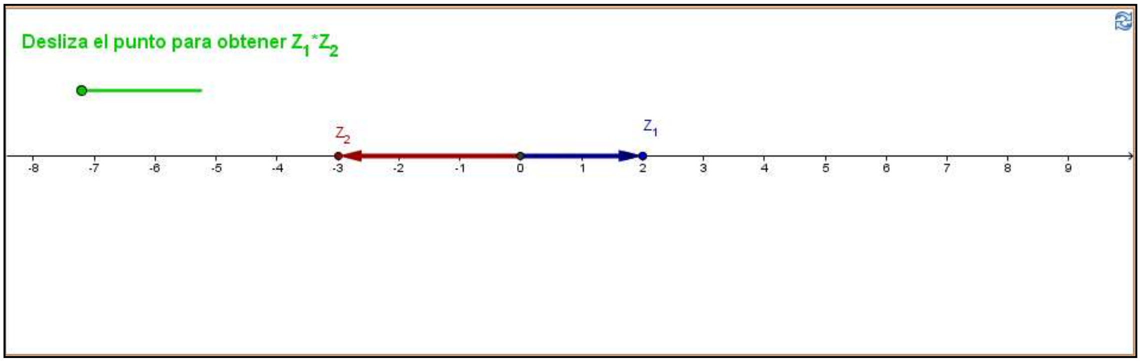
2. Llamaremos módulo a la longitud de los segmentos dirigidos y argumento al ángulo que forman éstos con la parte positiva de la recta real. Encuentra módulo y argumento de cada número representado en el punto anterior y completa la siguiente tabla.

Número	**Módulo**	**Argumento**
$Z_1 =$		
$Z_2 =$		
$Z_3 =$		
$Z_4 =$		
$Z_5 =$		

3. ¿Cuál es el argumento de un número positivo?

4. ¿Cuál es el argumento de un número negativo?

5. En el siguiente *applet* se muestran dos números reales. Arrastra el punto verde sobre el segmento para visualizar la multiplicación de $Z_1 \cdot Z_2$ y anota lo que se te solicita en la tabla posterior.



Z_1		Z_2		$Z_1 \cdot Z_2$	
Módulo	**Argumento**	**Módulo**	**Argumento**	**Módulo**	**Argumento**

6. Repite el proceso para distintos números reales y explora con el producto de dos números positivos, dos números negativos, y un número positivo con uno negativo. Anota lo que se te solicita en la siguiente tabla.

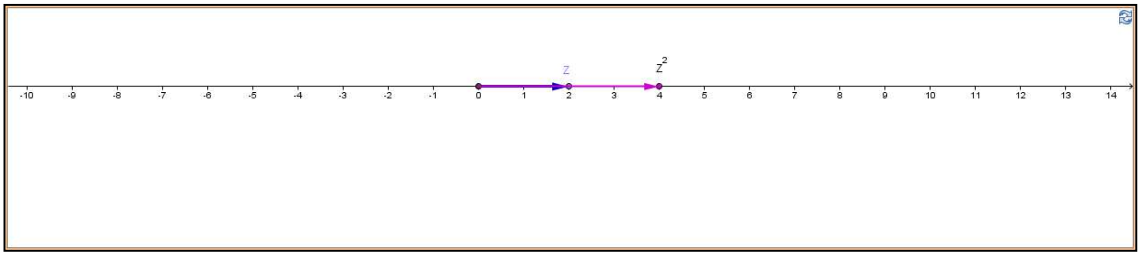
Z_1		Z_2		$Z_1 \cdot Z_2$	
Módulo	**Argumento**	**Módulo**	**Argumento**	**Módulo**	**Argumento**

7. ¿Qué relación existe entre los módulos de Z_1, Z_2 y el módulo de$Z_1 \cdot Z_2$?

8. ¿Qué relación existe entre los argumentos de Z_1, Z_2 y el argumento de $Z_1 \cdot Z_2$?

9. Describe cómo se efectúa gráficamente la multiplicación de $Z_1 \cdot Z_2$.

10. En el siguiente *applet* se muestra un número real Z y su cuadrado Z_2.



11. Arrastra el extremo del segmento dirigido que representa a Z y completa la siguiente tabla.

$\boldsymbol{Z}$		$\boldsymbol{Z^2}$	
Módulo	**Argumento**	**Módulo**	**Argumento**

1. ¿Qué relación existe entre el módulo de Z y el módulo de Z^2?

2. ¿Qué relación existe entre el argumento de Z y el argumento de Z^2?

3. Ahora, arrastra el extremo del segmento dirigido que representa a Z y resuelve las siguientes ecuaciones.

1. $Z^2 = 9$

2. $Z^2 = 2$

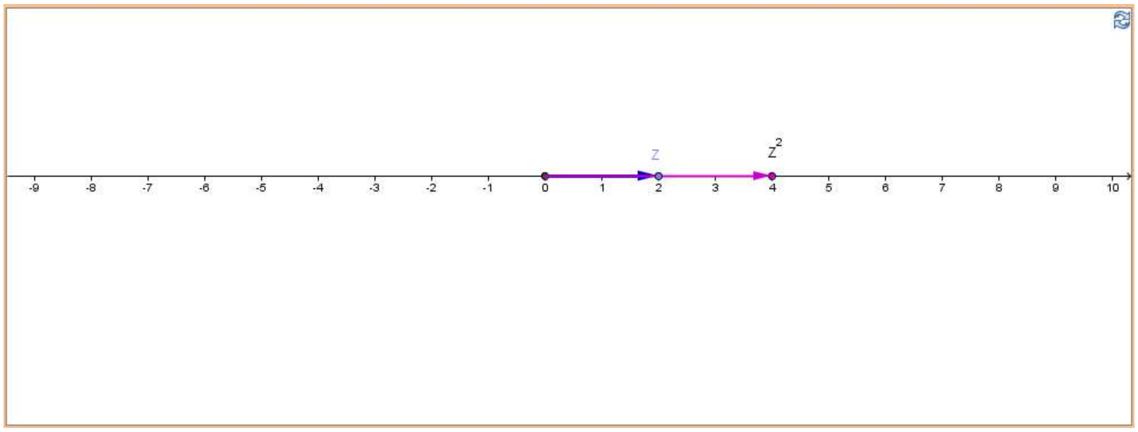
3. $Z^2 = -1$

4. ¿Cuántas soluciones encontraste para cada una de las expresiones anteriores? Justifica tu respuesta y comenta con tus compañeros.

5. Como habrás notado, la ecuación $Z^2 = -1$ no tiene soluciones en el conjunto de los números reales. Sin embargo, agregaremos números a nuestro sistema para que esta ecuación tenga solución. Estos números no pueden representarse en la recta real, entonces buscaremos gráficamente las soluciones en el plano, de modo que se conserven las

características geométricas en términos de módulo y argumentos para la multiplicación de números reales.

6. En el siguiente *applet* se muestra un número real Z y su cuadrado. Arrastra el extremo del segmento dirigido que representa a Z de modo que se salga del eje real e intenta resolver la ecuación $Z^2 = -1$. ¿Cuántas soluciones puedes encontrar?



7. Escribe el módulo y argumento del número -1.

Número	Módulo	Argumento

8. Escribe el módulo y argumento de las soluciones encontradas.

Solución	Módulo	Argumento

9. ¿Qué relación existe entre ellas?

10. El símbolo i representa la unidad imaginaria y la definimos como una solución a la ecuación $Z^2 = -1$

11. Es decir, i es un número no real tal que elevado al cuadrado nos da __________.

12. ¿Cuál debe ser el módulo del número i?

13. ¿Cuáles son los posibles argumentos de i?

14. Se ha convenido que el argumento de la unidad imaginaria sea el positivo mínimo. Entonces, ¿cuál es el argumento del número i?

Representación Gráfica de Números Imaginarios

1. En el siguiente *applet* se muestra un número complejo Z y su cuadrado Z^2. Arrastra el extremo del segmento dirigido que representa a Z para resolver las ecuaciones que se muestran en la tabla posterior. Expresa las soluciones encontradas en términos de módulo y argumento.

Ecuación	**Soluciones**	
	Módulo	**Argumento**
$Z^2 = 9$		

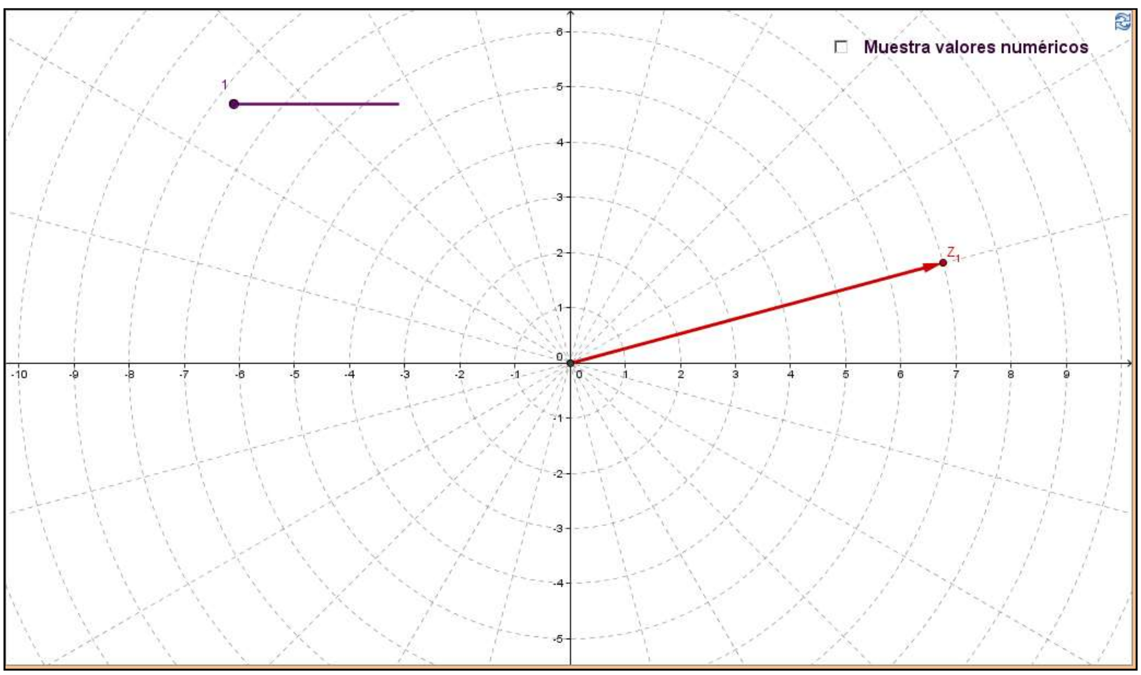
$Z^2 = -9$		
$Z^2 = 4$		
$Z^2 = -4$		
$Z^2 = 2$		
$Z^2 = -2$		

2. Algunas de las ecuaciones que resolviste tienen soluciones reales y algunas de ellas tienen soluciones no reales. Las soluciones no reales que encontraste se llaman números imaginarios, y gracias a ellos, podremos ahora obtener raíces cuadradas de números negativos. ¿Cuáles son las raíces cuadradas de -9? ¿Y de -2? ¿Por qué?

Representación Gráfica de Números de Complejos

1. Forma Polar

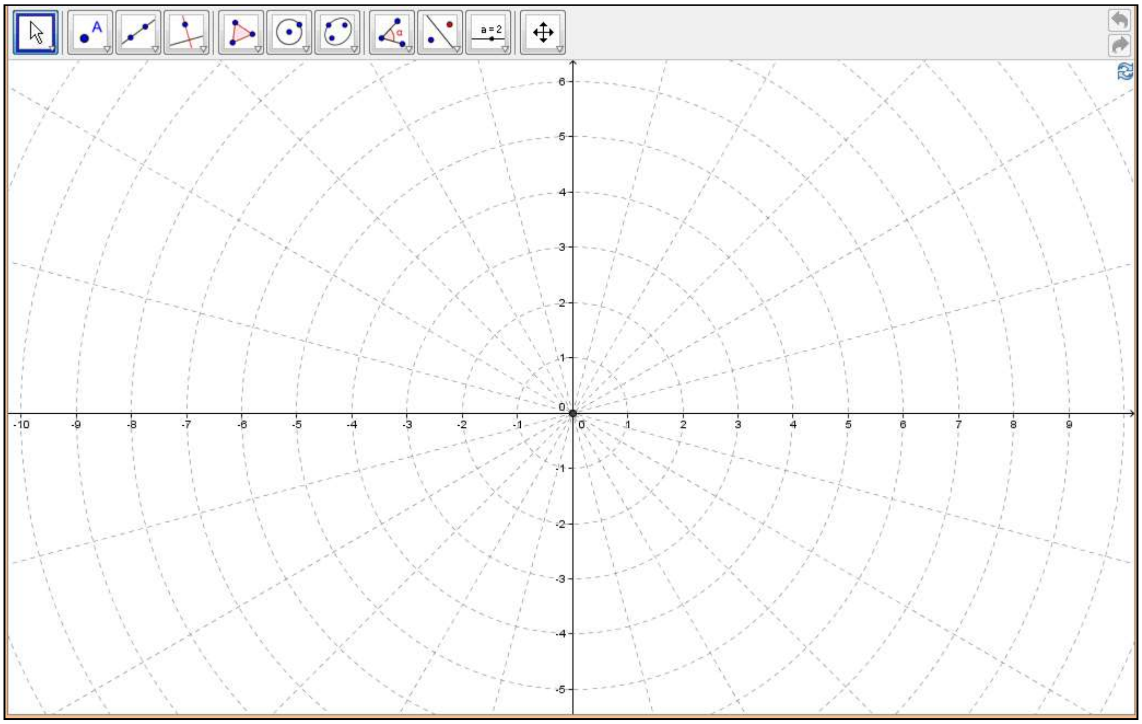
1. Desliza el punto sobre el segmento color morado que se muestra en el siguiente *applet*, para visualizar varios números complejos. Determina el módulo y argumento de cada uno de ellos y completa y la tabla.



Número	Módulo	Argumento
Z_1		
Z_2		

2. Utiliza la herramienta "Vector entre dos puntos" de GeoGebra para construir abajo los segmentos dirigidos que representan a los números presentados en la siguiente tabla.

Módulo	Argumento
3	45°
1.5	120°
2	225°
5	0°
4	195°
1	135°
2.5	240°
3	300°
2	75°
0.5	270°
6	180°
3.5	60°


a = 2

Representación Gráfica de Números de Complejos

1. Forma Cartesiana

1. En el siguiente *applet* se muestra la unidad imaginaria i y un número real b. Atendiendo la forma gráfica como se ha definido la multiplicación, el número i puede ser multiplicado por cualquier número real. Arrastra el punto verde sobre el segmento para visualizar el producto de un número real por la unidad imaginaria i.

No se puede mostrar la imagen.

2. Explora para distintos valores de b, tanto positivos, negativos y cero. Durante la exploración puedes activar la casilla "Muestra valores numéricos". Anota la información solicitada en la siguiente tabla.

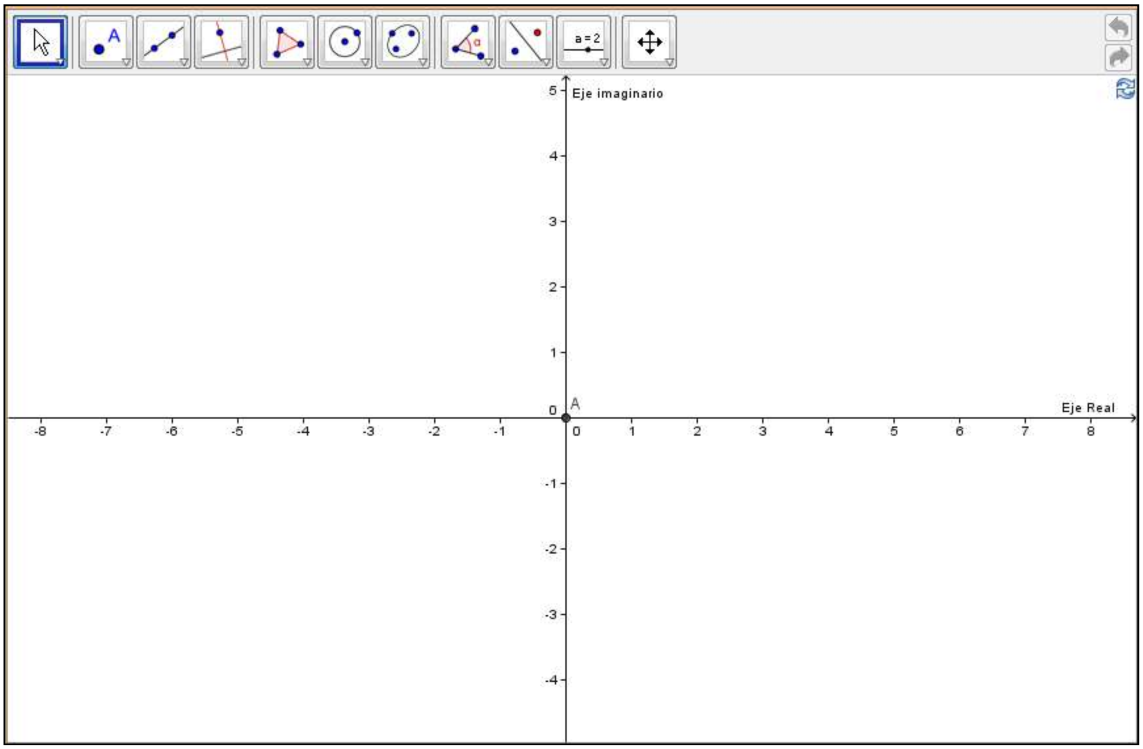
i		b		bi	
Módulo	Argumento	Módulo	Argumento	Módulo	Argumento

1. ¿Qué relación existe entre los módulos de i, el número b y el producto bi?

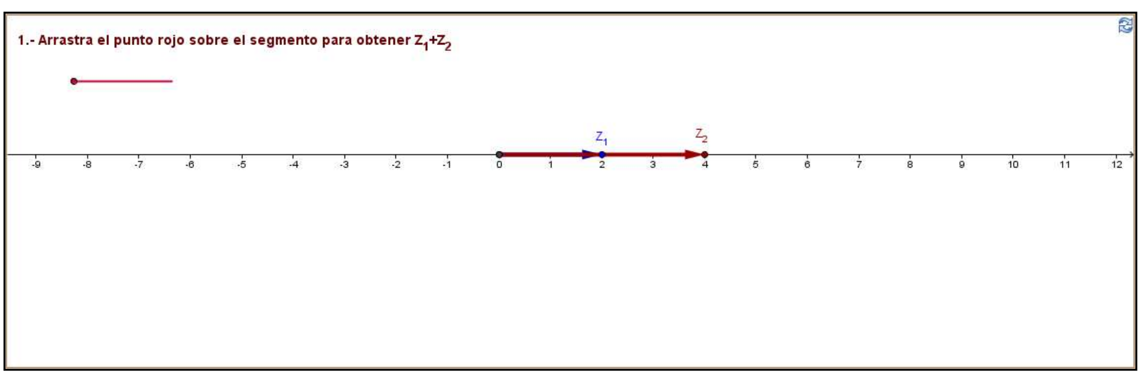
2. ¿Qué relación existe entre los argumentos de i, el número b y el producto bi?

3. A los números de la forma bi (donde b es un número real e i la unidad imaginaria) se les llama números imaginario puros.

4. Utiliza el siguiente *applet* para representar los números imaginarios $3i$, $-i$, $-4i$, $(1/2)i$, $-2.5i$.



5. Ahora, un número real puede sumarse con un número imaginario. Recordemos cómo se suman gráficamente los números reales y extendamos el procedimiento para considerar a los números no reales. Arrastra el punto sobre el segmento para visualizar la suma de dos números reales y completa la tabla posterior.



Z_1	Z_2	$Z_1 + Z_2$

6. Expresa con tus palabras cómo se efectúa gráficamente la suma de números reales.

7. En el siguiente *applet* se muestra la suma de un número real y un imaginario. Explora con distintos número reales e imaginarios y completa la tabla posterior.

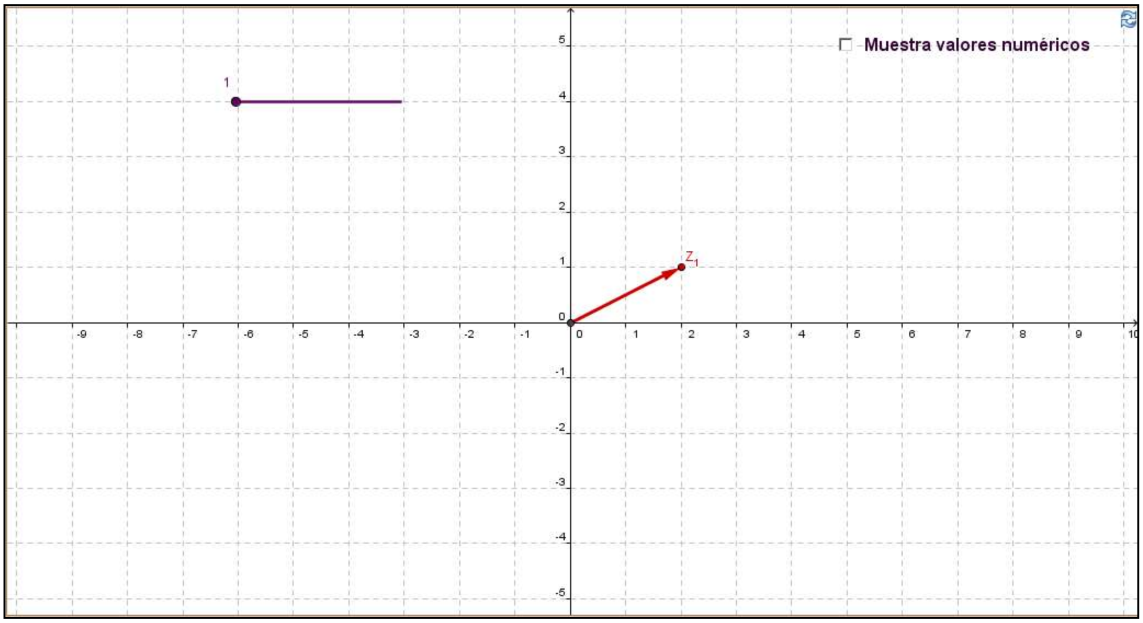
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a+bi}$

8. Con ayuda de la tabla anterior, expresa con tus palabras cómo se efectúa numéricamente la suma de un número real y un número imaginario puro.

9. Con ayuda del *applet* anterior, expresa con tus palabras cómo se efectúa gráficamente la suma de un número real y un número imaginario puro.

10. Los números complejos también pueden representarse de la forma $a + bi$, donde a se conoce como su parte real y b como su parte imaginaria. Esta es la forma cartesiana.

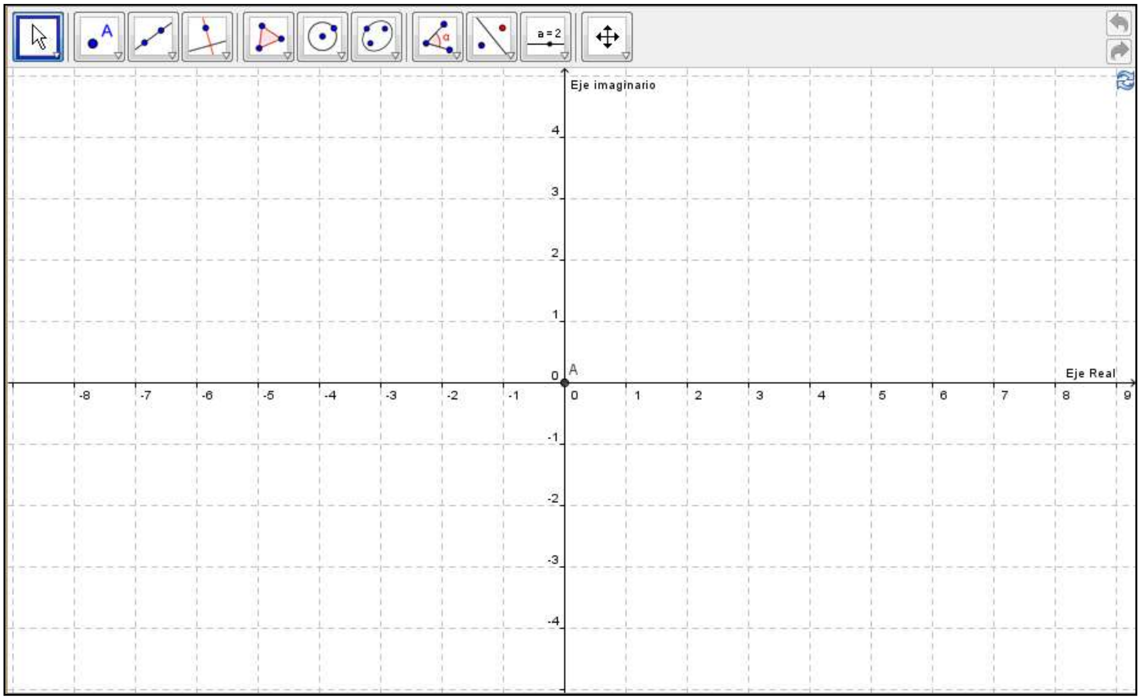
Arrastra el punto sobre el segmento para visualizar varios números complejos y completa la tabla que se muestra abajo.



Número	Parte Real	Parte Imaginaria	Forma Cartesiana
Z_1			
Z_2			

11. Construye en el plano complejo mostrado al final, los números complejos que se muestran en la siguiente tabla.

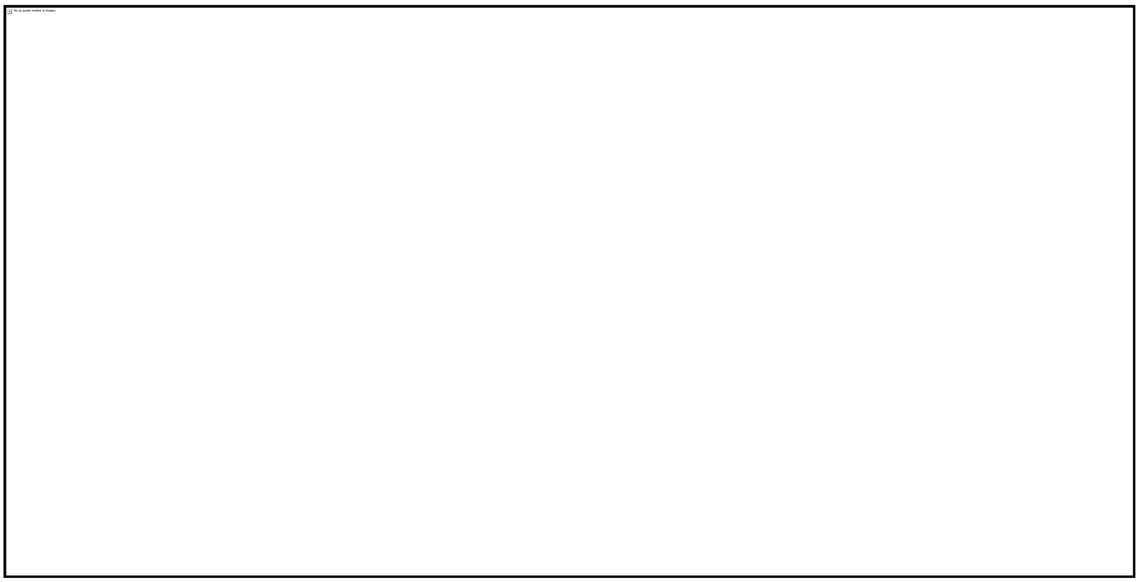
Número	$3+2i$	$-7+i$	$-3-4i$	$5-i$	$-5i$	$(3/2)i$	$1/2-3i$	$-5-(1/2)i$	$-1-i$	$4.2-2i$



Representación Gráfica de Números de Complejos

12. Conversiones

1. Hemos estado representando a los números complejos mediante su módulo y argumento, además también vimos su forma cartesiana. Veremos ahora cómo pasar de una forma de representación a otra. En el siguiente *applet* se muestra un número complejo Z.



2. Activa la casilla “Muestra retícula polar” y determina el módulo y argumento del número mostrado.

Número	Módulo	Argumento
Z		

3. Trataremos de determinar ahora, la forma cartesiana del número Z. Estima visualmente cuál es la parte real y la parte imaginaria de este número. Si requieres ayuda, activa las casillas “Muestra parte real” y “Muestra parte imaginaria”, y desactiva la casilla “Muestra retícula polar”. Organiza la información en la siguiente tabla.

Número	Módulo	Argumento	Parte Real	Parte Imaginaria
Z				

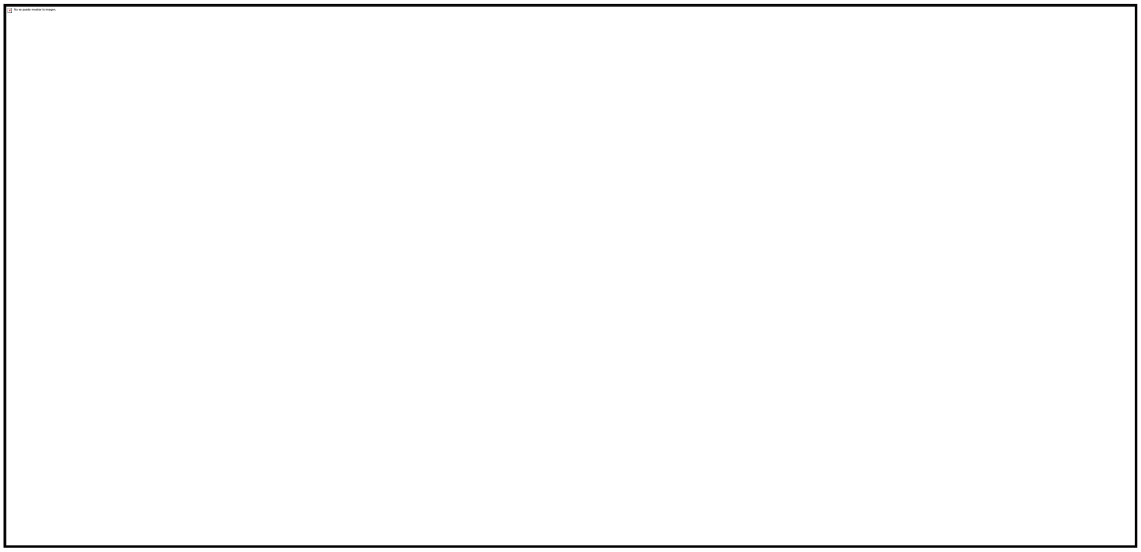
4. Activa la casilla "Muestra valores numéricos" y verifica tus resultados. (Para ver los valores de la parte real y la parte imaginaria, las casillas correspondientes deben estar activadas). ¿Qué tan buena fue tu estimación de las partes real e imaginaria del número? ¿Cómo pueden calcularse, dado que se conoce el módulo y argumento del número Z?

5. Activa de nuevo la casilla "Muestra retícula polar" y desactiva todas las demás. Selecciona ahora, un número complejo en cada uno de los cuadrantes, y en cada parte positiva y negativa de los ejes real e imaginario. Completa la siguiente tabla, calculando (no estimando), con al menos cuatro decimales, la parte real y la parte imaginaria de cada número seleccionado. Al final, verifica tus resultados activando las casillas adecuadas.

Número	**Módulo**	**Argumento**	**Parte Real**	**Parte Imaginaria**
Z_1				

6. Expresa de manera general la parte real a y la parte imaginaria b, de un número complejo cuyo módulo es r y su argumento es θ.

7. Veremos ahora el proceso inverso. En el siguiente *applet* se muestra un número complejo Z en un plano con coordenadas cartesianas.



8. Identifica la parte real e imaginaria del número mostrado y anota la información solicitada en la siguiente tabla.

Número	Parte Real	Parte Imaginaria
Z		

9. Activa la casilla "Muestra retícula polar" y trata de determinar visualmente el módulo y argumento del número mostrado. Si requieres ayuda, activa las casillas "Muestra Módulo" y "Muestra Argumento". Puedes quitar la cuadrícula con el botón derecho del Mouse haciendo click sobre el área gráfica. Organiza la información en la siguiente tabla.

Número	Parte Real	Parte Imaginaria	Módulo	Argumento
Z				

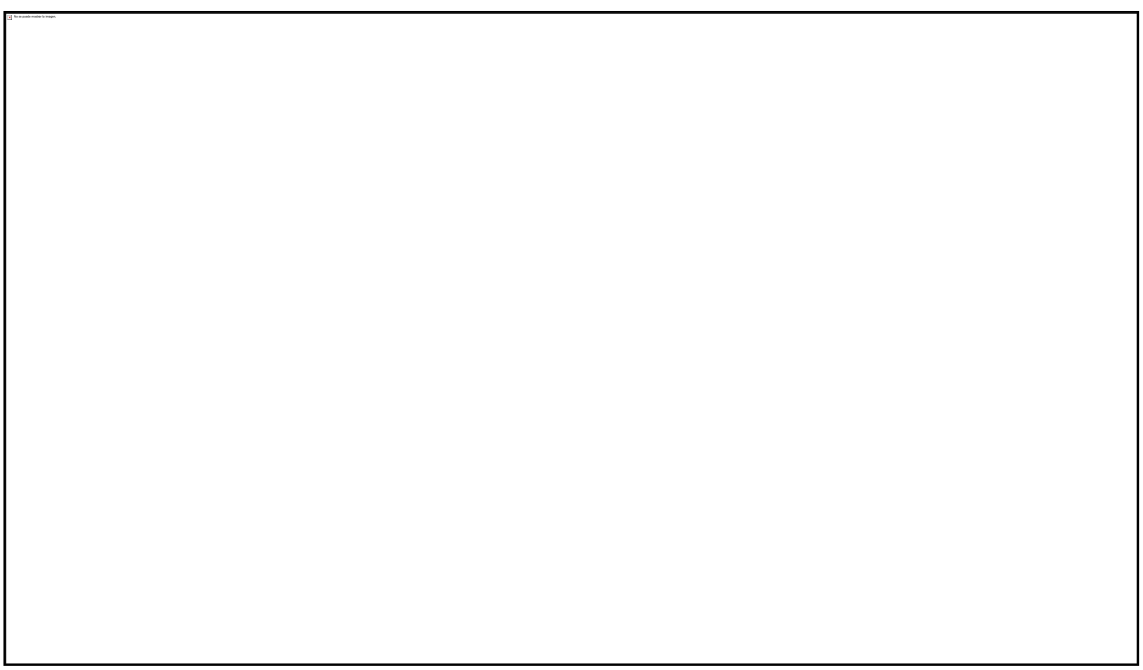
10. Activa la casilla "Muestra valores numéricos" y verifica tus resultados. (Para ver los valores del módulo y argumento, las casillas deben de estar activadas). ¿Qué tan buena fue tu estimación del módulo y argumento del número Z? ¿Cómo pueden calcularse, dado que se conoce la parte real e imaginaria del número Z?

11. Activa de nuevo la casilla "Muestra retícula polar" y desactiva todas las demás. Selecciona ahora, un número complejo en cada uno de los cuadrantes, y en cada parte positiva y negativa de los ejes real e imaginario. Completa la siguiente tabla, calculando (no estimando), de manera exacta o con al menos cuatro decimales, módulo y argumento de cada número seleccionado. Al final, verifica tus resultados activando las casillas adecuadas.

Número	Parte Real	Parte Imaginaria	Módulo	Argumento
Z_1				

12. Expresa de manera de general el módulo r y el argumento θ, de un número complejo cuya parte real es a y parte imaginaria b.

13. En el siguiente *applet* se muestra la manera de expresar la forma polar y la forma cartesiana de un número complejo. Explora para distintos números complejos y organiza la información en 1 tabla mostrada abajo. Selecciona uno de ellos para explicar detalladamente cómo se obtiene una forma de representación a partir de la otra.

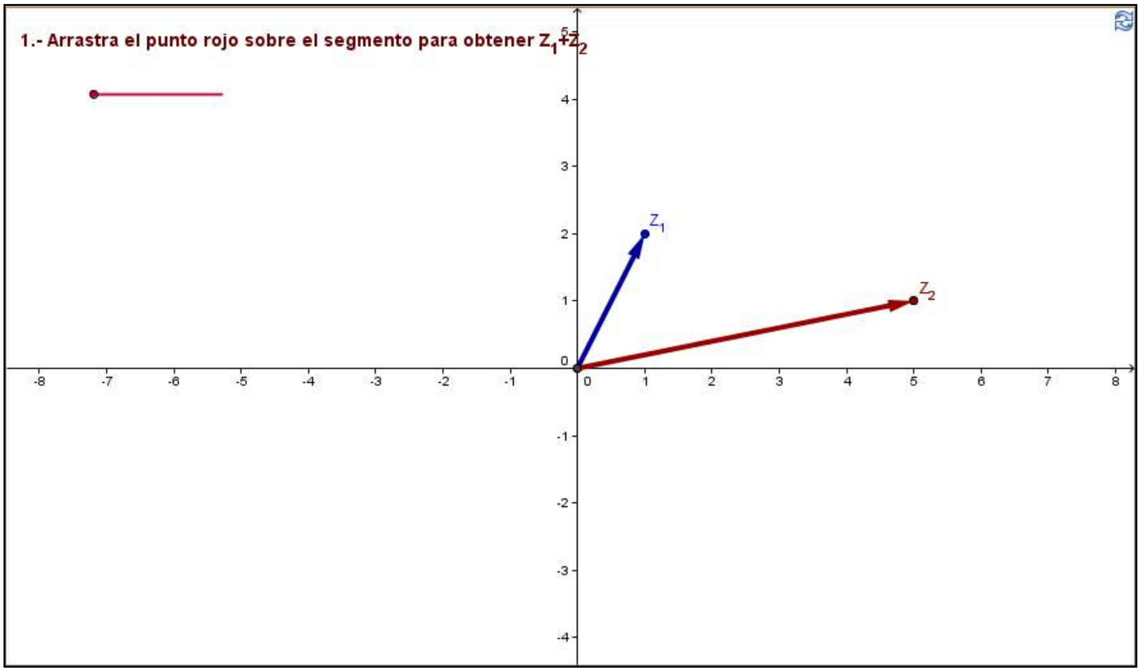


Número	Forma Cartesiana	Forma Polar	Forma Polar Abreviada
Z_1			

Operaciones con Números Complejos

1. Suma

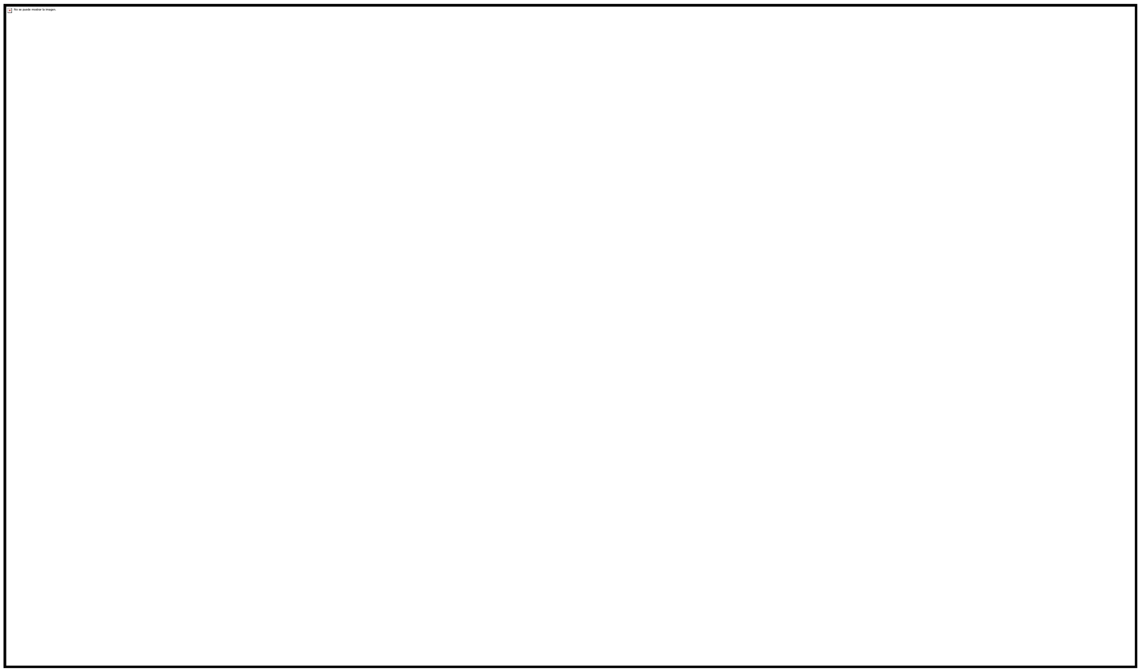
1. En el siguiente *applet* se muestran dos números complejos. Arrastra el punto sobre el segmento rojo para visualizar la suma $Z_1 + Z_2$.



2. Repite el proceso para distintos números complejos.

3. Describe cómo se efectúa gráficamente la suma de $Z_1 + Z_2$.

4. Con ayuda del siguiente *applet*, identifica el valor de la parte real y la parte imaginaria de los números complejos y anota lo solicitado en la tabla mostrada abajo.



Z_1		Z_2		$Z_1 + Z_2$	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

5. Repite el proceso para distintos números complejos y anota lo que se te pide en la tabla.

Z_1		Z_2		$Z_1 + Z_2$	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

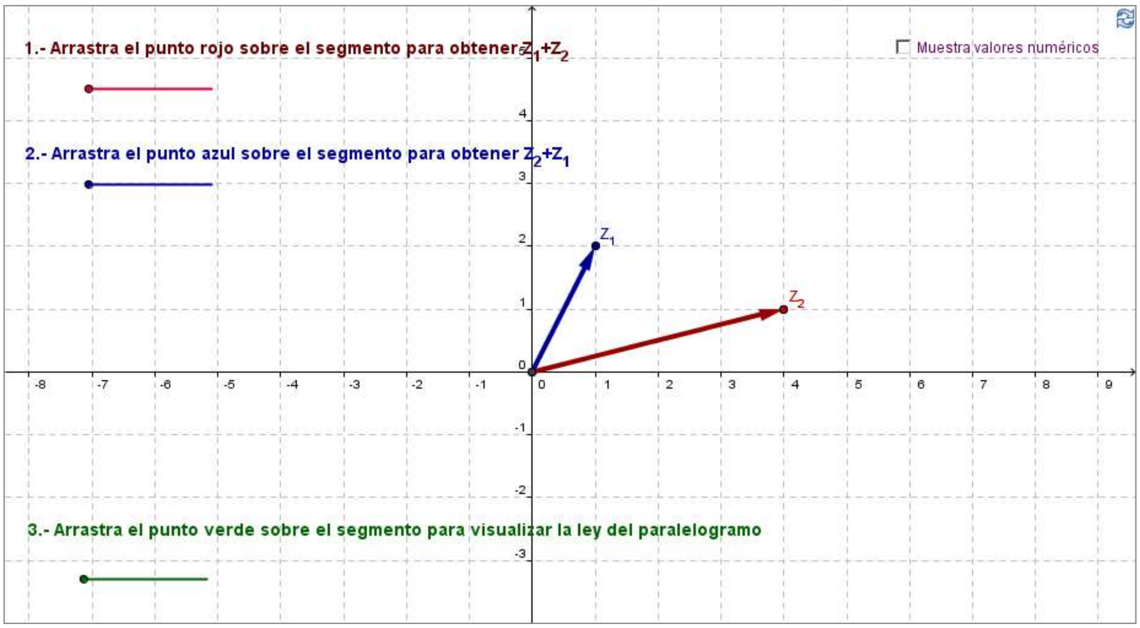
6. ¿Qué relación existe entre las partes reales de Z_1, Z_2 y la suma de $Z_1 + Z_2$?

7. ¿Qué relación existe entre las partes imaginarias de Z_1, Z_2 y la suma de $Z_1 + Z_2$?

8. Activa ahora la casilla “Muestra valores numéricos” y verifica tus respuestas a los puntos anteriores.

9. Describe de manera general cómo se efectúa la suma de números complejos dadas su parte real e imaginaria, y represéntala algebraicamente (Sugerencia: considera $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$).

10. Ahora, con ayuda del siguiente *applet* explora, para distintos números complejos, la suma de $Z_1 + Z_2$ y de $Z_2 + Z_1$ y completa la tabla con la información solicitada.



Z_1		Z_2		$Z_1 + Z_2$		$Z_2 + Z_1$	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

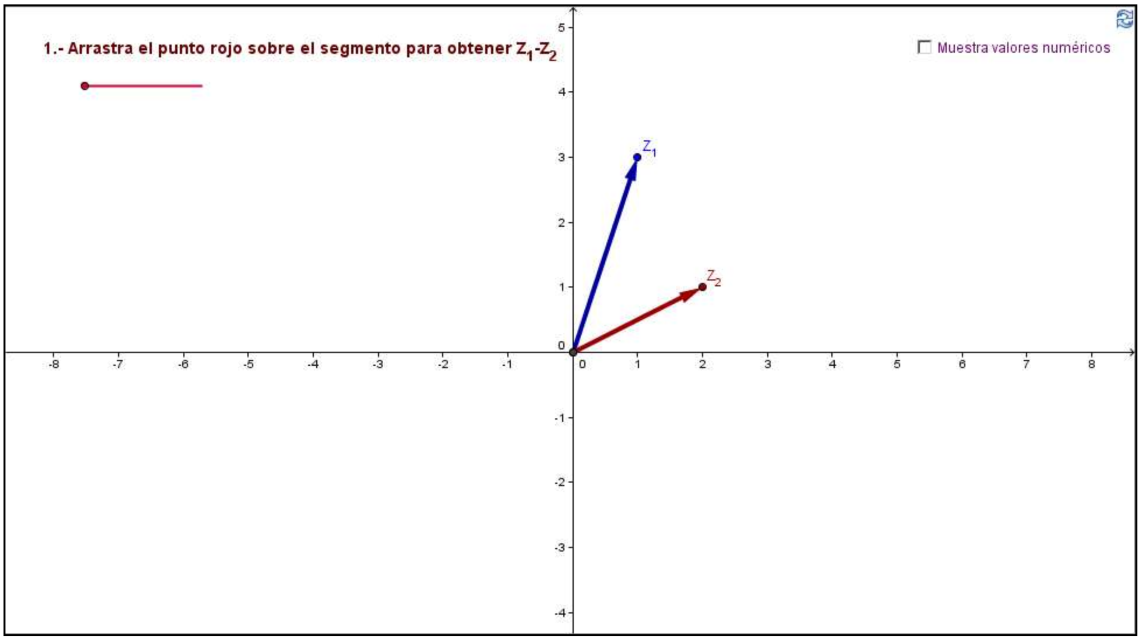
11. ¿Qué relación existe entre la suma $Z_1 + Z_2$ y la suma $Z_2 + Z_1$?

12. Ahora, arrastra el punto sobre el segmento verde y justifica el por qué la suma de números complejos puede obtenerse usando un paralelogramo.

Operaciones con Números Complejos

1. Resta

1. En el siguiente *applet* se muestran dos números complejos. Arrastra el punto sobre el segmento rojo para visualizar la resta $Z_1 - Z_2$.



2. Describe el proceso que se realiza en el *applet* mientras arrastras el punto rojo hasta que éste se encuentra en el punto medio del segmento.

3. Describe el proceso que se realiza en el *applet* mientras arrastras el punto sobre el resto del segmento.

4. Repite el proceso para distintos números complejos.

5. Describe cómo se efectúa gráficamente la resta $Z_1 - Z_2$.

6. Ahora, con ayuda del siguiente *applet*, identifica el valor de la parte real y la parte imaginaria de los números complejos y completa la información solicitada en la tabla mostrada abajo.

Z_1		Z_2		$Z_1 - Z_2$	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

7. Repite el proceso para distintos números complejos y completa la información solicitada en la siguiente tabla.

Z_1		Z_2		$Z_1 - Z_2$	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

8. ¿Qué relación existe entre las partes reales de Z_1, Z_2 y la resta $Z_1 - Z_2$?

9. ¿Qué relación existe entre las partes imaginarias de Z_1, Z_2 y la resta $Z_1 - Z_2$?

10. Activa ahora la casilla “Muestra valores numéricos” y verifica tus respuestas a los puntos anteriores.

11. Describe de manera general cómo se efectúa la resta de números complejos dadas su parte real e imaginaria, y represéntala algebraicamente.

12. ¿Qué relación existe entre la resta $Z_1 - Z_2$ y la resta $Z_2 - Z_1$? Justifica tu respuesta.

Operaciones con Números Complejos

13. Producto

1. En el siguiente *applet* se muestran dos números complejos. Arrastra el punto sobre el segmento verde para visualizar el producto $Z_1 \cdot Z_2$.

2. Describe el proceso que se realiza en el *applet* mientras arrastras el punto verde hasta que éste se encuentra en el punto medio del segmento.

3. Describe el proceso que se realiza en el *applet* mientras arrastras el punto sobre el resto del segmento. Expresa tu respuesta en términos de la relación que existe entre los triángulos mostrados.

4. Repite el proceso para distintos números complejos. No olvides considerar números complejos que se encuentren en cuadrantes distintos cada vez, e incluso sobre los ejes real e imaginario. También varía los módulos de modo que éstos sean mayores, menores o iguales a uno. Anota la información solicitada en la siguiente tabla.

$\boldsymbol{Z_1}$		$\boldsymbol{Z_2}$		$\boldsymbol{Z_1 \cdot Z_2}$	
Módulo	Argumento	Módulo	Argumento	Módulo	Argumento

5. ¿Qué relación existe entre los módulos de Z_1, Z_2 y el producto $Z_1 \cdot Z_2$?

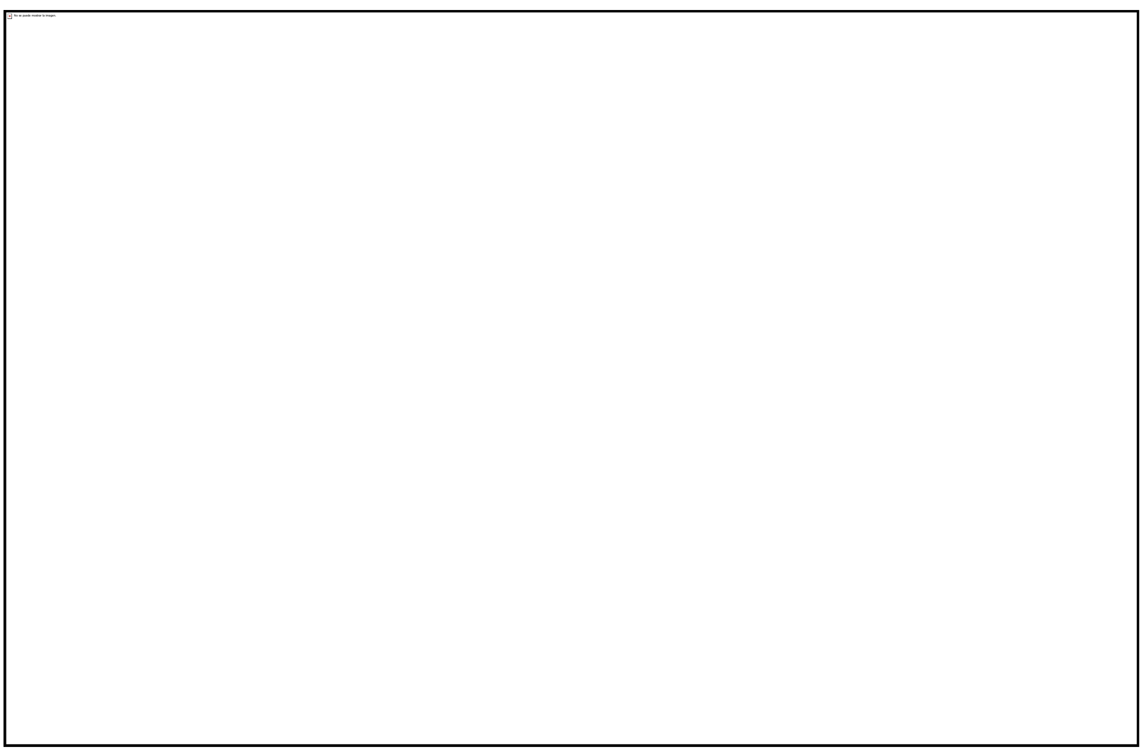
6. ¿Qué relación existe entre los argumentos de Z_1, Z_2 y el producto de $Z_1 \cdot Z_2$?

7. Describe cómo se efectúa gráficamente el producto $Z_1 \cdot Z_2$.

8. Activa la opción "Muestra valores numéricos" y verifica las observaciones hechas en las preguntas 5, 6 y 7. Comenta con tus compañeros.

9. ¿Qué relación existe entre el producto $Z_1 \cdot Z_2$ y el producto $Z_2 \cdot Z_1$? Justifica tu respuesta.

10. Ahora, analizaremos el producto en coordenadas cartesianas



11. Explora la multiplicación $Z_1 \cdot Z_2$, con Z_1 un real positivo y Z_2 arbitrario. Repite el proceso para distintos números complejos con las especificaciones indicadas y anota la información solicitada en la siguiente tabla.

Z_1		Z_2		$Z_1 \cdot Z_2$	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

1. ¿Qué relación existe entre las partes reales y las partes imaginarias de Z_1, Z_2 y las del producto $Z_1 \cdot Z_2$?

2. Después repite lo anterior, pero ahora con Z_1 un real negativo y anota la información solicitada en la siguiente tabla.

Z_1		Z_2		$Z_1 \cdot Z_2$	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

3. Anota tus observaciones en términos de las partes real e imaginaria de los números complejos utilizados.

4. Verifica tus observaciones activando la casilla “Muestra valores numéricos”. Si obtuviste una conclusión distinta a la que habías llegado, anótala. Recuerda desactivar la casilla una vez que hayas terminado de verificar tus observaciones.

5. Con base en lo anterior indica cuál es el procedimiento algebraico para la multiplicación de $Z_1 = a$ y $Z_2 = c + di$ donde a, c y d son números reales.

6. Ahora, explora la multiplicación de $Z_1 \cdot Z_2$ con Z_1 un imaginario puro y Z_2 arbitrario.

$\boldsymbol{Z_1}$		$\boldsymbol{Z_2}$		$\boldsymbol{Z_1 \cdot Z_2}$	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

1. ¿Qué relación existe entre las partes reales y las partes imaginarias de Z_1, Z_2 y las del producto $Z_1 \cdot Z_2$?

2. Verifica tus observaciones activando la casilla "Mostrar valores numéricos". Si obtuviste una conclusión distinta a la que habías llegado anótala.

3. Con base en lo anterior, indica cuál es el procedimiento algebraico para la multiplicación de $Z_1 = bi$ y $Z_2 = c + di$ donde b, c y d son números reales.

4. Ahora, explora la multiplicación de $Z_1 \cdot Z_2$ con Z_1 y Z_2 arbitrarios.

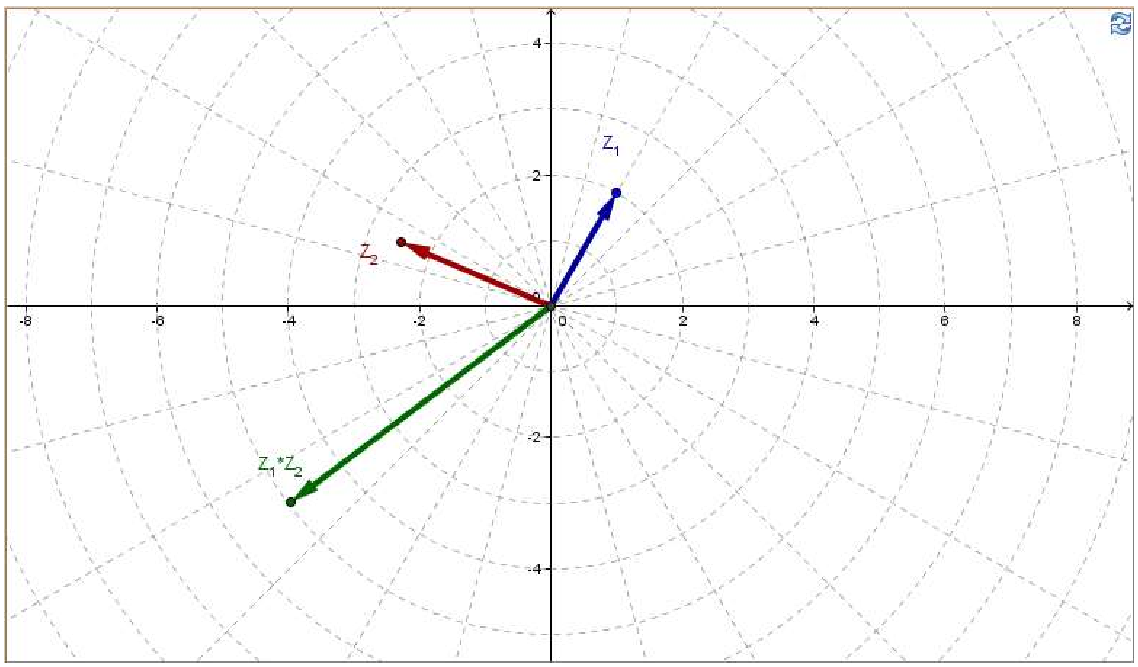
$\boldsymbol{Z_1}$		$\boldsymbol{Z_2}$		$\boldsymbol{Z_1 \cdot Z_2}$	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

5. En general, ¿Cuál es el procedimiento algebraico para la multiplicación de $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$ con a, b, c y d números reales? Explora, anota tus observaciones y compara con tus compañeros.

Operaciones con Números Complejos

6. Número Complejo Conjugado

1. Mueve el complejo Z_2 de tal manera que el producto $Z_1 \cdot Z_2$ sea un número real positivo.



1. ¿Cómo debe de ser Z_2 para que el producto $Z_1 \cdot Z_2$ sea un número real positivo?

2. ¿Qué relación existe el argumento de Z_1 y Z_2?

3. Ahora, haz que el módulo de Z_2 sea el mismo que el de Z_1 y consigue que el producto de $Z_1 \cdot Z_2$ sea un número real positivo. ¿Cuántos números encontraste que cumplan con estas condiciones?

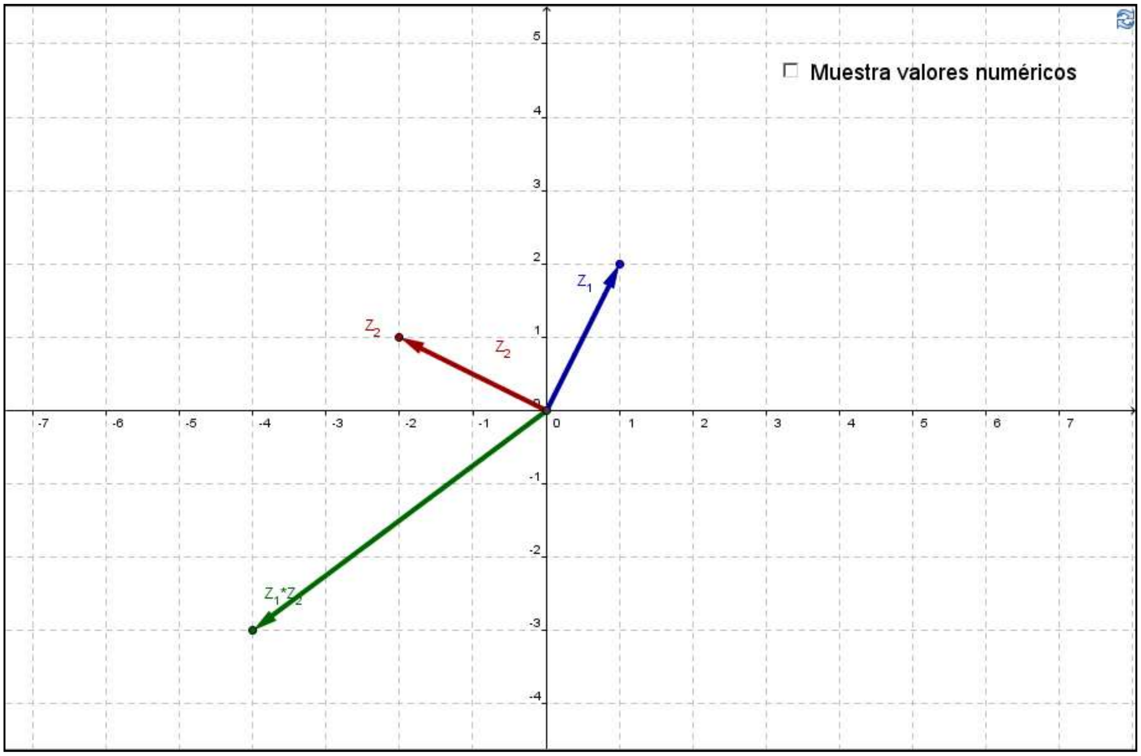
4. Repite las instrucciones del inciso c) cambiando Z_1, de modo que éste se encuentre en un cuadrante distinto cada vez, e incluso sobre los ejes real e imaginario. Anota la información que se te pide en la siguiente tabla.

$\boldsymbol{Z_1}$		$\boldsymbol{Z_2}$		$\boldsymbol{Z_1 \cdot Z_2}$	
Módulo	Argumento	Módulo	Argumento	Módulo	Argumento

5. Escribe de manera general, la relación que existe entre dos números complejos del mismo módulo cuyo producto es un número real positivo y comenta con tus compañeros lo que escribiste.

6. ¿Cómo es el módulo del producto $Z_1 \cdot Z_2$ si Z_1 y Z_2 cumplen las condiciones del punto anterior?

7. Repite la actividad del inciso c), considerando ahora que los números complejos están dados en coordenadas cartesianas. Si los módulos de Z_1 y Z_2 son iguales…



Z_1		Z_2		$Z_1 \cdot Z_2$	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

1. ¿Qué relación existe entre la parte real de los números Z_1 y Z_2?

2. ¿Qué relación existe entre la parte imaginaria de los números Z_1 y Z_2?

3. Activa la casilla "Muestra valores numéricos" y compara con las respuestas dadas en el punto anterior.

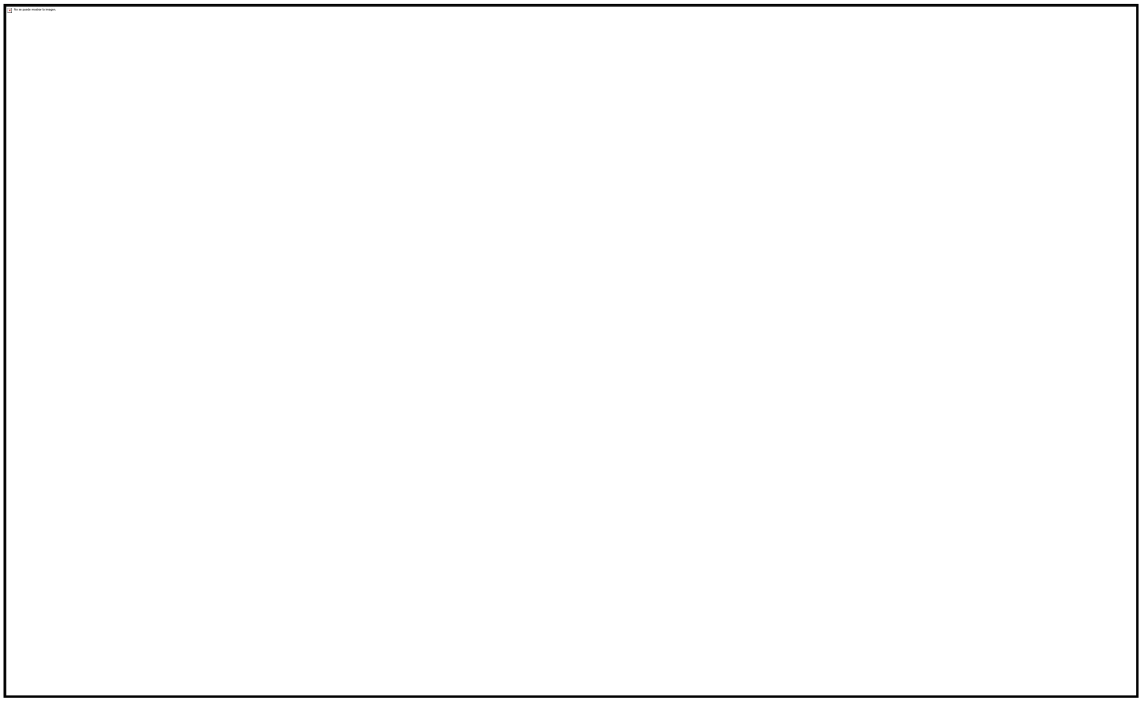
4. Investiga la definición de número complejo conjugado y comenta con tus compañeros su relación con la actividad que acabas de realizar.

5. Investiga propiedades de los números complejos conjugados y resalta su importancia.

Operaciones con Números Complejos

6. División

1. En el siguiente *applet* se muestran dos números complejos. Arrastra el punto sobre el segmento verde para visualizar el cociente Z_1/Z_2.



2. Describe el proceso que se realiza en el *applet* mientras arrastras el punto verde hasta que éste se encuentre en el punto medio del segmento.

3. Describe el proceso que se realiza en el *applet* mientras arrastras el punto sobre el resto del segmento. Expresa tu respuesta en términos de la relación que existe entre los triángulos mostrados.

4. Repite el proceso para distintos números complejos. No olvides considerar números complejos que se encuentren en cuadrantes distintos cada vez, o incluso sobre los ejes real e imaginario. También varía los módulos de modo que estos sean mayores, menores o iguales a uno.

Z_1		Z_2		Z_1/Z_2	
Módulo	Argumento	Módulo	Argumento	Módulo	Argumento

5. ¿Qué relación existe entre los módulos de Z_1, Z_2 y el producto Z_1/Z_2?

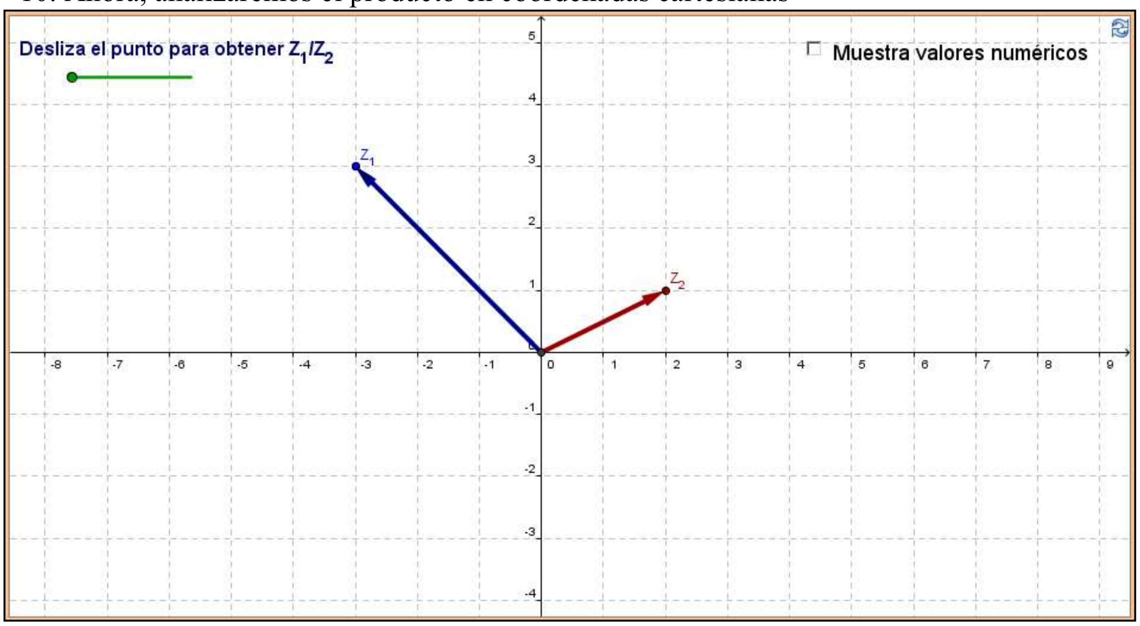
6. ¿Qué relación existe entre los argumentos de Z_1, Z_2 y el producto de Z_1/Z_2?

7. Describe cómo se efectúa gráficamente el producto Z_1/Z_2.

8. Activa la opción "Muestra valores numéricos" y verifica las observaciones hechas en las preguntas 5, 6 y 7. Comenta con tus compañeros.

9. ¿Qué relación existe entre el cociente Z_1/Z_2 y el cociente Z_2/Z_1? Justifica tu respuesta.

10. Ahora, analizaremos el producto en coordenadas cartesianas



11. Explora la multiplicación Z_1/Z_2, con Z_1 arbitrario y Z_2 un número real positivo. Repite el proceso para distintos números complejos con las especificaciones indicadas y anota la información solicitada en la siguiente tabla.

Z_1		Z_2		Z_1/Z_2	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

12. ¿Qué relación existe entre las partes reales y las partes imaginarias de Z_1, Z_2 y las del cociente Z_1/Z_2?

13. Después, repite lo anterior pero ahora con Z_2 un real negativo y anota lo que se te solicita en la siguiente tabla.

$\boldsymbol{Z_1}$		$\boldsymbol{Z_2}$		$\boldsymbol{Z_1/Z_2}$	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

14. Anota tus observaciones en términos de las partes real e imaginaria de los números complejos utilizados.

15. Verifica tus observaciones activando la casilla "Muestra valores numéricos". Si obtuviste una conclusión distinta a la que habías llegado, anótala. Recuerda desactivar la casilla una vez que hayas terminado de verificar tus observaciones.

16. Con base en lo anterior indica cuál es el procedimiento algebraico para la división de $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c$ donde a, b y c son números reales.

17. Ahora, explora el cociente de Z_1/Z_2 con Z_1 arbitrario y Z_2 un imaginario puro.

$\boldsymbol{Z_1}$		$\boldsymbol{Z_2}$		$\boldsymbol{Z_1/Z_2}$	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

1. ¿Qué relación existe entre las partes reales y las partes imaginarias de Z_1, Z_2 y las del cociente Z_1/Z_2?

2. Verifica tus observaciones activando la casilla "Mostrar valores numéricos". Si obtuviste una conclusión distinta a la que habías llegado anótala.

3. Con base en lo anterior, indica cuál es el procedimiento algebraico para la división de $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = di$ donde a, b y d son números reales.

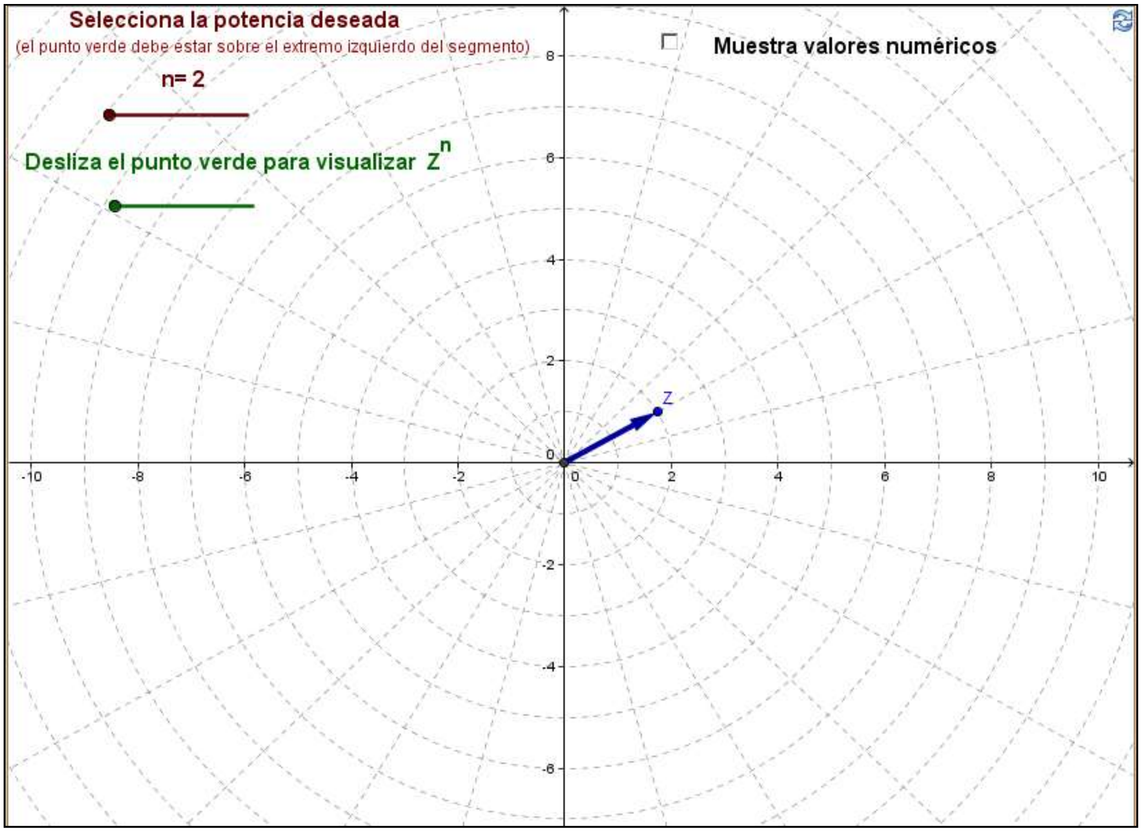
4. Como puedes ver, al dividir un número complejo arbitrario entre un número real o un imaginario puro podemos hacer algunas observaciones e incluso indicar un procedimiento algebraico para hacerlo. Sin embargo, cuando queremos dividir dos números complejos arbitrarios resulta ser complicado el visualizar una forma algebraica para hacerlo, por lo tanto, debemos buscar la manera de que al dividir dos números complejos arbitrarios nuestro denominador sea un número real y así poder efectuar la división. ¿Cómo podemos hacer esto? ¿Cuál es el número complejo que al multiplicarlo por otro número complejo dado, nos da un número real?

5. En general, ¿cuál es el procedimiento algebraico para la división de $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$ con a, b, c y d números reales? Explora, anota tus observaciones y compara con tus compañeros.

Operaciones con Números Complejos

6. Potencias

1. En el siguiente *applet* se muestra un número complejo Z.



2. Selecciona la potencia $n = 2$ y desliza el punto verde para visualizar Z^2. Anota lo que se te solicita en la siguiente tabla.

Z		Z^2	
Módulo	Argumento	Módulo	Argumento

3. Explora para distintos valores de Z y anota lo que se solicita en la siguiente tabla.

Z		Z^2	
Módulo	Argumento	Módulo	Argumento

1. ¿Qué relación existe entre el módulo de Z y el módulo de Z^2?

2. ¿Qué relación existe entre el argumento de Z y el argumento de Z^2?

3. Activa la opción "Muestra valores numéricos" y verifica tus respuestas al punto anterior. Comenta con tus compañeros.

4. Repite la exploración anterior para $n = 3, 4, 5, 6$. Completa las siguientes tablas con la información solicitada y anota lo que observas en términos del módulo y argumento del complejo Z y del complejo Z^n.

Z		Z^3	
Módulo	Argumento	Módulo	Argumento

Anota tus observaciones en términos del módulo y argumento del complejo Z y del complejo Z^3:

Z		Z^4	
Módulo	Argumento	Módulo	Argumento

Anota tus observaciones en términos del módulo y argumento del complejo Z y del complejo Z^4:

Z		Z^5	
Módulo	Argumento	Módulo	Argumento

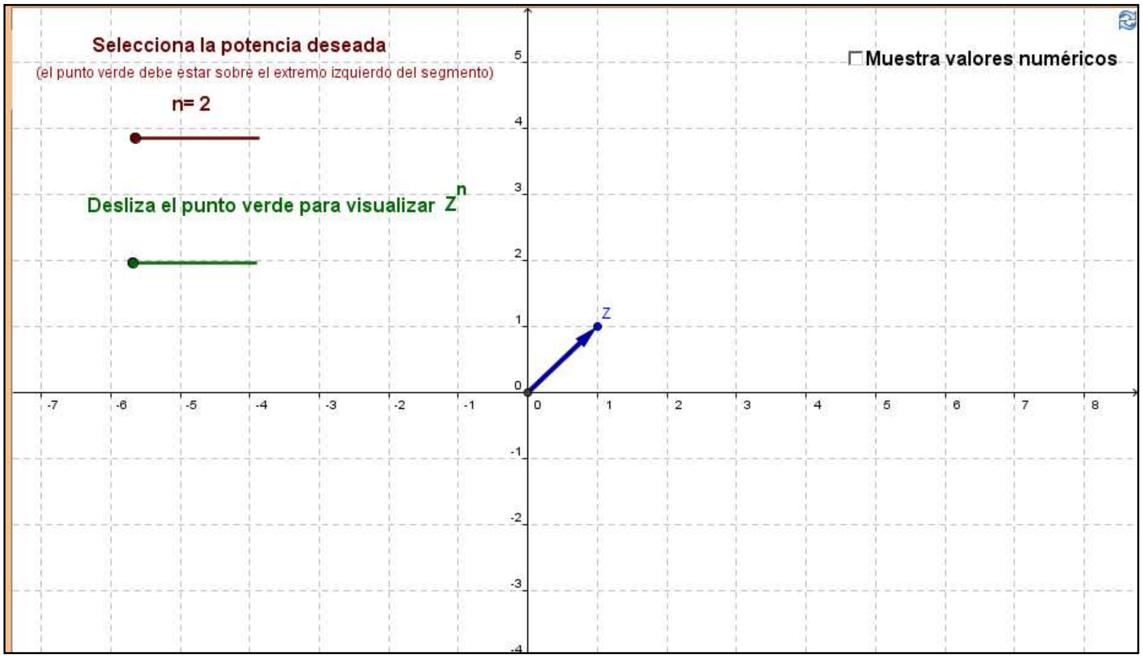
Anota tus observaciones en términos del módulo y argumento del complejo Z y del complejo Z^5:

Z		Z^6	
Módulo	Argumento	Módulo	Argumento

Anota tus observaciones en términos del módulo y argumento del complejo Z y del complejo Z^6:

5. Elabora una conclusión sobre el procedimiento general para elevar un número complejo a determinada potencia en términos de módulo y argumento.

6. En el siguiente *applet* se muestra un número complejo Z en coordenadas cartesianas.



7. Selecciona la potencia $n = 2$ y desliza el punto verde a lo largo del segmento para visualizar Z^2. Anota en lo que se te solicita en la siguiente tabla.

Z		Z^2	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

8. Explora para distintos valores de Z y anota lo que se te pide en la siguiente tabla.

Z		Z^2	
Parte Real	Parte Imaginaria	Parte Real	Parte Imaginaria

9. ¿Cómo sería el procedimiento algebraico para obtener Z^2, donde Z es de la forma $a + bi$ con a y b número reales? (Sugerencia: Recuerda el procedimiento algebraico para multiplicar dos números complejos arbitrarios en forma cartesiana).

10. Activa la opción “Muestra valores numéricos” y verifica tus respuestas al punto anterior. Comenta con tus compañeros.

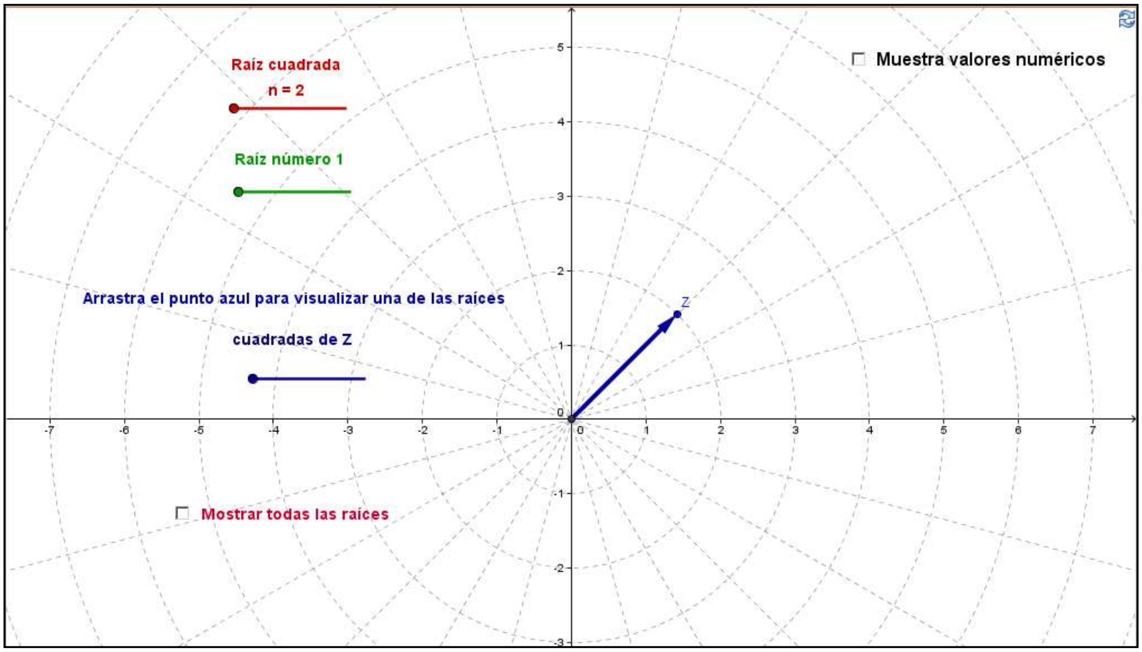
11. ¿Cómo sería para Z^3?

12. ¿Cómo crees que sea más fácil de calcular Z^n, en su forma polar o cartesiana? Comenta con tus compañeros y anota tus conclusiones.

Operaciones con Números Complejos

13. Raíces

1. En el siguiente *applet* se muestra un número complejo Z.



2. Selecciona raíz cuadrada $(n = 2)$ y desliza el punto sobre el segmento azul para visualizar la raíz cuadrada de Z. Realiza este procedimiento para las diferentes raíces existentes (deslizador verde) y anota la información solicitada en la siguiente tabla.

1. ¿Cuántas raíces diferentes encontraste? ¿Cuáles son?

2. Comprueba que estos números con raíces del número Z y anota tu procedimiento para lograrlo.

3. Ahora, activa la opción “Mostrar todas las raíces” y responde lo siguiente:

1. ¿Qué relación existe entre los módulos de las raíces?

2. ¿Qué relación existe entre los argumentos de las raíces?

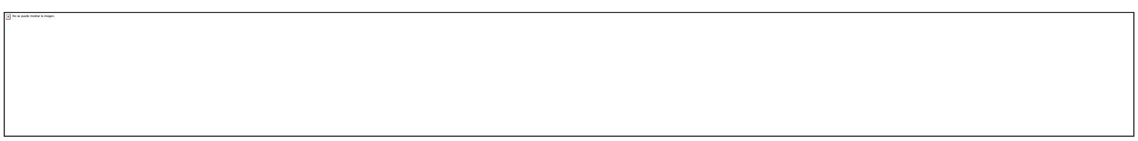
3. Activa la casilla “Mostrar valores numéricos” y verifica tus respuestas.

4. Realiza esta secuencia para distintos números complejos (prueba con uno en cada cuadrante y sobre los ejes real e imaginario) y anota lo que se te solicita en la siguiente tabla.

Z_1		Raíz número 1		Raíz número 2	
Módulo	Argumento	Módulo	Argumento	Módulo	Argumento

5. Con base en lo anterior, escribe de manera general un procedimiento para obtener la raíz cuadrada de cualquier número complejo Z.

6. Selecciona raíz cuadrada $(n = 3)$ y desliza el punto sobre el segmento azul para visualizar la raíz cuadrada de Z. Realiza este procedimiento para las diferentes raíces existentes (deslizador verde) y anota la información solicitada en la siguiente tabla.



1. ¿Cuántas raíces diferentes encontraste? ¿Cuáles son?

2. Comprueba que estos números con raíces del número Z y anota tu procedimiento para lograrlo.

3. Ahora, activa la opción “Mostrar todas las raíces” y responde lo siguiente:

4. ¿Qué relación existe entre los módulos de las raíces?

5. ¿Qué relación existe entre los argumentos de las raíces?

6. Activa la casilla "Mostrar valores numéricos" y verifica tus respuestas.

7. Realiza esta secuencia para distintos números complejos (prueba con uno en cada cuadrante y sobre los ejes real e imaginario) y anota lo que se te solicita en la siguiente tabla.

Z_1		Raíz número 1		Raíz número 2		Raíz número 3	
Módulo	Argumento	Módulo	Argumento	Módulo	Argumento	Módulo	Argumento

8. Considerando lo anterior, escribe de manera general un procedimiento para obtener la raíz cúbica de cualquier número complejo Z.

9. Repite la exploración para $n = 4, 5\ y\ 6$ y determina una forma general para obtener las raíces n-ésimas de cualquier número complejo Z dado en forma polar.

ANEXO 2

Orientaciones para el Docente

Introducción

El diseño de estas orientaciones para el docente surge con la intención de aportar sugerencias para el momento de implementar la secuencia de actividades, ya que éstas no son autosuficientes y requieren de un conductor que contemple los objetivos pretendidos en cada hoja de trabajo.

Consideraciones generales para la implementación de la secuencia de actividades

Medios de enseñanza

(modalidad de enseñanza y recursos tecnológicos)

Modalidad de Enseñanza

1. La enseñanza se centra en la actividad autónoma del estudiante, a través de la exploración de applets de geometría dinámica. La exploración se guía con una serie de cuestionamientos. Tanto los applets, como la guía de la exploración, se integran en hojas de trabajo que se encuentran disponibles en línea.

Recursos Tecnológicos

1. Papel y lápiz
2. Calculadora
3. Computadora con conexión a internet

Organización del trabajo en el aula

1. Se presenta la actividad en línea, la cual se encuentra en la dirección www.mat.uson.mx/proyectoalgebra/Complejos y se señala el tiempo que tendrán para realizar dicha actividad.
2. Se indica a los estudiantes trabajar en equipo de dos a tres personas por computadora, promoviendo el debate de ideas, conjeturas y resultados entre los integrantes del equipo.
3. El docente estará al pendiente de lo que realicen los estudiantes, apoyando en dudas particulares sobre el contenido matemático y/o de carácter técnico con el software.
4. Una vez que los estudiantes realicen la actividad correspondiente, se entregarán los resultados al profesor.
5. Se discutirán los diferentes resultados obtenidos en las hojas de trabajo de manera grupal, y el docente conducirá la discusión.
6. El docente cuidará que los conocimientos (lenguaje, representaciones simbólicas, conceptos, procedimientos, propiedades) que surjan durante la actividad sean acordes a lo que marca la institución.

Nombre de la actividad: Representación gráfica de números reales

Tiempo estimado: 1 hora 20 minutos.

Prerrequisitos

1. Sistemas numéricos.
2. Operaciones aritméticas.

Contenidos disciplinares

1. Números naturales, enteros, racionales e irracionales.
2. Sistema de los números reales.
3. Operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíz cuadrada).

Objetivos

General

1. Identificar los diferentes sistemas numéricos contenidos en el sistema de los números reales, es decir, los naturales, enteros, racionales e irracionales. Además, establecer la necesidad de extender cada sistema.

Específicos

1. Representar gráficamente algunos números reales en la recta real.
2. Establecer la necesidad de extender cada uno de los sistemas numéricos abordados, mediante la validación de la propiedad de cerradura de operaciones como la suma, resta, producto, división y raíz cuadrada.

Recomendaciones

En esta actividad, se recomienda hacer énfasis en las operaciones aritméticas que no cumplen con la propiedad de cerradura en cada uno de los sistemas numéricos y, de esta manera, justificar la necesidad de extender dichos sistemas.

Si surgen problemas al graficar $\sqrt{2}$ con las herramientas de GeoGebra, en el punto 11 de la actividad, indicar que la representación gráfica puede hacerse en papel, ya que el estudiante pudiera tener dificultades con las herramientas de dicho software.

Uso de los applets

Se hace uso de dos applets, el primero de ellos está diseñado para que el estudiante identifique números naturales, enteros y racionales en la recta real. Mientras, que el segundo applet pretende que el estudiante lleve a cabo una construcción geométrica para ubicar el número $\sqrt{2}$ en la recta real lo cual involucra el uso de las herramientas de GeoGebra.

Actividades Complementarias.

Solicitar la actividad en línea "Representación gráfica de números reales" que se encuentra en la dirección electrónica maple.uson.mx/mapleta

Sugerencia de evaluación

Revisión de las hojas de trabajo, la discusión grupal, así como el trabajo registrado en la actividad complementaria.

Nombre de la actividad: Representación gráfica de la unidad imaginaria

Tiempo estimado: 1 hora 20 minutos.

Prerrequisitos

3. Operaciones aritméticas.
4. Conceptos: segmento dirigido, longitud y ángulo.
5. Resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma $Z^2 = a^2$, donde a es un número real.

Contenidos disciplinares

6. Interpretación gráfica de las propiedades de la multiplicación de números reales.
7. Resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma $Z^2 = -1$.
8. La unidad imaginaria.

Objetivos

General

9. Determinar la representación gráfica de la unidad imaginaria a través de la resolución gráfica de ecuaciones cuadráticas, considerando las propiedades del módulo y argumento de un producto de números reales.

Específicos

10. Determinar módulo y argumento de un número real representado mediante un segmento dirigido.
11. Obtener módulo y argumento del producto de números reales, a partir de su representación gráfica.
12. Establecer las relaciones gráficas y numéricas que existen entre el módulo y argumento para el producto de números reales con el módulo y argumento de los factores.
13. Representar gráfica y numéricamente a los números reales, considerando su módulo y argumento.
14. Resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $Z^2 = -a^2$, donde es un número real mediante la exploración gráfica.

15. Determinar módulo y argumento de la unidad imaginaria considerando que es solución de la ecuación $Z^2 = -1$.

16. Representar gráficamente a la unidad imaginaria.

Recomendaciones

Antes de iniciar la actividad, se recomienda enfatizar las características del módulo y argumento de un número real. Particularmente, mencionar que el módulo siempre será una cantidad real no negativa, y sobre el argumento señalar el cómo se medirá.

En esta actividad se introduce la notación para la unidad imaginaria, por lo cual se sugiere una discusión grupal sobre las respuestas (particularmente en los puntos del 19 al 23), haciendo énfasis en las características gráficas de las soluciones de la ecuación cuadrática $Z^2 = -1$, mismas que pueden ser representadas gráficamente (en el applet del punto 15). Además, enfatizar las características que tendrá i (módulo 1, argumento 90 °) por convención matemática.

Uso de los applets

En esta actividad se utilizan cuatro applets, el primero de ellos tiene por objetivo que el estudiante instituya una representación de números reales en la recta real mediante segmentos dirigidos identificando, a la vez, el módulo y argumento de los mismos. El segundo applet promueve la multiplicación de números reales mediante segmentos dirigidos, donde se espera que el estudiante establezca las relaciones entre los módulos y argumentos de los factores con el módulo y argumento del producto. El tercer applet tiene por objetivo mostrar que al elevar un número real al cuadrado su resultado siempre será positivo. Por último, el cuarto applet permite dar solución a la situación-problema $z^2 = -1$, ya que en éste los resultados no se limitan a la recta real, sino que pueden salir de ella, esperando como resultado la ubicación geométrica de la unidad imaginaria.

Actividades Complementarias

Solicitar la actividad en línea “La unidad imaginaria” que se encuentra en la dirección maple.uson.mx/mapleta

Sugerencia de evaluación

Revisión de las hojas de trabajo, la discusión grupal, así como el trabajo registrado en la actividad complementaria.

Nombre de la actividad: Representación gráfica de números imaginarios

Tiempo estimado: 30 minutos

Prerrequisitos

17. Módulo y argumento.
1. Resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma $Z^2 = -1 \ y \ Z^2 = a^2$ donde a es un número real.

Contenidos disciplinares

2. Resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma $Z^2 = -a^2$, donde a es un número real.
3. Números imaginarios.

Objetivos

General

4. Identificar a los números imaginarios a través de su representación gráfica y de la solución de ecuaciones cuadráticas del tipo $Z^2 = -a^2$, donde a es un número real.

Específicos

5. Resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $Z^2 = -a^2$, donde a es un número real, mediante la exploración en el software.
6. Justificar la validez de las soluciones complejas no reales de las ecuaciones.
7. Representar gráficamente a los números imaginarios

Recomendaciones

Una vez que se discutan las soluciones correspondientes a cada ecuación presentada, indicar el nuevo eje de números (eje de números imaginarios) que surge a raíz de la necesidad de dar solución a todas las ecuaciones de tipo $Z^2 = -a^2$, donde a es un número real.

Uso del applet

En esta actividad se utiliza un applet, el cual se diseñó para que el estudiante identifique el eje de números imaginarios por medio de la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Actividades Complementarias

Se estarán considerando aspectos de esta actividad más adelante en la dirección maple.uson.mx/mapleta

Sugerencia de evaluación de la actividad

Esta actividad se evaluará con las hojas de trabajo entregadas por los estudiantes y la discusión en clase.

Nombre de la actividad: Representación gráfica de números complejos. Forma Polar.

Tiempo estimado: 1 hora.

Prerrequisitos

8. Módulo y argumento de números reales y de números imaginarios.
9. Representación gráfica de segmentos dirigidos

Contenidos disciplinares

10. Representación polar de los números complejos.

Objetivos

General

11. Representar gráfica y numéricamente a los números complejos, considerando su módulo y argumento.

Específicos

12. Identificar módulo y argumento de un número complejo representado gráficamente.

13. Realizar el procedimiento inverso, graficando algunos números complejos, dado su módulo y argumento.

Recomendaciones

Para representar gráficamente un número complejos en el applet (punto 2), especificar al estudiante dónde se encuentra la herramienta "vector entre dos puntos", en caso de ser necesario.

Una vez realizada la actividad, se sugiere discutir los diferentes resultados obtenidos orientando la discusión para que los estudiantes identifiquen la representación gráfica y numérica de un número complejo expresado en forma polar.

Uso de los applets

En esta actividad se utilizan dos applets, en el primero se permite al estudiante visualizar la forma de representación polar de distintos números complejos, con el fin de que identifique módulo y argumento de los mismos. El segundo applet está diseñado para que el estudiante grafique en la retícula polar distintos números complejos dado su módulo y argumento, haciendo uso de las herramientas de GeoGebra.

Actividades Complementarias.

Solicitar la actividad en línea “Formas de Representación de números reales”, después de realizar la actividad “Forma Cartesina” y “Conversiones”, que se encuentra en la dirección electrónica maple.uson.mx/mapleta

Sugerencia de evaluación de la actividad

Revisión de las hojas de trabajo, la discusión grupal, así como el trabajo registrado en la actividad complementaria.

Nombre de la actividad: Representación gráfica de números complejos. Forma Cartesiana.

Tiempo estimado: 1 hora.

Prerrequisitos

14. Representación gráfica y numérica de la unidad imaginaria.
15. Representación gráfica de los números reales mediante segmentos dirigidos.

Contenidos disciplinares

16. Interpretación gráfica de la suma de números reales.
17. Interpretación gráfica de un número complejo como la suma de un número real y un número imaginario.
18. Representación cartesiana de los números complejos.

Objetivos

General

19. Identificar gráfica y numéricamente a los números complejos, considerando su parte real y su parte imaginaria.

Específicos

20. Representar gráficamente algunos números imaginarios puros, considerados como la multiplicación de un número real por la unidad imaginaria.

21. Extender la interpretación gráfica de la suma de números reales, hacia la suma de un imaginario puro con un número real.
22. Identificar la parte real y la parte imaginaria de un número complejo representado gráficamente.
23. Representar numérica y algebraicamente un número complejo en forma cartesiana.
24. Realizar el procedimiento inverso, graficando un número complejo dada su parte real y su parte imaginaria.

Recomendaciones

Se recomienda solicitar a los estudiantes que verifiquen las propiedades del módulo y argumento de un producto, ahora que los factores son un número real y la unidad imaginaria (Punto 2, inciso a y b). Además, resaltar las características de los números imaginarios puros, que se desprenden de la multiplicación de un número real por la unidad imaginaria.

Los estudiantes deberán extender las propiedades de suma de los números reales hacia la suma de un número imaginario puro con un número real (Puntos 5, 6 y 7), para lo cual se recomienda enfatizar las características gráficas que se cumplen en la suma de números reales.

Una vez realizada la actividad de manera grupal, institucionalizar entre los estudiantes que la representación cartesiana de un número complejo se expresa algebraicamente de la siguiente manera: $Z = a + bi$, donde a es la parte real y b la parte imaginaria.

Uso de los applets

En esta actividad se hace uso de seis applets, el primero de ellos tiene por objetivo la visualización del producto de un número real por la unidad imaginaria i, es decir, la obtención de los números imaginarios puros, esperando que el estudiante establezca la relación que existe entre los módulos y argumentos de los factores con el módulo y argumento del producto. En el segundo applet se le solicita al estudiante que ubique algunos números imaginarios puros, utilizando herramientas del software GeoGebra. El tercero se usa para visualizar la suma de dos números reales representados mediante segmentos dirigidos, con el fin de extender las propiedades de dicha operación a la suma de números complejos. El cuarto applet tiene por objetivo que el estudiante explore la suma de un número real con un número imaginario puro, obteniendo como resultado a los números complejos en el plano expresados en su forma de representación cartesiana. El quinto applet se utiliza para que el estudiante visualice distintos números complejos representados en forma cartesiana e identifique su parte real y su parte imaginaria. Por último, el sexto applet está diseñado para que el estudiante represente gráficamente distintos números complejos en el plano, haciendo uso de herramientas del software GeoGebra.

Actividades Complementarias

Se estarán considerando aspectos de esta actividad más adelante en la dirección maple.uson.mx/mapleta

Sugerencia de evaluación de la actividad

Esta actividad se evaluará con las hojas de trabajo entregadas por los estudiantes y la discusión que se genere de manera grupal.

Nombre de la actividad: Representación gráfica de números complejos. Conversiones.

Tiempo estimado: 2 horas.

Prerrequisitos

25. Representación polar y cartesiana de números complejos.
26. Razones Trigonométricas.
27. Teorema de Pitágoras.

Contenidos disciplinares

28. Interpretación gráfica y numérica de un número complejo representado en forma polar y cartesiana.
29. Conversión de un número complejo en su representación cartesiana a polar y viceversa.

Objetivos

General

30. Relacionar la representación polar y la representación cartesiana de un número complejo, identificándolas y realizando conversiones de una a otra.

Específicos

31. Estimar el valor numérico de la parte real y la parte imaginaria de un número complejo, dada su representación gráfica en la retícula polar.
32. Calcular la parte real y la parte imaginaria de un número complejo dada su representación polar, haciendo uso del teorema de Pitágoras y de algunas razones trigonométricas.
33. Expresar algebraicamente cómo pasar de la representación polar de un número complejo a la representación cartesiana.
34. Estimar el valor numérico del módulo y el argumento de un número complejo, dada su representación gráfica en coordenadas cartesianas.
35. Calcular el módulo y el argumento de un número complejo dada su representación cartesiana, haciendo uso de algunas razones trigonométricas.

36. Expresar algebraicamente cómo pasar de la representación cartesiana de un número complejo a la representación polar.

Recomendaciones

En esta actividad a los estudiantes se les solicita calcular (no estimar) la parte real y la parte imaginaria de un número complejo (punto 5); motivo por el cual, se recomienda hacer énfasis en la representación gráfica de dicho número y las propiedades geométricas que presenta, orientando las discusión grupal hacia el uso de las razones trigonométricas. (La misma sugerencia se hace en el procedimiento inverso, es decir, cuando se solicita el cálculo del módulo y argumento a partir de la representación cartesiana de un número complejo, orientando la respuesta hacia el uso del teorema de Pitágoras y de razones trigonométricas).

Por último, se sugiere generalizar, de manera grupal, las representaciones algebraicas correspondientes, que permitan transitar entre ambas representaciones de los números complejos (cartesiana y polar).

Uso de los applets

En esta actividad se usan tres applets, en el primero de ellos se le brinda al estudiante la oportunidad de visualizar un número complejo en su forma de representación polar, al mismo tiempo que puede consultar su parte real y parte imaginaria. Lo anterior, es con el propósito de cuestionar al estudiante cómo obtener la parte real y la parte imaginaria de un número complejo dada su forma de representación polar, es decir, dado su módulo y argumento. El segundo applet está diseñado para efectuar el procedimiento inverso. Por último, el tercer applet permite explorar y visualizar distintos números complejos con sus dos formas de representación (polar y cartesiana).

Actividades Complementarias

Realizar la actividad en línea "Formas de representación de números complejos" que se encuentra en la dirección maple.uson.mx/mapleta. Dicha actividad engloba ambas formas de representación de los números complejos, es decir, la representación cartesiana y polar.

Sugerencia de evaluación de la actividad

Esta actividad se evaluará con las hojas de trabajo entregadas por los estudiantes y la discusión grupal.

Nombre de la actividad: Operaciones con números complejos. Suma.

Tiempo estimado: 1 hora

Prerrequisitos

37. Representación cartesiana de números complejos
38. Suma de números reales

Contenidos disciplinares

39. Suma de números complejos.
40. Conmutatividad de la suma de números complejos.
41. Ley del paralelogramo.

Objetivos

General

42. Conocer y relacionar los procedimientos gráfico, numérico y algebraico de la suma de números complejos, considerando su parte real y su parte imaginaria.

Específicos

43. Describir gráficamente la suma de números complejos.
44. Explorar la suma de números complejos de manera gráfica y numérica.
45. Establecer el procedimiento algebraico para la suma de números complejos.
46. Establecer (implícita o explícitamente) la propiedad de conmutatividad de la suma por medio de la exploración en el software.
47. Justificar la ley del paralelogramo.

Recomendaciones

En esta actividad, a los estudiantes se les solicita una descripción del procedimiento gráfico que se lleva a cabo para la suma de números complejos (punto 3); por tal motivo, se recomienda hacer énfasis que la respuesta debe utilizar conceptos geométricos para describir dicho procedimiento, como por ejemplo, segmentos, paralelismo, desplazamientos.

Una vez realizada la actividad, se sugiere discutir grupalmente las repuestas dadas en la generalización del procedimiento algebraico de la suma de números complejos (punto 9), con el fin de institucionalizar dicho procedimiento.

Cabe señalar, que el estudiante suele agregar el símbolo i a la parte imaginaria de un número complejo, para lo cual se sugiere corregir dicha concepción.

Por último, para verificar la conmutatividad de la suma, se recomienda que el docente justifique dicha propiedad presentando diferentes ejemplos (punto 11) buscando que el estudiante consiga extender dicha propiedad que se cumple en la suma de números reales hacia la suma de números complejos.

Uso de los applets:

En esta actividad se hace uso de tres applets, el primero de ellos permite la visualización gráfica de la suma números complejos representados mediante segmentos dirigidos. El segundo applet tiene por objetivo que el estudiante visualice la suma de números complejos de manera gráfica y numérica, con el fin de que establezca la relación que existe entre las partes real e imaginaria de los sumandos con la parte real e imaginaria de la suma. En el tercer applet se brinda la oportunidad de verificar para distintos casos la conmutatividad de la suma, esperando que el estudiante generalice dicha propiedad. Además, en este applet el estudiante visualizará la ley del paralelogramo para las suma de números complejos.

Actividades Complementarias

Se realizará una actividad en la dirección maple.uson.mx/mapleta, después de analizar la resta de números complejos.

Sugerencia de evaluación de la actividad

Esta actividad se evaluará con las hojas de trabajo entregadas por los estudiantes y la discusión grupal.

Nombre de la actividad: Operaciones con números complejos. Resta.

Tiempo estimado: 1 hora

Prerrequisitos

48. Representación cartesiana de número complejos
49. Resta de números reales

Contenidos disciplinares

50. Resta de números complejos.
51. Propiedad del inverso aditivo.

Objetivos

General

52. Conocer y relacionar los procedimientos gráfico, numérico y algebraico de la resta de números complejos, considerando su parte real e imaginaria.

Específicos

53. Describir gráficamente la resta de números complejos.
54. Explorar la resta de números complejos de manera gráfica y numérica.
55. Establecer el procedimiento algebraico para la resta de números complejos.
56. Establecer (implícita o explícitamente) la propiedad del inverso aditivo.

Recomendaciones

En esta actividad, a los estudiantes se les solicita una descripción gráfica del procedimiento que se lleva a cabo para la resta de número complejos (punto 5); por tal motivo, se recomienda hacer énfasis que la respuesta debe utilizar conceptos geométricos para describir dicho procedimiento, como por ejemplo, segmentos, paralelismo, desplazamientos.

Una vez realizada la actividad, discutir grupalmente las repuestas dadas en la generalización del procedimiento algebraico de la resta de números complejos (punto 11), con el fin de institucionalizar dicho procedimiento.

Para la operación resta, los estudiantes tendrán que revisar si la conmutatividad se cumple en este caso (punto 12), con lo cual se espera que conjeturen que la propiedad de conmutatividad no es válida para la resta de números complejos. Se sugiere aprovechar los resultados obtenidos de la exploración para introducir la relación del inverso aditivo.

Por último, se recomienda resaltar la importancia de cuidar los signos al restar números complejos.

Uso de los applets

En esta actividad se utilizan dos applets, el primero de ellos permite la visualización gráfica de la resta números complejos representados mediante segmentos dirigidos. El segundo applet tiene por objetivo que el estudiante visualice la resta de números complejos de manera gráfica y numérica, con el fin de que establezca propiedades y relaciones de esta operación.

Actividades Complementarias

Realizar la actividad en línea "Suma y resta de números complejos" que se encuentra en la dirección maple.uson.mx/mapleta. Dicha actividad engloba las operaciones de suma y resta.

Sugerencia de evaluación de la actividad

Esta actividad se evaluará con las hojas de trabajo entregadas por los estudiantes y la discusión grupal.

Nombre de la actividad: Operaciones con números complejos. Producto.

Tiempo estimado: 2 horas

Prerrequisitos

57. Representación cartesiana de números complejos.
58. Representación polar de números complejos.
59. Suma y producto de números reales.
60. Semejanza de triángulos.
61. Producto de binomios.

Contenidos disciplinares

62. Producto de números complejos en forma polar.
63. Producto de números complejos en forma cartesiana.
64. Conmutatividad del producto de números complejos.

Objetivos

General

65. Conocer y relacionar los procedimientos gráfico, numérico y algebraico de la multiplicación de número complejos, considerando las formas de representación polar y cartesiana.

Específicos

66. Describir gráficamente la multiplicación de números complejos en su representación polar.
67. Explorar la multiplicación de números complejos de manera gráfica y numérica, considerando su módulo y argumento.
68. Establecer las relaciones gráficas, numéricas y algebraicas que existen al multiplicar números complejos en su forma polar.
69. Establecer y justificar la propiedad de conmutatividad para el producto de número complejos.

70. Explorar gráficamente la multiplicación de números complejos representados en su forma cartesiana.

71. Multiplicar números complejos en su forma cartesiana, tanto gráfica como numéricamente.

72. Justificar la multiplicación de números complejos en su forma cartesiana con el procedimiento para multiplicar binomios.

Recomendaciones

En esta actividad, se le solicita al estudiante que describa el procedimiento gráfico de la multiplicación de números complejos en su representación polar (punto 2, 3 y 7); para lo cual se recomienda hacer énfasis que su respuesta debe considerar conceptos geométricos tales como módulo, argumento, desplazamiento, semejanza, entre otros.

Después de realizada la actividad, se sugiere discutir grupalmente las relaciones que existen entre los módulos y argumentos de los factores con el módulo y argumento del producto, orientando la discusión hacia la multiplicación de los módulos y la suma de los argumentos entre los factores (punto 5 y 6).

Para la multiplicación de números complejos, los estudiantes también revisarán la conmutatividad de dicha operación; motivo por el cual se sugiere enfatizar las relaciones que existen entre los módulos y argumentos de los factores con el módulo y argumento del producto.

Por último, para la multiplicación de números complejos de manera cartesiana se sugiere discutir los diferentes procedimientos algebraicos que los estudiantes declaren para los siguientes casos:

1. La multiplicación de un número real positivo y un número complejo arbitrario.
2. La multiplicación de un número real negativo y un número complejo arbitrario.
3. La multiplicación de un número imaginario puro y un número complejo arbitrario.
4. La multiplicación de dos números complejos arbitrarios.

Para lo cual, tendrán que argumentar sus repuestas, con la finalidad de institucionalizar el procedimiento algebraico de la multiplicación de números complejos representados en forma cartesiana.

Uso de los applets

En esta actividad se utilizan dos applets, el primero de ellos es para visualizar gráfica y numéricamente la multiplicación de números complejos representados en forma polar. El segundo applet tiene por objetivo que el estudiante visualice gráfica y numéricamente la multiplicación de números complejos representados en forma cartesiana.

Actividades Complementarias

Realizar la actividad en línea "Producto de números complejos" que se encuentra en la dirección maple.uson.mx/mapleta.

Sugerencia de evaluación de la actividad

Esta actividad se evaluará con las hojas de trabajo entregadas por los estudiantes y la discusión grupal.

Nombre de la actividad: Operaciones con números complejos. Conjugados.

Tiempo estimado: 1 hora.

Prerrequisitos

5. Representación cartesiana de números complejos.
6. Representación polar de números complejos.
7. Producto de números complejos en forma polar y cartesiana.

Contenidos disciplinares

8. Números complejos conjugados, en forma polar y cartesiana.

Objetivos

General

9. Identificar gráfica, numérica y algebraicamente el conjugado de un número complejo, considerando ambas formas de representación, es decir, polar y cartesiana.

Específicos

10. Encontrar números complejos cuyo producto sea un número real positivo.
11. Encontrar el conjugado de un número complejo representado en forma polar y conjeturar que es único, a partir de la exploración gráfica.
12. Representar gráfica, numérica y algebraica el conjugado de distintos números complejos dados en forma polar.
13. Establecer la relación que existe entre el módulo y argumento de un número complejo con su conjugado, a partir de la exploración gráfica.
14. Representar gráfica y numéricamente el conjugado de distintos números complejos dados en forma cartesiana.
15. Establecer la relación que existe entre las partes real e imaginaria de un número complejo con su conjugado, a partir de la exploración gráfica.

Recomendaciones

En esta actividad, los estudiantes tendrán que conjeturar que un número complejo tiene solamente un conjugado (punto 1, inciso c) mediante la exploración en el software. Lo anterior, es abordado en la representación cartesiana y polar de un número complejo; por tal motivo, se sugiere al docente enfatizar las características gráficas que se cumplen para cada una de las diferentes representaciones.

Una vez que se realizó la actividad y se discutieron los resultados, se sugiere institucionalizar la definición de un número complejo conjugado.

Uso de los applets

En esta actividad se hace uso de dos applets, el primero de ellos permite que el estudiante explore, represente y caracterice, tanto gráfica como numéricamente, al conjugado de un número complejo representado en forma polar. En el segundo applet el propósito es el mismo, pero en éste se trabajará con la forma de representación cartesiana.

Actividades Complementarias

Realizar la actividad en línea “Complejos Conjugados” que se encuentra en la dirección maple.uson.mx/mapleta.

Sugerencia de evaluación de la actividad

Esta actividad se evaluará con las hojas de trabajo entregadas por los estudiantes y la discusión grupal.

Nombre de la actividad: Operaciones de número complejos. División.

Tiempo estimado: 1 hora 30 minutos.

Prerrequisitos

16. Representación cartesiana de números complejos.
17. Representación polar de números complejos.
18. Números complejos conjugados.
19. Suma y producto de números complejos.

Contenidos disciplinares

20. División de números complejos en forma polar.
21. División de números complejos en forma cartesiana.

Objetivos

General

22. Relacionar gráfica, numérica y algebraicamente la división de números complejos, considerando ambas formas de representación, polar y cartesiana.

Específicos

23. Explorar gráfica y numéricamente el cociente entre dos números complejos representados en forma polar y describir el proceso gráfico que se lleva a cabo.
24. Establecer las relaciones gráficas, numéricas y algebraicas que existen entre el módulo y argumento del divisor y el dividendo con el módulo y argumento del cociente.
25. Establecer la no conmutatividad de la división, mediante la exploración en el applet.
26. Explorar gráfica y numéricamente el cociente entre dos números complejos representados en forma cartesiana.
27. Establecer las relaciones gráficas y numéricas que existen entre las partes real e imaginaria del divisor y el dividendo con el módulo y argumento del cociente.
28. Utilizar el objeto matemático número complejo conjugado para realizar la división de complejos en su forma de representación cartesiana.

29. Expresar algebraicamente la división de dos números complejos arbitrarios representados en forma cartesiana.

Recomendaciones

En esta actividad, al estudiante se le solicita el procedimiento gráfico que se lleva a cabo en la división de complejos (punto 2 y 3), para lo cual se recomienda hacer énfasis que su respuesta debe considerar conceptos geométricos tales como módulo, argumento, desplazamiento, entre otros.

Por medio de la exploración gráfica de la división de números complejos representados en forma polar, al estudiante se le solicita establecer las relaciones encontradas entre los módulos y argumentos del divisor y el dividendo con el módulo y argumento del cociente, para lo cual se sugiere una discusión grupal donde se llegue a un consenso sobre el procedimiento para dicha operación.

Por otra parte, la división de números complejos también es abordada de manera cartesiana, para lo cual se le solicita al estudiante la exploración gráfica de los siguientes casos:

30. La división de un número complejo arbitrario y un número real positivo.

31. La división de un número complejo arbitrario y un número real negativo.

32. La división de un número complejo arbitrario y un número imaginario puro.

33. La división de dos números complejos arbitrarios.

Una vez que obtengan sus propias conclusiones, se sugiere discutir las diferentes respuestas, con el propósito de generalizar un procedimiento para la división de números complejos en representación cartesiana. Particularmente para el inciso d, hacer énfasis en la necesidad de utilizar el objeto matemático número complejo conjugado (punto 19 y 20 de la actividad).

Uso de los applets

Para esta actividad se utilizan dos applets, el primero de ellos permite que el estudiante visualice gráfica y numéricamente la división de números complejos representados en forma polar. El segundo tiene el mismo propósito, pero en esta ocasión se trabajará con la forma de representación cartesiana.

Actividades Complementarias

Realizar la actividad en línea “División de números complejos” que se encuentra en la dirección maple.uson.mx/mapleta.

Sugerencia de evaluación de la actividad

Esta actividad se evaluará con las hojas de trabajo entregadas por los estudiantes y la discusión grupal.

Nombre de la actividad: Operaciones de número complejos. Potencias.

Tiempo estimado: 1 hora 30 minutos.

Prerrequisitos

34. Representación cartesiana de números complejos.
35. Representación polar de números complejos.
36. Conversiones entre la forma polar y la forma cartesiana
37. Multiplicación de número complejos.

Contenidos disciplinares

38. Potencias de números complejos.

Objetivos

General

39. Relacionar gráfica, numérica y algebraicamente diferentes potencias de números complejos, considerando ambas formas de representación, polar y cartesiana.

Específicos

40. Explorar gráficamente Z^{n}, donde Z es un número complejo representado en forma polar y $\mathrm{n} = 2,3,4,5,6$.
41. Extender las propiedades de la multiplicación de números complejos hacia potencias de números complejos.
42. Expresar algebraicamente el procedimiento general para elevar un número complejo representado en forma polar a determinada potencia.
43. Explorar gráficamente Z^{n}, donde Z es un número complejo representado en forma cartesiana y $\mathrm{n} = 1,2,3,4,5,6$.
44. Relacionar el Teorema del Binomio y el procedimiento para elevar un número complejo a determinada potencia, donde el número está dado en forma cartesiana.
45. Reconocer el procedimiento más práctico para elevar un número complejo a determinada potencia.

Recomendaciones

En esta actividad, al estudiante se le solicita explorar el procedimiento gráfico para elevar un número complejo en su representación polar a determinada potencia, donde se espera que se relacione dicho procedimiento con el de la multiplicación de números complejos. Por tal motivo, se recomienda orientar la discusión hacia esas conclusiones.

Por otra parte, esta actividad también solicita al estudiante la exploración del procedimiento gráfico para elevar números complejos en su representación cartesiana, donde se recomienda hacer hincapié en lo laborioso que resulta realizar dicha operación cuando la potencia se incrementa.

Por último, se sugiere institucionalizar los procedimientos algebraicos que se utilizan al elevar un número complejo a determinada potencia, tanto de forma polar como cartesiana.

Uso de los applets

En esta actividad se utilizan dos applets, el primero de ellos permite al estudiante explorar gráfica y numéricamente la operación Z^n (con $n = 1,2,3,4,5,6$), donde Z es un número complejo y está representado en su forma polar. El segundo applet tiene el mismo propósito que el anterior, pero ahora el número complejo Z está representado en su forma cartesiana.

Actividades Complementarias

Algunos aspectos de esta actividad serán considerados en la dirección maple.uson.mx/mapleta en una tarea posterior.

Sugerencia de evaluación de la actividad

Esta actividad se evaluará con las hojas de trabajo entregadas por los estudiantes y la discusión grupal.

Nombre de la actividad: Operaciones de número complejos. Raíces.

Tiempo estimado: 1 hora 30 minutos.

Prerrequisitos

46. Representación polar de números complejos.

Contenidos disciplinares

47. Raíces de números complejos.

Objetivos

General

48. Relacionar gráfica y numéricamente las raíces de un número complejo representado en forma polar.

Específicos

49. Explorar gráficamente las n-raíces de $\sqrt[n]{Z}$, donde Z es un número complejo representado en forma polar y $n = 2,3,4,5,6$.

50. Establecer las relaciones que existen entre el módulo y argumento del número complejo con el módulo y argumento de sus n-raíces.

Recomendaciones

La actividad solicita al estudiante la exploración gráfica del procedimiento para calcular la raíz n-ésima de un número complejo. Se sugiere hacer énfasis en el número de raíces obtenidas, vinculando el resultado con la raíz n-ésima. Además, discutir los diferentes resultados obtenidos para obtener un procedimiento general para el cálculo de raíces de números complejos.

Uso de los applets

En esta actividad se utiliza un applet, el cual está diseñado para que el estudiante visualice, explore gráfica y numéricamente todas las posibles raíces del número $\sqrt[n]{Z}$ (con $n = 1,2,3,4,5,6$), donde Z es un número complejo representado en forma polar.

Actividades Complementarias

Realizar la actividad “Potencias y raíces de números complejos” que se encuentra en la dirección en línea maple.uson.mx/mapleta.

Sugerencia de evaluación de la actividad

Esta actividad se evaluará con las hojas de trabajo entregadas por los estudiantes y la discusión grupal.

ANEXO 3

Objetos Primarios

En este apartado se muestra una descripción de las situaciones, lenguajes, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos que intervienen y emergen de cada una de las actividades.

Actividad 1. Representación Gráfica de los Números Reales

Tipos de Objetos	Objetos Primarios
Situaciones	1. Identificar los diferentes sistemas numéricos contenidos en el sistema de los números reales, es decir, los naturales, enteros, racionales e irracionales. 2. Validar la propiedad de cerradura en los diferentes subconjuntos de los números reales con las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y raíz cuadrada. 3. Obtener la raíz cuadrada del número -1.
Lenguaje	4. Gráfico 5. Verbal 6. Numérico

Procedimientos	7. Representar gráficamente, en un applet de GeoGebra, algunos números naturales, enteros, racionales e irracionales. 8. Efectuar operaciones dentro de cada uno de los sistemas numéricos dados utilizando números genéricos. 9. Representar gráficamente la raíz cuadrada de algunos números enteros positivos. 10. Uso de la calculadora para intentar obtener la raíz cuadrada de -1.
Conceptos	11. Conjunto de los Números Naturales 12. Conjunto de los Números Enteros 13. Conjunto de los Números Racionales 14. Conjunto de los Números Irracionales 15. Conjunto de los Números Reales 16. Recta Real
Propiedades	17. Propiedad de Cerradura bajo la suma 18. Propiedad de Cerradura bajo la resta 19. Propiedad de Cerradura bajo el producto 20. Propiedad de Cerradura bajo la división
Argumentos	21. Justificaciones de las operaciones de los números reales.

Actividad 2. Representación Gráfica de la Unidad Imaginaria.

Tipos de Objetos	**Objetos Primarios**
Situaciones	**22.** Identificar el módulo y argumento de los números reales a partir de su representación gráfica. **23.** Identificar las relaciones que existen entre los factores y el producto de números reales, en términos de módulo y argumento. **24.** Identificar la solución gráfica de algunas ecuaciones de segundo grado de la forma $Z^2 = a$, donde a es un número real. **25.** Establecer la unidad imaginaria.
Lenguaje	26. Gráfico 27. Verbal 28. Algebraico

	29. Numérico
	30. Expresar el módulo y argumento de un número real, considerando su representación como un segmento dirigido.
	31. Efectuar la multiplicación gráfica, mediante un applet de GeoGebra, de dos números reales.
	32. Describir las relaciones gráficas y numéricas que existen entre el módulo y argumento para el producto de números reales con el módulo y argumento de los factores.
	33. Representar gráfica y numéricamente a los números reales, considerando su módulo y argumento.
Procedimientos	34. Resolver ecuaciones cuadráticas, mediante la exploración gráfica, de la forma $\mathrm{Z}^2 = a$, donde a es un número real.
	35. Determinar módulo y argumento de la unidad imaginaria considerando que es solución de la ecuación $\mathrm{Z}^2 = -1$.
	36. Representar gráficamente a la unidad imaginaria.
Conceptos	37. Recta Real 38. Segmento dirigido 39. Número Reales 40. Módulo 41. Argumento 42. Ecuación 43. Unidad imaginaria i
Propiedades	44. El producto de los módulos de los factores es el módulo del producto. 45. La suma de los argumentos de los factores es el módulo del producto.
Argumentos	46. Justificaciones para operar con los números reales.

Actividad 3. Representación Gráfica de Números Imaginarios.

Tipos de Objetos	Objetos Primarios
Situaciones	47. Identificar a los números imaginarios a través de su representación gráfica y de la solución de ecuaciones cuadráticas del tipo $\mathrm{Z}^2 = -a^2$, donde a es un número real.

	48. Justificar la validez de las soluciones complejas no reales de las ecuaciones.
Lenguaje	49. Gráfico 50. Verbal 51. Algebraico 52. Numérico
Procedimientos	53. Resolver y justificar las soluciones de algunas ecuaciones de segundo grado de la forma $Z^2 = -a^2$, donde a es un número real, mediante la exploración en el software. 54. Representar gráficamente algunos números imaginarios.
Conceptos	55. Módulo 56. Argumento 57. Ecuaciones 58. Raíz cuadrada 59. Retícula Polar 60. Números imaginarios
Propiedades	61. Extensión de las propiedades de los reales para el producto.
Argumento	62. Justificaciones de las operaciones de los números reales.

4. Representación Gráfica de los Números Complejos

1. Forma Polar

Tipos de Objetos	Objetos Primarios
Situaciones	2. Identificar y expresar numéricamente un número complejo representado gráficamente en la retícula polar. 3. Representar un número complejo en la retícula polar dado su módulo y argumento.
Lenguaje	4. Gráfico 5. Numérico 6. Algebraico

Procedimientos	7. Identificar el módulo y argumento de un número complejo a partir de su representación gráfica. 8. Graficar en un applet de GeoGebra varias números complejos conociendo su módulo y argumento.
Conceptos	9. Número Complejo 10. Retícula Polar 11. Segmento dirigido 12. Módulo 13. Argumento 14. Número complejo representado en forma polar
Propiedades	15. Sea θel argumento de un número complejo Z si sucede que: 16. $0° < \theta < 90°$ entonces Z está en el primer cuadrante. 17. $90° < \theta < 180°$ entonces Z está en el segundo cuadrante. 18. $180° < \theta < 270°$ entonces Z está en el tercer cuadrante. 19. $270° < \theta < 0°$ entonces Z está en el cuarto cuadrante. 20. $\theta = 0°$ ó $\theta = 180°$ entonces Z se encuentra en el eje real a la derecha ó izquierda del origen, respectivamente. 21. $\theta = 90°$ ó $\theta = 270°$ entonces Z se encuentra en el eje imaginario arriba ó abajo del origen, respectivamente.
Argumentos	22. Convención matemática para representar a los grados en el plano complejo a partir de la parte real no negativa del eje real en sentido contrario a las manecillas del reloj.

23. Forma Cartesiana

Tipos de Objetos	**Objetos Primarios**
Situaciones	24. Identificar las relaciones gráficas y numéricas entre la multiplicación de un número real por la unidad imaginaria, en términos de su parte real e imaginaria. 25. Relacionar la suma de números reales con la suma de un número real y un número imaginario.

	26. Representar e identificar gráfica y numéricamente a los números complejos en forma cartesiana.
Lenguaje	27. Gráfico 28. Verbal 29. Numérico 30. Algebraico
Procedimientos	31. Efectuar la multiplicación de un número real por la unidad imaginaria, mediante un applet de GeoGebra. 32. Representar gráficamente algunos números imaginarios puros. 33. Realizar, gráficamente, la suma de dos números reales y, posteriormente, la suma de un imaginario puro con un número real. 34. Identificar la parte real y la parte imaginaria de un número complejo representado gráficamente. 35. Representar numérica y algebraicamente un número complejo en forma cartesiana. 36. Realizar el procedimiento inverso, graficando un número complejo dada su parte real y su parte imaginaria.
Conceptos	37. Unidad Imaginaria i 38. Números imaginarios puros 39. Parte Real 40. Parte Imaginaria 41. Forma cartesiana de un número complejo
Propiedades	42. Ley del paralelogramo implícita
Argumentos	43. Justificaciones para la suma de vectores en el plano.

44. Conversiones

Tipos de Objetos	**Objetos Primarios**
Situaciones	45. Relacionar la representación polar y la representación cartesiana de un número complejo, identificándolas y realizando conversiones de una a otra.
Lenguaje	46. Gráfico

	47. Verbal
	48. Numérico
	49. Algebraico
Procedimientos	50. Estimar el valor numérico de la parte real y la parte imaginaria de un número complejo, dada su representación gráfica en la retícula polar.
	51. Calcular la parte real y la parte imaginaria de un número complejo dada su representación polar, haciendo uso del teorema de Pitágoras y de algunas razones trigonométricas.
	52. Expresar algebraicamente cómo pasar de la representación polar de un número complejo a la representación cartesiana.
	53. Estimar el valor numérico del módulo y el argumento de un número complejo, dada su representación gráfica en coordenadas cartesianas.
	54. Calcular el módulo y el argumento de un número complejo dada su representación cartesiana, haciendo uso de algunas razones trigonométricas.
	55. Expresar algebraicamente cómo pasar de la representación cartesiana de un número complejo a la representación polar.
Conceptos	56. Módulo
	57. Argumento
	58. Parte real
	59. Parte imaginaria
	60. Funciones trigonométricas
	61. Representación polar
	62. Representación cartesiana
Propiedades	63. Sea $Z = rCis\theta$ (número complejo representado en forma polar) donde r es el módulo y θ el argumento de Z, y sea $Z = a + bi$ (número complejo representado en forma cartesiana) donde a es la parte real y b la parte imaginaria de Z, entonces:
	64. $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\theta = \begin{Bmatrix} Si\ a > 0\ y\ b > 0\ entonces\ \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \\ Si\ a < 0\ y\ b > 0\ entonces\ \theta = 180° - \tan^{-1}\frac{b}{a} \\ Si\ a < 0\ y\ b < 0\ entonces\ \theta = 180° + \tan^{-1}\frac{b}{a} \\ Si\ a > 0\ y\ b < 0\ entonces\ \theta = 360° - \tan^{-1}\frac{b}{a} \end{Bmatrix}.$
	65. $a = rcos(\theta)$ y $b = rsen(\theta)$.
Argumento	66. Reglas de Trigonometría y Teorema de Pitágoras

5a. Suma

Tipos de Objetos	Objetos Primarios
Situaciones	67. Identificar las características y/o relaciones para la suma de números complejos de manera gráfica, numérica y algebraica, en términos de su parte real y su parte imaginria. 68. Establecer la propiedad de conmutatividad de la suma. 69. Justificar la ley del paralelogramo.
Lenguaje	70. Gráfico 71. Verbal 72. Numérico 73. Algebraico
Procedimientos	74. Describir el procedimiento gráfico para la suma de dos números complejos, a partir de su visualización en el software. 75. Sumar números complejos considerando parte real y parte imaginaria 76. Expresar algebraicamente el procedimiento para la suma de número complejos. 77. Explorar en un applet de GeoGebra la conmutatividad de la suma para números complejos.
Conceptos	78. Suma de números complejos 79. Parte Real 80. Parte Imaginaria
Propiedades	81. Sea $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$ números complejos entonces $Z_1 + Z_2 = (a + c) + (b + d)i$. Es decir, la suma entre la parte real del primer y segundo sumando nos dará la parte real de la suma y, similarmente, la suma entre la parte imaginaria del primer y segundo sumando nos dará la parte imaginaria de la suma. 82. Conmutatividad de la suma para números complejos
Argumentos	83. Justificación del procedimiento para la suma de números complejos a partir de una extensión de las propiedades para sumar con números reales. 84. Justificar el por qué la suma de números complejos cumple con la ley del paralelogramo.

5b. Resta

Tipos de Objetos	Objetos Primarios
Situaciones	85. Identificar las características y/o relaciones para la resta de números complejos de manera gráfica, numérica y algebraica, considerando su parte real e imaginaria. 86. Establecer la no conmutatividad de la resta. 87. Establecer la relación del inverso aditivo.
Lenguaje	88. Gráfico 89. Verbal 90. Numérico 91. Algebraico
Procedimientos	92. Describir el procedimiento gráfico para la resta de dos números complejos, a partir de su visualización en el software. 93. Restar números complejos considerando parte real y parte imaginaria. 94. Expresar algebraicamente el procedimiento para la resta de números complejos. 95. Explorar en un applet de GeoGebra la no conmutatividad de la resta y la propiedad del inverso aditivo.
Conceptos	96. Resta de números complejos 97. Parte Real 98. Parte Imaginaria 99. Inverso aditivo
Propiedades	100. Sea $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$ números complejos entonces $Z_1 - Z_2 = (a - c) + (b - d)i$. Es decir, la resta entre la parte real del minuendo y la parte real del sustraendo nos dará la parte real de la resta y, similarmente, la resta entre la parte imaginaria del minuendo y la parte imaginaria del sustraendo nos dará la parte imaginaria de la resta.
Argumentos	101. Justificación del procedimiento para la resta de números complejos a partir de una extensión de las propiedades para restar con números reales.

5c. Producto

Tipo de Objetos	**Objetos Primarios**
Situaciones	102. Identificar las características y/o relaciones para la multiplicación de números complejos en su representación polar y cartesiana de manera gráfica y numérica.
	103. Establecer el procedimiento algebraico para la multiplicación de números complejos.
	104. Establecer y justificar la propiedad de conmutatividad para el producto.
Lenguaje	105. Gráfico
	106. Verbal
	107. Numérico
	108. Algebraico
Procedimientos	109. Realizar y describir la multiplicación gráfica y numérica de distintos pares de números complejos representados en forma polar, con ayuda del software.
	110. Explorar gráfica y numéricamente las relaciones que existen con el producto de números complejos, en términos de módulo y argumento.
	111. Explorar la propiedad conmutativa para el producto de números complejos.
	112. Visualizar gráficamente y expresar algebraicamente la multiplicación de dos complejos en forma cartesiana para los siguientes casos:
	113. Un número real positivo con un número complejo arbitrario.
	114. Un número real negativo con un número complejo arbitrario.
	115. Un número imaginario puro con un número complejo arbitrario.
	116. Dos números complejos arbitrarios.
	117. Establecer las relaciones pertinentes para cada uno de los cuatro casos anteriores en términos de sus partes real e imaginaria.
Conceptos	118. Producto de Números Complejos
	119. Módulo
	120. Argumento
	121. Parte Real
	122. Parte Imaginaria

123. Número real negativo

124. Número real positivo

125. Número imaginario puro

126. Semejanza de triángulos.

Propiedades

127. Sea $Z_1 = r_1Cis(\theta_1)$ y $Z_2 = r_2Cis(\theta_2)$, entonces $Z_1 \cdot Z_2 = r_1r_2Cis(\theta_1 + \theta_2)$.

128. Sea $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$, entonces $Z_1 \cdot Z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

129. Conmutatividad

Argumentos

130. Justificación del procedimiento para el producto de números complejos a partir de una extensión de las propiedades para multiplicar números reales.

5d. Conjugados

Tipos de Objetos	Objetos Primarios
Situaciones	131. Identificar gráfica y/o numéricamente el conjugado de un número complejo representado en forma polar y cartesiana. Además, conjeturar que es único. 132. Establecer la relación que existe entre un número complejo y su conjugado en las diferentes representaciones abordadas. 133. Investigar la definición de número complejo conjugado y sus propiedades.
Lenguaje	134. Gráfico 135. Verbal 136. Numérico 137. Algebraico
	138. Explorar gráficamente y encontrar un número complejo que multiplicado por otro ya dado y representados en forma polar, de como producto un número real positivo.

Procedimientos

139. Restringir las condiciones del punto anterior considerando que el número buscado deberá tener el mismo módulo que el número complejo dado.

140. Ubicar gráficamente y anotar numéricamente el conjugado de distintos números complejos representados en forma polar.

141. Explorar gráficamente y encontrar un número complejo que multiplicado por otro ya dado y representados en forma polar, de como producto un numero real positivo (con la consideración de que el número encontrado deberá tener el mismo módulo que el complejo dado).

142. Establecer, mediante la exploración en el software, la relación que existe entre las partes real e imaginaria de un número complejo con su conjugado.

143. Investigar y comparar la definición de un número complejo conjugado con las características que emergieron de esta actividad.

144. Investigar propiedades de los números complejos conjugados y resaltar su importancia.

Conceptos

145. Producto de números complejos

146. Número real positivo

147. Módulo

148. Argumento

149. Parte real

150. Parte imaginaria

151. Número complejo conjugado

Propiedades

152. Sea $Z_1 = rCis(\theta_1)$ entonces su conjugado será $Z_2 = rCis(360° - \theta_1)$.

153. Sea $Z_1 = a + bi$, entonces su conjugado será $Z_2 = a - bi$.

Argumentos

154. Reglas de la multiplicación para números complejos representados en forma polar.

155. Reglas de la multiplicación para números complejos representados en forma cartesiana.

5e. División

Tipos de Objetos	**Objetos Primarios**

Situaciones

156. Identificar las características y/o relaciones gráficas y numéricas de la división de números complejos en forma polar.

157. Establecer la no conmutatividad de la división.

158. Identificar las características y relaciones gráficas y numéricas de la división de números complejos en forma cartesiana, considerando el objeto matemático número complejo conjugado.

159. Expresar algebraicamente la división de dos números complejos arbitrarios.

Lenguaje

160. Gráfico

161. Verbal

162. Numérico

163. Algebraico

Procedimientos

164. Realizar y describir la división gráfica y numérica de distintos pares de números complejos representados en forma polar, con ayuda del software.

165. Establecer las relaciones siguientes:

166. La división entre el módulo del dividendo y el módulo del divisor es el módulo del cociente.

167. La resta entre el argumento del dividendo y el argumento del divisor es el argumento del cociente.

168. Verificar las relaciones anteriores con ayuda del software y comparando entre los demás compañeros.

169. Establecer la no conmutatividad de la división, al mismo tiempo que surge implícita o explícitamente la propiedad del inverso multiplicativo.

170. Visualizar gráficamente y expresar algebraicamente la división de dos complejos representados en forma cartesiana para los siguientes casos:

171. El dividendo arbitrario y el divisor un real positivo.

172. El dividendo arbitrario y el divisor un real negativo.

173. El dividendo arbitrario y el divisor un imaginario puro.

174. Dos números complejos arbitrarios (utilizar la definición de número complejo conjugado).

	175. Establecer las relaciones pertinentes para cada uno de los cuatro casos anteriores en términos de sus partes real e imaginaria.
	176. Módulo
	177. Argumento
	178. Parte real
	179. Parte imaginaria
Conceptos	180. Número real positivo
	181. Número real negativo
	182. Número imaginario puro
	183. Número complejo conjugado
	184. Sea $Z_1 = r_1 Cis(\theta_1)$ y $Z_2 = r_2 Cis(\theta_2)$, entonces ${Z_1}/{Z_2} = \frac{r_1}{r2} Cis(\theta_1 - \theta_2)$.
Propiedades	185. Sea $Z_1 = a + bi$, $Z_2 = c + di$ y $Z_3 = c - di$ (conjugado de Z_2), entonces ${Z_1}/{Z_2} = \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_3} = \frac{(ac+ \quad)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$
Argumentos	186. Las reglas de la multiplicación para números complejos.
	187. Propiedades de los complejos conjugados.

5f. Potencias

Tipos de Objetos	**Objetos Primarios**
Situaciones	188. Identificar las características y/o relaciones gráficas y numéricas para elevar un número complejo a determinada potencia, representado en forma polar y cartesiana.
	189. Extender las propiedades de la multiplicación de números complejos hacia potencias de números complejos.
Lenguaje	190. Gráfico
	191. Verbal
	192. Numérico
	193. Algebraico

	194. Visualizar Z^n para distintos valores de Z, donde Z es un número complejo representado en forma polar y $n = 2,3,4,5,6$.
	195. Establecer las relaciones correspondientes entre el módulo y argumento de Z con el módulo y argumento de Z^n, donde Z es un número complejo y $n = 2,3,4,5,6$.
	196. Elaborar una conclusión sobre el procedimiento general para elevar un número complejo a determinada potencia en términos de su módulo y argumento.
Procedimientos	197. Visualizar Z^n para distintos valores de Z, donde Z es un número complejo representado en forma cartesiana y $n = 2,3,4,5,6$.
	198. Utilizar, de manera explícita o implícita, el teorema del binomio para elevar un número complejo representado en forma cartesiana a determinada potencia.
	199. Decidir el procedimiento más práctico para elevar un número complejo a determinada potencia.
	200. Potencias de números complejos
Conceptos	201. Módulo
	202. Argumento
	203. Parte real
	204. Parte imaginaria
	205. Teorema del Binomio
	206. Sea $Z = rCis(\theta)$, entonces $Z^n = r^n Cis(n\theta)$.
Propiedades	207. Sea $Z = a + bi$, entonces $Z^n = (a + bi)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k$.
	208. Extensión de las propiedades para la multiplicación de números complejos.
Argumentos	209. Uso del Teorema del binomio.

5g. Raíces

Tipos de Objetos	**Objetos Primarios**

Situaciones	210. Relacionar gráfica y numéricamente las raíces de un número complejo representado en forma polar.
Lenguaje	211. Gráfico 212. Verbal 213. Numérico 214. Algebraico
Procedimientos	215. Obtener la raíz cuadrada de un número complejo. 216. Describir las relaciones entre el número complejo y sus raíces, en términos de módulo y argumento, al calcular su raíz cuadrada. 217. Obtener la raíz cuadrada para varios números complejos. 218. Repetir el procedimiento anterior para la raíz cúbica, cuarta, quinta y sexta de un número complejo.
Conceptos	219. Módulo 220. Argumento 221. Parte real 222. Parte imaginaria 223. Fórmula de De Moivre
Propiedades	224. Sea $Z = rCis(\theta)$, entonces $\sqrt[n]{Z} = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\ sen\ (\frac{\theta+2k\pi}{n})\right]$, donde k es un número entero que va desde 0 hasta $n-1$.
Argumentos	225. Las reglas de la multiplicación para números complejos.