

Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



Caracterización Geométrica de las Soluciones de Soloviev para un Plasma en Equilibrio

Tesis para obtener el Título de Licenciado en Física presenta:
Antonio Cota Rodríguez

Director de tesis:
Dr. Adalberto Corella Madueño

Hermosillo, Sonora, México.
22 de octubre del 2021

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Agradecimientos

Quiero agradecer a toda mi familia, amigos y compañeros de la Universidad de Sonora, ya que sin su invaluable ayuda he podido aprender de mis aciertos y más importante, de mis errores. Un especial agradecimiento es dedicado a la Universidad de Sonora que me brindó el privilegio de estudiar la carrera de Licenciatura en Física y de poder vivir una de las grandes experiencias que han acontecido en mi vida. Por último, quiero agradecer a mi asesor Dr. Adalberto Corella Madueño que estuvo siempre presente desde el inicio hasta el final de mi trayectoria durante la licenciatura.

Resumen

La tesis tiene como primer objetivo abordar la deducción teórica de las ecuaciones de un plasma en equilibrio dentro de una geometría toroidal partiendo desde un punto de vista que considera partículas clásicas hasta una descripción macroscópica de un fluido perfectamente conductor que culmina en las ecuaciones de la magnetohidroestática, de estas ecuaciones se derivó la ecuación de Grad-Shafranov, ecuación que se usa en la investigación de fusión nuclear. El segundo objetivo consiste en caracterizar las cantidades de forma, asociadas a una solución a la ecuación de Grad-Shafranov conocida como solución de Soloviev usando una descripción bidimensional de curvas paramétricas^[1] y empleando métodos computacionales de minimización de distancias. Se obtuvieron correlaciones entre las cantidades de forma y los parámetros geométricos que definen la caracterización geométrica de las líneas de flujo magnético para un plasma en equilibrio.

Contenido

Agradecimientos	ii
1 Introducción y Criterios de Definición del Plasma	2
1.1 Introducción	2
1.2 Longitud de Debye	5
1.3 Parámetro del Plasma	6
1.4 Frecuencia del Plasma	7
1.5 Criterios del Plasma	8
2 Dinámica del Plasma	10
2.1 Descripción de Partículas	10
2.2 Variables Macroscópicas	16
2.3 Ecuaciones de Transporte	20
2.3.1 Conservación de la Masa	22
2.3.2 Conservación del Momento	23
2.3.3 Conservación de la Energía	24
2.4 Magnetohidrodinámica	25
2.4.1 Régimen físico de validación de la Magnetohidrodinámica	30
2.4.2 Magnetohidrodinámica Ideal	31
3 Equilibrio del Plasma y Ecuación de Grad-Shafranov	32
3.1 Equilibrio de un Plasma	32
3.2 Ecuación de Grad-Shafranov	34
4 Soluciones de Soloviev y Resultados	39
4.1 Soluciones de Soloviev	39
4.2 Conclusiones	46
Bibliografía	48

1 Introducción y Criterios de Definición del Plasma

1.1 Introducción

En Física, el término plasma designa un gas total o parcialmente ionizado, que consta de iones y electrones, que exhibe un comportamiento colectivo y cuasineutralidad macroscópica^[2]. El término plasma fue introducido por Irving Langmuir (1881-1957) para describir la parte cargada de una descarga eléctrica de un gas^[3]. Al plasma se le conoce como el cuarto estado de la materia y se obtiene mediante el suministro constante de energía a un gas tal que la energía cinética de las partículas superen su energía potencial de enlace atómico, esto da como resultado un fluido de iones y electrones, el suministro de energía puede ser por medio de intensos campos electromagnéticos tal que los constituyentes neutros del gas se ionicen, los electrones se desprenden por colisiones como resultado de la agitación térmica elevada de las partículas.

Una de las dos propiedades del plasma es su comportamiento colectivo, este surge como causa de la interacción electromagnética, esta al ser de largo alcance tiene como implicación que la interacción entre partículas es también de largo alcance, a diferencia de un gas neutro cuya interacción es de corto alcance debido a las colisiones. La otra propiedad es la cuasineutralidad macroscópica, esto significa una aproximación en la cantidad de densidad de los iones n_i y electrones n_e dentro del plasma, esto es

$$n_i \approx n_e \quad (1-1)$$

esta neutralidad es una consecuencia de las fuerzas electrostáticas intensas que surgen en el plasma, siempre y cuando exista una diferencia significativa en las densidades de los electrones e iones. Para medir el grado de ionización α del plasma se usa el cociente dado por

$$\alpha \equiv \frac{n}{n_0 + n} \quad (1-2)$$

donde $n = n_e = n_i$ y n_0 es la densidad de las especies neutras o impurezas. La relación (1-2) separa en dos categorías a los plasmas, en plasmas altamente ionizados y débilmente ionizados, los plasmas que se estudian en la investigación de fusión termonuclear pertenecen a

los altamente ionizados^[4].

La física del plasma estudia las propiedades físicas del plasma tanto desde un enfoque microscópico (teoría cinética del plasma) como macroscópico (magnetohidrodinámica). Dentro del plasma ocurren una gran cantidad de fenómenos físicos que son estudiados desde estos enfoques, entre estos fenómenos están los efectos de difusión de partículas, radiación de ondas electromagnéticas, efectos de ionización, recombinación, etc.

Una parte del interés en la física de plasma es que sirve como medio para realizar investigaciones en el área de la fusión nuclear controlada, a diferencia de la fisión nuclear, en la que los átomos se dividen para producir energía, en la fusión se unen núcleos más ligeros para crear núcleos más pesados, proceso en el que se libera energía. El confinamiento del plasma mediante campos electromagnéticos es una de las técnicas utilizadas aquí en la tierra para producir reacciones de fusión nuclear^[5], la geometría de confinamiento o envase con el que se han obtenido mejores resultados es el tokamak^[6], que debe su nombre a un acrónimo ruso que significa 'cámara toroidal magnética', es una estructura con forma de toroide inventada en la década de 1950 que utiliza potentes imanes superconductores para contener al plasma dentro del toroide. Un experimento que confina el plasma en un tokamak y que se está desarrollando actualmente es el proyecto ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), la configuración básica del mecanismo se muestra en la Figura 1-1.

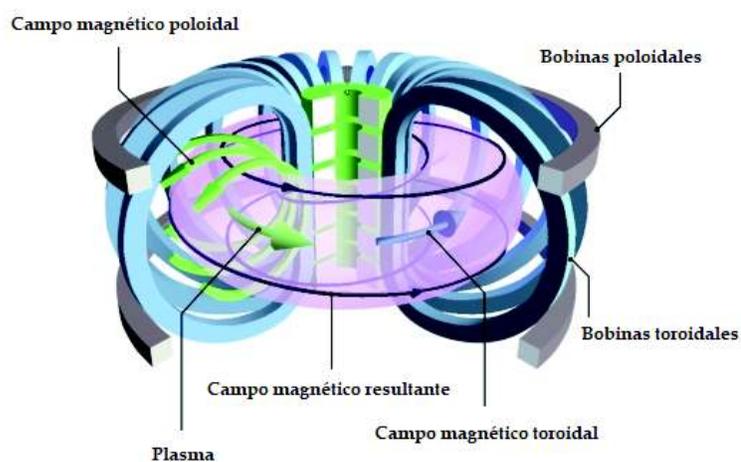


Figura 1-1. Plasma confinado en un toroide. Archivo: Schematic-of-a-tokamak-chamber-and-magnetic-profile.jpg por S. Li, H. Jiang, Z. Ren, C. Xu licencia bajo CC 4.0/Traducido al español.

la configuración básica consiste en una serie de bobinas externas al plasma que generan campos electromagnéticos intensos con el objetivo de mantener la estabilidad y desencadenar reacciones de fusión. El control y estabilización de los plasmas generados en los tokamaks es un problema difícil debido a las inestabilidades que surgen dentro del plasma, lo que enriquece

el estudio de esta área de la física, sin embargo, hay situaciones en que el problema físico puede idealizarse matemáticamente hasta tornarse en un problema más sencillo que se puede resolver de forma analítica^[7], es decir, es posible reducir el tratamiento matemático de un plasma hasta convertirlo en un problema más idealizado cuya solución analítica arroje información sobre la física del plasma confinado.

Parte del objetivo de este trabajo fue obtener desde primeros principios la ecuación que describe las líneas de flujo magnético de un plasma en equilibrio dentro de un toroide bidimensional (ecuación Grad-Shafranov). El camino que se abordó, y que se muestra en los capítulos siguientes, está representado por el camino más largo de la Figura 1-2, esto es, se comienza con una descripción clásica de partículas del plasma y se procede a realizar una serie de suposiciones que disminuyen la complejidad del sistema tanto físico como matemático, sin embargo, como es de esperarse, en este tránsito hay información que se pierde y aún con esto, el problema termina siendo no trivial. Al obtener la ecuación de Grad-Shafranov y escribir una solución (solución de Soloviev), se obtienen resultados sobre la morfología de las líneas de flujo magnético de un plasma en equilibrio por medio de la caracterización geométrica de las líneas de flujo usando un conjunto de parámetros geométricos. Antes de describir la dinámica del plasma es necesario definir primero los criterios del plasma, esto es, las condiciones necesarias para que un gas sea considerado plasma. Los criterios son definidos en términos de un conjunto de cantidades físicas, estas cantidades son la longitud de Debye λ_D , la frecuencia del plasma ω_{fp} y el parámetro del plasma N_D .

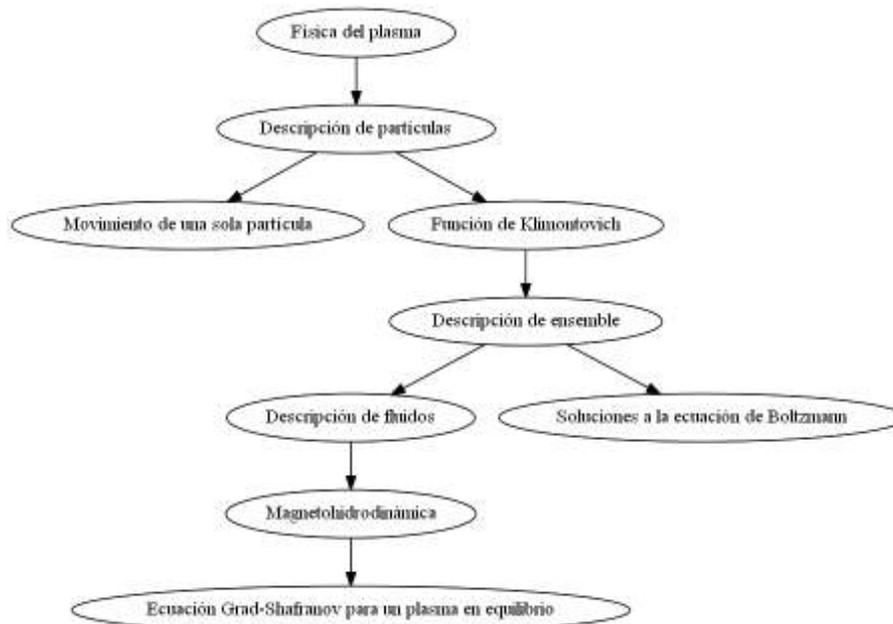


Figura 1-2. Avance teórico que describe una parte de la física del plasma.

1.2 Longitud de Debye

Los plasmas poseen la propiedad especial de escudarse de potenciales eléctricos externos. Si un plasma se somete a un campo eléctrico externo, sus cargas libres se redistribuyen de modo que la mayor parte del plasma queda protegida del campo. Supongamos que el estado de equilibrio del plasma se ve perturbado por un campo eléctrico debido a una partícula cargada con $q_T > 0$. Se puede demostrar por medio del uso de la ecuación de Poisson que el potencial generado por esta carga de prueba está dado por

$$\phi(r) = \frac{q_T}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{|r|}{\lambda_D}} \quad (1-3)$$

con

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k T_e}{n_e e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1-4)$$

λ_D es la longitud de Debye, donde ϵ_0 es la permitividad del vacío, T_e es la temperatura de equilibrio del plasma, e es la magnitud de la carga del electrón, n_e es la densidad de número de electrones y k es la constante de Boltzmann. De (1-3) implica que el potencial debido a una carga de prueba en el plasma disminuye más rápido que una carga en el vacío (Figura. 1-3)

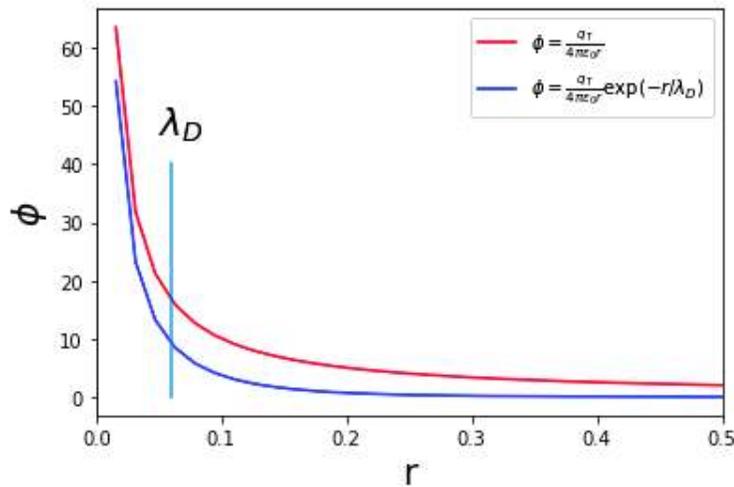


Figura 1-3. Efecto del escudamiento de Debye para una partícula de prueba q_T .

este fenómeno es conocido como escudamiento o apantallamiento de Debye y es un ejemplo de los efectos colectivos del plasma. La longitud de Debye es la distancia en la cual se genera una nube de partículas cargadas de signo opuesto que restauran la neutralidad macroscópica del plasma. Para distancias $r \ll \lambda_D$ el potencial es similar a la de una carga en el vacío, en cambio para $r \gg \lambda_D$ el potencial de la carga de prueba es efectivamente cancelada (fig. 1-4).

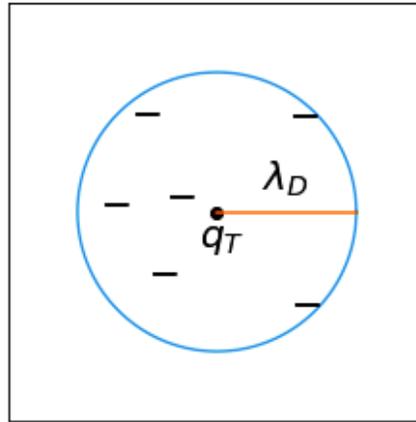


Figura 1-4. La esfera de Debye cancela a la carga de prueba y regresa la neutralidad macroscópica del plasma.

Por tanto la longitud de Debye da una medida de hasta qué punto una partícula cargada puede influir significativamente en su entorno dentro del plasma, esta es la distancia máxima sobre la que un plasma puede apartarse significativamente de su cuasi-neutralidad macroscópica^[8]. Para un plasma en máquinas de fusión^[6] el orden de la longitud de Debye es de $\lambda_D \sim 7 \cdot 10^{-5}m$ mientras que para un plasma interestelar la longitud de Debye es del orden de $\lambda_D \sim 0.7m$.

El primer criterio para determinar si un gas ionizado es un plasma es que las dimensiones espaciales del plasma L sea mucho mayor que la longitud de Debye λ_D esto es, $L \gg \lambda_D$, si esto se cumple el plasma se mantendrá en un estado cuasi-neutro y por tanto el escudamiento de cargas externas será efectivo. Para el caso de plasmas usados en fusión nuclear, la longitud $L = a \approx 2m$ donde a es el radio menor del toroide, por lo que el primer criterio del plasma se cumple sobre 4 órdenes de magnitud.

1.3 Parámetro del Plasma

El parámetro del plasma es definido como

$$N_D = \frac{4\pi}{3} n_e \lambda_D^3 \quad (1-5)$$

esta cantidad nos da el número de partículas que están contenidas dentro de la esfera de Debye. El segundo criterio para definir al plasma está relacionado con esta cantidad, además de ser necesario para que el escudamiento de Debye sea un concepto estadísticamente válido^[9] y el comportamiento colectivo siga aplicando, para esto se requiere que $N_D \gg 1$, esto es, que la esfera de Debye contenga una gran cantidad de partículas cargadas. El parámetro del plasma puede interpretarse como una medición del grado en que los efectos colectivos dominan sobre

el comportamiento de partículas individuales además de imponer la condición de que la energía potencial de una partícula debida a sus vecinas sea mucho menor que la energía cinética.

1.4 Frecuencia del Plasma

Como se ha mencionado anteriormente una de las propiedades importantes del plasma es mantener la causineutralidad macroscópica de carga. Cuando el plasma es perturbado de su estado de equilibrio, esto es, cuando hay una separación de las partículas cargadas, dentro del espacio entre ellas se genera un gran campo eléctrico que tiende a restaurar la neutralidad de carga original. Estos movimientos colectivos son caracterizados por una frecuencia natural de oscilación conocida como *frecuencia del plasma*. La frecuencia del plasma surge como una consecuencia de la interacción restauradora de Coulomb, esto es, si dentro del plasma dos conjuntos de cargas con signo opuesto son separadas una distancia Δx y si consideramos a los iones estáticos, el campo eléctrico generado por la separación de carga Δx (en una dimensión) es $E_x = \frac{n_e e \Delta x}{\epsilon_0}$, con esto la fuerza restauradora de Coulomb es:

$$F_x = qE_x \quad (1-6)$$

$$\frac{d^2 \Delta x}{dt^2} = q \frac{n_e e \Delta x}{m_e \epsilon_0} \quad (1-7)$$

$$\frac{d^2 \Delta x}{dt^2} = -\omega_{fp}^2 \Delta x \quad (1-8)$$

La ecuación (1-8) es la ecuación de un oscilador armónico simple con frecuencia igual a la frecuencia del plasma ω_{fp}

$$\omega_{fp} = \left(\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (1-9)$$

Así, cuando el plasma es perturbado de su condición de equilibrio (Figura 1-5), el espacio interno resultante de cargas da lugar a movimientos colectivos de partículas que tienden a restaurar la neutralidad de la carga original.

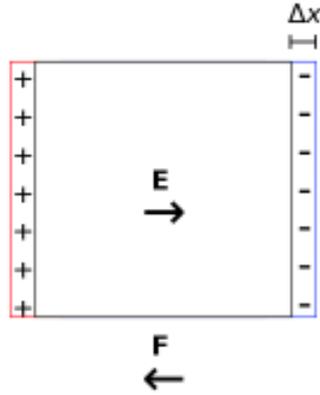


Figura 1-5. Un modelo simple que ilustra las oscilaciones del plasma de electrones.

Otras cantidades que caracterizan las trayectorias de las partículas cargadas del plasma en presencia de un campo magnético son la frecuencia ciclotrónica y el radio de Larmor. Es bien sabido que si una partícula de masa m y carga q se introduce en un campo magnético estático uniforme, esta partícula realizará un movimiento circular uniforme alrededor del campo magnético a una frecuencia característica conocida como frecuencia ciclotrónica, dada por

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m} \quad (1-10)$$

donde la orientación del giro depende del signo de la carga. Estos movimientos circulares definen también al radio de la órbita o radio de Larmor, dado por

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \quad (1-11)$$

donde v_{\perp} es la componente perpendicular de la velocidad con respecto al campo magnético. Tanto la frecuencia ciclotrónica como el radio de Larmor no entran en los criterios para definir a un plasma sin embargo son necesarias al considerar el régimen físico de la magnetohidrodinámica Sección 2.4.

1.5 Criterios del Plasma

Ya se han dado dos criterios que nos permiten saber si estamos en presencia de un plasma, el tercer criterio está relacionado con las colisiones que se generan dentro del fluido, este criterio es que los electrones puedan completar muchas oscilaciones antes de chocar con los constituyentes neutros. Si ω_{fp} es la frecuencia del plasma (1.9) y τ es el tiempo medio entre colisiones de electrones y partículas neutras, el tercer criterio requiere que $\omega_{fp}\tau > 1 \Rightarrow \frac{1}{T_{fp}}\tau \gg 1$, con esto

$$\tau \gg T_{fp} \quad (1-12)$$

donde T_{fp} es el tiempo de un período de oscilación dado por ω_{fp} , esto se debe de cumplir ya que de otra manera los electrones no pudieran comportarse de forma colectiva, serían forzados, por las colisiones, a estar en un equilibrio completo con las partículas neutras y el medio se trataría de un simple gas neutral. Por tanto, la frecuencia de colisiones dentro plasma debe ser menor que la frecuencia del plasma ω_{fp} , de aquí se concluye que en un plasma los efectos de partículas individuales son de menor importancia que los efectos colectivos.

En resumen, para que un gas ionizado sea considerado un plasma se debe cumplir los siguientes criterios^[1]:

$$L \gg \lambda_D \quad (1-13)$$

$$N_D \gg 1 \quad (1-14)$$

$$\omega_{fp}\tau \gg 1 \quad (1-15)$$

Hasta aquí se han definido los criterios que determinan si estamos en presencia de un plasma, lo que sigue es obtener una deducción teórica de las ecuaciones que describen la evolución dinámica de sus constituyentes, esto se abordará desde una descripción de partículas hasta llegar a una descripción macroscópica de un monofluido ionizado en equilibrio.

2 Dinámica del Plasma

2.1 Descripción de Partículas

Para derivar las ecuaciones que rigen el comportamiento exacto de un plasma desde una descripción de partículas o desde la teoría cinética del plasma es necesario primero definir lo que es un espacio fase de un sistema de partículas: Un espacio fase (Figura. 2-1) son todos los posibles estados de un sistema físico determinado por sus coordenadas de posición y velocidades (momento). Supongamos que tenemos un gas de solo una partícula cargada. Esta partícula tiene dos órbitas, una dada por $\mathbf{R}_1(t)$ en el espacio configuracional de tres dimensiones \mathbf{r} , esta órbita es el conjunto de todas las posiciones \mathbf{r} que ocupa la partícula a tiempos sucesivos y la otra órbita dada por $\mathbf{V}_1(t)$ en el espacio de velocidades de \mathbf{v} .

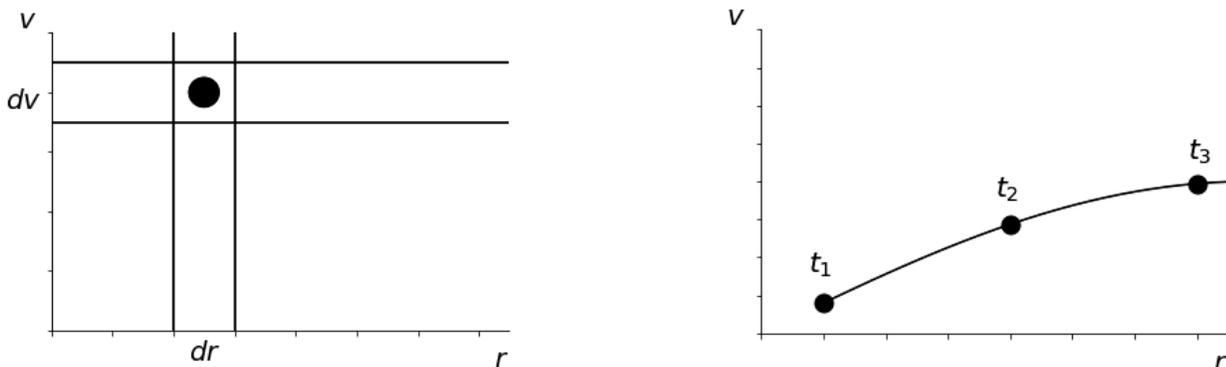


Figura 2-1. Elemento de espacio fase en una dimensión (izquierda) que contiene a una partícula. Órbita de la partícula a tiempos sucesivos.

Combinando el espacio configuracional y el de velocidades en un solo espacio fase 6-dimensional y eligiendo el elemento de volumen $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ lo suficientemente pequeño tal que contenga una sola partícula o ninguna, con esto la densidad de una partícula en el espacio fase es

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_1(t)]\delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_1(t)] \quad (2-1)$$

donde δ es la función delta de Dirac y la función F es conocida como función de densidad de Klimontovich^[10]. Si no hay partículas en el elemento de volumen $\int F d\mathbf{r}d\mathbf{v} = 0$ o $\int F d\mathbf{r}d\mathbf{v} = 1$ si contiene a la partícula (Figura. 2-1), esto claramente es un resultado de la función delta de Dirac. Ahora supongamos que el sistema contiene dos especies de partículas (iones y electrones)

y cada especie tiene un total de N_0 partículas, entonces la función de densidad de Klimontovich para la especie α es

$$F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{i=1}^{N_0} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_i(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)] \quad (2-2)$$

y la densidad total está dado por

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{e,i} F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (2-3)$$

El número total de partículas de la especie α se puede obtener integrando la ecuación (2-2) en el volumen total V del espacio fase

$$\int_V F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = N_0 \quad (2-4)$$

de la ecuación (2-4) se deduce que la función de Klimontovich nos da la densidad exacta del espacio fase de nuestro sistema de partículas, en otras palabras, la función de densidad consiste en la suma de todos los elementos de volumen de espacio fase individuales.

Conociendo la ubicación y velocidad exacta de cada partícula a un valor del tiempo t , en principio podemos conocer todas las posiciones y velocidades a cualquier tiempo posterior, esto es debido a la relación

$$\dot{\mathbf{R}}_i(t) = \mathbf{V}_i(t) \quad (2-5)$$

para toda i . Ya que el plasma está en presencia de campos electromagnéticos internos producidos por el sistema de partículas cargadas, la velocidad de todas las partículas i satisfacen la ecuación de fuerza de Lorentz

$$m_\alpha \dot{\mathbf{V}}_i(t) = q_\alpha \{ \mathbf{E}^m(\mathbf{R}_i(t), t) + \mathbf{V}_i(t) \times \mathbf{B}^m(\mathbf{R}_i(t), t) \} \quad (2-6)$$

dónde el supraíndice m denota los campos electromagnéticos internos o "microscópicos" generados por las partículas. Una observación importante es que los campos eléctricos y magnéticos omiten la contribución de la partícula i , en otras palabras, una partícula no interactúa electromagnéticamente consigo misma. Estos campos satisfacen las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}^m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2-7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}^m(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{J}^m(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2-8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho^m(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (2-9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^m(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2-10)$$

Ya que las ecuaciones de Maxwell son lineales, es posible considerar la suma de campos electromagnéticos internos y externos $\mathbf{E}^m \rightarrow \mathbf{E}^m + \mathbf{E}_{ext}$ y $\mathbf{B}^m \rightarrow \mathbf{B}^m + \mathbf{B}_{ext}$. La carga y la densidad de corriente están dadas por

$$\rho^m(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int F_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2-11)$$

$$\mathbf{J}^m(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} F_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (2-12)$$

La ecuación exacta que describe la evolución del plasma se obtiene derivando con respecto al tiempo la función de Klimontovich, ecuación (2-2); consideramos primero las siguientes identidades de la función delta

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a - b) = -\frac{\partial}{\partial b} f(a - b) \quad (2-13)$$

$$\frac{d}{dt} f[g(t)] = \frac{df}{dg} \dot{g} \quad (2-14)$$

aplicando esto a la derivada temporal de los dos términos de lado derecho de la ecuación (2-2), tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_i(t)] = \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_i} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_i(t)] = -\dot{\mathbf{R}}_i \cdot \nabla \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_i] \quad (2-15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)] = \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}_i} \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)] = -\dot{\mathbf{V}}_i \cdot \nabla_v \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i] \quad (2-16)$$

sustituyendo las ecuaciones (2-5) y (2-7) en la ecuación (2-17)

$$\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} = - \sum_i \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \nabla \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_i] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i] - \sum_i \dot{\mathbf{V}}_i \cdot \nabla_v \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i] \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_i] \quad (2-17)$$

sustituyendo (2-5) y (2-6) en (2.17)

$$\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} = - \sum_i \mathbf{V}_i \cdot \nabla \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_i] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i] - \sum_i \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{E}^m + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_i] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i] \quad (2-18)$$

usando la identidad $a\delta(a - b) = b\delta(a - b)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} &= - \sum_i \mathbf{v} \cdot \nabla \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_i] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i] - \sum_i \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{E}^m + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}^m) \cdot \nabla_v \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_i] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i] \\ &= - \mathbf{v} \cdot \nabla \sum_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_i] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i] - \sum_i \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{E}^m + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}^m) \cdot \nabla_v \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_i] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i] \end{aligned}$$

de la definición (2.2) la última expresión se escribe como

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E}^m + \mathbf{v} \times \mathbf{B}^m) \cdot \nabla_v F_\alpha = 0 \quad (2-19)$$

La ecuación (2-19) es conocida como ecuación de Klimontovich. Esta ecuación expresa que el número de partículas se conserva a lo largo de todas las órbitas dinámicas del espacio fase bajo la acción de sus campo electromagnéticos mutuos. La ecuación de Klimontovich junto a las ecuaciones de Maxwell constituyen una descripción exacta del plasma. Para interpretar mejor la ecuación se define la derivada convectiva total

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{R}} \cdot \nabla + \dot{\mathbf{V}} \cdot \nabla_v \quad (2-20)$$

esta derivada no solamente considera la variación en el tiempo de la densidad de partículas, sino también la variación de tiempo producto de cambiar la posición en el espacio de fase, con esto, podemos escribir la ecuación de Klimontovich en términos de una ley de conservación

$$\frac{DF_\alpha}{Dt} = 0 \quad (2-21)$$

esto es, la densidad de las partículas en el espacio fase de la especie α es constante en el tiempo. La ecuación (2-21) se resuelve para valores iniciales de posición y velocidad de las N_0 partículas de cada especie, esto significa una gran cantidad de cómputo y por tanto es un problema intratable ya que conlleva el conocimiento de todas las órbitas individuales de las partículas y en problemas relacionados a la física del plasma se asume una gran cantidad de partículas, sin embargo esta ecuación sirve como principio conceptual para la derivación de otras ecuaciones asociadas a los valores promedio del plasma.

Para reducir la complejidad es necesario pasar de un enfoque de partículas a un enfoque de ensemble estadístico, esto se aborda por medio de la obtención de los valores esperados de la ecuación (2-19) sobre un volumen finito, este volumen en el espacio de configuración debe ser menor que la longitud de Debye y mayor que el espaciamiento o longitud media entre las partículas $l^{-1/3}$, más exactamente para un volumen dado por $(\Delta r)^3$ la longitud de uno de los lados del cubo debe ser tal que $l^{-1/3} < \Delta r < \lambda_D^{[8]}$; además, se debe cumplir que dentro del elemento de volumen exista una gran cantidad de partículas, pero esto lo satisface el segundo criterio del plasma (1-14). Los plasmas estudiados en investigación de fusión contienen un número de partículas $N = 10^5$ dentro del volumen finito^[11].

La función de distribución media se define como el promedio de la función de Klimontovich, esta se obtiene integrado a F_α en el volumen finito del espacio fase $\Delta V = (\Delta r)^3 (\Delta v)^3$ y dividiendo el resultado sobre ese mismo volumen, esto es

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \langle F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = \frac{\int_{\Delta V} F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v}{\Delta V} \quad (2-22)$$

Dicho de otro modo, el número medio de partículas presentes a un tiempo t en el elemento de volumen del espacio fase ΔV es

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\Delta V = \int_{\Delta V} F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3r d^3v \quad (2-23)$$

La función f_α describe la física para distancias mayores a la longitud de Debye (Δr) $>$ λ_D . El efecto de promediar las partículas en una función de distribución media se puede observar en la Figura 2-2.

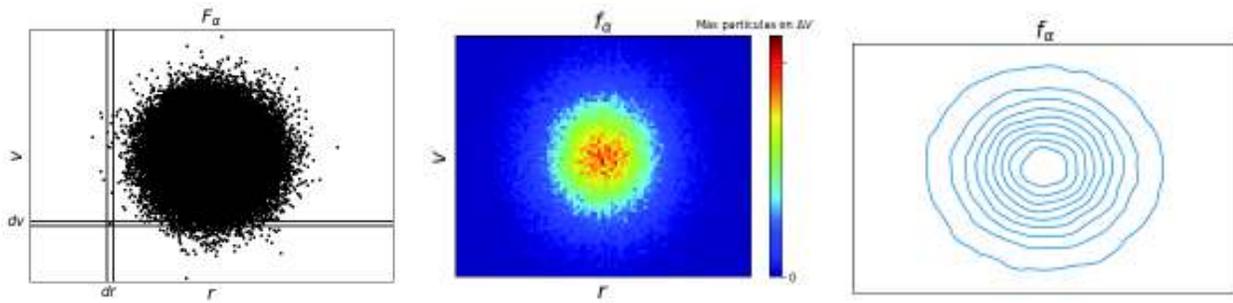


Figura 2-2. De izquierda a derecha. Efecto de promediar la función de Klimontovich en una función continua f_α en todo el espacio fase.

El número total de partículas del sistema se obtiene integrando sobre todo el espacio fase V . La desviación de la función de Klimontovich de su promedio se define con la cantidad δF_α tal que $\langle \delta F_\alpha \rangle = 0$, con esto, podemos escribir la función de Klimontovich como

$$F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \delta F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (2-24)$$

donde δF_α representa la contribución discreta o fluctuaciones dentro de la región $\Delta r < \lambda_D$. Empleando la misma descripción para los campos electromagnéticos

$$\mathbf{E}^m = \mathbf{E} + \delta \mathbf{E}^m \quad (2-25)$$

$$\mathbf{B}^m = \mathbf{B} + \delta \mathbf{B}^m \quad (2-26)$$

tal que $\langle \delta \mathbf{B}^m \rangle = \langle \delta \mathbf{E}^m \rangle = 0$. Promediando todos los términos de la ecuación de Klimontovich, tenemos

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \left\langle \frac{q_\alpha}{m_\alpha} [(\mathbf{E} + \delta \mathbf{E}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{B} + \delta \mathbf{B})] \cdot \nabla_v (f_\alpha - \delta F_\alpha) \right\rangle = 0 \quad (2-27)$$

separando los términos promediados y discretos

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f_\alpha = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \langle (\delta \mathbf{E}^m + \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}^m) \cdot \nabla_v \delta F_\alpha \rangle \quad (2-28)$$

Esta ecuación es conocida como ecuación cinética del plasma^[6] y describe la evolución de f_α en el espacio fase bajo la acción de campos electromagnéticos. La función f_α también se puede interpretar como la probabilidad de obtener un conjunto de partículas localizadas en un volumen finito del espacio fase ΔV , esto es, f_α es una densidad de probabilidad. Dado que f_α es suave por construcción, todo el comportamiento asociado a las fluctuaciones está del lado derecho de la ecuación (2-28), estos efectos discretos son consecuencia de colisiones dentro del plasma^[10]. Con esto, es posible separar a las fuerzas del interior del plasma en dos categorías, en fuerzas de largo alcance debido a los efectos colectivos de un gran número de partículas y las fuerzas de corto alcance debido a las colisiones entre partículas.

La ecuación cinética tiene la ventaja de que la función de distribución media f_α no depende de las coordenadas exactas de las partículas puntuales y solo depende de las coordenadas del espacio fase y del tiempo $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Debido a que los efectos colectivos del plasma dominan sobre los efectos de colisiones (tercer criterio del plasma) el comportamiento discreto puede ser despreciado y con esto tener a un plasma donde los efectos colectivos dominan (lado izquierdo), en efecto, cuando el lado derecho de la ecuación cinética es igual a cero, se obtiene la ecuación de Vlasov, que describe a un plasma sin colisiones

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f_\alpha = 0. \quad (2-29)$$

Los campos electromagnéticos promediados deben satisfacer la versión promediada de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2-30)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2-31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (2-32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2-33)$$

junto con la densidad de corriente y carga

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v \quad (2-34)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v \quad (2-35)$$

La ecuación cinética del plasma junto con las ecuaciones de Maxwell y las relaciones (2-34) y (2-35) representan un conjunto cerrado de ecuaciones que si se resuelve para f_α nos brindaría toda la información física de interés del plasma, sin embargo se puede avanzar en la reducción

de la complejidad; para lograr esto primero hay que definir unas cantidades conocidas como variables macroscópicas de plasma.

2.2 Variables Macroscópicas

Al derivar la ecuación cinética del plasma, no usamos ningún principio físico más que la ecuación de movimiento que relaciona la aceleración de las partículas con la fuerza de Lorentz, el resto de la derivación fue simplemente una cuestión de llevar un recuento del número de partículas que entran y salen de un elemento de volumen en el espacio de fase, para simplificar más el análisis es necesario realizar una transición de ensemble dado por f_α a una descripción macroscópica de fluidos dado por variables macroscópicas del plasma. El fluido es un medio continuo descrito por cantidades macroscópicas que dependen de la posición \mathbf{r} y el tiempo t . Estas cantidades macroscópicas se obtienen multiplicando a la función de distribución por las velocidades \mathbf{v} de las partículas e integrando en el espacio de velocidades. El momento de velocidad k -ésimo se define como

$$M_k(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{v} \mathbf{v} \cdots \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2-36)$$

M_k es un tensor de rango k con k factores de \mathbf{v} . El conjunto de momentos $\{M_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ es una descripción alternativa de la función de distribución media. Esta definición de las cantidades $M_k(\mathbf{r}, t)$ reduce el número de dimensiones de 7 a 4, las variables se expresan en términos de las coordenadas del espacio configuracional y el tiempo a diferencia de la función de distribución media $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ que depende de siete variables, una conclusión de esto último es que un modelo de fluido del plasma no es tan preciso o completo como un modelo cinético sin embargo las cantidades macroscópicas con las que se describe el modelo de fluidos dan una intuición física más simple y a pesar de esta falta de precisión el modelado de fluidos es ideal para una introducción a la investigación de la física relacionada a la fusión nuclear^[11].

El momento cero define la densidad de número de partículas en el espacio configuracional

$$n_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2-37)$$

con densidad $\rho_{m\alpha} = m_\alpha n_\alpha(\mathbf{r}, t)$. El momento de orden 1 dividido entre la densidad de número de partículas es la velocidad media

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{v} \rangle_\alpha = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2-38)$$

Esta velocidad describe el flujo promedio macroscópico del fluido dado por la contribución de todas las velocidades de las partículas bajo consideración (Figura 2-3).

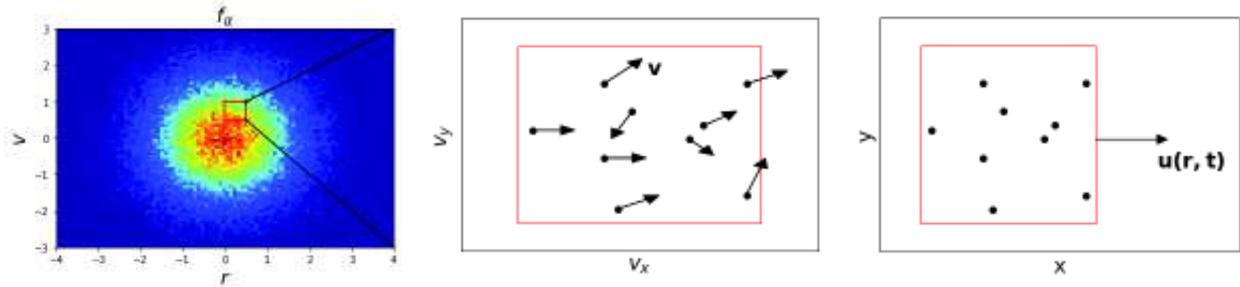


Figura 2-3. Visualización de la velocidad media de un ensemble de partículas por medio de la integración de un elemento en el espacio de velocidades (dos dimensiones).

Las fuentes electromagnéticas, ecuaciones (2-34) y (2-35), son determinadas por las ecuaciones (2-37) y (2-38)

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \quad (2-39)$$

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}. \quad (2-40)$$

En general, el valor promedio de cualquier cantidad $\mathbf{g}_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ es dado por

$$\langle \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\alpha} = \frac{1}{n_{\alpha}(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{g}_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (2-41)$$

El segundo y tercer momento corresponden al flujo de momentos y a la densidad de flujo de energía respectivamente

$$P_{\alpha ij} = m_{\alpha} \int v_i v_j f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2-42)$$

$$E_{\alpha ijk} = m_{\alpha} \int v_i v_j v_k f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (2-43)$$

escrito en su forma de componentes. El flujo de momentos es la cantidad total de momento transportado por unidad de área y tiempo en el marco de referencia del laboratorio sobre una superficie $d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{n}} dA$ que se encuentra dentro plasma donde v_i es la velocidad de las partículas y v_j es la componente de la velocidad paralela a la normal del elemento de superficie (Figura 2-4).

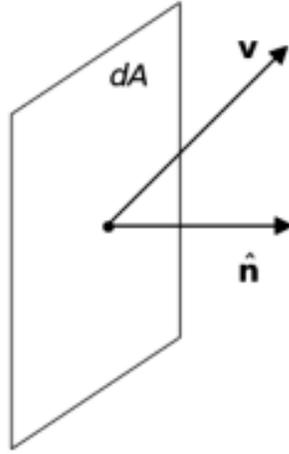


Figura 2-4. Flujo de momento de una partícula sobre una unidad de superficie.

La desviación de la velocidad de las partículas su valor medio es dado por la velocidad térmica

$$\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha \quad (2-44)$$

consecuentemente tenemos que $\langle \mathbf{c}_\alpha \rangle = 0$, ya que $\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle = \mathbf{u}_\alpha$. La velocidad térmica define otras variables conocidas como variables térmicas en el marco de reposo del elemento de fluido (la superficie dA se mueve junto con el fluido), estas variables son

Temperatura

$$\frac{3}{2}kT_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha \langle c_\alpha^2 \rangle = \frac{m_\alpha}{2n_\alpha} \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha)^2 f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2-45)$$

Vector de flujo de calor

$$\mathbf{q}_\alpha = \frac{1}{2}n_\alpha m_\alpha \langle c_\alpha^2 \mathbf{c}_\alpha \rangle = \frac{m_\alpha}{2} \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha)^2 (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2-46)$$

Tensor de presión

$$\mathbf{p}_\alpha = n_\alpha m_\alpha \langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle = m_\alpha \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2-47)$$

Tensor de flujo de calor

$$\mathbf{Q}_\alpha = n_\alpha m_\alpha \langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle = m_\alpha \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2-48)$$

El tensor de presión sobre un elemento de área dA que se mueve a velocidad media del fluido es el flujo neto de momento debido a las velocidades térmicas (Figura 2-5).

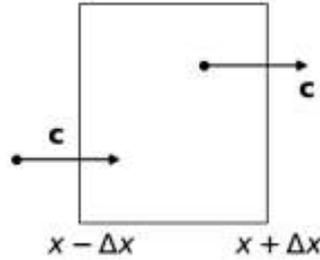


Figura 2-5. Flujo de momento térmico en una dimensión en el marco de referencia con $\mathbf{u}_\alpha = 0$.

Del tensor de presión se obtiene la presión escalar o presión hidrostática media p_α , esta se define como un tercio de la traza del tensor de presión

$$p_\alpha = \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{p}_\alpha) \quad (2-49)$$

de la ecuación (2-47)

$$p_\alpha = \frac{1}{3} n_\alpha m_\alpha \langle c_{\alpha x}^2 + c_{\alpha y}^2 + c_{\alpha z}^2 \rangle = \frac{1}{3} n_\alpha m_\alpha \langle c_\alpha^2 \rangle \quad (2-50)$$

de la ecuación (2-45) tenemos

$$p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha \quad (2-51)$$

que es la ecuación de estado de un gas ideal para un plasma en equilibrio termodinámico.

Estas cantidades definidas representan cantidades físicas que son parte del comportamiento colectivo de un gran número de partículas desde una perspectiva de fluidos en el cual el plasma es dividido en elementos de fluido (Figura 2-5).

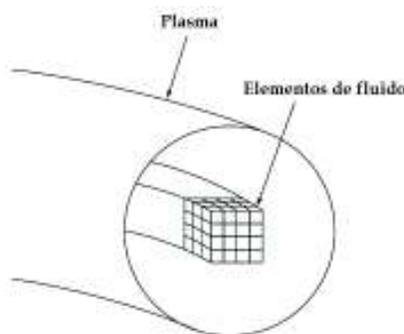


Figura 2-6. División de un plasma en elementos fluidos.

2.3 Ecuaciones de Transporte

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan las variaciones espaciales y temporales en términos de las variables macroscópicas obtenidas en la sección anterior pueden derivarse directamente desde la ecuación cinética del plasma sin tener que resolverla. Estas ecuaciones diferenciales son conocidas como *ecuaciones de transporte* o *ecuaciones de transferencia macroscópicas*^[12]. Las ecuaciones de transporte en términos de estas variables se pueden obtener tomando los diversos momentos de la ecuación cinética del plasma. Las primeras tres ecuaciones pueden obtenerse al multiplicar la ecuación cinética del plasma por m_α , $m_\alpha \mathbf{v}$ y $m_\alpha v^2/2$, sin embargo es necesario truncar el sistema de ecuaciones realizando una aproximación que introduzca una simplificación concerniente al momento más alto que aparece en el sistema de ecuaciones.

Considerando a $g(\mathbf{v})$ como una propiedad física de las partículas que depende de solo de la velocidad, se deriva la ecuación general de transporte partiendo de la ecuación cinética del plasma (2-28)

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f_\alpha = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \langle (\delta \mathbf{E}^m + \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}^m) \cdot \nabla_v \delta F_\alpha \rangle \quad (2-52)$$

dato que f_α no distingue entre partículas individuales, sino que solo tiene en cuenta su dependencia en espacio y la velocidad, la evaluación del término derecho de la ecuación (2-52) debe proporcionar esta información en términos de correlaciones. Una forma de simplificar la ecuación cinética es despreciar las correlaciones entre los campos y tener en cuenta solo las correlaciones entre las partículas a través de colisiones^[13]. Asumiendo esto último, la ecuación se puede escribir

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right) \Big|_{col} \quad (2-53)$$

dónde $\mathbf{a} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ es la aceleración debido a la fuerza de Lorentz sobre las partículas y $(\partial f_\alpha / \partial t) \Big|_{col}$ es el cambio de la función de distribución debido a las colisiones entre partículas. La ecuación escrita como (2-53) es conocida como ecuación de Boltzmann.

Para obtener la ecuación general de transporte se multiplica la ecuación (2.53) por $g(\mathbf{v})$ y se integra sobre todo el espacio de velocidades

$$\int_v g(\mathbf{v}) \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v + \int_v g(\mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v + \int_v g(\mathbf{v}) \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = \int_v g(\mathbf{v}) \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right) \Big|_{col} d^3v \quad (2-54)$$

Pasaremos a analizar término por término. El primer término del lado izquierdo de la ecuación (2-54) se puede escribir como

$$\int_v g(\mathbf{v}) \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_v g(\mathbf{v}) f_\alpha d^3v \right) - \underbrace{\int_v \frac{\partial g(\mathbf{v})}{\partial t} f_\alpha d^3v}_{=0} \quad (2-55)$$

el segundo término de la derecha es cero ya que $g(\mathbf{v})$ no depende de t . Utilizando el concepto de valor medio, ecuación (2-41), podemos escribir (2-55) como

$$\int_v g(\mathbf{v}) \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle g(\mathbf{v}) \rangle_\alpha) \quad (2-56)$$

Para el segundo término del lado izquierdo de la ecuación (2-54), tenemos

$$\int_v g(\mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v = \nabla \cdot \left(\int_v g(\mathbf{v}) \mathbf{v} f_\alpha d^3v \right) - \underbrace{\int_v f_\alpha \mathbf{v} \cdot \nabla g(\mathbf{v}) d^3v}_{=0} - \underbrace{\int_v f_\alpha g(\mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v} d^3v}_{=0} \quad (2-57)$$

el segundo término de la derecha de la ecuación (2-57) es cero porque la función g no depende de las variables espaciales, y el tercer término es la divergencia espacial de \mathbf{v} , por tanto también es cero. Con esto, nos queda

$$\begin{aligned} \int_v g(\mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v &= \nabla \cdot \left(\int_v g(\mathbf{v}) \mathbf{v} f_\alpha d^3v \right) \\ \int_v g(\mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v &= \nabla \cdot (n_\alpha \langle g(\mathbf{v}) \mathbf{v} \rangle_\alpha) \end{aligned} \quad (2-58)$$

El tercer término del lado izquierdo de la ecuación (2-54) lo podemos escribir de la siguiente forma

$$\int_v g(\mathbf{v}) \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = \int_v \nabla_v \cdot (\mathbf{a} g(\mathbf{v}) f_\alpha) d^3v - \int_v f_\alpha \mathbf{a} \cdot \nabla_v g(\mathbf{v}) d^3v - \int_v f_\alpha g(\mathbf{v}) \nabla_v \cdot \mathbf{a} d^3v \quad (2-59)$$

El primer término del lado derecho se puede escribir como

$$\int_v \nabla_v \cdot (\mathbf{a} g(\mathbf{v}) f_\alpha) d^3v = \sum_{x,y,z} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial v_i} (a_i g(v_i) f_\alpha) dv_x dv_y dv_z \quad (2-60)$$

para los valores de x , tenemos

$$\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial v_x} (a_x g(v_x) f_\alpha) dv_x dv_y dv_z = \int \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y dv_z (a_x g(v_x) f_\alpha |_{-\infty}^{+\infty}) = 0 \quad (2-61)$$

donde se asume que f_α se hace cero a velocidades infinitas. El tercer término de lado derecho de (2.59) es cero, $\nabla_v \cdot \mathbf{a} = \nabla_v \cdot \frac{\mathbf{F}}{m} = 0$ ya que las componentes de la fuerza de Lorentz son independientes de la correspondiente componente de velocidad v_i , por ejemplo para la

componente x , la fuerza de Lorentz es $F_x = q_\alpha(v_y B_z - v_z B_y)$, de aquí vemos la independencia entre F_i y v_i , por lo tanto, la ecuación (2-59) queda

$$\int_v g(\mathbf{v}) \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = - \int_v f_\alpha \mathbf{a} \cdot \nabla_v g(\mathbf{v}) d^3v = -n_\alpha \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_v \rangle_\alpha \quad (2-62)$$

Combinando los resultados obtenemos la ecuación general de transporte

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle g(\mathbf{v}) \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha \langle g(\mathbf{v}) \mathbf{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_v g(\mathbf{v}) \rangle_\alpha = \int_v g(\mathbf{v}) \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right) \Big|_{col} d^3v} \quad (2-63)$$

Esta ecuación facilitará la derivación de las tres primeras ecuaciones de transporte que son la ecuación de conservación de masa, de momento y energía.

2.3.1 Conservación de la Masa

La ecuación de conservación de la masa se obtiene haciendo una sustitución de la propiedad molecular por la masa de las partículas de la especie α , esto es, $g(\mathbf{v}) = m_\alpha$, con esto tenemos las siguientes relaciones

$$\langle g(\mathbf{v}) \rangle_\alpha = m_\alpha \quad (2-64)$$

$$\langle g(\mathbf{v}) \mathbf{v} \rangle_\alpha = m_\alpha \mathbf{u}_\alpha \quad (2-65)$$

$$\nabla_v g(\mathbf{v}) = 0 \quad (2-66)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2-64)-(2.66) en la ecuación general de transporte, obtenemos

$$\boxed{\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha} \quad (2-67)$$

que es la ecuación de conservación de la masa, con $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$ es la densidad de masa de las partículas donde S_α representa la tasa por unidad de volumen a la que se producen o pierden partículas de tipo α como resultado de colisiones. Cuando $S_\alpha = 0$ no se considera los fenómenos físicos como ionización o recombinación de partículas y la ecuación (2-67) se convierte en la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha) = 0 \quad (2-68)$$

dividiendo entre m_α la ecuación de conservación de masa se convierte en la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0 \quad (2-69)$$

2.3.2 Conservación del Momento

Para obtener la ecuación de conservación del momento de un plasma de dos especies, de forma similar a la sección anterior, sustituimos la propiedad molecular por $m_\alpha \mathbf{v}$, con esto, los términos de la ecuación de transporte son

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{m\alpha}\langle \mathbf{v} \rangle_\alpha) = \rho_{m\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} \quad (2-70)$$

$$\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle_\alpha) = \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha + \rho_{m\alpha}\langle \mathbf{c}_\alpha\mathbf{c}_\alpha \rangle) \quad (2-71)$$

$$-n_\alpha\langle \mathbf{F} \cdot \nabla_v \mathbf{v} \rangle_\alpha = -n_\alpha\langle F_x\hat{\mathbf{e}}_x + F_y\hat{\mathbf{e}}_y + F_z\hat{\mathbf{e}}_z \rangle_\alpha = -n_\alpha\langle \mathbf{F} \rangle_\alpha \quad (2-72)$$

donde $\mathbf{F} = m_\alpha \mathbf{a}$, sustituyendo estas últimas tres relaciones en la ecuación general de transporte

$$\rho_{ms} \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\langle \mathbf{c}_\alpha\mathbf{c}_\alpha \rangle) - n_\alpha\langle \mathbf{F} \rangle_\alpha = \mathbf{A}_\alpha \quad (2-73)$$

donde \mathbf{A}_α denota el término de colisiones

$$\mathbf{A}_\alpha = m_\alpha \int \mathbf{v} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{col} d^3v$$

Observamos que el cuarto término del lado izquierdo es la divergencia del tensor de presión, esto es, $\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\langle \mathbf{c}_\alpha\mathbf{c}_\alpha \rangle) = \nabla \cdot \mathbf{p}_\alpha$, por otro lado el tercer término del lado izquierdo de la ecuación (2-73) lo podemos escribir como

$$\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha) = \rho_{m\alpha}(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha[\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha)]$$

El quinto término de la izquierda de la ecuación (2.65), la fuerza \mathbf{F} la sustituimos por la fuerza de Lorentz, con esto, haciendo las sustituciones en la ecuación (2-65), tenemos

$$\underbrace{\rho_{m\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \rho_{m\alpha}(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha}_{=\rho_{m\alpha} \frac{d\mathbf{u}_\alpha}{dt}} + \underbrace{\mathbf{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha[\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha)]}_{=\mathbf{u}_\alpha S_\alpha} + \nabla \cdot \mathbf{p}_\alpha - n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}_\alpha \quad (2-74)$$

reagrupando

$$\rho_{m\alpha} \frac{d\mathbf{u}_\alpha}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{p}_\alpha - n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha \quad (2-75)$$

ignorando el término de producción S_α , tenemos

$$\boxed{\rho_{m\alpha} \frac{d\mathbf{u}_\alpha}{dt} = n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{A}_\alpha} \quad (2-76)$$

Esta ecuación establece la condición necesaria para preservar la conservación del momento, es la versión equivalente a la segunda ley de Newton para fluidos. Físicamente, esta ecuación nos

dice que la variación temporal del momento medio en cada elemento de fluido es debido a las fuerzas aplicadas a éste, más específicamente, el primer término corresponde a las fuerzas de Lorentz, el segundo a las fuerzas de presión, donde el tensor de presión que se puede dividir en la presión isotrópica y anisotrópica $\mathbf{p}_\alpha = p_\alpha \mathbf{1} + \mathbf{Y}_\alpha$ y el último término \mathbf{A}_α son las fuerzas debido a las colisiones entre partículas.

2.3.3 Conservación de la Energía

La ecuación de conservación de la energía se obtiene por medio de la sustitución de la propiedad física por la energía cinética de las partículas $g(\mathbf{v}) = m_\alpha v^2/2$, la ecuación resultante es

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} u_\alpha^2 \right) + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} \langle (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \rangle_\alpha \right] - n_\alpha \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rangle_\alpha = M_\alpha \quad (2-77)$$

donde M_α es la razón de cambio de la densidad de energía debido a las colisiones. La ecuación de conservación de la energía puede escribir de una forma alternativa, dado por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3p_\alpha}{2} \right) + \frac{3p_\alpha}{2} \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + (\mathbf{p}_\alpha \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha = M_\alpha - \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha + \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha \quad (2-78)$$

El primer término a la izquierda de la ecuación (2-78) expresa la razón de cambio de la densidad de energía térmica de las partículas en un elemento de volumen que se mueve con la velocidad media del fluido \mathbf{u}_α , el segundo término se interpreta como el cambio de la densidad de energía térmica debido a las partículas que entran al elemento de volumen con velocidad \mathbf{u}_α , el tercer término está relacionado con el trabajo realizado sobre la unidad de volumen por el tensor de presión que actúa sobre la superficie del elemento de fluido, el cuarto término representa el cambio en la densidad de energía térmica debido al flujo de calor, por último los términos de lado derecho representan la razón de cambio en la densidad de energía como consecuencia de las colisiones.

Como se mencionó al principio de esta sección es necesario una aproximación que simplifique la última ecuación asociada al momento más alto, es decir una aproximación a la ecuación de energía con el fin de reducir la cantidad de variables y cerrar el sistema de las ecuaciones de transporte. En este sistema cerrado despreciamos el término que involucra al vector de flujo de calor, con esto, la aproximación consiste en hacer $\nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha = 0$, lo que significa que los procesos que ocurren en el plasma son tales que no hay flujo de energía térmica además también consideramos isotropía en la presión. Esta aproximación también se llama aproximación adiabática^[12] y la ecuación de energía se expresa como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3p_\alpha}{2} \right) + \frac{5p_\alpha}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) = M_\alpha - \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha + \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha \quad (2-79)$$

Considerando la aproximación adicional de que el cambio de energía, como resultado de las colisiones es insignificante, la ecuación de energía (2-79) se reduce a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3p_\alpha}{2} \right) + \frac{5p_\alpha}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) = 0 \quad (2-80)$$

usando la ecuación de continuidad podemos escribir la última expresión como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3p_\alpha}{2} \right) - \frac{5p_\alpha}{2\rho_{m\alpha}} \frac{d\rho_{m\alpha}}{dt} = 0 \quad (2-81)$$

por tanto, integrando esta ecuación nos da

$$\boxed{p_\alpha \rho_{m\alpha}^{-5/3} = \text{constante}} \quad (2-82)$$

Esta es la ecuación de energía adiabática para un plasma con tres grados de libertad de las partículas (traslación) y cierra el conjunto de ecuaciones de transporte.

El conjunto de ecuaciones de transporte dado por la ecuación de conservación de masa (2-68), de momento (2-76) y de energía adiabática (2-82) es conocido como modelo de plasma tibio^[12]; ahora se hará la transición de una descripción de varias especies dado por las ecuaciones de transporte a una descripción de un monofluido conductor de una sola especie global, esto da como inicio a lo que se conoce como magnetohidrodinámica.

2.4 Magnetohidrodinámica

La descripción de varias especies α de partículas dadas por las ecuaciones de transporte pueden transformarse en ecuaciones que simplifiquen más la evolución de un fluido altamente conductor para una sola especie global, junto con sus cantidades globales asociadas que definiremos más adelante. Esta descripción de monofluido altamente conductor en presencia de campos electromagnéticos es conocido como magnetohidrodinámica^[3], la magnetohidrodinámica es básicamente dinámica de fluidos clásica con la complicación adicional de que se supone que el fluido es conductor eléctrico y, por lo tanto, capaz de generar e interactuar con campos electromagnéticos. Esta teoría no proporciona información sobre la función de distribución y no considera la física relacionada con la propagación de ondas^[10], además es necesario considerar otras restricciones de esta teoría ya que es una teoría con condiciones de variaciones lentas (esto se verá más adelante) y grandes escalas espaciales. Gran parte del interés de esta teoría es que ciertos fenómenos del plasma, especialmente los de fusión se modelan utilizando un tratamiento de un monofluido conductor^[14].

Para unificar el tratamiento de varias especies en una sola cantidad, definimos las siguientes cantidades globales del plasma, esto es, cantidades que contienen a las dos especies en una sola variable global

$$\rho = \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \quad (2-83)$$

$$\rho_c = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \quad (2-84)$$

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \quad (2-85)$$

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} / \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \quad (2-86)$$

Así como se definió la velocidad térmica en términos de la velocidad media \mathbf{u}_{α} se define la velocidad térmica \mathbf{c}_{α}^* relativa a la velocidad global \mathbf{u}

$$\mathbf{c}_{\alpha}^* = \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{u} \quad (2-87)$$

junto con las cantidades térmicas asociadas

$$\frac{3}{2} k T_{\alpha}^* = \frac{1}{2} m_{\alpha} \langle c_{\alpha}^{*2} \rangle \quad (2-88)$$

$$\mathbf{p}_{\alpha}^* = n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \mathbf{c}_{\alpha}^* \mathbf{c}_{\alpha}^* \rangle \quad (2-89)$$

la diferencia entre la velocidad global y la velocidad media se define como la velocidad de difusión

$$\mathbf{w}_{\alpha} = \mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u} \quad (2-90)$$

de la ecuación (2-88) se sigue que $\mathbf{c}_{\alpha}^* = \mathbf{c}_{\alpha} + \mathbf{w}_{\alpha}$, con esto, la temperatura y el tensor de presión se expresan como

$$T_{\alpha}^* = T_{\alpha} + m_{\alpha} \frac{w_{\alpha}^2}{3k} \quad (2-91)$$

$$\mathbf{p}_{\alpha}^* = \mathbf{p}_{\alpha} + n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \quad (2-92)$$

la presión total es $\mathbf{p} = \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha}^*$. Definidas las cantidades globales, obtenemos la ecuación de conservación de masa global sumando sobre las especies α de la ecuación (2-68)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \right) + \nabla \cdot \left(\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \right) = 0 \quad (2-93)$$

usando las ecuaciones (2-83) y (2-86) obtenemos la conservación global de masa

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0} \quad (2-94)$$

multiplicando la ecuación (2-68) por q_α y sumando sobre las especies, obtenemos la conservación global de la corriente

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (2-95)$$

La ecuación de momento global se obtiene sumando la ecuación (2.76) sobre las especies α

$$\sum_{\alpha} \rho_{m\alpha} \frac{d\mathbf{u}_{\alpha}}{dt} + \sum_{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{p}_{\alpha} - \rho_c \mathbf{E} - \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2-96)$$

donde los términos debido a las colisiones entre iones y electrones $\mathbf{A}_{e,i}$ se cancelan asumiendo que para un gas altamente ionizado sin partículas neutras, el momento total de las colisiones entre iones y electrones se conserva^[14], esto es

$$\mathbf{A}_i = -\mathbf{A}_e \quad (2-97)$$

Los términos primero y segundo de la ecuación (2-96) se reescriben como

$$\sum_{\alpha} \rho_{m\alpha} \frac{d\mathbf{u}_{\alpha}}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha} \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) \quad (2-98)$$

$$\sum_{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{p}_{\alpha} = \nabla \cdot \mathbf{p} - \sum_{\alpha} \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \quad (2-99)$$

sustituyendo (2-98) y (2-99) en (2-96) obtenemos la ecuación global de momento

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{p} - \rho_c \mathbf{E} - \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0.} \quad (2-100)$$

La derivación de la ecuación de momento global para el plasma implica tener que derivar una última ecuación que acopla la corriente con los campos electromagnéticos, esta ecuación es la ley generalizada de Ohm. Para derivar esta ecuación multiplicamos a la ecuación de momento (2-76) por q_α/m_α y sumando sobre las especies

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \frac{d\mathbf{u}_{\alpha}}{dt} + \sum_{\alpha} \nabla \cdot \left(\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{p}_{\alpha} \right) - \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B}) = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{A}_{\alpha} \quad (2-101)$$

manipulando de forma similar que para las ecuaciones (2-98) y (2-99), el resultado es

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \frac{d\mathbf{u}_{\alpha}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \sum_s \nabla \cdot (n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) \\ \sum_{\alpha} \nabla \cdot \left(\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{p}_{\alpha} \right) &= \sum_{\alpha} \nabla \cdot \left(\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{p}_{\alpha}^* \right) - \sum_{\alpha} \nabla \cdot (n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) \\ &\quad + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{u} - \rho_c \mathbf{u} \mathbf{u}).\end{aligned}$$

sustituyendo estas últimas dos expresiones en la ecuación (2-101), tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{u} - \rho_c \mathbf{u} \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left(\sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{p}_{\alpha}^* \right) - \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B}) = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{A}_{\alpha} \quad (2-102)$$

de la neutralidad macroscópica $\rho_c = 0$, tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{u}) + e \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{p}_i^*}{m_i} - \frac{\mathbf{p}_e^*}{m_e} \right) - \frac{ne^2}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \frac{ne^2}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{A}_{\alpha} \quad (2-103)$$

la ecuación anterior es la ley generalizada de Ohm. Para simplificar esta ecuación a una versión más familiar es necesario considerar las siguientes restricciones: (1) el gas consiste solo en electrones y una sola especie de iones, (2) la neutralidad se preserva ($n_e = n_i = n$), (3) el término de colisiones se considera un término lineal que depende de la diferencia de velocidades de las especies, (4) los términos que involucran el cociente m_e/m_i se desprecian debido a la mayor masa de los iones relativa a los electrones y (5) la velocidad global es aproximadamente igual a la velocidad de los iones. De las restricciones (1) y (5), las cantidades globales, ecuaciones (2-85) y (2-86), quedan

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_i \quad (2-104)$$

$$\mathbf{J} = ne(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \quad (2-105)$$

$$\mathbf{u}_e \approx \mathbf{u} - \frac{\mathbf{J}}{ne} \quad (2-106)$$

de las restricciones (3) y (4)

$$\frac{e}{m_e} \mathbf{A}_e = nev(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) = \nu \mathbf{J} \quad (2-107)$$

$$\frac{\mathbf{p}_i^*}{m_i} - \frac{\mathbf{p}_e^*}{m_e} \approx -\frac{\mathbf{p}_e^*}{m_e} \quad (2-108)$$

donde ν es la frecuencia de colisiones. El cuarto y quinto término del lado izquierdo de la ecuación (2-103) se simplifican como

$$-\frac{ne^2}{m_e} \left(\mathbf{u}_e \times \mathbf{B} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{u}_i \times \mathbf{B} \right) = -\frac{ne^2}{m_e} \left[\left(\mathbf{u} - \frac{\mathbf{J}}{ne} \right) \times \mathbf{B} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right] \quad (2-109)$$

$$= -\frac{ne^2}{m_e} (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \mathbf{J} \times \mathbf{B}/ne) \quad (2-110)$$

sustituyendo en la ecuación (2-103)

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{u}) - \frac{e}{m_e} \nabla \cdot \mathbf{p}_e^* - \frac{ne^2}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{e}{m_e} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\nu \mathbf{J} \quad (2-111)$$

multiplicando por $-\frac{m_e}{ne^2}$ la ecuación anterior se escribe como

$$-\frac{m_e}{ne^2} \left[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{u}) \right] + \frac{1}{ne} \nabla \cdot \mathbf{p}_e - \frac{1}{ne} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma_e} \quad (2-112)$$

donde $\sigma_e = \frac{ne^2}{m_e \nu}$ es la conductividad eléctrica. Haciendo un análisis dimensional^[15] de los términos de la ecuación (2-112) con respecto al término de "inducción" $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$, obtenemos

$$\frac{|\text{Término de batería}|}{|\text{Término de inducción}|} = \frac{|(1/ne)\nabla \cdot \mathbf{p}_e|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{B}|} \approx \frac{r_{L,i}}{L} \quad (2-113)$$

$$\frac{|\text{Término de inercia}|}{|\text{Término de inducción}|} = \frac{|(\frac{m_e}{ne^2})(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{u}))|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{B}|} \approx \frac{\omega}{\omega_{fp}} \quad (2-114)$$

$$\frac{|\text{Término de Hall}|}{|\text{Término de inducción}|} = \frac{|(1/ne)\mathbf{J} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{B}|} \approx \frac{r_{L,i}}{L} \quad (2-115)$$

donde las variaciones espaciales y temporales fueron sustituidas por las aproximaciones $\partial/\partial t \rightarrow 1/\tau = \omega$, $\partial/\partial x \rightarrow 1/L$ respectivamente que representan las variaciones lentas del plasma, debido de esta relativa diferencia entre los términos se desprecian y se obtiene la ecuación reducida de la ley de Ohm

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})} \quad (2-116)$$

Las ecuaciones (2-94), (2-95), (2-100), (2-116) y la ecuación adiabática (2-82) son las ecuaciones de la teoría magnetohidrodinámica ($\rho_c = 0$ y asumiendo presión hidroestática):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2-117)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2-118)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p - \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2-119)$$

$$\mathbf{J} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2-120)$$

$$p\rho^{-5/3} = C \quad (2-121)$$

en conjunto con las ecuaciones de Maxwell.

2.4.1 Régimen físico de validación de la Magnetohidrodinámica

Las ecuaciones magnetohidrodinámicas derivadas en este capítulo son simplificaciones de las ecuaciones de múltiples fluidos más generales que por sí mismas son momentos de la ecuación cinética. Cada uno de los pasos que conducen a estos conjuntos de ecuaciones se basa en simplificadores que limitan su aplicabilidad. Las condiciones más básicas que validan el régimen físico de la magnetohidrodinámica es que la frecuencia característica ω de cualquier cambio debe ser menor que la frecuencia del plasma y menor que la frecuencia ciclotrónica de los iones

$$\omega \ll \omega_{fp}, \omega_{c,i} \quad (2-122)$$

de la misma forma, la longitud caracterísitca L debe ser mayor que el radio de Larmor de los iones

$$L \gg r_{L,i} \quad (2-123)$$

Para los plasmas usados en fusión nuclear obtenemos la frecuencia caracaterística ω dado por

$$\omega = \frac{v_{T,e}}{L} \quad (2-124)$$

donde $L = 2\text{m}$ es el radio menor de un toroide (ITER), con esto podemos aproximar la velocidad $v_{T,e}$ a la velocidad térmica de los electrones para una temperatura de 150 millones de Kelvin, con lo que se obtiene la frecuencia ω

$$v_{T,e} = \sqrt{\frac{3kT_e}{m_e}} = 5.7 \cdot 10^7 \text{m/s} \Rightarrow \omega = 2.85 \cdot 10^7 \text{s}^{-1} \quad (2-125)$$

la frecuencia del plasma y la frecuencia ciclotrónica tiene como valor numérico $\omega_{fp} = 8.0 \cdot 10^{11} \text{s}^{-1}$ y $\omega_{c,i} = 1.2 \cdot 10^9 \text{s}^{-1}$, donde se usó el campo magnético dado por $B = 5\text{T}$ y $n_e = 2.0 \cdot 10^{20} \text{m}^{-3}$ por lo que la restricción (2-122) queda satisfecha. El radio de Larmor de los iones tiene como valor

$$r_{L,i} = 5.0 \cdot 10^{-3} \text{m} \quad (2-126)$$

donde la restricción (2-123) queda satisfecha. Por tanto, la magnetohidrodinámica está restringida a frecuencias muy bajas y grandes escalas espaciales.

Ya que no estamos en un régimen relativista, la corriente de desplazamiento de la ley de Ampere es despreciable, haciendo el cociente dimensional

$$\frac{|(1/c^2)\partial\mathbf{E}/\partial t|}{|\nabla \times \mathbf{B}|} \approx \frac{1}{c^2} \frac{E L}{B \tau} \approx \frac{1}{c} \left(\frac{L}{\tau}\right)^2 \approx \left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1 \quad (2-127)$$

El cociente entre las velocidades es de $v/c \propto 10^{-4}$, por tanto las ecuaciones de Maxwell reducidas que se acoplan a las ecuaciones de la magnetohidrodinámica son

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2-128)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2-129)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2-130)$$

2.4.2 Magnetohidrodinámica Ideal

Por último de esta sección, cuando la conductividad eléctrica es infinita $\sigma \rightarrow \infty$ (plasma perfectamente conductor), la ley de Ohm se reduce a

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2-131)$$

La aproximación en la que se emplea esta forma de la ley de Ohm se denomina habitualmente "magnetohidrodinámica ideal". La justificación de la ecuación (2-131) es resultado del cociente dimensional entre el término óhmico y el término de inducción^[15]

$$\frac{|\frac{J}{\sigma}|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{B}|} = \frac{1}{\sigma \mu_0 L u} \ll 1 \quad (2-132)$$

Debido que para un plasma perfectamente conductor $\sigma \rightarrow \infty$.

Un resultado importante de la magnetohidrodinámica se obtiene sustituyendo la ley de Ohm (2-131) en la ecuación de Faraday (2-129)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2-133)$$

esta ecuación implica que en un fluido perfectamente conductor, las líneas de campo magnético se mueven exactamente junto con el fluido, en lugar de simplemente difundirse, este resultado es consecuencia del teorema de Alfvén.

3 Equilibrio del Plasma y Ecuación de Grad-Shafranov

3.1 Equilibrio de un Plasma

Hasta aquí se ha descrito la dinámica de un plasma simplificado por medio de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, ahora es necesario considerar al plasma confinado dentro de una geometría específica, existen diversas geometrías que son utilizadas en la investigación de fusión nuclear de plasma, entre ellas está el cilindro y el toroide. El estudio de un plasma confinado dentro de un cilindro presenta un problema ya que debido a su finitud, el fluido abandona la geometría por sus extremos, por lo que una medida razonable es cerrar el cilindro en un toroide, evitando así, la salida del fluido.

Para abordar este tratamiento de un plasma en un toroide consideremos un plasma en equilibrio, esto significa simplificar aún más las ecuaciones de la magnetohidrodinámica obtenidas en la sección anterior, (2-117)-(2-121), haciendo la velocidad del fluido $\mathbf{u} = 0$ y eliminando las variaciones temporales $\partial/\partial t = 0$, con esto las ecuaciones de equilibrio o de la magnetohidrostática son

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3-3)$$

El equilibrio del plasma en una geometría toroidal se divide en dos contribuciones: equilibrio de presión radial y equilibrio de fuerza toroidal, esto es lo que representa la ecuación (3-1), para que esto se cumpla deben existir campos magnéticos y corrientes que puedan equilibrar esta fuerza de expansión radial.

Un resultado importante de las ecuaciones anteriores se refiere al concepto de superficies de flujo, en un toroide bajo condiciones de equilibrio, la presión es constante sobre superficies cilíndricas concéntricas como se muestra en la Figura 3-1.

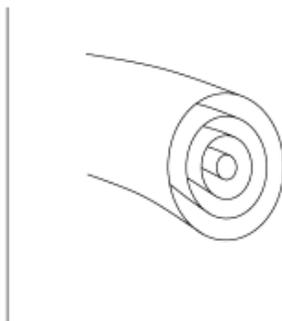


Figura 3-1. Superficies a presión constante para un plasma confinado en un toroide.

De la ecuación (3-1) observamos inmediatamente que

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0 \quad (3-4)$$

La consecuencia de esto es que las líneas de campo magnético deben permanecer en las superficies de presión constante, esto es, no hay componente de \mathbf{B} perpendicular a la superficie. Análogamente, tenemos también de la ecuación (3-1)

$$\mathbf{J} \cdot \nabla p = 0 \quad (3-5)$$

Concluimos que tampoco hay componente de \mathbf{J} perpendicular a los contornos de presión, por tanto al igual que el campo magnético, las líneas de corriente se encuentran en las superficies de presión constante. Del teorema de Hopf^[16] se puede demostrar que la forma geométrica más simple para una superficie a presión constante que satisface las restricciones anteriores es un toroide. El teorema de Hopf establece que “si un campo vectorial acotado que no desaparece (\mathbf{J} y \mathbf{B} , en nuestro caso) se encuentra sobre una superficie lisa (la superficie a p constante), entonces la superficie debe ser toroidal”. La corriente y el campo magnético forman líneas helicoidales alrededor del toroide, como se muestra en la Figura 3-2. En la práctica para obtener estas líneas de campo helicoidal es necesario campos magnéticos externos.

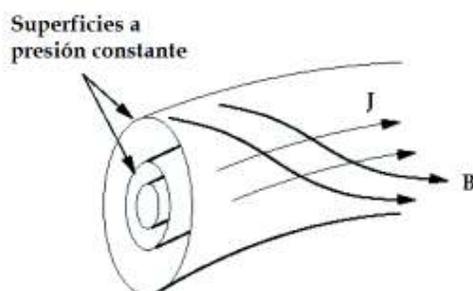


Figura 3-2. Permanencia de las líneas de flujo magnético y de corriente en la superficies de presión constante. Esta configuración define la geometría toroidal donde el plasma está confinado en equilibrio.

La ecuación $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implica que en una determinada superficie magnética las líneas de campo magnético no pueden cruzarse entre sí, lo mismo para la corriente, sin embargo, las líneas de campo magnético y las corrientes eléctricas, por separado, que se encuentran en las superficies isobáricas deben cruzarse de tal manera que $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ sea igual a ∇p , ecuación (3-1) y, por lo tanto, el plasma queda confinado, estas superficies, tanto magnéticas como de corrientes, son conocidas como superficies de flujo.

3.2 Ecuación de Grad-Shafranov

Habiendo definido el confinamiento magnético del plasma, se usan coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) y se asume independencia en la coordenada ϕ , esto es, $\partial/\partial\phi = 0$ con esto, se obtienen nuevas cantidades físicas que quedan determinadas por las superficies de flujo. El flujo magnético poloidal y toroidal se obtienen de las componentes del campo magnético $\mathbf{B} = (B_r, B_\phi, B_z)$ que cruzan los elementos de área poloidal $d\mathbf{S}_P$ y toroidal $d\mathbf{S}_T$ como se muestra en la Figura (3-3), con esto el flujo poloidal y toroidal quedan expresados como

$$\psi_P = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_P \quad (3-6)$$

$$\psi_T = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_T \quad (3-7)$$

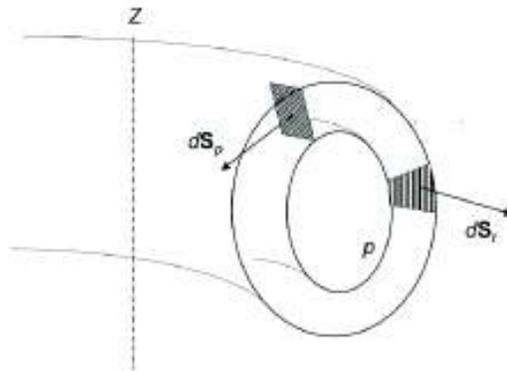


Figura 3-3. Elementos de área dentro del toroide por donde cruza el flujo magnético poloidal y toroidal.

De forma similar, se define la corriente poloidal y toroidal

$$I_T = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}_T \quad (3-8)$$

$$I_P = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}_P \quad (3-9)$$

La simetría en ϕ implica que la ecuación (3-3) se puede escribir como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (3-10)$$

Si representamos al campo magnético en términos del potencial vectorial $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, las componentes poloidales del campo magnético son

$$B_r = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \quad (3-11)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) \quad (3-12)$$

la forma de estas ecuaciones motiva la definición de la función de flujo $\psi(r, z) = rA_\phi$ tal que

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3-13)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3-14)$$

Las ecuaciones (3-13) y (3-14) implican que $\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0$, esto es, las superficies magnéticas son superficies a ψ constante. De la condición $\mathbf{B} \cdot \nabla p$ se sigue, como es de esperarse, que las superficies de presión son superficies de flujo $p = p(\psi)$. El campo magnético poloidal \mathbf{B}_P y total \mathbf{B} se escriben como

$$\mathbf{B}_P = \frac{1}{r} \nabla \psi \times \mathbf{e}_\phi \quad (3-15)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_P + B_\phi \mathbf{e}_\phi \quad (3-16)$$

La función de flujo ψ está relacionado con el flujo magnético poloidal a través de un disco de radio R_a centrado en el origen a una altitud $z = 0$ hasta un radio R_b (Figura 3-4)

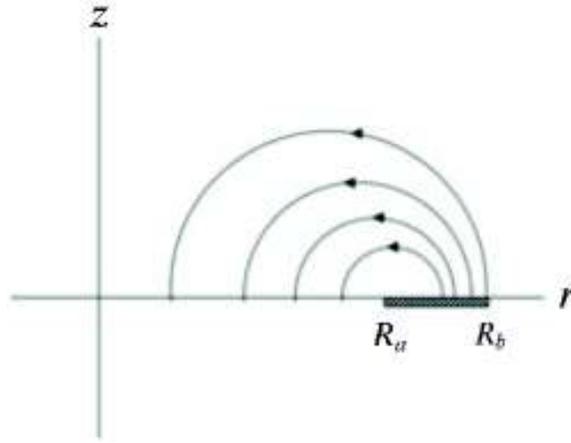


Figura 3-4. Líneas de campo magnético que atraviesan el disco de radio $R_a < r < R_b$ en el plano $z = 0$.

entonces

$$\psi_P = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{R_a}^{R_b} r dr B_z(r, 0) \quad (3-17)$$

$$= 2\pi \int_{R_a}^{R_b} r dr \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3-18)$$

$$= 2\pi \psi(R_b, 0) \quad (3-19)$$

donde se definió que $\psi(R_a, 0) = 0$, esta cantidad define el eje magnético. Con esto, podemos etiquetar a las superficies de flujo con la función de flujo ψ . Ahora se procede a derivar la ecuación que describe la distribución de la función de flujo ψ para un toroide bidimensional que contiene al plasma. De la ecuación (3-1), la componente ϕ es

$$J_z B_r - J_r B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0 \quad (3-20)$$

de la ley de Ampere las componentes J_r y J_z se expresan en términos del campo magnético

$$J_r = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \quad (3-21)$$

$$J_z = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial (r B_\phi)}{\partial r} \quad (3-22)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3-22) y (3-21) en la ecuación (3-20), tenemos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) B_r + \frac{\partial B_\phi}{z} B_z = 0 \quad (3-23)$$

definiendo una nueva función $F = r B_\phi$, la ecuación anterior se escribe

$$\frac{\partial F}{\partial r} B_r + \frac{\partial F}{\partial z} B_z = 0 \quad (3-24)$$

lo que implica que $\mathbf{B} \cdot \nabla F = 0$. Debido a que $\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0$ se sigue que la función F se puede expresar como una función de ψ , esto es, $F = F(\psi)$. La función F está relacionada con la corriente poloidal total, ecuación (3-9), que fluye desde el origen radial $r = 0$ hasta un radio arbitrario R_b

$$I_P = \int \mathbf{J}_P \cdot d\mathbf{S} \quad (3-25)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{R_b} r dr J_z(r, 0) \quad (3-26)$$

$$= 2\pi \int_0^{R_b} r dr \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \quad (3-27)$$

$$= 2\pi r B_\phi(R_b, 0) = 2\pi F(\psi) \quad (3-28)$$

Usando lo anterior el campo magnético puede representarse en la forma

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r} \nabla \psi \times \mathbf{e}_\phi + \frac{F(\psi)}{r} \mathbf{e}_\phi. \quad (3-29)$$

Por último, considerando la componente r de la ecuación (3-1), esto es dado por

$$J_\phi B_z - J_z B_\phi = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3-30)$$

de la ley de Ampere obtenemos la ecuación para J_ϕ

$$\mu_0 J_\phi = \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \quad (3-31)$$

$$= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3-32)$$

$$= -\frac{1}{r} \Delta^* \psi \quad (3-33)$$

donde el operador Δ^* se define como

$$\Delta^* = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3-34)$$

de nuevo de la ley de Ampere obtenemos la ecuación para J_z

$$\mu_0 J_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{dF}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3-35)$$

sustituyendo las relaciones anteriores en la ecuación (3-30) obtenemos

$$-\frac{1}{\mu_0 r} \Delta^* \psi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\mu_0 r} \frac{dF}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \left(\frac{F(\psi)}{r} \right) = \frac{dp}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial p} \quad (3-36)$$

reagrupando

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi} \quad (3-37)$$

La ecuación (3.37) es conocida como ecuación de Grad-Shafranov, es una ecuación no lineal que expresa el balance de fuerzas en un toroide bidimensional para un plasma en equilibrio cuyas soluciones ψ nos dan la distribución de las líneas de flujo alrededor del eje magnético ($\psi = 0$).

4 Soluciones de Soloviev y Resultados

4.1 Soluciones de Soloviev

Los plasmas de fusión confinados magnéticamente como los generados en tokamaks y estelarizadores generan líneas de flujo magnético cuya forma geométrica se puede caracterizar, sin adentrarnos en detalles analíticos, las soluciones de la ecuación de Grad-Shafranov queda en términos de las líneas de flujo ψ , una solución particular es la de Soloviev dado por el texto de Sébastien^[4]

$$\psi(r, z) = Az^2(r^2 + BR_m^2) + C(r^2 - R_m)^2 \quad (4-1)$$

Esta solución depende de 3 parámetros (A,B,C) que definen la forma de la función de flujo en el plano poloidal (cantidades de forma) y $(r = R_m, z = 0)$ es la coordenada del eje magnético. Estas líneas de flujo se caracterizan por medio de parámetros geométricos, estos parámetros se obtienen de la curva paramétrica propuesta por Manickam^[1]:

$$R = R_0 - b + (a + b \cos \theta) \cos(\theta + \delta \sin \theta) \quad (4-2)$$

$$Z = \kappa a \sin \theta \quad (4-3)$$

donde R_0 es el radio mayor del toroide, a el radio menor, κ la elipticidad ($\kappa = 1$ para un círculo), δ la triangularidad y b la indentación. Con el objetivo de relacionar las cantidades de forma con los parámetros geométricos se utilizaron métodos numéricos computacionales (Python). Primero se generaron las líneas de flujo dado por la solución (4-1) variando cada una de las cantidades de forma por separado manteniendo las otras fijas, esta variación se realizó tal que hubiera una marcada diferencia en la forma de las líneas de flujo y estas se mantuvieran compactas (líneas de contorno cerradas) como se muestra en la Figura 4-1 para el caso de la cantidad de forma A

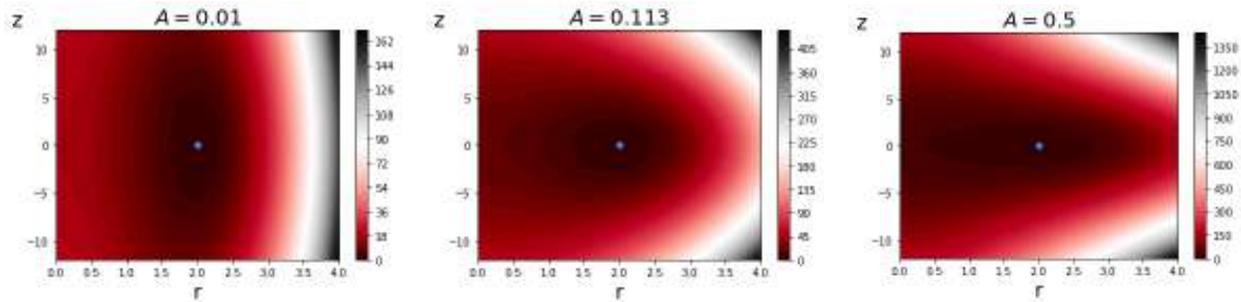


Figura 4-1. Función de flujo ψ con variación de la cantidad de forma A con $B = 0.5$ y $C = 1$. El punto azul es el centro del eje magnético donde $\psi = 0$.

se extrajeron las líneas de flujo más cercanas al eje magnético, la última (línea de flujo más exterior) es con la que se obtuvieron los parámetros geométricos, estas líneas exteriores se observan en la Figura 4-2:

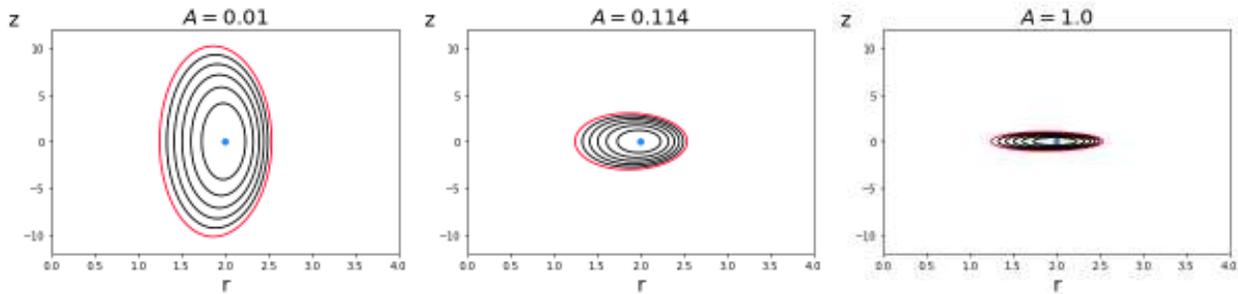


Figura 4-2. Identificación de líneas de contorno exterior de ψ (línea roja) variando A .

La metodología que se usó para encontrar los valores κ , a , δ y b más aproximados a las líneas de contorno exterior fue la de generar matrices y vectores de datos en intervalos dado por $[a_{min}, a_{max}]$, $[\kappa_{min}, \kappa_{max}]$, $[\delta_{min}, \delta_{max}]$ y $[b_{min}, b_{max}]$ donde el criterio usado para determinar los mejores valores fue la de minimizar la distancia entre las líneas de flujo exterior y las curvas paramétricas, el primer parámetro que se minimiza es el radio menor a , ya que este define los extremos radiales para $z = 0$, después se varían los demás parámetros (κ , δ , b), debido a la simetría, tanto de las líneas de flujo como de la curva paramétrica alrededor de $z = 0$, se procedió a minimizar solo la parte superior como se muestra en Figura 4-3, donde LCE es la línea de contorno exterior y CP(R,Z) es la curva paramétrica:

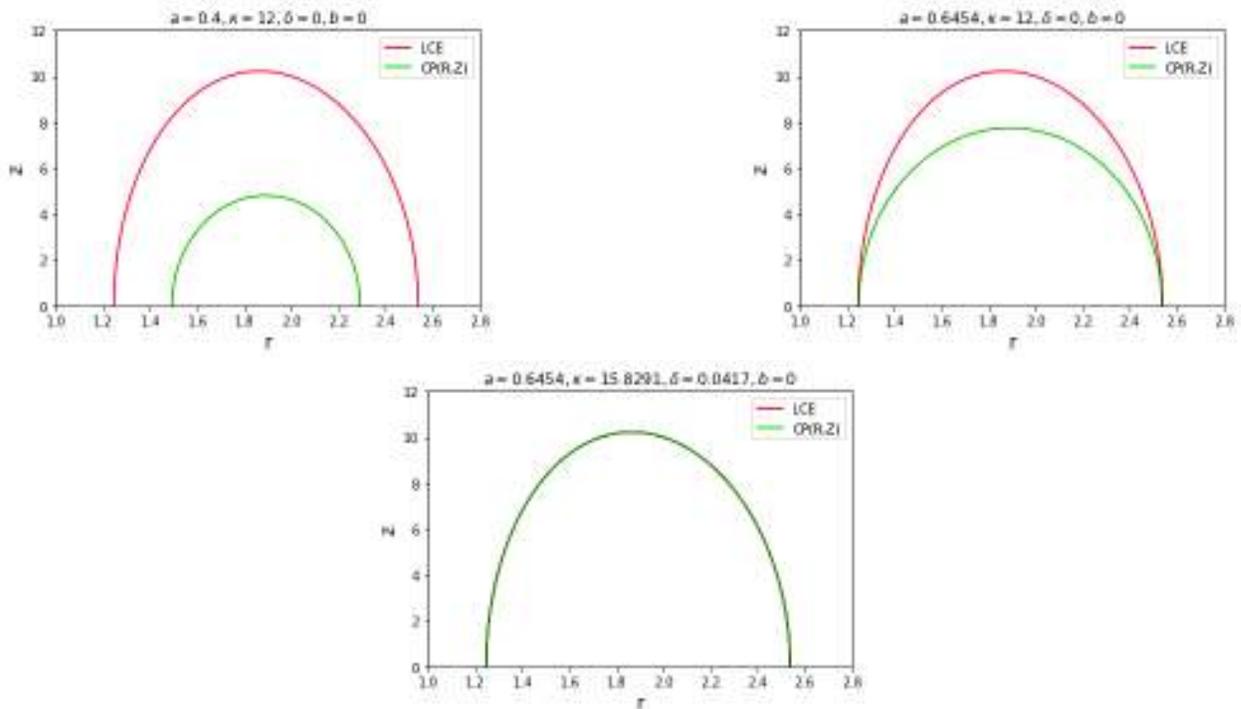


Figura 4-3. Variación de a, κ, δ y b tal que minimiza la distancia entre las dos curvas. Cuando el proceso de minimización concluye, los parámetros geométricos quedan determinados para un valor de la cantidad de forma.

Los resultados completos se obtienen iterando este procedimiento para un intervalo de valores de A entre $[0.01, 5]$ ($B = 0.5$ y $C = 1.0$) y ajustando los datos a una función de ajuste $y = f(x)$, se obtiene la Figura 4-4

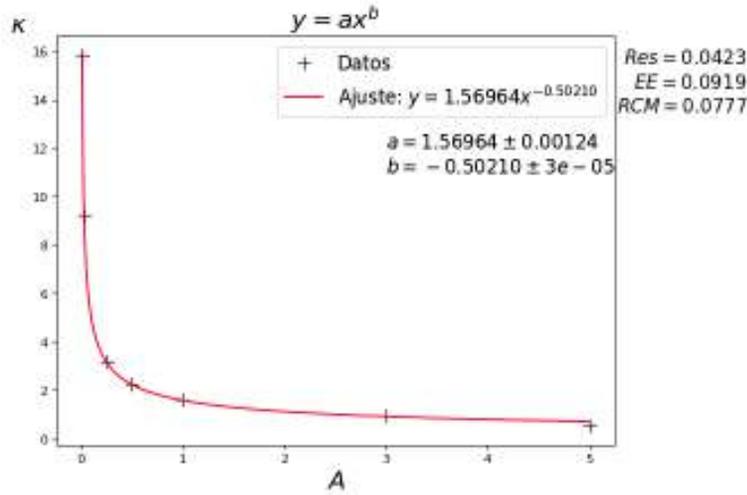


Figura 4-4. Correlación entre cantidad de forma A y los parámetros geométricos. El único parámetro que cambia es la elipticidad κ . Res es la diferencia al cuadrado de los datos y la función de ajuste; EE es el error estándar de regresión y RCM es la raíz cuadrática media.

Las líneas de contorno exterior al variar la cantidad de forma B se muestran en la Figura 4-5.

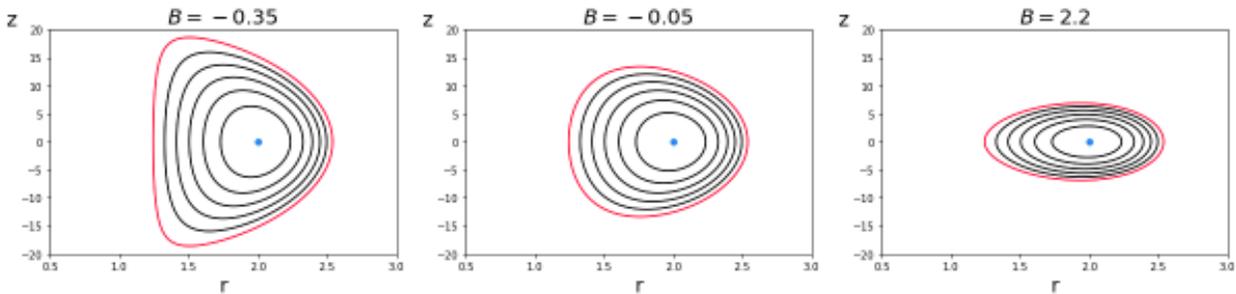


Figura 4-5. Variación del parámetro B con $A=0.05$ y $C = 1.0$.

de la Figura 4-5 se muestra la diferencia con las líneas de flujo cuando se varía B . Siguiendo el mismo procedimiento iterativo que se hizo con A obtenemos los resultados para B (Figura 4-6):

Los resultados asociados a la cantidad de forma C se muestra en la Figura 4-7:

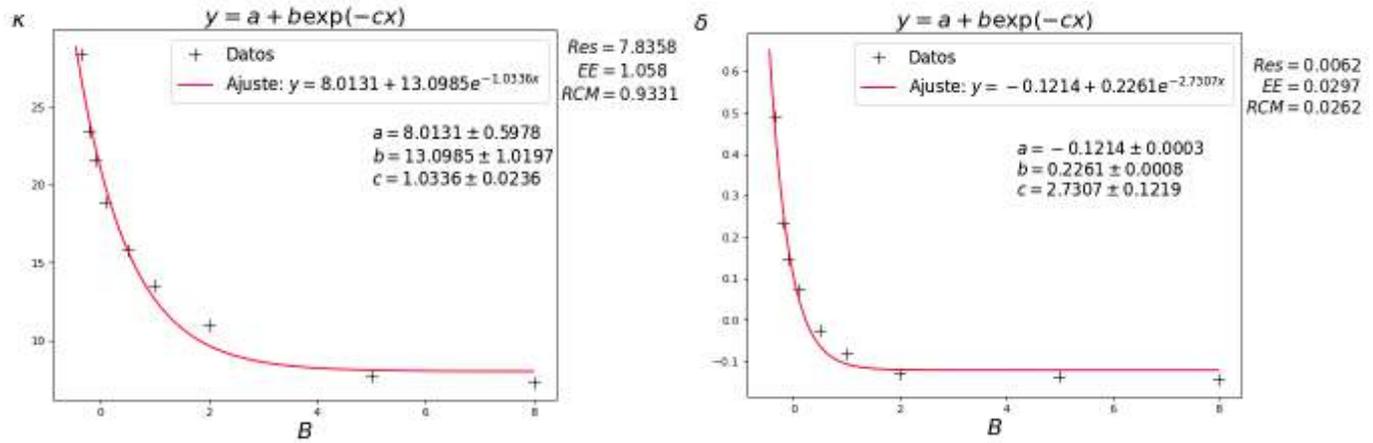


Figura 4-6. Resultados al variar la cantidad de forma B.

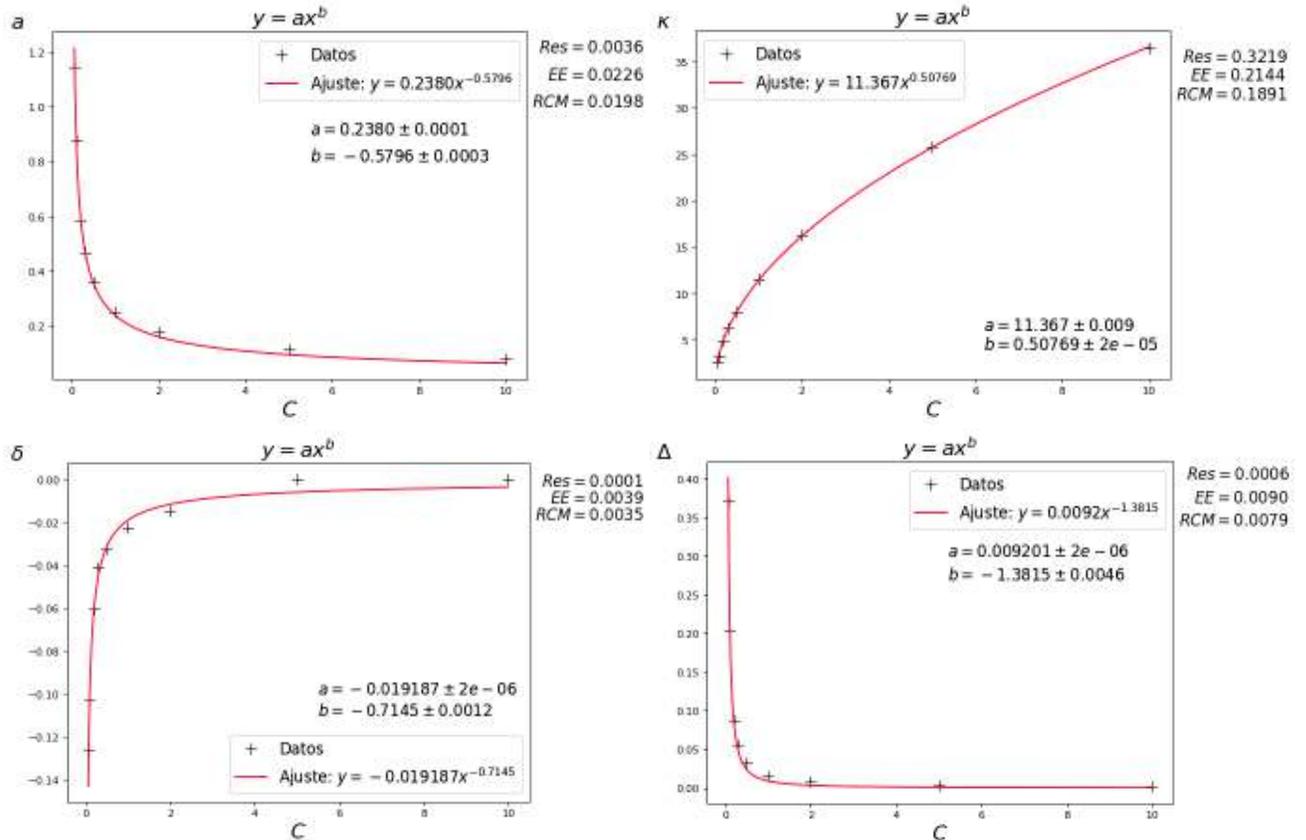


Figura 4-7. Resultados obtenidos al variar la cantidad de forma C.

donde Δ es el desplazamiento de Shafranov, esta cantidad es la distancia entre el eje magnético y el centro geométrico de las líneas de flujo exterior.

Otra solución de la literatura^[17] está dada por

$$\psi(r, z) = \left[r - \frac{\epsilon}{2}(1 - r^2) \right]^2 + \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4} \right) [1 + \tau \epsilon r(2 + \epsilon r)] \frac{z^2}{\sigma^2} \quad (4-4)$$

donde τ , σ y ϵ son las cantidades de forma para esta solución. Aplicando el mismo procedimiento que se hizo con la solución anterior, se obtuvieron los resultados (Figura 4-8):

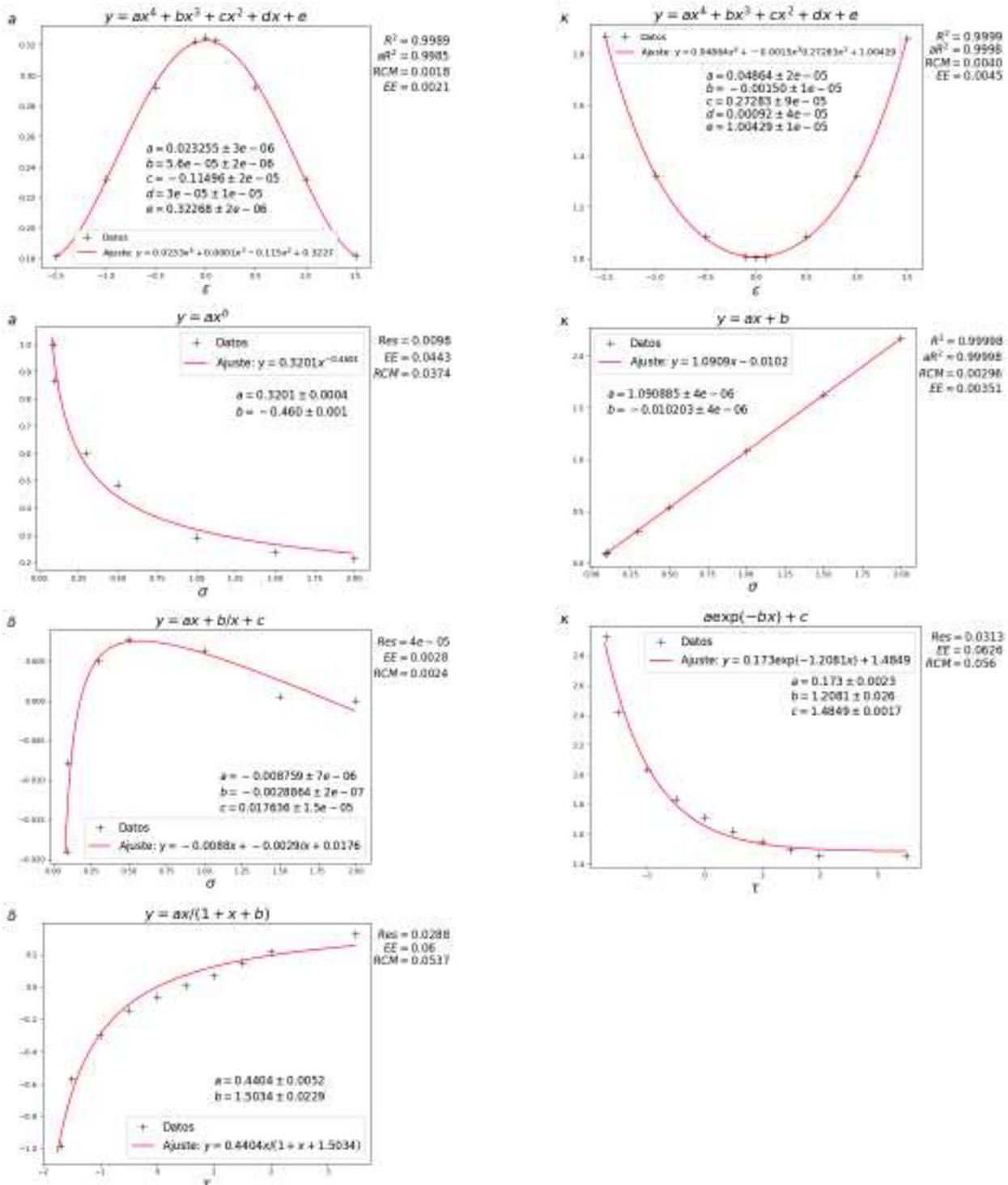


Figura 4-8. Resultados obtenidos asociados a la solución (4-4)

donde R^2 es el coeficiente de correlación y aR^2 es el coeficiente de correlación ajustado para

las regresiones lineales. Los resultados simplificados se resumen en la siguientes tablas:

Resultados solución (4-1)				
Cantidad de forma	Parámetro geométrico	Función de ajuste $y = f(x)$	Estadística	
A	κ	ax^b	Res = 0.0423	$a = 1.56964 \pm 0.00124$
			EE = 0.0919	$b = -0.50210 \pm 3E - 05$
			RCM = 0.0777	
B	κ	$a + b \exp(-cx)$	Res = 7.8358	$a = 8.0131 \pm 0.5978$
			EE = 1.0580	$b = 13.0985 \pm 1.0197$
			RCM = 0.9331	$c = 1.0336 \pm 0.0236$
B	δ	$a + b \exp(-cx)$	Res = 0.0062	$a = -0.1214 \pm 0.0003$
			EE = 0.0297	$b = 0.2261 \pm 0.0008$
			RCM = 0.0262	$c = 2.7307 \pm 0.1219$
C	a	ax^b	Res = 0.0036	$a = 0.2380 \pm 0.0001$
			EE = 0.0226	$b = -0.5796 \pm 0.0003$
			RCM = 0.0198	
C	κ	ax^b	Res = 0.3219	$a = 11.3670 \pm 0.0088$
			EE = 0.2144	$b = 0.50769 \pm 0.00002$
			RCM = 0.1891	
C	δ	ax^b	Res = 0.0001	$a = -0.019187 \pm 0.000002$
			EE = 0.0039	$b = -0.7145 \pm 0.0012$
			RCM = 0.0035	
C	Δ	ax^b	Res = 0.0006	$a = 0.009201 \pm 0.000002$
			EE = 0.0090	$b = -1.3815 \pm 0.0046$
			RCM = 0.0079	

Resultados solución (4-4)				
Cantidad de forma	Parámetro geométrico	Función de ajuste $y = f(x)$	Estadística	
ϵ	a	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	$R^2 = 0.9989$	$a = 0.023255 \pm 0.000003$
			$aR^2 = 0.9985$	$b = 0.000056 \pm 0.000002$
			RCM = 0.0018	$c = -0.11496 \pm 0.00002$
			EE = 0.0021	$d = 0.00003 \pm 0.00001$
				$e = 0.322680 \pm 0.000002$
ϵ	κ	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	$R^2 = 0.9999$	$a = 0.04864 \pm 0.00002$
			$aR^2 = 0.9998$	$b = -0.00150 \pm 0.00001$
			RCM = 0.0040	$c = 0.27283 \pm 0.00009$
			EE = 0.0045	$d = 0.00092 \pm 0.00004$
				$e = 1.00429 \pm 0.00001$
σ	a	ax^b	Res = 0.0098	$a = 0.3201 \pm 0.0004$
			EE = 0.0443	$b = -0.460 \pm 0.001$
			RCM = 0.0374	
σ	κ	$ax + b$	$R^2 = 0.99998$	$a = 1.090885 \pm 0.000004$
			$aR^2 = 0.99998$	$b = -0.010203 \pm 0.00004$
			RCM = 0.00296	
			EE = 0.00351	
σ	δ	$ax + b/x + c$	Res = 0.00004	$a = -0.008759 \pm 0.000007$
			EE = 0.0028	$b = -0.0028864 \pm 0.0000002$
			RCM = 0.0024	$c = 0.017636 \pm 0.000015$
τ	κ	$a \exp(-bx) + c$	Res = 0.0313	$a = 0.1730 \pm 0.0023$
			EE = 0.0626	$b = 1.2081 \pm 0.0260$
			RCM = 0.0560	$c = 1.4849 \pm 0.0017$
τ	δ	$ax/(1 + x + b)$	Res = 0.0288	$a = 0.4404 \pm 0.0052$
			EE = 0.0600	$b = 1.5034 \pm 0.0229$
			RCM = 0.0537	

4.2 Conclusiones

El estudio del plasma es un área extensa y complicada de la física, las ecuaciones para un plasma en equilibrio estático que se usan en la investigación de fusión nuclear controlada se obtuvieron desde primeros principios, es decir, desde la ecuación de Klimontovich, sin embargo, aún cuando se idealizó una gran cantidad de física se tuvo que recurrir a métodos numéricos para extraer información del plasma confinado. Las soluciones que se analizaron en este trabajo mostraron

correlaciones entre las cantidades de forma de las líneas de flujo magnético y los parámetros geométricos de la curva paramétrica de Manickam, por lo que una de las conclusiones es que la curva de Manickam efectivamente sirve para caracterizar las líneas de flujo asociadas a las soluciones de Soloviev. Los resultados obtenidos de la solución (4-1) la cantidad de forma más susceptible a deformar la geometría de las líneas de flujo fue C , mientras que A solo modificó la elipticidad, las funciones de ajuste para esta solución fueron de carácter exponencial. El caso de la solución (4-4) la cantidad de forma que modificó más parámetros geométricos fue σ , el comportamiento de las funciones de ajuste fue más variado relativo a la primera solución cuyas funciones de ajuste fueron lineales y no lineales. No todo el dominio de las cantidades de forma producen líneas compactas o concéntricas al eje magnético lo que implica que no es posible caracterizar con la curva paramétrica en ciertas regiones del dominio por tanto las cantidades de forma están acotadas a intervalos específicos. Por último los parámetros geométricos son de utilidad para obtener otras cantidades de interés, entre otras, las cantidades son, el factor de seguridad, la corriente poloidal, la sección transversal y el volumen del toroide para unos parámetros geométricos fijos.

Bibliografía

- [1] Manickam, J. (1984). Stability of $n = 1$ internal modes in Tokamaks. *Nuclear Fusion*, 24(5), 595–608. <https://doi.org/10.1088/0029-5515/24/5/006>.
- [2] Chen, F. (2019). *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion* (tercera edición). Suiza. Springer.
- [3] Piel, A. (2010). *Plasma Physics* (primera edición). Alemania: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [4] Galtier S. (2016). *Introduction to Modern Magnetohydrodynamics* (primera edición). Reino Unido: Cambridge University Press.
- [5] Harms, A. A., Kingdon, D. R., Schoepf, K. F., Miley, G. H. (2000). *Principles Of Fusion Energy: An Introduction To Fusion Energy For Students Of Science And Engineering* (edición ilustrada). Singapur. World Scientific Publishing Co..
- [6] Boyd, T. J. M., Sanderson, J. J. (2003). *The Physics of Plasmas* (primera edición). Reino Unido. Cambridge University Press.
- [7] Guazzotto, L., Freidberg, J. P. (2007). A family of analytic equilibrium solutions for the Grad-Shafranov equation. *Physics of Plasmas*, 14(11), 112508. <https://doi.org/10.1063/1.2803759>.
- [8] Callen, J.D. (2004). *Fundamentals of Plasma Physics*.
- [9] Krall, N. A., Trivelpiece, A. W. (1973). *Principles of Plasma Physics* (primera edición). McGraw-Hill.
- [10] Nishikawa, K., Wakatani, M. (2000). *Plasma Physics: Basic Theory with Fusion Applications* (Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics, 8) (Tercera edición). Springer.
- [11] Freidberg, J. P. (2007). *Plasma Physics and Fusion Energy* (primera edición). Cambridge University Press.
- [12] Bittencourt, J. A. (2010). *Fundamentals of Plasma Physics* (tercera edición). Springer.
- [13] Nicholson, D. R. (1983). *Introduction to Plasma Theory* (primera edición). Wiley.
- [14] Inan, U. S., Gołkowski, M. (2011). *Principles of Plasma Physics for Engineers and Scientists* (primera edición). Cambridge University Press.
- [15] Goossens, M. (2003). *An Introduction to Plasma Astrophysics and Magnetohydrodynamics* (primera edición). Springer.
- [16] Gurnett, D. A. (2005). *Introduction to Plasma Physics: With Space and Laboratory Applications* (primera edición). Cambridge University Press.
- [17] Goedbloed, H. J. P. (2004). *Principles of Magnetohydrodynamics: With Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas* (primera edición). Cambridge University Press.