"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Invariantes en la Bifurcación de Hopf

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestro en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

L.M. Juan Andres Castillo Valenzuela

Director de Tesis: Dr. Fernando Verduzco González

Hermosillo, Sonora, México, 9 de Agosto del 2011

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

SINODALES

Dr. Fernando Verduzco González
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Daniel Olmos Liceaga
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores
IPICYT, San Luis Potosí, México.

UNIVERSIDAD DE SONORA

"El Saber de Mis Hijos
Hará Mi Grandeza"

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

En la ciudad de HERMOSILLO, Sonora, siendo las 18:00 horas del día 9 de agosto de 2011, se reunieron en el Auditorio del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, los integrantes del jurado:

DANIEL OLMOS LICEAGA
FERNANDO VERDUZCO GONZALEZ
ALEJANDRO RICARDO FEMAT FLORES
FRANCISCO ARMANDO CARRILLO NAVARRO

bajo la presidencia del primero y fungiendo como secretario el último, para realizar el examen de grado del programa de Maestro en Ciencias (Matemáticas), Nivel: Maestria, a:

JUAN ANDRES CASTILLO VALENZUELA

quien de acuerdo a la opción de examen de grado presentó un trabajo de investigación titulado

"INVARIANTES EN LA BIFURCACIÓN DE HOPF"

El jurado, después de debatir entre sí reservada y libremente, emitió el siguiente dictamen:

APROBADO POR UNANIMIDAD

y para constancia se levantó la presente acta.

EL SABER DE MIS HIJOS HARÁ MI GRANDEZA

JUAN ANDRES CASTILLO VALENZUELA
209290012

Acta: 16
Foja: 16
Libro: 1

DANIEL OLMOS LICEAGA
Presidente

FRANCISCO ARMANDO CARRILLO NAVARRO
Secretario

FERNANDO VERDUZCO GONZALEZ
Sinodal

ALEJANDRO RICARDO FEMAT FLORES
Sinodal Externo

DR. FERNANDO VERDUZCO GONZALEZ, Coordinador del Programa de Maestro en Ciencias (Matemáticas) de la Universidad de Sonora, hace constar que las firmas que anteceden corresponden al jurado que intervino en el examen de grado.

HERMOSILLO, Sonora, a 9 de agosto de 2011.

DR. FERNANDO VERDUZCO GONZALEZ
Coordinador de programa

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
COORDINACIÓN
POSGRADO EN MATEMÁTICAS

Nº 3950

Cuando se ha eliminado lo imposible, lo que queda, por improbable que parezca, debe ser la verdad

Sherlock Holmes

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT por haberme financiado mis estudios con una beca, con los siguientes datos de referencia: No. de beca 5219 y No. de registro 205856.

De manera muy especial quiero agradecer a mi asesor de Tesis, el Dr. Fernando Verduzco por haber dirigido nuevamente mi trabajo y a la vez haberme ayudado a retomar el rumbo de mi carrera, gracias a él estoy nuevamente en el fascinante mundo de la Matemática. Agradezco a mis sinodales: Dr. Daniel Olmos Liceaga, Dr. Francisco Armando Carrillo y Dr. Ricardo Femat Flores por haberse tomado el tiempo de revisar este trabajo.

Agradezco a mis papás y mis hermanos, quienes siempre han confiado en mis capacidades, especialmente a mi mamá quien siempre me apoyó en mis decisiones en la vida he hizo de mi un hombre de bien.

Finalmente quiero agradecer a mi esposa, compañera y amiga María Esmeralda por su amor, apoyo y comprensión, por haber creído en mí para completar este proyecto de vida académica aún teniendo condiciones adversas.

Quiero terminar dedicando este trabajo a la personita que se ha convertido en mi razón para estar en este mundo y seguir adelante, mi hijo Oscar Javier.

Índice general

Resumen VII

Introducción IX

1. Preliminares Matemáticos 1
   1.1. Teoría de la variedad central 1
   1.2. La bifurcación de Hopf 6

2. Invariantes en la bifurcación de Hopf 15
   2.1. Planteamiento del problema 15
   2.2. Dinámica sobre la variedad central 15
   2.3. Variedad central modificada 23
   2.4. Versión final de la Dinámica sobre la variedad central 27
   2.5. Velocidad de cruce 32
   2.6. Primer coeficiente de Lyapunov 36

3. Aplicaciones 41
   3.1. El sistema de Lorenz 41
   3.2. Motores de inducción 47

4. Conclusiones 55

Apéndices 57

A. Cálculo de la fórmula de estabilidad 59

B. Cálculo de la forma de Jordan 63

C. Identidades 65

D. Invertibilidad **67**

Resumen

En este trabajo encontraremos expresiones para los llamados coeficientes de estabilidad, que son la velocidad de cruce y el primer coeficiente de Lyapunov, los cuales juegan un papel muy importante en la bifurcación de Hopf de un campo no lineal. Para el primero de éstos no existe una fórmula explícita en términos del campo original. Para el segundo existe una fórmula para calcularlo para sistemas en el plano, y también existe una fórmula para sistemas en general obtenida mediante variable compleja.

Daremos expresiones para calcular ambos coeficientes en el campo real, para la velocidad de cruce consideraremos la deformación versal de la bifurcación de Hopf y para el primer coeficiente de Lyapunov utilizaremos la fórmula en el plano. A éstos coeficientes los renombramos como invariantes, debido a que no cambian bajo ciertos cambios de coordenadas.

Introducción

La estructura cualitativa del flujo de un sistema dinámico no lineal puede cambiar si se modifican los parámetros del mismo en un intervalo de valores compatibles con las características del sistema. En particular, pueden aparecer nuevos puntos de equilibrio u órbitas cerradas, o desaparecer los que ya existen, o bien ver alteradas sus propiedades de estabilidad. Un sistema donde esto ocurre recibe el nombre de sistema estructuralmente inestable, o se dice equivalentemente que una bifurcación ha ocurrido para algunos valores de los parámetros.

Desde el punto de vista de las aplicaciones, los puntos de equilibrio de un sistema dinámico son de importancia fundamental. Un punto de equilibrio se dice que es hiperbólico cuando los valores propios de la matriz Jacobiana, resultante de linealizar el sistema en ese punto, tienen partes reales no nulas. Esta es la situación más sencilla que puede aparecer ya que entonces la dinámica del sistema no lineal está determinada por la del sistema linealizado en dichos puntos, ya que éstos son estructuralmente estables. Por tanto, los puntos de equilibrio de tipo hiperbólico no presentan interés desde el punto de vista de la teoría local de bifurcaciones. Un punto de equilibrio se dice que es no-hiperbólico cuando uno o más valores propios de la matriz Jacobiana, resultante de linealizar el sistema en ese punto, tienen parte real nula.

En general se puede afirmar que contra mayor sea el número de valores propios con parte real nula, más complicada e imprevisible será la dinámica de un sistema. De lo anterior se desprende un criterio sencillo para detectar bifurcaciones: basta con encontrar valores de los parámetros para los cuales aparecen valores propios nulos o con parte real nula de la matriz Jacobiana del sistema. En este contexto, resulta fundamental el teorema de la variedad central que establece la existencia de una variedad invariante[1] pasando por el punto fijo (no-hiperbólico) a la cual puede restringirse el sistema para estudiar la dinámica en un entorno del mismo, análogamente a como ocurre en los sistemas lineales con el subespacio vectorial generado por los vectores propios asociados a valores propios nulos o con parte real nula.

Cuando el punto de equilibrio es no-hiperbólico, debido a la presencia de al menos un valor propio real simple nulo, la restricción del sistema original a la variedad central es un sistema de dimensión uno y si es consecuencia de la presencia de un par de valores propios imaginarios puros, dicha restricción es bidimensional, siendo el estudio de las bifurcaciones en

[1] Cuando usemos el término variedad es suficiente pensar en dos situaciones: un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ en el caso lineal o una superficie incrustada en $\mathbb{R}^n$ en el caso no lineal

los sistemas resultantes más sencillo que en el de partida, toda vez que los mismos son susceptibles de escribirse bajo cierta forma estándar de expresión (llamada forma normal topológica) común a todos los sistemas que poseen un mismo tipo de bifurcación.

El análisis de la forma normal topológica asociada a cada tipo de bifurcación permite comprender qué tipo de cambio se produce en el sistema cuando el parámetro rebasa el valor de bifurcación. En el caso de que el equilibrio estacionario sea no-hiperbólico debido a la presencia de un par de valores propios imaginarios puros para cierto valor del parámetro $\mu = \mu_0$, la restricción del sistema original a la variedad central es un sistema bidimensional, el cual presentará la bifurcación de Hopf[2] para $\mu = \mu_0$, si se verifica que los valores propios $\lambda_{1,2}(\mu)$ que son imaginarios puros en $\mu = \mu_0$ crucen el eje imaginario con velocidad no nula, esto es

$$d = \frac{d}{d\mu}(Re(\lambda_{1,2}(\mu)))|_{\mu=\mu_0} \neq 0.$$

En tales circunstancias, el teorema de Hopf[3] asegura la existencia de algunas soluciones periódicas bifurcándose a partir de μ_0. Cabe mencionar que no existe una fórmula para calcular la velocidad de cruce en términos del campo original. Ahora bien, la estabilidad de las soluciones viene determinada por una segunda condición expresada en términos del llamado *primer coeficiente de Lyapunov*, $l_1(\mu_0)$, el cual se deduce en el cálculo de la forma normal topológica correspondiente.

En estas circunstancias, una condición suficiente para la existencia de un ciclo límite estable es que $l_1(\mu_0) < 0$, y si $l_1(\mu_0) > 0$, el ciclo límite es inestable. En el primer caso estamos ante una bifurcación de Hopf *supercrítica* y un ciclo límite estable surge para cada valor del parámetro μ mayor que μ_0 y lo suficientemente próximo a él. En el segundo caso, se trata de una bifurcación de Hopf *subcrítica* y los ciclos aparecen antes de que el parámetro alcance el valor de bifurcación.

Entonces, dado un sistema n-dimensional con un equilibrio no-hiperbólico para cierto valor de un parámetro, podemos encontrar una variedad central pasando por ese punto y restringir el sistema original a la misma, con lo que el estudio de las bifurcaciones en los sistemas resultantes de dimensión uno o dos es menos complejo, una vez calculadas las formas normales topológicas equivalentes. Ahora bien, la realización de estos cálculos no es sencilla. Algunos autores dicen que en la mayoría de los casos un tratamiento simbólico resulta inabordable y hay que recurrir a técnicas numéricas de resolución. Éstos prefieren utilizar una metodología desarrollada por Kuznetzov [1997], el cual realiza un tratamiento de la cuestión utilizando variable compleja, lo que simplifica los cálculos, y a su vez propone dos procedimientos para el cálculo de la variedad central y la posterior restricción del sistema.

El tratamiento de Kuznetzov es como sigue:

[2]Hopf [1942]. En realidad es la bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf aunque se le suele llamar nada mas bifurcación de Hopf.

[3]Consideraremos la versión de J. Guckenheimer and P. Holmes [1993].

Considere el sistema

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

Si el punto de equilibrio $x = 0$ de (1) exhibe una bifurcación de Hopf en $\mu = 0$, la matriz Jacobiana $A = DF(x_0, \mu_0)$ tiene un par de valores propios púramente imaginarios $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. Sean los vectores complejos:

$$Av = i\omega_0 v, \quad A^T p = -i\omega_0 p$$

los cuales se normalizan de acuerdo a

$$\bar{p}^T v \equiv < p, v >= 1.$$

La restricción de (1) en $\mu = 0$ sobre la variedad central bidimensional es topológicamente equivalente en una vecindad local a la forma normal compleja

$$\dot{w} = i\omega_0 w + l_1 w|w|^2 + O(|w|^4), \quad w \in \mathbb{C}^1$$

donde el primer coeficiente de Lyapunov se calcula con la siguiente expresión

$$\boxed{l_1 = \frac{1}{2} Re < p, C(v, v, \bar{v}) + B(\bar{q}, (2i\omega_0 I_n - A)^{-1} B(v, v)) - 2B(v, A^{-1} B(v, \bar{v})) >}$$

donde I_n es la matriz identidad de $n \times n$, B representa a los términos cuadráticos del desarrollo en Taylor y C representa a los cúbicos.

En este trabajo se abordará el problema "inabordable" de calcular la dinámica sobre la variedad central hasta orden tres, y a partir de ésta calcularemos las expresiones para la velocidad de cruce y el primer coeficiente de Lyapunov.

Describimos a continuación la forma en que se ha organizado este trabajo.

En el Capítulo 1 recordamos las nociones básicas de la teoría de la variedad central, la cual es una herramienta que utilizaremos en los capítulos subsiguientes. Asimismo se presenta la teoría de la bifurcación de Hopf, que es el marco sobre el cual gira el desarrollo de este trabajo. El material aquí presentado se puede consultar en la mayoría de los textos en los que se estudia la teoría de bifurcaciones, entre los cuales citamos los siguientes: J. Guckenheimer and P. Holmes [1993], J. Carr [1981], y L. Perko [1988].

En el Capítulo 2 se establecen los resultados principales de este trabajo ya que es la parte donde se obtienen las expresiones de la velocidad de cruce y el primer coeficiente de Lyapunov. Aquí, los resultados más relevantes se enuncian en el Lema 3, en el Lema 4, en el Lema 7 y en el Lema 8.

En el Capítulo 3 aplicamos los resultados obtenidos previamente a dos sistemas no lineales: El primero de ellos es el tan conocido sistema de Lorenz y el otro es un sistema que modela el funcionamiento de un motor de inducción. Finalmente, en el Capítulo 4 mostramos las conclusiones obtenidas en este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares Matemáticos

1.1. Teoría de la variedad central

1.1.1. La variedad central

Considere el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial suave. Sea x_0 un punto de equilibrio hiperbólico de (1.1), es decir que $Df(x_0)$ no tiene valores propios con parte real cero. Sabemos por el teorema de Hartman-Grobman, que el comportamiento de las soluciones cercanas a x_0, es topológicamente conjugado, a las soluciones del sistema linealizado

$$\dot{y} = (Df(x_0))y \tag{1.2}$$

Sea $A = (Df(x_0))$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sus valores propios.

Teorema 1. *1) Si $Re(\lambda_i) < 0 \; \forall \; i = 1, 2, \cdots, n$ entonces el equilibrio x_0 es asintóticamente estable en forma local. Es tipo atractor local (Sumidero).*

2) Si $Re(\lambda_i) > 0 \; \forall \; i = 1, 2, \cdots, n$ entonces el equilibrio x_0 es inestable. Es tipo repulsor local (Fuente).

3) Si $Re(\lambda_j) > 0$ para algun j, y $Re(\lambda_k) < 0$ para algún $k \neq j$ entonces el equilibrio x_0 es inestable. Es un punto tipo silla.

4) $Re(\lambda_i) = 0$ para algún j, entonces no se puede concluir nada sobre la estabilidad de x_0 (En este caso el punto de equilibrio es no-hiperbólico).

Clasifiquemos ahora los n vectores propios de A. $\{v_1, v_2, \cdots, v_{n_1}\}$ son vectores propios (inclusive, generalizados) tales que sus valores propios asociados tienen parte real negativa, $\{u_1, u_2, \cdots, u_{n_2}\}$ son vectores propios (inclusive, generalizados) tales que sus valores propios asociados tienen parte real positiva y $\{w_1, w_2, \cdots, w_{n_3}\}$ son vectores propios (inclusive,

generalizados) tales que sus valores propios asociados tienen parte real cero. Observe que $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

$$\left\{\begin{array}{c}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_{n_1}\end{array}\right\}\\ \left\{\begin{array}{c}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_{n_2}\end{array}\right\}\\ \left\{\begin{array}{c}w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_{n_3}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

Sean $E^s = \langle v_1, v_2, \cdots, v_{n_1}\rangle = \{s_1v_1 + s_2v_2 + \cdots + s_{n_1}v_{n_1} |\ s_1, s_2, \cdots, s_{n_1} \in \mathbb{R}\}$, el espacio generado por $\{v_1, v_2, \cdots, v_{n_1}\}$,
$E^u = \langle u_1, u_2, \cdots, u_{n_2}\rangle = \{s_1u_1 + s_2u_2 + \cdots + s_{n_2}u_{n_2} |\ s_1, s_2, \cdots, s_{n_2} \in \mathbb{R}\}$ es el espacio generado por $\{u_1, u_2, \cdots, u_{n_2}\}$,
$E^c = \langle w_1, w_2, \cdots, w_{n_3}\rangle = \{s_1w_1 + s_2w_2 + \cdots + s_{n_3}w_{n_3} |\ s_1, s_2, \cdots, s_{n_3} \in \mathbb{R}\}$ es el espacio generado por $\{w_1, w_2, \cdots, w_{n_3}\}$.

Entonces

1) E^s, E^u y E^c son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.

2) E^s, E^u y E^c son invariantes bajo el flujo de

$$\dot{y} = Df(x_0)y \tag{1.3}$$

Es decir, si $z \in E^a$, $a = s$, u ó c entonces la solución de (1.3), $\varphi(t; z)$ es tal que $\varphi(t, z) \in E^a\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

3) Si $z \in E^s \Rightarrow \varphi(t; z) \to_{t\to+\infty} 0$.

4) Si $z \in E^u \Rightarrow \varphi(t; z) \to_{t\to-\infty} 0$.

E^s, E^u y E^c son llamados espacios estable, inestable y central respectivamente.

Definición 1. *Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es una variedad invariante local para (1.1), si para $x_0 \in S$, la solución $x(t)$ de (1.1) con $x(0) = x_0$, está en S para $|t| < T$ donde $T > 0$. Si siempre podemos elegir $T = \infty$, entonces decimos que S es una variedad invariante.*

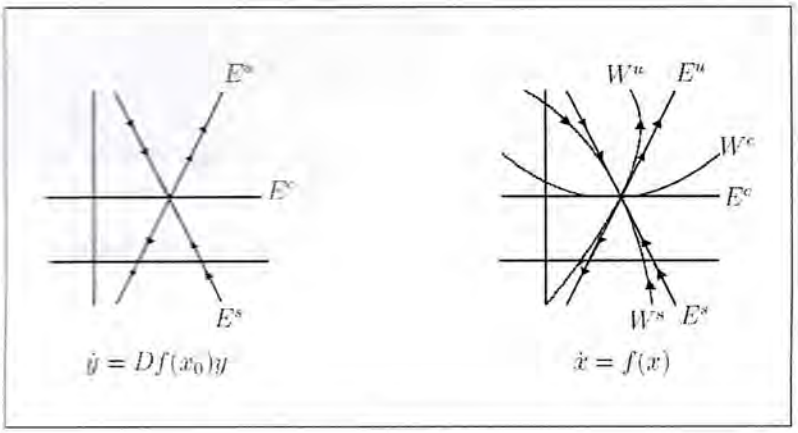


Figura 1.1: Lado izquierdo: Subespacios invariantes, Lado derecho: Variedades invariantes.

Definición 2. *Sean x_0 un punto de equilibrio y φ_t el flujo del sistema. Se definen la variedad estable local en x_0, $W^s_{loc}(x_0)$, y la variedad inestable local en x_0, $W^u_{loc}(x_0)$, de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} W^s_{loc}(x_0) &= \{x \in U |\ \varphi_t(x) \longrightarrow x_0,\ \textit{cuando } t \longrightarrow +\infty,\ \textit{y } \varphi_t(x) \in U \textit{ para toda } t \geq 0\} \\ W^u_{loc}(x_0) &= \{x \in U |\ \varphi_t(x) \longrightarrow x_0,\ \textit{cuando } t \longrightarrow -\infty,\ \textit{y } \varphi_t(x) \in U \textit{ para toda } t \leq 0\} \end{aligned}$$

Las variedades locales estable e inestable $W^s_{loc}(x_0)$ y $W^u_{loc}(x_0)$ representan el análogo no lineal de los eigenespacios E^s y E^u de la linealización del sistema (ver figura 1.1). Éstas tienen las siguientes propiedades:

(i) Poseen las mismas dimensiones que los eigenespacios estable e inestable, respectivamente,

(ii) Son tangentes a los eigenespacios estable e inestable en el punto x_0, respectivamente.

Teorema 2. *Considere la ecuacion diferencial*

$$\dot{x} = f(x)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, y f un campo suave. Sea x_0 un punto de equilibrio no-hiperbólico. Entonces existen variedades invariantes, estable e inestable, $W^s_{loc}(x_0)$ y $W^u_{loc}(x_0)$ tangentes a E^s y E^u en x_0, respectivamente. Además existe una variedad invariante central, $W^c_{loc}(x_0)$, tangente a E^c en x_0. $W^s_{loc}(x_0)$ y $W^u_{loc}(x_0)$ son únicas, mientras que $W^c_{loc}(x_0)$ no lo es necesariamente. $dim(E^a) = dim(W^a)$, donde $a = s, u, c$.

Supongamos que el sistema no lineal está escrito en bloques de Jordan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x,y) \\ \dot{y} &= By + g(x,y) \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde A es una matriz $k \times k$ con valores propios con parte real cero y B una matriz $(n-k) \times (n-k)$ con valores propios con parte real negativa. También $f(0,0) = g(0,0) = 0$ y $Df(0,0) = Dg(0,0) = 0$, y $f, g \in \mathcal{C}^r$, con $r \geq 2$.

Definición 3. *Una variedad invariante W^c será llamada variedad central para el sistema (1.4) si puede ser representada, de manera local, como sigue*

$$W^c_{loc}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} |\ y = h(x),\ \ |x| < \delta,\ \ h(0) = 0,\ \ Dh(0) = 0\}$$

para δ suficientemente pequeña.

Observación 1. *El hecho de que $h(0) = 0$, y $Dh(0) = 0$ nos garantiza que la variedad central $W^c_{loc}(0)$ es tangente al eigenespacio central E^c en el origen.*

Los siguientes tres teoremas que enunciaremos están demostrados en [10]. El primero de ellos nos garantiza la existencia de la variedad central.

Teorema 3. *Existe una $\mathcal{C}^r$ variedad central para el sistema (1.4). La dinámica del sistema (1.4), restrigida a la variedad central, está dada, para v suficientemente pequeña, por el siguiente sistema k-dimensional.*

$$\dot{v} = Av + f(v, h(v)), \tag{1.5}$$

con $v \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^k$.

El siguiente resultado establece que la dinámica de (1.5) cerca de $v = 0$, determina la dinámica de (1.4) cerca de $(x,y) = (0,0)$.

Teorema 4. *(i) suponga que $v = 0$ es un equilibrio estable (asintóticamente estable) (inestable) del sistema (1.5), entonces $(x,y) = (0,0)$ es un equilibrio estable (asintóticamente estable) (inestable) del sistema (1.4).*
(ii) suponga que el equilibrio $(x,y) = (0,0)$ del sistema (1.4) es estable. Entonces, si $(x(t), y(t))$ es una solución de (1.4) con $(x(0), y(0))$ lo suficientemente pequeño, entonces existe una solución $v(t)$ de (1.5) tal que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} x(t) &= v(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}) \\ \lim_{t\to\infty} y(t) &= h(v(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}) \end{aligned}$$

donde $\gamma > 0$ es una constante

Observación 2. *Lo que nos dice el teorema 4 es que la solución $v(t)$ del sistema (1.5), representa, de manera aproximada, la proyección de la solución $(x(t), y(t))$ del sistema (1.4), sobre el eigenespacio $E^c \cong \mathbb{R}^k$. (Ver figura 1.2).*

El último teorema proporciona un método para aproximar la función $h(x)$, cuya gráfica es la variedad central. Antes de enunciarlo, encontraremos una ecuación diferencial en derivadas parciales, cuya incógnita es justamente nuestra función $h(x)$.

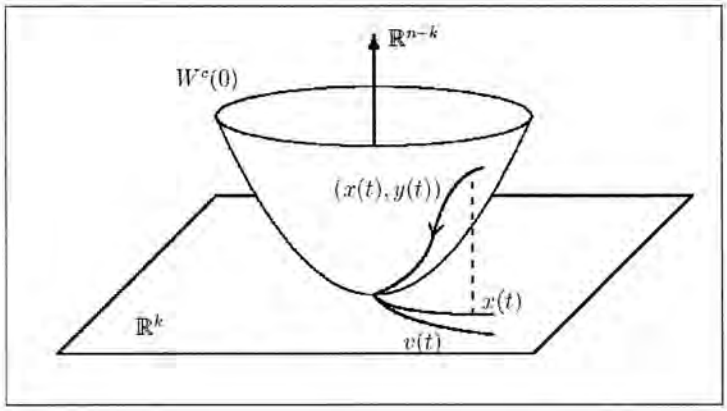


Figura 1.2: Esquematización gráfica del teorema 4.

Sea $(x(t), y(t)) \in W^c_{loc}(0)$, luego, se cumple que $y(t) = h(x(t))$, y derivando con respecto al tiempo, obtenemos

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}. \tag{1.6}$$

Pero todo punto sobre la variedad central satisface la ecuación (1.4), por lo tanto, la ecuación (1.6) es equivalente a

$$Bh(x) + g(x, h(x)) = Dh(x)(Ax + f(x, h(x))).$$

Hagamos

$$\mathcal{N}(h(x)) = Dh(x)(Ax + f(x, h(x))) - Bh(x) - g(x, h(x)) \equiv 0. \tag{1.7}$$

Luego, nuestro problema es encontrar $h(x)$ tal que satisfaga la ecuación (1.7), a esta ecuación se le conoce como *ecuación homológica*. Encontrar la solución de esta ecuación en derivadas parciales es en general más difícil que resolver el sistema (1.4), sin embargo, el siguiente teorema nos permitirá aproximar la solución de (1.7) con el grado de precisión que se desee.

Teorema 5. *Sea $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ de clase $\mathcal{C}^1$, $\phi(0) = D\phi(0) = 0$ tal que $\mathcal{N}(\phi(x)) = \mathcal{O}(|x|^q)$ cuando $x \to 0$, para algún $q > 1$. Entonces*

$$|h(x) - \phi(x)| = \mathcal{O}(|x|^q) \text{ cuando } x \to 0$$

1.1.2. Variedad central dependiente de parámetros

Supongamos que el sistema (1.4) depende de un parámetro. En este caso escribimos (1.4) en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \mu), \end{aligned} \tag{1.8}$$

con $(x, y, \mu) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^p$, donde A posee valores propios con parte real cero y B posee valores propios con parte real negativa, con $f(0) = Df(0) = 0$ y $g(0) = Dg(0) = 0$. Supongamos que $\mu \in \mathbb{R}^p$ es un vector de estados, luego podemos escribir (1.8) como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y, \mu), \\ \dot{\mu} &= 0, \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \mu), \end{aligned}$$

llamado el sistema suspendido, que a su vez lo reescribimos como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y, \mu) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dot{y} &= By + g(x, y, \mu). \end{aligned}$$

Tenemos entonces un eigenespacio central de dimensión $k+p$, por lo tanto existe una función $y = h(x, \mu)$ cuya gráfica es la variedad central, localmente alrededor del origen $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$, del sistema (1.8). Luego, la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, h(x, \mu), \mu) \\ \dot{\mu} &= 0 \end{aligned}$$

y la ecuación (1.7) para determinar $h(x, \mu)$ se reduce a

$$\mathcal{N}(h(x, \mu)) = \frac{\partial h(x, \mu)}{\partial x}(Ax + f(x, h(x, \mu), \mu)) - Bh(x) - g(x, h(x, \mu), \mu) \equiv 0.$$

1.2. La bifurcación de Hopf

Consideremos aquí un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x, \mu), \tag{1.9}$$

con $\mu = \mu_0$ y un punto de equilibrio $x = x_0$, en el cual $Df(x_0, \mu_0)$ tiene un par de valores propios puramente imaginarios, $\pm i\omega_0$, con $\omega_0 > 0$ y ningún otro valor propio con parte real cero. El teorema de la función implícita garantiza (ya que $Df(x_0, \mu_0)$ es invertible) que para cada μ cerca de μ_0 existirá un punto de equilibrio $p(\mu)$ cerca de x_0 el cual varía suavemente con μ. No obstante las dimensiones de las variedades estable e inestable en $p(\mu)$ cambian si los valores propios de $Df(p(\mu))$ cruzan el eje imaginario en μ_0. Este cambio cualitativo en el flujo local cerca de $p(\mu)$ se debe marcar por algunos otros cambios locales en los retratos fase que no implican puntos fijos.

Una pista de que sucede en el problema genérico de la bifurcación que implica un equilibrio con valores propios imaginarios puros se debe obtener de examinar los sistemas lineales en los cuales hay un cambio de este tipo. Por ejemplo, considerar el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - \omega_0 y \\ \dot{y} &= \omega_0 x + \mu y \end{aligned} \tag{1.10}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos\omega_0 t & -\sin\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Cuando $\mu < 0$, las soluciones espirales convergen al origen, y cuando $\mu > 0$ las soluciones espirales se alejan del origen. Cuando $\mu = 0$, todas las soluciones son periódicas. Incluso en una familia uni-paramétrica de ecuaciones, es frecuente encontrar un valor del parámetro en el cual haya una familia completa de órbitas periódicas, más aún, hay una superficie de órbitas periódicas que aparece en el problema genérico (1.9).

El teorema de formas normales nos da la información requerida acerca de como el problema genérico difiere de el sistema (1.10). Mediante cambios de coordenadas suaves, las series de Taylor de grado 3 (tomando $k = 1$), para el problema general puede ser trasladado a la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= d\mu x - (\omega_0 + c\mu)y + (l_1 x - by)(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= (\omega_0 + c\mu)x + d\mu y + (bx + l_1 y)(x^2 + y^2) \end{aligned} \tag{1.11}$$

con l_1, b, c, d, ω_0 constantes y μ un parámetro.

Para analizar la dinámica de este sistema lo transformaremos a coordenadas polares. Haciendo

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad tan\theta = \tfrac{y}{x}$$

Derivamos la primera expresión

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= x[d\mu x - (\omega_0 + c\mu)y + (l_1 x - by)(x^2 + y^2)] \\ &\quad + y[(\omega_0 + c\mu)x + d\mu y + (bx + l_1 y)(x^2 + y^2)] \\ &= d\mu r^2 + r^2[x(l_1 x - by) + y(bx + l_1 y)] \\ &= r^2(d\mu + l_1 r^2) \end{aligned}$$

Entonces

$$\dot{r} = r(d\mu + l_1 r^2)$$

Ahora, derivamos la segunda expresión

$$\begin{aligned}
sec^2\theta\dot{\theta} &= \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2}\\
(1+tan^2\theta)\dot{\theta} &= \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2}\\
(1+\frac{y^2}{x^2})\dot{\theta} &= \frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2}\\
r^2\dot{\theta} &= x\dot{y}-y\dot{x}\\
&= x[(\omega_0+c\mu)x+d\mu y+(bx+l_1y)(x^2+y^2)]\\
&\quad -y[d\mu x-(\omega_0+c\mu)y+(l_1x-by)(x^2+y^2)]\\
&= (\omega_0+c\mu)r^2+r^2[x(bx+l_1y)-y(l_1x-by)]\\
&= (\omega_0+c\mu)r^2+r^2(br^2)\\
&= r^2(\omega_0+c\mu+br^2)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\dot{\theta}=\omega_0+c\mu+br^2$$

Deseamos bosquejar el retrato fase en una vecindad del origen. Si $\mu=0$, $l_1\neq 0$

$$\dot{r}=r(l_1r^2)=l_1r^3$$

En esta situación si $l_1>0$, entonces $\dot{r}>0$ y tenemos espirales que se alejan del orien, es decir, tenemos un foco inestable; Ahora, si $l_1<0$, entonces $\dot{r}<0$ y entonces tenemos espirales que convergen al origen, es decir, tenemos un foco estable.
Ahora, para μ suficientemente pequeña

$$\dot{r}=r(d\mu+l_1r^2)$$

observamos que $\dot{r}=0$ si y sólo si $r=0$ ó $d\mu+l_1r^2=0$ (que representa una órbita periódica)
Vamos a determinar cuando nace esta órbita periódica
Tenemos que

$$r^2=-\frac{d\mu}{l_1}$$

entonces $r=\sqrt{-\frac{d\mu}{l_1}}$ si $\frac{d\mu}{l_1}<0$
Supongamos que $\frac{d}{l_1}>0$, entonces si $\mu<0$ se cumple que $\frac{d\mu}{l_1}<0$ (existe una órbita periódica) y si $\mu>0$ entonces no existe órbita periódica.
Ahora supongamos que $\frac{d}{l_1}<0$, entonces si $\mu>0$ se cumple que $\frac{d\mu}{l_1}<0$ (existe una órbita periódica) y si $\mu<0$ entonces no existe órbita periódica.
Entonces tenemos los siguientes casos

1) $l_1>0$ y $d>0$

2) $l_1<0$ y $d<0$

3) $l_1 > 0$ y $d < 0$

4) $l_1 < 0$ y $d > 0$

Analicemos el primero:
Sabemos que para $\mu = 0$ el origen es un foco inestable.
Si $\mu > 0$, entonces $\dot{r} = r(d\mu + l_1 r^2) > 0$, por lo tanto el origen es un foco inestable.
Si $\mu < 0$, sabemos que existe la órbita periódica $r = r_0 = \sqrt{-\frac{d\mu}{l_1}}$
Consideremos la solución que inicia con la condición inicial (θ_1, r_1) en el interior de la órbita periódica, es decir con $0 < r_1 < r_0$.

$$\dot{r}|_{(\theta_1, r_1)} = r_1(d\mu + l_1 r_1^2)$$

Entonces

$$\begin{aligned} r_1^2 &< r_0^2 = -\frac{d\mu}{l_1} \\ r_1^2 &< -\frac{d\mu}{l_1} \\ d\mu + l_1 r_1^2 &< 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\dot{r}|_{(\theta_1, r_1)} = r_1(d\mu + l_1 r_1^2) < 0$$

entonces el origen es un foco estable.
Consideremos ahora una condición inicial (θ_2, r_2), exterior a la órbita periódica, es decir con $r_2 > r_0 > 0$.

$$\dot{r}|_{(\theta_2, r_2)} = r_2(d\mu + l_1 r_2^2)$$

Entonces

$$\begin{aligned} r_2^2 &> r_0^2 = -\frac{d\mu}{l_1} \\ r_2^2 &> -\frac{d\mu}{l_1} \\ d\mu + l_1 r_2^2 &> 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\dot{r}|_{(\theta_2, r_2)} = r_2(d\mu + l_1 r_2^2) > 0$$

entonces las soluciones se alejan de la órbita periódica.
Concluimos entonces que $r = r_0$ es una órbita periódica repulsora (ver figura 1.3). Los otros casos son similares. Si la órbita periódica es estable, diremos que tenemos una bifurcación de Hopf *supercrítica*, mientras que si es inestable la órbita periódica, diremos que la bifurcación de Hopf es *subcrítica*. El teorema de la bifurcación de Hopf establece que las propiedades cualitativas de (1.11) cerca del origen permanecen sin cambio si se agregan los términos de orden superior al sistema.

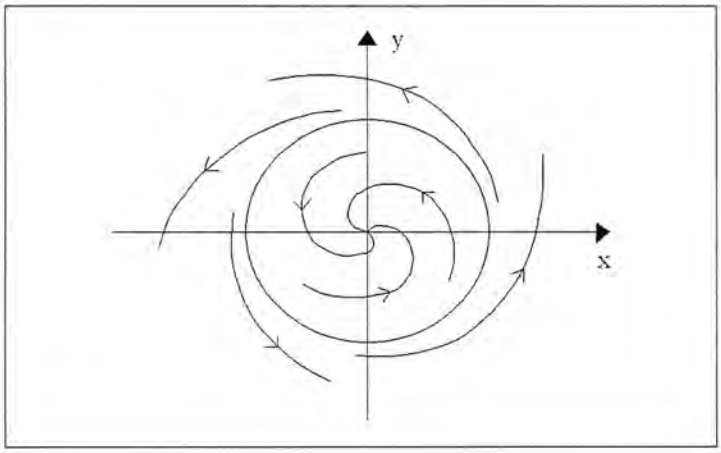


Figura 1.3: En este diagrama se puede ver claramente como las soluciones dentro de la órbita periódica convergen al origen, mientras que las que estan fuera se alejan de ella.

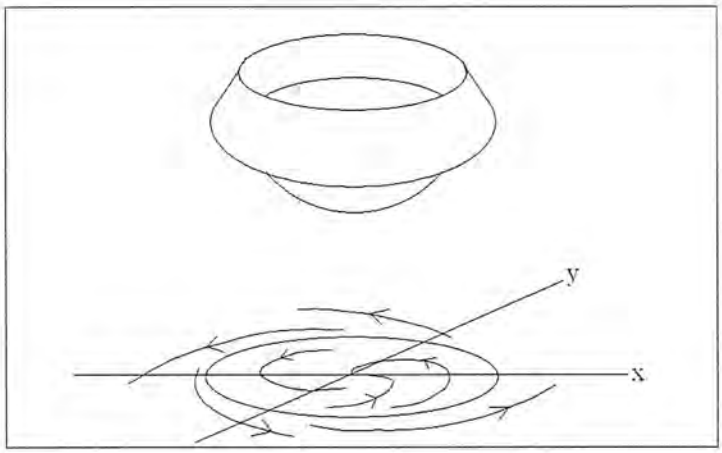


Figura 1.4: En este diagrama se puede ver a la órbita repulsora como la proyección del movimiento de una canica sobre un sombrero

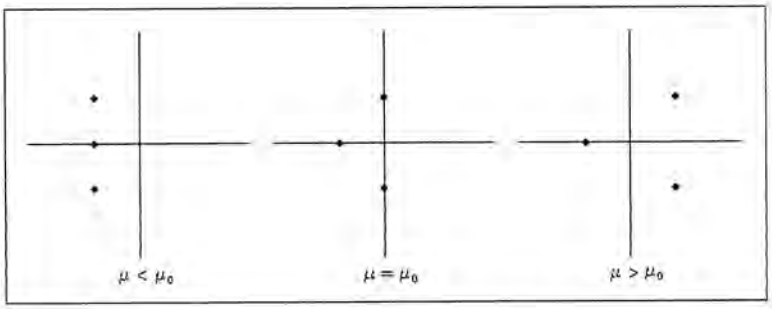


Figura 1.5: Cruce positivo de los valores propios

1.2.1. Teorema de la Bifurcación de Hopf

Teorema 6. *Supongamos que el sistema*

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ tiene un equilibrio (x_0, μ_0) el cual satisface las siguientes propiedades:
(H1) $D_x f(x_0, \mu_0)$ posee un único par de valores propios puramente imaginarios y nigún valor propio real simple nulo.

(H2) Sea $\lambda(\mu)$, $\overline{\lambda}(\mu)$ los valores propios de $D_x f(x_0, \mu)$ los cuales son imaginarios en $\mu = \mu_0$, tales que

$$\boxed{d = \frac{d}{d\mu}\left(Re(\lambda(\mu))\right)|_{\mu=\mu_0} \neq 0} \tag{1.12}$$

Entonces existe una única variedad central tridimensional, pasando por $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y un sistema de coordenadas suave, cuya expansión en serie de Taylor, hasta grado tres sobre la variedad central, esta dado, en forma polar, por la siguiente expresión

$$\dot{r} = (d\mu + l_1 r^2)r$$

$$\dot{\theta} = \omega_0 + c\mu + br^2$$

Si $l_1 \neq 0$ entonces existe una superficie de órbitas periódicas en la variedad central, las cuales tienen tangencia cuadrática con el eigenespacio generado por $\lambda(\mu_0)$, $\overline{\lambda}(\mu_0)$ el cual coincide en dimensión dos, con el paraboloide $\mu = -\frac{l_1}{d}r^2$.
Si $l_1 < 0$ las órbitas periódicas son estables, mientras que si $l_1 > 0$ son inestables.
Llamaremos los ***coeficientes de estabilidad*** *a d y l_1, donde d es* ***la velocidad de cruce*** *y l_1 es* ***el primer coeficiente de Lyapunov****.*
Para sistemas en el plano, existe una expresión para calcular el llamado primer coeficiente de Lyapunov l_1.
Considere el sistema

$$\dot{x} = Jx + F(x),$$

donde $J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$, $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix}$, $F(0) = 0$ *y* $DF(0) = 0$. *Entonces*

$$\boxed{l_1 = \frac{1}{16\omega_0}(R_1 + \omega_0 R_2)}, \tag{1.13}$$

donde

$$\begin{aligned} R_1 &= (F_{1x_1x_2}(F_{1x_1x_1} + F_{1x_2x_2}) \\ &\quad -F_{2x_1x_2}(F_{2x_1x_1} + F_{2x_2x_2}) \\ &\quad -F_{1x_1x_1}F_{2x_1x_1} + F_{1x_2x_2}F_{2x_2x_2})|_{x=0} \\ R_2 &= (F_{1x_1x_1x_1} + F_{1x_1x_2x_2} + F_{2x_1x_1x_2} + F_{2x_2x_2x_2})|_{x=0}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces, los siguientes cuatro escenarios posibles:

a. Si $d > 0$, $l_1 < 0$. El origen es estable para $\mu < 0$, inestable para $\mu > 0$, y rodeado por una órbita periódica estable para $\mu > 0$. Esta situación es mostrada en la figura (1.6).

b. Si $d < 0$, $l_1 < 0$. El origen es inestable para $\mu < 0$ y estable para $\mu > 0$. El origen es rodeado por una órbita periódica estable para $\mu < 0$.

c. Si $d > 0$, $l_1 > 0$. El origen es estable para $\mu < 0$ e inestable para $\mu > 0$. Además, el origen es rodeado por una órbita periódica inestable para $\mu < 0$.

d. Si $d < 0$, $l_1 > 0$. El origen es inestable para $\mu < 0$, estable para $\mu > 0$, y rodeado por una órbita periódica inestable para $\mu > 0$. Esta situación es mostrada en la figura (1.7).

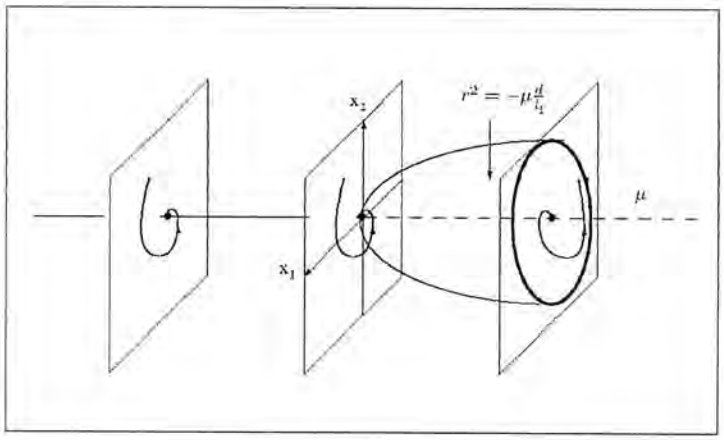


Figura 1.6: Bifurcación de Hopf Supercrítica: Una órbita periódica estable y un punto de equilibrio inestable surgen de un punto de equilibrio estable.

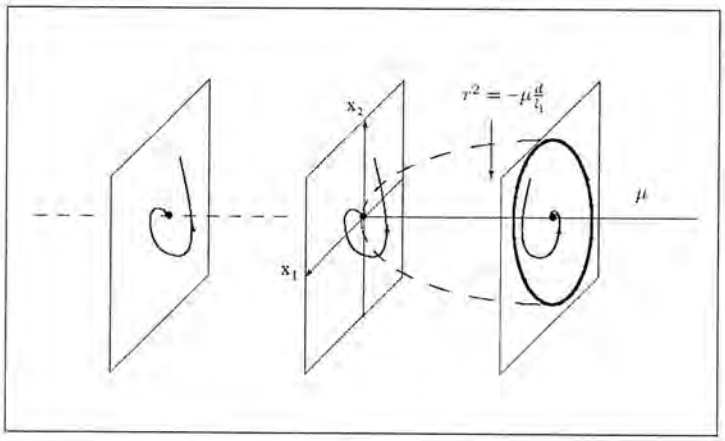


Figura 1.7: Bifurcación de Hopf Subcrítica: Un equilibrio estable y una órbita periódica inestable se funden en un punto de equilibrio inestable.

Capítulo 2

Invariantes en la bifurcación de Hopf

2.1. Planteamiento del problema

Consideramos el sistema no lineal

$$\dot{x} = F(x, \mu), \tag{2.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, y $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ suficientemente suave.
Supongamos que existe un punto $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que:

H1) $F(x_0, \mu_0) = 0$
H2) $\sigma(DF(x_0, \mu_0)) = \{\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \ \ Re(\lambda_j) \neq 0, \ \ para \ \ j = 3, \ldots, n\}$.

Del teorema de la bifurcación de Hopf, es posible que el sistema (2.1) sufra la bifurcación de Hopf en $x = x_0$, cuando $\mu = \mu_0$; es decir, que el par de valores propios complejos conjugados $\lambda_{1,2}(\mu)$ crucen el eje imaginario cuando el parámetro μ se mueve a través del valor crítico $\mu_0 = \mu_0$. Es necesario encontrar estos valores propios y calcular la velocidad de cruce

$$d = \frac{d}{d\mu}(Re(\lambda_{1,2}(\mu)))|_{\mu=\mu_0}$$

En general, d representa un $m-$vector, y $d \neq 0$ significa que sobre al menos una dirección canónica en $\mathbb{R}^m$ el sistema (2.1) sufre la bifurcación de Hopf. Además, para determinar la estabilidad de la órbita periódica asociada a la bifurcación de Hopf debemos encontrar el primer coeficiente de Lyapunov l_1.
En este capítulo encontraremos expresiones para d y l_1 en términos del campo vectorial F. Para esto, calcularemos primero la dinámica sobre la variedad central.

2.2. Dinámica sobre la variedad central

Definamos $A = DF(x_0, \mu_0)$. Sea $v = v_1 + iv_2 \in \mathbb{C}^n$ el vector propio de A asociado al valor propio $i\omega_0$, y consideremos $V_0 = (v_2 \ \ v_1)$. Definimos $P = \begin{pmatrix} V_0 & P_1 \end{pmatrix}$, donde P_1 es la matriz

formada por los vectores propios (inclusive generalizados) de A, asociados a los valores propios $\lambda_3, ..., \lambda_n$.
Entonces de la teoría de formas de Jordan, existe P^{-1} tal que

$$P^{-1}DF(x_0, \mu_0)P = J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

donde $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$, y $\sigma(J_1) = \{\lambda_j \mid Re(\lambda_j) \neq 0, \text{ para } j = 3, ..., n)\}$.

Lema 1. *Si* $P^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ Q_1 \end{pmatrix}$, *donde* $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$, *y* $Q_1 \in \mathbb{R}^{(n-2)\times n}$, *entonces* $w = w_1 + iw_2 \in \mathbb{C}^n$ *es un vector propio izquierdo de* A *con valor propio* $i\omega_0$, *esto es,* $w^T A = i\omega_0 w^T$.

Prueba:
Observe que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^T Av_2 & w_1^T Av_1 \\ w_2^T Av_2 & w_2^T Av_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} w_1^T AP_1 \\ w_2^T AP_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Q_1 Av_2 & Q_1 Av_1 \end{pmatrix} & (Q_1 AP_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$PP^{-1} = v_2 w_1^T + v_1 w_2^T + P_1 Q_1 = I. \tag{2.4}$$

Multiplicando (2.4) por A obtenemos

$$A = Av_2 w_1^T + Av_1 w_2^T + AP_1 Q_1. \tag{2.5}$$

De (2.3) y (2.5) se sigue que

$$\begin{aligned} w_1^T A &= (w_1^T Av_2)w_1^T + (w_1^T Av_1)w_2^T + (w_1^T AP_1)Q_1 = -\omega_0 w_2^T, \\ w_2^T A &= (w_2^T Av_2)w_1^T + (w_2^T Av_1)w_2^T + (w_2^T AP_1)Q_1 = \omega_0 w_1^T. \end{aligned}$$

Entonces

$$w^T A = w_1^T A + iw_2^T A = -\omega_0 w_2^T + i\omega_0 w_1^T = i\omega_0(w_1^T + iw_2^T) = i\omega_0 w^T. \blacksquare$$

De esta manera, para cualquier A con valor propio $i\omega_0$ nada más necesitamos calcular los vectores propios derecho e izquierdo asociados $i\omega_0$, es decir v y w. Pero tendríamos que cuidar la normalización de estos vectores, es decir, que se cumplan las siguientes condiciones dadas por (C.2):

$$\begin{aligned} w_1^T v_2 &= w_2^T v_1 = 1, \\ w_1^T v_1 &= w_2^T v_2 = 0. \end{aligned}$$

Consideremos el cambio de coordenadas y de parámetros

$$y = P^{-1}(x - x_0), \quad \beta = \mu - \mu_0, \tag{2.6}$$

Este cambio de coordenadas traslada nuestro punto de equilibrio al origen y también ortogonaliza el espacio central con los eigenespacios estable e inestable.
Antes de introducir las nuevas variables, hacemos un desarrollo de Taylor del campo $F(x, \mu)$ alrededor del punto de equilibrio (x_0, μ_0)

$$\begin{aligned} F(x,\mu) &= F(x_0,\mu_0) + DF(x_0,\mu_0)(x-x_0) + F_\mu(x_0,\mu_0)(\mu-\mu_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}D^2F(x_0,\mu_0)[(x-x_0),(x-x_0)] + F_{\mu x}(x_0,\mu_0)[(\mu-\mu_0),(x-x_0)] \\ &\quad + \frac{1}{6}D^3F(x_0,\mu_0)[(x-x_0),(x-x_0,x-x_0)] + \cdots, \end{aligned}$$

entonces el sistema (2.1) se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= DF(x_0,\mu_0)(x-x_0) + F_\mu(x_0,\mu_0)(\mu-\mu_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}D^2F(x_0,\mu_0)[(x-x_0),(x-x_0)] + F_{\mu x}(x_0,\mu_0)[(\mu-\mu_0),(x-x_0)] \\ &\quad + \frac{1}{6}D^3F(x_0,\mu_0)[(x-x_0),(x-x_0,x-x_0)] + \cdots. \end{aligned}$$

donde

$$DF(x_0,\mu_0)(x-x_0) = \begin{pmatrix} DF_1(x_0,\mu_0)(x-x_0) \\ DF_2(x_0,\mu_0)(x-x_0) \\ \vdots \\ DF_n(x_0,\mu_0)(x-x_0) \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$$F_\mu(x_0,\mu_0)(\mu-\mu_0) = \begin{pmatrix} F_{1\mu}(x_0,\mu_0)(\mu-\mu_0) \\ F_{2\mu}(x_0,\mu_0)(\mu-\mu_0) \\ \vdots \\ F_{n\mu}(x_0,\mu_0)(\mu-\mu_0) \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$$D^2F(x_0,\mu_0)[(x-x_0),(x-x_0)] = \begin{pmatrix} (x-x_0)^T(D^2F_1(x_0,\mu_0))(x-x_0) \\ (x-x_0)^T(D^2F_2(x_0,\mu_0))(x-x_0) \\ \vdots \\ (x-x_0)^T(D^2F_n(x_0,\mu_0))(x-x_0) \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$$F_{\mu x}(x_0,\mu_0)[(\mu-\mu_0),(x-x_0)] = \begin{pmatrix} (\mu-\mu_0)^T(F_{1\mu x}(x_0,\mu_0))(x-x_0) \\ (\mu-\mu_0)^T(F_{2\mu x}(x_0,\mu_0))(x-x_0) \\ \vdots \\ (\mu-\mu_0)^T(F_{n\mu x}(x_0,\mu_0))(x-x_0) \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$$D^3F(x_0,\mu_0)[(x-x_0),(x-x_0,x-x_0)] = \begin{pmatrix} D^3F_1(x_0,\mu_0)[(x-x_0),(x-x_0,x-x_0)] \\ D^3F_2(x_0,\mu_0)[(x-x_0),(x-x_0,x-x_0)] \\ \vdots \\ D^3F_n(x_0,\mu_0)[(x-x_0),(x-x_0,x-x_0)] \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

con

$$D^3F_i(x_0,\mu_0)[(x-x_0),(x-x_0,x-x_0)] = (x-x_0)^T \begin{pmatrix} (x-x_0)^T(\frac{\partial}{\partial x_1}(D^2F_i(x_0,\mu_0)))(x-x_0) \\ (x-x_0)^T(\frac{\partial}{\partial x_2}(D^2F_i(x_0,\mu_0)))(x-x_0) \\ \vdots \\ (x-x_0)^T(\frac{\partial}{\partial x_n}(D^2F_i(x_0,\mu_0)))(x-x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

Entonces el sistema (2.1) en las nuevas variables puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{y} &= P^{-1}F(Py+x_0,\beta+\mu_0) \\ &= P^{-1}[DF(x_0,\mu_0)Py + F_\mu(x_0,\mu_0)\beta + \frac{1}{2}D^2F(x_0,\mu_0)(Py,Py) \\ &\quad + F_{\mu x}(x_0,\mu_0)(\beta,Py) + \frac{1}{6}D^3F(x_0,\mu_0)(Py,Py,Py) + \cdots] \\ &= Jy + P^{-1}F_\mu(x_0,\mu_0)\beta + \frac{1}{2}P^{-1}[D^2F(x_0,\mu_0)(Py,Py)] \\ &\quad + P^{-1}[F_{\mu x}(x_0,\mu_0)(\beta,Py)] + \frac{1}{6}P^{-1}[D^3F(x_0,\mu_0)(Py,Py,Py)] + \cdots \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ahora, como

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_0 \\ Q_1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$y = P^{-1}(x-x_0) = \begin{pmatrix} W_0 \\ Q_1 \end{pmatrix}(x-x_0) = \begin{pmatrix} W_0(x-x_0) \\ Q_1(x-x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

donde $y_1 \in \mathbb{R}^2$ es la variable asociada a la dinámica sobre la variedad central, $y_2 \in \mathbb{R}^{n-2}$. Sustituyendo (2.8) en (2.7) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= J_0y_1 + W_0F_\mu(x_0,\mu_0)\beta + \mathcal{F}_1(y_1,\beta,y_2) \\ \dot{y}_2 &= J_1y_2 + Q_1F_\mu(x_0,\mu_0)\beta + \mathcal{F}_2(y_1,\beta,y_2) \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(y_1,\beta,y_2) &= \frac{1}{2}W_0D^2F(x_0,\mu_0)(Py,Py)+W_0F_{\mu x}(x_0,\mu_0)(\beta,Py)\\
&\quad+\frac{1}{6}W_0D^3F(x_0,\mu_0)(Py,Py,Py)+\cdots,\\
\mathcal{F}_2(y_1,\beta,y_2) &= \frac{1}{2}Q_1D^2F(x_0,\mu_0)(Py,Py)+Q_1F_{\mu x}(x_0,\mu_0)(\beta,Py)\\
&\quad+\frac{1}{6}Q_1D^3F(x_0,\mu_0)(Py,Py,Py)+\cdots.
\end{aligned}$$

Obsérvese que

$$Py=\begin{pmatrix} V_0 & P_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}=V_0y_1+P_1y_2$$

entonces

$$\begin{aligned}
D^2F(x_0,\mu_0)(Py,Py) &= D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1+P_1y_2,V_0y_1+P_1y_2)\\
&= D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,V_0y_1)+2D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,P_1y_2)\\
&\quad+D^2F(x_0,\mu_0)(P_1y_2,P_1y_2)\\
F_{\mu x}(x_0,\mu_0)(\beta,Py) &= F_{\mu x}(x_0,\mu_0)(\beta,V_0y_1+P_1y_2)\\
&= F_{\mu x}(x_0,\mu_0)(\beta,V_0y_1)+F_{\mu x}(x_0,\mu_0)(\beta,P_1y_2)\\
D^3F(x_0,\mu_0)(Py,(Py,Py)) &= D^3F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,V_0y_1,V_0y_1)+\cdots.
\end{aligned}$$

Considerando los términos que nos interesan, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(y_1,\beta,y_2) &= \frac{1}{2}W_0D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,V_0y_1)+W_0D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,P_1y_2)\\
&\quad+W_0F_{\mu x}(x_0,\mu_0)(\beta,V_0y_1)+\frac{1}{6}W_0D^3F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,V_0y_1,V_0y_1)+\cdots\\
\mathcal{F}_2(y_1,\beta,y_2) &= \frac{1}{2}Q_1D^2F(x_0,\mu_0)(V_0y_1,V_0y_1)+\cdots
\end{aligned}$$

Ahora, si consideramos β como una variable de estado en (2.9), entonces tenemos el sistema extendido

$$\begin{pmatrix} \dot{y_1}\\ \dot{\beta}\\ \dot{y_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_0 & W_0F_\mu(x_0,\mu_0) & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & Q_1F_\mu(x_0,\mu_0) & J_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ \beta\\ y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(y_1,\beta,y_2)\\ 0\\ \mathcal{F}_2(y_1,\beta,y_2)\end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Observación 3. *Se considera a β como una variable de estado para aumentar la dimensión de la variedad central, ya que está parametrizada.*

Ahora, para calcular la variedad central en el sistema (2.10) tenemos que volver a ortogonalizar los eigenespacios, utilizando la teoría de formas de Jordan. Para esto debemos buscar una matriz $\mathcal{P}$ tal que

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} = \begin{pmatrix} J_0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix} = \mathcal{J}$$

donde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} J_0 & W_0 F_\mu(x_0,\mu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_1 F_\mu(x_0,\mu_0) & J_1 \end{pmatrix}$$

Sea $\mathcal{P}$ la matriz

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} I_2 & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & I_m & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & I_{n-2} \end{pmatrix},$$

entonces $\mathcal{A}\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{J}$ equivale a

$$\begin{pmatrix} J_0 & W_0 F_\mu(x_0,\mu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_1 F_\mu(x_0,\mu_0) & J_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & I_m & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & I_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & I_m & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}$$

entonces, multiplicando las matrices e igualando las entradas y considerando que J_1 no tiene valores propios cero y por lo tanto es invertible, tenemos que una solución está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & -J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0) & I_{n-2} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{P}^{-1} &= \begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0) & I_{n-2} \end{pmatrix}, \\ L &= W_0F_\mu(x_0,\mu_0). \end{aligned}$$

Introducimos nuevas variables

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \beta \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \beta \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \beta \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \beta \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{aligned} y_1 &= \xi_1 \\ \beta &= \beta \\ y_2 &= \xi_2 - J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0)\beta. \end{aligned}$$

Ahora el sistema en las nuevas variables se escribe como

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\beta} \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} &= \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{\beta} \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{P}^{-1} \left(\mathcal{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ \beta \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(y_1, \beta, y_2) \\ 0 \\ \mathcal{F}_2(y_1, \beta, y_2) \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathcal{P}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{P} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \beta \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(\xi_1, \beta, \xi_2 - J_1^{-1} Q_1 F_\mu(x_0, \mu_0)\beta) \\ 0 \\ \mathcal{F}_2(\xi_1, \beta, \xi_2 - J_1^{-1} Q_1 F_\mu(x_0, \mu_0)\beta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J_0 & W_0 F_\mu(x_0, \mu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \beta \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{F}}_1(\xi_1, \beta, \xi_2) \\ 0 \\ \tilde{\mathcal{F}}_2(\xi_1, \beta, \xi_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{F}}_1(\xi_1, \beta, \xi_2) &= \mathcal{F}_1(\xi_1, \beta, \xi_2 - J_1^{-1} Q_1 F_\mu(x_0, \mu_0)\beta) \\
&= \frac{1}{2} W_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) + W_0 F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\beta, V_0\xi_1) \\
&\quad + W_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(V_0\xi_1, P_1\xi_2 - P_1 J_1^{-1} Q_1 F_\mu(x_0, \mu_0)\beta) \\
&\quad + \frac{1}{6} W_0 D^3 F(x_0, \mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1, V_0\xi_1) + \cdots \\
&= \frac{1}{2} W_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) + W_0 F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\beta, V_0\xi_1) \\
&\quad + W_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(V_0\xi_1, P_1\xi_2) - W_0 D^2 F(x_0, \mu_0)(V_0\xi_1, P_1 J_1^{-1} Q_1 F_\mu(x_0, \mu_0)\beta) \\
&\quad + \frac{1}{6} W_0 D^3 F(x_0, \mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1, V_0\xi_1) + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{F}}_2(\xi_1, \beta, \xi_2) &= \mathcal{F}_2(\xi_1, \beta, \xi_2 - J_1^{-1} Q_1 F_\mu(x_0, \mu_0)\beta) \\
&= \frac{1}{2} Q_1 D^2 F(x_0, \mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) + \cdots .
\end{aligned}
$$

Ahora bien, podemos agrupar los términos cruzados, usando el siguiente hecho

$$
\begin{aligned}
D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, P_1J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0)\beta) &= \begin{pmatrix} D^2F_1(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, P_1J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0)\beta) \\ \vdots \\ D^2F_n(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, P_1J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0)\beta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \xi_1^TV_0^T(D^2F_1(x_0,\mu_0))P_1J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0)\beta \\ \vdots \\ \xi_1^TV_0^T(D^2F_n(x_0,\mu_0))P_1J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0)\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta^T(P_1J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0))^T(D^2F_1(x_0,\mu_0))V_0\xi_1 \\ \vdots \\ \beta^T(P_1J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0))^T(D^2F_n(x_0,\mu_0))V_0\xi_1 \end{pmatrix} \\
&= \beta^T(P_1J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0))^T(D^2F(x_0,\mu_0))V_0\xi_1 \\
&= (P_1J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0))^T(D^2F(x_0,\mu_0)(\beta, V_0\xi_1)
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{F}}_1(\xi_1,\beta,\xi_2) &= \frac{1}{2}W_0D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1) + W_0D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,P_1\xi_2) \\
&\quad + W_0(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - (P_1J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0))^TD^2F(x_0,\mu_0))(\beta,V_0\xi_1) \\
&\quad + \frac{1}{6}W_0D^3F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1,V_0\xi_1) + \cdots
\end{aligned}
$$

El sistema extendido y normalizado nos queda así

$$
\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\beta} \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 & W_0F_\mu(x_0,\mu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \beta \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{F}}_1(\xi_1,\beta,\xi_2) \\ 0 \\ \tilde{\mathcal{F}}_2(\xi_1,\beta,\xi_2) \end{pmatrix} \tag{2.11}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{F}}_1(\xi_1,\beta,\xi_2) &= \frac{1}{2}W_0D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1) + W_0D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,P_1\xi_2) \\
&\quad + W_0(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - (P_1J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0))^TD^2F(x_0,\mu_0))(\beta,V_0\xi_1) \\
&\quad + \frac{1}{6}W_0D^3F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1,V_0\xi_1) + \cdots \\
\tilde{\mathcal{F}}_2(\xi_1,\beta,\xi_2) &= \frac{1}{2}Q_1D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1) + \cdots .
\end{aligned}
$$

Entonces de la teoría de la variedad central sabemos que existe una variedad central $\hat{h} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{n-2}$, tal que

$$
\xi_2 = \hat{h}(\xi_1,\beta) = \frac{1}{2}h(\xi_1,\xi_1) + \cdots \tag{2.12}
$$

con $\hat{h}(0,0) = D\hat{h}(0,0) = 0$,
que satisface la ecuación homológica

$$\dot{\xi}_2 = \frac{\partial}{\partial \xi_1}\hat{h}(\xi_1, \beta)\dot{\xi}_1.$$

Entonces la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= J_0\xi_1 + W_0F_\mu(x_0,\mu_0)\beta + \tilde{\mathcal{F}}_1(\xi_1, \beta, \hat{h}(\xi_1,\beta)) \\
&= J_0\xi_1 + W_0F_\mu(x_0,\mu_0)\beta + \frac{1}{2}W_0D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) \\
&\quad + W_0(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - (P_1J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0))^TD^2F(x_0,\mu_0))(\beta, V_0\xi_1) \\
&\quad + \frac{1}{2}W_0D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, P_1h(\xi_1,\xi_1)) \\
&\quad + \frac{1}{6}W_0D^3F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1, V_0\xi_1) + \cdots .
\end{aligned}$$

Podemos entonces enunciar el siguiente lema

Lema 2. *Considere el sistema no lineal*

$$\dot{x} = F(x,\mu)$$

donde $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es suficientemente suave. Supongamos que existe (x_0, μ_0) tal que

H1) $F(x_0,\mu_0) = 0$
H2) $\sigma(DF(x_0,\mu_0)) = \{\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0,\ \ Re(\lambda_j) \neq 0,\ \ para\ \ j = 3,\ldots,n\}$.

Entonces, la dinámica sobre la variedad central bidimensional en $x = x_0$, cuando $\mu = \mu_0$, está dada por

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= J_0\xi_1 + W_0F_\mu(x_0,\mu_0)\beta + \frac{1}{2}W_0D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) \\
&\quad + W_0(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - (P_1J_1^{-1}Q_1F_\mu(x_0,\mu_0))^TD^2F(x_0,\mu_0))(\beta, V_0\xi_1) \\
&\quad + \frac{1}{2}W_0D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, P_1h(\xi_1,\xi_1)) \\
&\quad + \frac{1}{6}W_0D^3F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1, V_0\xi_1) + \cdots .
\end{aligned} \tag{2.13}$$

2.3. Variedad central modificada

En esta sección encontraremos una expresión en términos de A, W_0, V_0 y J_0 para $P_1h(\xi_1,\xi_1)$ de (2.13). De esta manera no estaríamos calculando la variedad central, sino más bien un múltiplo de ella. Cabe mencionar que no se muestra una expresión para la variedad central, ya que ésta queda en términos de $P_1, Q_1, \text{y} J_1$ y no nos sirve para nuestros objetivos; aunque

el cálculo de $P_1h(\xi_1,\xi_1)$ empieza como si se quisiera obtener una expresión para $h(\xi_1,\xi_1)$. Entonces tenemos que

$$\dot{\xi}_2 - \frac{1}{2}Dh(\xi_1,\xi_1)\dot{\xi}_1 \equiv 0$$

Sabemos de (2.11) que

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= J_0\xi_1 + W_0F_\mu(x_0,\mu_0)\beta + \tfrac{1}{2}W_0D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1) + \cdots \\ \dot{\xi}_2 &= J_1\xi_2 + \tfrac{1}{2}Q_1D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1) + \cdots \end{aligned} \tag{2.14}$$

entonces tomando los términos que interesan de (2.14) tenemos que

$$\dot{\xi}_2 - \frac{1}{2}Dh(\xi_1,\xi_1)\dot{\xi}_1 = 0 \iff J_1h(\xi_1,\xi_1) + Q_1D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1) - Dh(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 = 0$$

Definamos

$$\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1) = D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1),$$

entonces

$$J_1h(\xi_1,\xi_1) + Q_1\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1) - Dh(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 = 0, \tag{2.15}$$

si derivamos (2.15) obtenemos

$$J_1Dh(\xi_1,\xi_1) + Q_1D\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1) - D(Dh(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1) = 0$$

pero

$$h(\xi_1,\xi_1) = \xi_1^TH\xi_1 = \begin{pmatrix} \xi_1^TH_1\xi_1 \\ \xi_1^TH_2\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_1^TH_{n-2}\xi_1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} Dh(\xi_1,\xi_1) &= \begin{pmatrix} D(\xi_1^TH_1\xi_1) \\ D(\xi_1^TH_2\xi_1) \\ \vdots \\ D(\xi_1^TH_{n-2}\xi_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\xi_1^TH_1 \\ \vdots \\ 2\xi_1^TH_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= 2\xi_1^TH, \end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned} Dh(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 &= \begin{pmatrix} 2\xi_1^T H_1 J_0 \xi_1 \\ \vdots \\ 2\xi_1^T H_{n-2} J_0 \xi_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\xi_1^T J_0^T H_1 \xi_1 \\ \vdots \\ 2\xi_1^T J_0^T H_{n-2} \xi_1 \end{pmatrix} \\ &= 2\xi_1^T J_0^T H \xi_1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D(Dh(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1) &= \begin{pmatrix} 2D(\xi_1^T H_1 J_0 \xi_1) \\ \vdots \\ 2D(\xi_1^T H_{n-2} J_0 \xi_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\xi_1^T (H_1 J_0 + J_0^T H_1) \\ \vdots \\ 2\xi_1^T (H_{n-2} J_0 + J_0^T H_{n-2}) \end{pmatrix} \\ &= 2\xi_1^T (H J_0 + J_0^T H) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$J_1 Dh(\xi_1,\xi_1) + Q_1 D\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1) - 2\xi_1^T H J_0 - 2\xi_1^T J_0^T H = 0$$

Multiplicamos la expresión anterior por $J_0\xi_1$ por la derecha, y considerando que $J_0^2 = -\omega_0^2 I_2$ obtenemos

$$J_1 Dh(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 + Q_1 D\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 + 2\omega_0^2 h(\xi_1,\xi_1) - 2\xi_1^T J_0^T H J_0 \xi_1 = 0$$

multiplicamos (2.15) por J_1 y le sustituímos la expresión anterior

$$J_1^2 h(\xi_1,\xi_1) + J_1 Q_1 \mathcal{S}(\xi_1,\xi_1) + Q_1 D\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 + 2\omega_0^2 h(\xi_1,\xi_1) - 2\xi_1^T J_0^T H J_0 \xi_1 = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$(J_1^2 + 2\omega_0^2 I)h(\xi_1,\xi_1) - 2\xi_1^T J_0^T H J_0 \xi_1 + \mathcal{S}_1(\xi_1,\xi_1) = 0 \tag{2.16}$$

donde

$$\mathcal{S}_1(\xi_1,\xi_1) = J_1 Q_1 \mathcal{S}(\xi_1,\xi_1) + Q_1 D\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1$$

ahora derivamos (2.16)

$$(J_1^2 + 2\omega_0^2 I)Dh(\xi_1,\xi_1) - 4\xi_1^T J_0^T H J_0 + D\mathcal{S}_1(\xi_1,\xi_1) = 0$$

multiplicamos la expresión obtenida por $J_0\xi_1$

$$(J_1^2 + 2\omega_0^2 I)Dh(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 + 2\omega_0^2(2\xi_1^T J_0^T H \xi_1) + D\mathcal{S}_1(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$(J_1^2 + 2\omega_0^2 I)Dh(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 + 2\omega_0^2 Dh(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 + D\mathcal{S}_1(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$(J_1^2 + 4\omega_0^2 I)Dh(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 + D\mathcal{S}_1(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$(J_1^2 + 4\omega_0^2 I)[J_1 h(\xi_1,\xi_1) + Q_1\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1)] + D\mathcal{S}_1(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$(J_1^3 + 4\omega_0^2 J_1)h(\xi_1,\xi_1) + (J_1^2 + 4\omega_0^2 I)Q_1\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1) + D\mathcal{S}_1(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$(J_1^3 + 4\omega_0^2 J_1)h(\xi_1,\xi_1) + \mathcal{S}_2(\xi_1,\xi_1) = 0 \tag{2.17}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2(\xi_1,\xi_1) &= (J_1^2 + 4\omega_0^2 I)Q_1\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1) + D\mathcal{S}_1(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 \\ &= (J_1^2 + 4\omega_0^2 I)Q_1\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1) + J_1Q_1D\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1) + Q_1D(D\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1)\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1) &= D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) \\ &= \begin{pmatrix} \xi_1^T V_0^T D^2F_1(x_0,\mu_0)V_0\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_1^T V_0^T D^2F_n(x_0,\mu_0)V_0\xi_1 \end{pmatrix} \\ &= \xi_1^T V_0^T D^2F(x_0,\mu_0)V_0\xi_1 \\ &= \xi_1^T \mathcal{M}\xi_1\end{aligned}$$

donde $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{M}_n \end{pmatrix}$, con $\mathcal{M}_j = V_0^T D^2F_j(x_0,\mu_0)V_0$, $j = 1,\ldots,n$.

Entonces

$$\begin{aligned}D\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1 &= \begin{pmatrix} D(\xi_1^T\mathcal{M}_1\xi_1)J_0\xi_1 \\ \vdots \\ D(\xi_1^T\mathcal{M}_n\xi_1)J_0\xi_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\xi_1^T\mathcal{M}_1J_0\xi_1 \\ \vdots \\ 2\xi_1^T\mathcal{M}_nJ_0\xi_1 \end{pmatrix} \\ &= 2\xi_1^T\mathcal{M}J_0\xi_1\end{aligned}$$

y

$$D(D\mathcal{S}(\xi_1,\xi_1)J_0\xi_1) = 2\xi_1^T(\mathcal{M}J_0 + J_0^T\mathcal{M})$$

de esta manera

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2(\xi_1,\xi_1) &= (J_1^2+4\omega_0^2 I)Q_1\xi_1^T\mathcal{M}\xi_1 + (2J_1Q_1\xi_1^T\mathcal{M} + 2Q_1\xi_1^T(\mathcal{M}J_0 + J_0^T\mathcal{M}))J_0\xi_1 \\
&= (J_1^2+4\omega_0^2 I)Q_1\xi_1^T\mathcal{M}\xi_1 + 2J_1Q_1\xi_1^T\mathcal{M}J_0\xi_1 - 2\omega_0^2 Q_1\xi_1^T\mathcal{M}\xi_1 + 2Q_1\xi_1^T J_0^T\mathcal{M}J_0\xi_1 \\
&= (J_1^2+2\omega_0^2 I)Q_1\xi_1^T\mathcal{M}\xi_1 + 2J_1Q_1\xi_1^T\mathcal{M}J_0\xi_1 + 2Q_1\xi_1^T J_0^T\mathcal{M}J_0\xi_1
\end{aligned}$$

usando (C.7) tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2(\xi_1,\xi_1) &= Q_1(A^2+2\omega_0^2 I)\xi_1^T\mathcal{M}\xi_1 + 2Q_1A\xi_1^T\mathcal{M}J_0\xi_1 + 2Q_1\xi_1^T J_0^T\mathcal{M}J_0\xi_1 \\
&= Q_1\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1)
\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1) = (A^2+2\omega_0^2 I)\xi_1^T\mathcal{M}\xi_1 + 2A\xi_1^T\mathcal{M}J_0\xi_1 + 2\xi_1^T J_0^T\mathcal{M}J_0\xi_1$$

Multiplicamos (2.17) por P_1 y usamos (C.1) y (C.6)

$$P_1(J_1^3+4\omega_0^2 J_1)h(\xi_1,\xi_1) + P_1\mathcal{S}_2(\xi_1,\xi_1) = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$P_1(J_1^3+4\omega_0^2 J_1)h(\xi_1,\xi_1) + P_1Q_1\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1) = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$(A^3+4\omega_0^2 A)P_1h(\xi_1,\xi_1) + (I_n - V_0W_0)\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1) = 0$$

Finalmente

Lema 3. *La variedad central modificada se calcula de la siguiente manera*

$$\boxed{P_1h(\xi_1,\xi_1) = K\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1)} \tag{2.18}$$

donde

$$\begin{aligned}
K &= (A^3+4\omega_0^2 A)^{-1}(V_0W_0 - I_n) \\
\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1) &= (A^2+2\omega_0^2 I)\xi_1^T\mathcal{M}\xi_1 + 2A\xi_1^T\mathcal{M}J_0\xi_1 + 2\xi_1^T J_0^T\mathcal{M}J_0\xi_1
\end{aligned}$$

con

$$\mathcal{M} = V_0^T D^2F(x_0,\mu_0)V_0.$$

La invertibilidad de la matriz $A^3+4\omega_0^2 A$ se demuestra en el apéndice D.

2.4. Versión final de la Dinámica sobre la variedad central

En esta sección reescribiremos todos los términos de (2.13), haciendo uso de la siguiente

Definición 4. *Considere* $v = (v_1, \ldots, v_m)^T \in \mathbb{R}^m$ *y* $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$, *donde* $L_i \in \mathbb{R}^{r\times s}$, *entonces definimos*

$$\boxed{v \bullet L = \sum_{i=1}^{m} v_i L_i \in \mathbb{R}^{r\times s}}$$

Esta nueva operación cumple con las siguientes propiedades:
P1. $A(v \bullet L) = v \bullet (AL)$
P2. $v \bullet L + v \bullet \mathcal{M} = v \bullet (L + \mathcal{M})$

2.4.1. Términos cuadráticos

Empecemos reescribiendo los cuadráticos puros

$$\frac{1}{2}W_0 D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} w_1^T D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) \\ w_2^T D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} w_i^T D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) &= (w_{i1}, \ldots, w_{in}) \begin{pmatrix} D^2F_1(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) \\ \vdots \\ D^2F_n(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij} D^2F_j(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\xi_1^T V_0^T D^2F_j(x_0,\mu_0)V_0\xi_1 \\ &= \xi_1^T V_0^T \sum_{j=1}^{n} w_{ij} D^2F_j(x_0,\mu_0)V_0\xi_1 \\ &= \xi_1^T V_0^T w_i \bullet D^2F(x_0,\mu_0)V_0\xi_1 \\ &= \left((w_i \bullet D^2F(x_0,\mu_0))(V_0, V_0)\right)(\xi_1, \xi_1) \end{aligned}$$

de esta manera

$$\frac{1}{2}W_0 D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left((w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))(V_0, V_0)\right)(\xi_1, \xi_1) \\ \left((w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))(V_0, V_0)\right)(\xi_1, \xi_1) \end{pmatrix}.$$

De (C.5) tenemos que $P_1 J_1^{-1} Q_1 = A^{-1} - V_0 J_0^{-1} W_0$, entonces si definimos

$$\mathcal{S}_1 = F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - ((A^{-1} - V_0 J_0^{-1} W_0)F_\mu(x_0,\mu_0))^T D^2F(x_0,\mu_0)$$

podemos proceder de forma similar que con los cuadráticos puros y reescribimos los cuadráticos cruzados, esto es

$$W_0\mathcal{S}_1(\beta, V_0\xi_1) = \begin{pmatrix} \left((w_1 \bullet \mathcal{S}_1)V_0\right)(\beta, \xi_1) \\ \left((w_2 \bullet \mathcal{S}_1)V_0\right)(\beta, \xi_1) \end{pmatrix}.$$

de esta manera

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2(\xi_1,\xi_1) &= (J_1^2+4\omega_0^2 I)Q_1\xi_1^T\mathcal{M}\xi_1 + (2J_1Q_1\xi_1^T\mathcal{M} + 2Q_1\xi_1^T(\mathcal{M}J_0 + J_0^T\mathcal{M}))J_0\xi_1 \\
&= (J_1^2+4\omega_0^2 I)Q_1\xi_1^T\mathcal{M}\xi_1 + 2J_1Q_1\xi_1^T\mathcal{M}J_0\xi_1 - 2\omega_0^2Q_1\xi_1^T\mathcal{M}\xi_1 + 2Q_1\xi_1^T J_0^T\mathcal{M}J_0\xi_1 \\
&= (J_1^2+2\omega_0^2 I)Q_1\xi_1^T\mathcal{M}\xi_1 + 2J_1Q_1\xi_1^T\mathcal{M}J_0\xi_1 + 2Q_1\xi_1^T J_0^T\mathcal{M}J_0\xi_1
\end{aligned}$$

usando (C.7) tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2(\xi_1,\xi_1) &= Q_1(A^2+2\omega_0^2 I)\xi_1^T\mathcal{M}\xi_1 + 2Q_1A\xi_1^T\mathcal{M}J_0\xi_1 + 2Q_1\xi_1^T J_0^T\mathcal{M}J_0\xi_1 \\
&= Q_1\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1)
\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1) = (A^2+2\omega_0^2 I)\xi_1^T\mathcal{M}\xi_1 + 2A\xi_1^T\mathcal{M}J_0\xi_1 + 2\xi_1^T J_0^T\mathcal{M}J_0\xi_1$$

Multiplicamos (2.17) por P_1 y usamos (C.1) y (C.6)

$$P_1(J_1^3+4\omega_0^2 J_1)h(\xi_1,\xi_1) + P_1\mathcal{S}_2(\xi_1,\xi_1) = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$P_1(J_1^3+4\omega_0^2 J_1)h(\xi_1,\xi_1) + P_1Q_1\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1) = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$(A^3+4\omega_0^2 A)P_1h(\xi_1,\xi_1) + (I_n - V_0W_0)\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1) = 0$$

Finalmente

Lema 3. *La variedad central modificada se calcula de la siguiente manera*

$$\boxed{P_1h(\xi_1,\xi_1) = K\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1)} \tag{2.18}$$

donde

$$\begin{aligned}
K &= (A^3+4\omega_0^2 A)^{-1}(V_0W_0 - I_n) \\
\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1) &= (A^2+2\omega_0^2 I)\xi_1^T\mathcal{M}\xi_1 + 2A\xi_1^T\mathcal{M}J_0\xi_1 + 2\xi_1^T J_0^T\mathcal{M}J_0\xi_1
\end{aligned}$$

con

$$\mathcal{M} = V_0^T D^2F(x_0,\mu_0)V_0.$$

La invertibilidad de la matriz $A^3+4\omega_0^2 A$ se demuestra en el apéndice D.

2.4. Versión final de la Dinámica sobre la variedad central

En esta sección reescribiremos todos los términos de (2.13), haciendo uso de la siguiente

Definición 4. *Considere* $v = (v_1, \ldots, v_m)^T \in \mathbb{R}^m$ *y* $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$, *donde* $L_i \in \mathbb{R}^{r\times s}$, *entonces definimos*

$$\boxed{v \bullet L = \sum_{i=1}^{m} v_i L_i \in \mathbb{R}^{r\times s}}$$

Esta nueva operación cumple con las siguientes propiedades:
P1. $A(v \bullet L) = v \bullet (AL)$
P2. $v \bullet L + v \bullet \mathcal{M} = v \bullet (L + \mathcal{M})$

2.4.1. Términos cuadráticos

Empecemos reescribiendo los cuadráticos puros

$$\frac{1}{2}W_0 D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} w_1^T D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) \\ w_2^T D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} w_i^T D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) &= (w_{i1}, \ldots, w_{in}) \begin{pmatrix} D^2F_1(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) \\ \vdots \\ D^2F_n(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij} D^2F_j(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\xi_1^T V_0^T D^2F_j(x_0,\mu_0)V_0\xi_1 \\ &= \xi_1^T V_0^T \sum_{j=1}^{n} w_{ij} D^2F_j(x_0,\mu_0)V_0\xi_1 \\ &= \xi_1^T V_0^T w_i \bullet D^2F(x_0,\mu_0)V_0\xi_1 \\ &= \left((w_i \bullet D^2F(x_0,\mu_0))(V_0,V_0)\right)(\xi_1,\xi_1) \end{aligned}$$

de esta manera

$$\frac{1}{2}W_0 D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1, V_0\xi_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left((w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))(V_0,V_0)\right)(\xi_1,\xi_1) \\ \left((w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))(V_0,V_0)\right)(\xi_1,\xi_1) \end{pmatrix}.$$

De (C.5) tenemos que $P_1 J_1^{-1} Q_1 = A^{-1} - V_0 J_0^{-1} W_0$, entonces si definimos

$$\mathcal{S}_1 = F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - ((A^{-1} - V_0 J_0^{-1} W_0)F_\mu(x_0,\mu_0))^T D^2F(x_0,\mu_0)$$

podemos proceder de forma similar que con los cuadráticos puros y reescribimos los cuadráticos cruzados, esto es

$$W_0\mathcal{S}_1(\beta, V_0\xi_1) = \begin{pmatrix} \left((w_1 \bullet \mathcal{S}_1)V_0\right)(\beta,\xi_1) \\ \left((w_2 \bullet \mathcal{S}_1)V_0\right)(\beta,\xi_1) \end{pmatrix}.$$

2.4.2. Términos cúbicos

$$\frac{1}{6}W_0D^3F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1,V_0\xi_1) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} w_1^TD^3F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1,V_0\xi_1) \\ w_2^TD^3F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1,V_0\xi_1)\end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} w_i^TD^3F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1,V_0\xi_1) &= (w_{i1},\ldots,w_{in})\begin{pmatrix} D^3F_1(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1,V_0\xi_1) \\ \vdots \\ D^3F_n(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1,V_0\xi_1)\end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij}D^3F_j(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1,V_0\xi_1) \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\xi_1^TV_0^T(\xi_1^TV_0^TD^3F_j(x_0,\mu_0)V_0\xi_1) \\ &= \xi_1^TV_0^T(\xi_1^TV_0^T\sum_{j=1}^{n} w_{ij}D^3F_j(x_0,\mu_0)V_0\xi_1) \end{aligned}$$

pero

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij}D^3F_j(x_0,\mu_0) = \tilde{\mathcal{M}}_i = \begin{pmatrix}\tilde{\mathcal{M}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathcal{M}}_n\end{pmatrix}, \text{ donde } \tilde{\mathcal{M}}_j \in \mathbb{R}^{n\times n}, \text{ j=1,...,n}$$

entonces

$$\begin{aligned} w_i^TD^3F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1,V_0\xi_1) &= \xi_1^TV_0^T(\xi_1^TV_0^T\tilde{\mathcal{M}}_iV_0\xi_1) \\ &= \xi_1^T\begin{pmatrix} v_2^T\left(\xi_1^TV_0^T\tilde{\mathcal{M}}_iV_0\xi_1\right) \\ v_1^T\left(\xi_1^TV_0^T\tilde{\mathcal{M}}_iV_0\xi_1\right)\end{pmatrix} \\ &= \xi_1^T\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} v_{2j}\left(\xi_1^TV_0^T\tilde{\mathcal{M}}_jV_0\xi_1\right) \\ \sum_{j=1}^{n} v_{1j}\left(\xi_1^TV_0^T\tilde{\mathcal{M}}_jV_0\xi_1\right)\end{pmatrix} \\ &= \xi_1^T\begin{pmatrix} \xi_1^TV_0^T(v_2\bullet\tilde{\mathcal{M}}_i)V_0\xi_1 \\ \xi_1^TV_0^T(v_1\bullet\tilde{\mathcal{M}}_i)V_0\xi_1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

de esta manera

$$\frac{1}{6}W_0D^3F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,V_0\xi_1,V_0\xi_1) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \xi_1^T\begin{pmatrix} \xi_1^TV_0^T(v_2\bullet\tilde{\mathcal{M}}_1)V_0\xi_1 \\ \xi_1^TV_0^T(v_1\bullet\tilde{\mathcal{M}}_1)V_0\xi_1\end{pmatrix} \\ \\ \xi_1^T\begin{pmatrix} \xi_1^TV_0^T(v_2\bullet\tilde{\mathcal{M}}_2)V_0\xi_1 \\ \xi_1^TV_0^T(v_1\bullet\tilde{\mathcal{M}}_2)V_0\xi_1\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

Por último podemos reescribir la parte donde está implícita la variedad central y que también representa a cúbicos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}W_0D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,P_1h(\xi_1,\xi_1)) &= \frac{1}{2}W_0D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,K\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1)) \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} w_1^TD^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,K\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1)) \\ w_2^TD^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,K\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
w_i^TD^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,K\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1)) &= (w_{i1},\ldots,w_{in})\begin{pmatrix} D^2F_1(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,K\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1)) \\ \vdots \\ D^2F_n(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,K\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1)) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{n} w_{ij}D^2F_j(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,K\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\xi_1^TV_0^TD^2F_j(x_0,\mu_0)K\xi_1^TL\xi_1 \\
&= \xi_1^TV_0^T\sum_{j=1}^{n} w_{ij}D^2F_j(x_0,\mu_0)K\xi_1^TL\xi_1 \\
&= \xi_1^TV_0^T(w_i\bullet D^2F(x_0,\mu_0))K\xi_1^TL\xi_1
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
w_i^TD^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,K\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1)) &= \xi_1^TV_0^T(w_i\bullet D^2F(x_0,\mu_0))K\xi_1^TL\xi_1 \\
&= \xi_1^T\begin{pmatrix} v_2^T(w_i\bullet D^2F(x_0,\mu_0))K\xi_1^TL\xi_1 \\ v_1^T(w_i\bullet D^2F(x_0,\mu_0))K\xi_1^TL\xi_1 \end{pmatrix} \\
&= \xi_1^T\begin{pmatrix} r_2^T\xi_1^TL\xi_1 \\ r_1^T\xi_1^TL\xi_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donde $r_k^T = v_k^T(w_i\bullet D^2F(x_0,\mu_0))K$, $k=1,2$. Ahora

$$\begin{aligned}
r_k^T\xi_1^TL\xi_1 &= (r_{k1},\ldots,r_{kn})\begin{pmatrix} \xi_1^TL_1\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_1^TL_n\xi_1 \end{pmatrix} \\
&= \xi_1^T\left(\sum_{j=1}^{n} r_{kj}L_j\right)\xi_1 \\
&= \xi_1^T(r_k\bullet L)\xi_1
\end{aligned}$$

entonces

$$w_i^TD^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,K\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1)) = \xi_1^T\begin{pmatrix} \xi_1^T(v_2^T(w_i\bullet D^2F(x_0,\mu_0))K\bullet L)\xi_1 \\ \xi_1^T(v_1^T(w_i\bullet D^2F(x_0,\mu_0))K\bullet L)\xi_1 \end{pmatrix}$$

de esta manera

$$\frac{1}{2}W_0D^2F(x_0,\mu_0)(V_0\xi_1,P_1h(\xi_1,\xi_1)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi_1^T\begin{pmatrix} \xi_1^T(v_2^T(w_1\bullet D^2F(x_0,\mu_0))K\bullet L)\xi_1 \\ \xi_1^T(v_1^T(w_1\bullet D^2F(x_0,\mu_0))K\bullet L)\xi_1 \end{pmatrix} \\ \\ \xi_1^T\begin{pmatrix} \xi_1^T(v_2^T(w_2\bullet D^2F(x_0,\mu_0))K\bullet L)\xi_1 \\ \xi_1^T(v_1^T(w_2\bullet D^2F(x_0,\mu_0))K\bullet L)\xi_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Por todo lo anterior, podemos entonces enunciar el siguiente lema.

Lema 4. *Considere el sistema no lineal*

$$\dot{x} = F(x,\mu)$$

donde $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ *es suficientemente suave. Supongamos que existe* (x_0,μ_0) *tal que*

H1) $F(x_0,\mu_0)=0$
H2) $\sigma(DF(x_0,\mu_0)) = \{\lambda_{1,2}=\pm i\omega_0,\ \ Re(\lambda_j)\neq 0,\ \ para\ \ j=3,\dots,n\}$.

Entonces, la dinámica sobre la variedad central bidimensional en $x=x_0$, *cuando* $\mu=\mu_0$, *está dada por*

$$\dot{\xi}_1 = J_0\xi_1 + \mathcal{C}_0\beta + \beta^T\mathcal{C}_1\xi_1 + \frac{1}{2}\mathcal{C}_2(\xi_1,\xi_1) + \frac{1}{6}\mathcal{C}_3(\xi_1,\xi_1,\xi_1) + \cdots, \tag{2.19}$$

donde

$$\mathcal{C}_0 = W_0F_\mu(x_0,\mu_0), \tag{2.20}$$

$$\mathcal{C}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1^1 \\ \mathcal{C}_1^2 \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

$$\mathcal{C}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_2^1 \\ \mathcal{C}_2^2 \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

$$\mathcal{C}_3 = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_3^1 \\ \mathcal{C}_3^2 \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

con

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1^i &= \left(w_i\bullet\left(F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - ((A^{-1}-V_0J_0^{-1}W_0)F_\mu(x_0,\mu_0))^TD^2F(x_0,\mu_0)\right)\right)V_0\in\mathbb{R}^{m\times 2}, \\
\mathcal{C}_2^i &= (w_i\bullet D^2F(x_0,\mu_0))(V_0,V_0)\in\mathbb{R}^{2\times 2}, \\
\mathcal{C}_3^i &= \begin{pmatrix} \mathcal{C}_3^{i1} \\ \mathcal{C}_3^{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_2^T(w_i\bullet D^2F(x_0,\mu_0))K\bullet L + V_0^T(v_2\bullet\tilde{\mathcal{M}}_i)V_0 \\ 3v_1^T(w_i\bullet D^2F(x_0,\mu_0))K\bullet L + V_0^T(v_1\bullet\tilde{\mathcal{M}}_i)V_0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2.5. Velocidad de cruce

En esta sección encontraremos una fórmula para la velocidad de cruce. Para esto necesitamos saber bajo que condiciones la dinámica sobre la variedad central es topológicamente equivalente en una vecindad local a la deformación versal de la bifurcación de Hopf.
Consideremos la deformación versal de la bifurcación de Hopf dada por Guckenheimer y Holmes (ver [11]),

$$\dot{z} = J_0 z + \lambda \mathcal{K} z + \mathcal{N}(z, z, z), \tag{2.24}$$

donde $z \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y $\mathcal{K} = \begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix}$, con d el coeficiente de la velocidad de cruce, y $\mathcal{N}(z, z, z) = \begin{pmatrix} l_1 & -b \\ b & l_1 \end{pmatrix} |z|^2 z$, donde l_1 es el primer coeficiente de Lyapunov. Para probar que los sistemas (2.19) y (2.24) son topológicamente equivalentes, tenemos que encontrar un difeomorfismo

$$\xi_1 = \mathcal{G}(z) = z + \mathcal{L}_0 \beta + \beta^T \mathcal{L}_1 z + h_2(z) + h_3(z), \tag{2.25}$$

tal que transforma (2.19) en (2.24). De (2.25) tenemos que

$$\dot{\xi}_1 = D\mathcal{G}(z)\dot{z} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{z} = (D\mathcal{G}(z))^{-1} \dot{\xi}_1|_{\xi_1 = \mathcal{G}(z)}, \tag{2.26}$$

pero,

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1|_{\xi_1=\mathcal{G}(z)} &= J_0 \mathcal{G}(z) + \mathcal{C}_0 \beta + \beta^T \mathcal{C}_1 \mathcal{G}(z) + \frac{1}{2}(\mathcal{G}(z))^T \mathcal{C}_2 \mathcal{G}(z) + \cdots \\
&= J_0(z + \mathcal{L}_0\beta + \cdots) + \mathcal{C}_0\beta + \beta^T \mathcal{C}_1 (z + \mathcal{L}_0 \beta + \cdots) \\
&\quad + \frac{1}{2}(z + \mathcal{L}_0\beta + \cdots)^T \mathcal{C}_2 (z + \mathcal{L}_0\beta + \cdots) + \cdots \\
&= J_0 z + (J_0 \mathcal{L}_0 + \mathcal{C}_0)\beta + J_0 \beta^T \mathcal{L}_1 z + \beta^T \mathcal{C}_1 z + \beta^T \mathcal{L}_0^T \mathcal{C}_2 z + J_0 h_2(z) \\
&\quad + J_0 h_3(z) + \frac{1}{2}\mathcal{C}_2(z, z) + \mathcal{C}_2(z, h_2(z)) + \cdots
\end{aligned} \tag{2.27}$$

y, de $z \approx 0$,

$$(D\mathcal{G}(z))^{-1} = I - \beta^T \mathcal{L}_1 - Dh_2(z) + (Dh_2^2(z) - Dh_2(z)) + \cdots, \tag{2.28}$$

entonces, de (2.27) y (2.28) tenemos que

$$\dot{z} = J_0 z + \bar{\mathcal{C}}_0 \beta + \beta^T \bar{\mathcal{C}}_1 z + \frac{1}{2}\bar{\mathcal{C}}_2(z, z) + \frac{1}{6}\bar{\mathcal{C}}_3(z, z, z) + \cdots, \tag{2.29}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{C}}_0 &= J_0 \mathcal{L}_0 + \mathcal{C}_0, \\
\bar{\mathcal{C}}_1 &= \mathcal{C}_1 + \mathcal{L}_0^T \mathcal{C}_2 + J_0 \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_1 J_0, \\
\frac{1}{2}\bar{\mathcal{C}}_2(z, z) &= J_0 h_2(z) - Dh_2(z) J_0 z + \frac{1}{2}\mathcal{C}_2(z, z), \\
\frac{1}{6}\bar{\mathcal{C}}_3(z, z, z) &= J_0 h_3(z) - Dh_3(z) J_0 z + \frac{1}{6}\mathcal{C}_3(z, z, z) + \mathcal{C}_2(z, h_2(z)) - \frac{1}{2} Dh_2(z) \bar{\mathcal{C}}_2(z, z).
\end{aligned}$$

De la teoría de formas normales se sigue que existen $h_2(z)$ y $h_3(z)$ tales que

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{C}}_2(z,z) &= 0, \\ \frac{1}{6}\bar{\mathcal{C}}_3(z,z,z) &= \mathcal{N}(z,z,z) \end{aligned}$$

Por otra parte, $\bar{\mathcal{C}}_0 = 0$ si y solo si

$$\mathcal{L}_0 = -J_0^{-1}\mathcal{C}_0 = -J_0^{-1}W_0F_\mu(x_0,\mu_0).$$

Entonces solo tenemos que probar que existe $\mathcal{L}_1$ tal que

$$\beta^T\bar{\mathcal{C}}_1 = \lambda K \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \beta^T\bar{C}_1^{11} & \beta^T\bar{C}_1^{12} \\ \beta^T\bar{C}_1^{21} & \beta^T\bar{C}_1^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda d & -\lambda c \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bar{C}_1^{11} = \bar{C}_1^{22} \\ \bar{C}_1^{12} = -\bar{C}_1^{21} \end{cases}$$

Si podemos encontrar tal $\mathcal{L}_1$, entonces la velocidad de cruce será

$$\boxed{d = \frac{d}{d\mu}(\beta\bar{C}_1^{11}) = \frac{d}{d\mu}((\mu-\mu_0)\bar{C}_1^{11}) = \bar{C}_1^{11}}$$

Observación 4.

$$\begin{cases} \bar{C}_1^{11} = d, & m = 1 \\ \bar{C}_1^{11} = \mathcal{D}, & m > 1 \end{cases}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{C}}_1 &= \mathcal{C}_1 + \mathcal{L}_0^T\mathcal{C}_2 + J_0\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_1J_0 \\ &= \begin{pmatrix} C_1^{11} & C_1^{12} \\ C_1^{21} & C_1^{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{L}_0^TC_2^{11} & \mathcal{L}_0^TC_2^{12} \\ \mathcal{L}_0^TC_2^{21} & \mathcal{L}_0^TC_2^{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_1^{11} & L_1^{12} \\ L_1^{21} & L_1^{22} \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} L_1^{11} & L_1^{12} \\ L_1^{21} & L_1^{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1^{11} + \mathcal{L}_0^TC_2^{11} - \omega_0L_1^{21} - \omega_0L_1^{12} & C_1^{12} + \mathcal{L}_0^TC_2^{12} - \omega_0L_1^{22} + \omega_0L_1^{11} \\ C_1^{21} + \mathcal{L}_0^TC_2^{21} + \omega_0L_1^{11} - \omega_0L_1^{22} & C_1^{22} + \mathcal{L}_0^TC_2^{22} + \omega_0L_1^{12} + \omega_0L_1^{21} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \bar{C}_1^{11} = \bar{C}_1^{22} \quad &\Longleftrightarrow \quad C_1^{11} + \mathcal{L}_0^TC_2^{11} - \omega_0L_1^{21} - \omega_0L_1^{12} = C_1^{22} + \mathcal{L}_0^TC_2^{22} + \omega_0L_1^{12} + \omega_0L_1^{21} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\omega_0(L_1^{12} + L_1^{21}) = (C_1^{11} - C_1^{22}) + \mathcal{L}_0^T(C_2^{11} - C_2^{22}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_1^{12} = -\bar{C}_1^{21} \quad &\Longleftrightarrow \quad C_1^{12} + \mathcal{L}_0^TC_2^{12} - \omega_0L_1^{22} + \omega_0L_1^{11} = -C_1^{21} - \mathcal{L}_0^TC_2^{21} - \omega_0L_1^{11} + \omega_0L_1^{22} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\omega_0(L_1^{11} - L_1^{22}) = -(C_1^{12} + C_1^{21}) - \mathcal{L}_0^T(C_2^{21} + C_2^{12}) \end{aligned}$$

El resultado se sigue si seleccionamos $\mathcal{L}_1$ tal que

$$\begin{aligned} L_1^{12} + L_1^{21} &= \frac{1}{2\omega_0}\left((C_1^{11} - C_1^{22}) + \mathcal{L}_0^T(C_2^{11} - C_2^{22})\right), \\ L_1^{11} - L_1^{22} &= -\frac{1}{2\omega_0}\left((C_1^{12} + C_1^{21}) + \mathcal{L}_0^T(C_2^{21} + C_2^{12})\right). \end{aligned}$$

Con esta selección tenemos que

$$\begin{aligned}\bar{C}_1^{11} &= C_1^{11} + \mathcal{L}_0^T C_2^{11} - \omega_0(L_1^{21} + L_1^{12}) \\ &= \frac{1}{2}\left(C_1^{11} + C_1^{22} + \mathcal{L}_0^T(C_2^{11} + C_2^{22})\right).\end{aligned}$$

Lema 5. *Si* $\mathcal{S}_1 = F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - \left((A^{-1} - V_0 J_0^{-1} W_0) F_\mu(x_0,\mu_0)\right)^T D^2F(x_0,\mu_0)$, *entonces*

$$C_1^{11} + C_1^{22} = (w_1 \bullet \mathcal{S}_1)v_2 + (w_2 \bullet \mathcal{S}_1)v_1$$

Prueba. Solo observe que, de (2.21),

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \begin{pmatrix} w_1 \bullet \mathcal{S}_1 \\ w_2 \bullet \mathcal{S}_1 \end{pmatrix} (v_2 \quad v_1) \\ &= \begin{pmatrix} (w_1 \bullet \mathcal{S}_1)v_2 & (w_1 \bullet \mathcal{S}_1)v_1 \\ (w_2 \bullet \mathcal{S}_1)v_2 & (w_2 \bullet \mathcal{S}_1)v_1 \end{pmatrix}. \blacksquare\end{aligned}$$

Lema 6. *Si* $\mathcal{S}_0 = \left(V_0 J_0^{-1} W_0 F_\mu(x_0,\mu_0)\right)^T D^2F(x_0,\mu_0)$, *entonces*

$$\mathcal{L}_0^T(C_2^{11} + C_2^{22}) = -\left((w_1 \bullet \mathcal{S}_0)v_2 + (w_2 \bullet \mathcal{S}_0)v_1\right)$$

Prueba. Observe que, de (2.22),

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_2 &= \begin{pmatrix} V_0^T(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))V_0 \\ V_0^T(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))V_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V_0^T(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_2 & V_0^T(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_1 \\ V_0^T(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_2 & V_0^T(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

y de las propiedades del producto $(\bullet)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0^T(C_2^{11} + C_2^{22}) &= -\left(J_0^{-1} W_0 F_\mu(x_0,\mu_0)\right)^T \left(V_0^T((w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_2 + (w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_1)\right) \\ &= -\left(V_0 J_0^{-1} W_0 F_\mu(x_0,\mu_0)\right)^T \left((w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_2 + (w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_1\right) \\ &= -\left((w_1 \bullet \mathcal{S}_0)v_2 + (w_2 \bullet \mathcal{S}_0)v_1\right). \blacksquare\end{aligned}$$

Finalmente, el siguiente lema nos da una expresión para la velocidad de cruce

Lema 7. *Considere el sistema no lineal*

$$\dot{x} = F(x,\mu)$$

donde $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *es suficientemente suave. Supongamos que existe* (x_0,μ_0) *tal que*

H1) $F(x_0,\mu_0) = 0$
H2) $\sigma(DF(x_0,\mu_0)) = \{\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0,\ Re(\lambda_j) \neq 0,\ \text{para } j = 3,\ldots,n\}$.

Si $v = v_1 + iv_2 \in \mathbb{C}^n$ y $w = w_1 + iw_2 \in \mathbb{C}^n$ son vectores propios derecho e izquierdo de $DF(x_0, \mu_0)$, con valor propio $i\omega_0$, respectivamente, la velocidad de cruce d está dada por

$$\boxed{d = \bar{C}_1^{11} = \frac{1}{2}\left((w_1 \bullet \mathcal{S})v_2 + (w_2 \bullet \mathcal{S})v_1\right)} \tag{2.30}$$

donde

$$\mathcal{S} = F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - \left((DF(x_0, \mu_0))^{-1} F_\mu(x_0, \mu_0)\right)^T D^2F(x_0, \mu_0)$$

Prueba. De los lemas 5 y 6

$$\begin{aligned}
\bar{C}_1^{11} &= \frac{1}{2}\left((w_1 \bullet \mathcal{S}_1)v_2 + (w_2 \bullet \mathcal{S}_1)v_1 - (w_1 \bullet \mathcal{S}_0)v_2 - (w_2 \bullet \mathcal{S}_0)v_1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left((w_1 \bullet \mathcal{S}_1) - (w_1 \bullet \mathcal{S}_0)\right)v_2 + \left((w_2 \bullet \mathcal{S}_1) - (w_2 \bullet \mathcal{S}_0)\right)v_1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((w_1 \bullet (\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_0))v_2 + (w_2 \bullet (\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_0))v_1\right)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_0 &= F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - ((A^{-1} - V_0 J_0^{-1} W_0) F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2F(x_0, \mu_0) - (V_0 J_0^{-1} W_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2F(x_0, \mu_0 \\
&= F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - (A^{-1} F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2F(x_0, \mu_0) \\
&= F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - \left((DF(x_0, \mu_0))^{-1} F_\mu(x_0, \mu_0)\right)^T D^2F(x_0, \mu_0). \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Observación 5. *Si para la segunda otogonalización se hubiese tomado el cambio de coordenadas*

$$\begin{aligned}
y_1 &= \xi_1 - J_0^{-1} W_0 F_\mu(x_0, \mu_0)\beta \\
\beta &= \beta \\
y_2 &= \xi_2 - J_1^{-1} Q_1 F_\mu(x_0, \mu_0)\beta.
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \beta \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{P}}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \beta \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \beta \\ y_2 \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \beta \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

donde $\tilde{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} I_2 & -J_0^{-1} W_0 F_\mu(x_0, \mu_0) & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & -J_1^{-1} Q_1 F_\mu(x_0, \mu_0) & I_{n-2} \end{pmatrix}$ *es tal que*

$$\tilde{\mathcal{P}}^{-1} \mathcal{A} \tilde{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} J_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix} = \mathcal{J}$$

entonces en la fórmula (2.30) en lugar de aparecer el tensor $\mathcal{S}$, hubiese aparecido el tensor $\mathcal{S}_1$, es decir

$$F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - \left(\left((DF(x_0, \mu_0))^{-1} - V_0 J_0^{-1} W_0\right) F_\mu(x_0, \mu_0)\right)^T D^2F(x_0, \mu_0).$$

2.6. Primer coeficiente de Lyapunov

En esta sección encontraremos una fórmula para el primer coeficiente de Lyapunov en términos del campo original. Para ello necesitamos los términos cuadráticos y cúbicos de la expresión de la dinámica sobre la variedad central. Sabemos que para sistemas en el plano el primer coeficiente de Lyapunov se calcula con la siguiente fórmula:

$$l_1 = \frac{1}{16\omega_0}(R_1 + \omega_0 R_2),$$

donde

$$\begin{aligned} R_1 &= (F_{1\xi_{11}\xi_{12}}(F_{1\xi_{11}\xi_{11}} + F_{1\xi_{12}\xi_{12}}) \\ &\quad -F_{2\xi_{11}\xi_{12}}(F_{2\xi_{11}\xi_{11}} + F_{2\xi_{12}\xi_{12}}) \\ &\quad -F_{1\xi_{11}\xi_{11}}F_{2\xi_{11}\xi_1} + F_{1\xi_{12}\xi_{12}}F_{2\xi_{12}\xi_{12}})|_{\xi_1=0} \\ R_2 &= (F_{1\xi_{11}\xi_{11}\xi_{11}} + F_{1\xi_{11}\xi_{12}\xi_{12}} + F_{2\xi_{11}\xi_{11}\xi_{12}} + F_{2\xi_{12}\xi_{12}\xi_{12}})|_{\xi_1=0}. \end{aligned}$$

De (2.19)

$$\mathcal{C}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_2^1 \\ \mathcal{C}_2^2 \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2^i &= V_0^T\left(w_i \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)V_0 \\ &= \begin{pmatrix} v_2^T \\ v_1^T \end{pmatrix}\left(w_i \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)\begin{pmatrix} v_2 & v_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_2^T\left(w_i \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)v_2 & v_2^T\left(w_i \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)v_1 \\ v_1^T\left(w_i \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)v_2 & v_1^T\left(w_i \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)v_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} R_1 &= v_2^T\left(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)v_1\left(v_2^T\left(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)v_2 + v_1^T\left(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)v_1\right) \\ &\quad -v_2^T\left(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)v_1\left(v_2^T\left(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)v_2 + v_1^T\left(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)v_1\right) \\ &\quad -v_2^T\left(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)v_2\left(v_2^T\left(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)v_2\right) \\ &\quad +v_1^T\left(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)v_1\left(v_1^T\left(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)v_1\right) \end{aligned}$$

Ahora, también de (2.19) tenemos que los cúbicos se expresan de la siguiente manera

$$\mathcal{C}_3 = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_3^1 \\ \mathcal{C}_3^2 \end{pmatrix},$$

con

$$\mathcal{C}_3^i = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_3^{i1} \\ \mathcal{C}_3^{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_2^T\left(w_i \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)K \bullet L + V_0^T(v_2 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_i)V_0 \\ 3v_1^T\left(w_i \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)K \bullet L + V_0^T(v_1 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_i)V_0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned}
R_2 &= tr(\mathcal{C}_3^{11}) + tr(\mathcal{C}_3^{22}) \\
&= tr\left(3v_2^T\left(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)K \bullet L + V_0^T(v_2 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_1)V_0\right) \\
&\quad + tr\left(3v_1^T\left(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)K \bullet L + V_0^T(v_1 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_2)V_0\right) \\
&= tr\left(3v_2^T\left(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)K \bullet L\right) + tr\left(V_0^T(v_2 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_1)V_0\right) \\
&\quad + tr\left(3v_1^T\left(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0)\right)K \bullet L\right) + tr\left(V_0^T(v_1 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_2)V_0\right)
\end{aligned}$$

Ahora bien, de (2.18)

$$\mathcal{L}(\xi_1,\xi_1) = \xi_1^T L \xi_1$$

donde

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}, \text{ con } L_j \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \ j = 1,\ldots,n.$$

Encontremos L_j

$$(A^2 + 2\omega_0^2 I) = B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ con } b_j = (b_{j1},\ldots,b_{jn}), \ j = 1,\ldots,n.$$

$$\begin{aligned}
b_j\xi_1^T\mathcal{M}\xi_1 &= (b_{j1},\ldots,b_{jn})\begin{pmatrix} \xi_1^T V_0^T D^2F_1(x_0,\mu_0)V_0\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_1^T V_0^T D^2F_n(x_0,\mu_0)V_0\xi_1 \end{pmatrix} \\
&= \left(V_0^T(b_j \bullet D^2F(x_0,\mu_0))V_0\right)(\xi_1,\xi_1)
\end{aligned}$$

Ahora,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ con } a_j = (a_{j1},\ldots,a_{jn}), \ j = 1,\ldots,n$$

y usando (C.4) tenemos que

$$\mathcal{M}J_0 = \begin{pmatrix} \xi_1^T V_0^T D^2F_1(x_0,\mu_0)V_0J_0\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_1^T V_0^T D^2F_n(x_0,\mu_0)V_0J_0\xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1^T V_0^T D^2F_1(x_0,\mu_0)AV_0\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_1^T V_0^T D^2F_n(x_0,\mu_0)AV_0\xi_1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
a_j\xi_1^T\mathcal{M}J_0\xi_1 &= (a_{j1},\ldots,a_{jn})\begin{pmatrix} \xi_1^T V_0^T D^2F_1(x_0,\mu_0)AV_0\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_1^T V_0^T D^2F_n(x_0,\mu_0)AV_0\xi_1 \end{pmatrix} \\
&= \left(V_0^T(a_j \bullet D^2F(x_0,\mu_0)A)V_0\right)(\xi_1,\xi_1)
\end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned} J_0^T \mathcal{M} J_0 &= \begin{pmatrix} \xi_1^T J_0^T V_0^T D^2 F_1(x_0,\mu_0) V_0 J_0 \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_1^T J_0^T V_0^T D^2 F_n(x_0,\mu_0) V_0 J_0 \xi_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi_1^T V_0^T A^T D^2 F_1(x_0,\mu_0) A V_0 \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_1^T V_0^T A^T D^2 F_n(x_0,\mu_0) A V_0 \xi_1 \end{pmatrix} \\ &= (V_0^T (A^T D^2 F(x_0,\mu_0) A) V_0)(\xi_1, \xi_1) \end{aligned}$$

entonces

$$L_j = V_0^T \left(b_j \bullet D^2 F(x_0,\mu_0) + 2a_j \bullet D^2 F(x_0,\mu_0) A + 2A^T D^2 F_j(x_0,\mu_0) A \right) V_0 \tag{2.31}$$

abusando un poco de notación tenemos que

$$L = V_0^T \left(B \bullet D^2 F(x_0,\mu_0) + 2A \bullet D^2 F(x_0,\mu_0) A + 2A^T D^2 F(x_0,\mu_0) A \right) V_0 \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned} tr(3v_2^T(w_1 \bullet D^2 F(x_0,\mu_0)) K \bullet L) &= \sum_{j=1}^{n} r_{2j} tr(L_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} r_{2j} tr(V_0^T (b_j \bullet D^2 F(x_0,\mu_0) + 2a_j \bullet D^2 F(x_0,\mu_0) A \\ &\quad + 2A^T D^2 F_j(x_0,\mu_0) A) V_0) \\ &= tr(V_0^T (\sum_{j=1}^{n} r_{2j} (b_j \bullet D^2 F_j(x_0,\mu_0) + 2a_j \bullet D^2 F(x_0,\mu_0) A \\ &\quad + 2A^T D^2 F_j(x_0,\mu_0) A)) V_0) \\ &= tr(V_0^T (r_2 \bullet (B \bullet D^2 F(x_0,\mu_0) + 2A \bullet D^2 F(x_0,\mu_0) A \\ &\quad + 2A^T D^2 F(x_0,\mu_0) A)) V_0) \\ &= tr(V_0^T (r_2 \bullet ((A^2 + 2\omega_0^2 I) \bullet D^2 F(x_0,\mu_0) + 2A \bullet D^2 F(x_0,\mu_0) A \\ &\quad + 2A^T D^2 F(x_0,\mu_0) A)) V_0) \end{aligned}$$

Definamos

$$\mathcal{S} = (A^2 + 2\omega_0^2 I) \bullet D^2 F(x_0,\mu_0) + 2A \bullet D^2 F(x_0,\mu_0) A + 2A^T D^2 F(x_0,\mu_0) A,$$

entonces

$$\begin{aligned} tr(3v_2^T(w_1 \bullet D^2 F(x_0,\mu_0)) K \bullet L) &= tr(V_0^T (r_2 \bullet \mathcal{S}) V_0) \\ &= tr\left(\begin{pmatrix} v_2^T \\ v_1^T \end{pmatrix} (r_2 \bullet \mathcal{S})(v_2 \;\; v_1) \right) \\ &= tr \begin{pmatrix} v_2^T (r_2 \bullet \mathcal{S}) v_2 & v_2^T (r_2 \bullet \mathcal{S}) v_1 \\ v_1^T (r_2 \bullet \mathcal{S}) v_2 & v_1^T (r_2 \bullet \mathcal{S}) v_1 \end{pmatrix} \\ &= v_2^T (r_2 \bullet \mathcal{S}) v_2 + v_1^T (r_2 \bullet \mathcal{S}) v_1. \end{aligned}$$

De forma análoga

$$tr(3v_1^T(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))K \bullet L) = v_2^T(r_1 \bullet \mathcal{S})v_2 + v_1^T(r_1 \bullet \mathcal{S})v_1,$$

también

$$\begin{aligned} tr(V_0^T(v_2 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_1)V_0) &= v_2^T(v_2 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_1)v_2 + v_1^T(v_2 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_1)v_1 \\ tr(V_0^T(v_1 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_2)V_0) &= v_2^T(v_1 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_2)v_2 + v_1^T(v_1 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_2)v_1, \end{aligned}$$

de esta manera

$$\begin{aligned} R_2 &= tr(\mathcal{C}_3^{11}) + tr(\mathcal{C}_3^{22}) \\ &= v_2^T((r_2+r_1) \bullet \mathcal{S} + (v_2 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_1) + (v_1 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_2))v_2 \\ &\quad + v_1^T((r_2+r_1) \bullet \mathcal{S} + (v_2 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_1) + (v_1 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_2))v_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto

Lema 8. *Considere el sistema no lineal*

$$\dot{x} = F(x,\mu)$$

donde $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *es suficientemente suave. Supongamos que existe* (x_0, μ_0) *tal que*

H1) $F(x_0,\mu_0) = 0$
H2) $\sigma(DF(x_0,\mu_0)) = \{\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0,\ \ Re(\lambda_j) \neq 0,\ \ para\ \ j = 3,\ldots,n\}$.
H3) $d \neq 0$
Si $v = v_1 + iv_2 \in \mathbb{C}^n$ *y* $w = w_1 + iw_2 \in \mathbb{C}^n$ *son vectores propios derecho e izquierdo de* $DF(x_0,\mu_0)$*, con valor propio* $i\omega_0$*, respectivamente, entonces el primer coeficiente de Lyapunov está dado por*

$$\boxed{\begin{aligned} l_1 = \tfrac{1}{16\omega_0}[&v_2^T(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_1\,(v_2^T(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_2 + v_1^T(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_1) \\ &- v_2^T(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_1\,(v_2^T(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_2 + v_1^T(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_1) \\ &- v_2^T(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_2\,(v_2^T(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_2) \\ &+ v_1^T(w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_1\,(v_1^T(w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_1) \\ &+ \omega_0(v_2^T((r_2+r_1) \bullet \mathcal{S} + (v_2 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_1) + (v_1 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_2))v_2 + v_1^T((r_2+r_1) \bullet \mathcal{S} \\ &+ (v_2 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_1) + (v_1 \bullet \tilde{\mathcal{M}}_2))v_1)], \end{aligned}} \tag{2.33}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}_1 &= \sum_{j=1}^{n} w_{1j} D^3F_j(x_0,\mu_0) \\ \tilde{\mathcal{M}}_2 &= \sum_{j=1}^{n} w_{2j} D^3F_j(x_0,\mu_0) \\ \mathcal{S} &= (A^2 + 2\omega_0^2 I) \bullet D^2F(x_0,\mu_0) + 2A \bullet D^2F(x_0,\mu_0)A + 2A^T D^2F(x_0,\mu_0)A \\ r_2 + r_1 &= K^T\left((w_1 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_2 + (w_2 \bullet D^2F(x_0,\mu_0))v_1\right) \end{aligned}$$

con

$$K = (A^3 + 4\omega_0^2 A)^{-1}(V_0 W_0 - I_n)$$

Capítulo 3

Aplicaciones

3.1. El sistema de Lorenz

Un meteorólogo y matemático llamado Edward Lorenz pensó hacia 1963 que si encontraba un modelo matemático exacto que abarcara las predicciones meteorológicas, podría predecir con bastante antelación el comportamiento de la atmósfera. Para esto trabajó los resultados obtenidos por Salzmann [1962] sobre la convección del aire en la atmósfera. La convección es el movimiento de elevación del aire caliente y es el responsable de muchos aspectos importantes del tiempo. La convección puede ser estacionaria, cuando el aire más caliente se eleva de una forma constante, o no estacionaria, cuando la atmósfera se mueve de acá para allá de una manera mucho más complicada. La convección no estacionaria es mucho más interesante, y obviamente está más relacionada con el tiempo. Ya que el comportamiento más simple después del estacionario es el cambio periódico, la forma más simple de convección no estacionaria sería algún tipo de remolino periódico. Lorenz después de trabajar mucho llegó a un modelo de tres ecuaciones diferenciales bastante simples:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \alpha(x_2 - x_1) \\
\frac{dx_2}{dt} &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\
\frac{dx_3}{dt} &= -\beta x_3 + x_1 x_2
\end{aligned}$$

donde x_1 representa la temperatura; x_2 representa la humedad; x_3 representa la presión barométrica; α representa el número de Prandtl, que es la relación entre la viscosidad de un fluido (en este caso un gas) y su conductividad térmica; β representa la relación entre la longitud y la altura de una caja que se emplea para contener el gas; ρ es el número de Rayleigh, que representa el estado del sistema después del comienzo de la convección. Estos parámetros pueden tener diversos valores, dependiendo de las variables físicas. Lorenz estudió el caso particular $\alpha = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$. Este valor de ρ es un poco mayor al valor de bifurcación de Hopf $\rho_H = 24{,}74$, es decir, por debajo de 24.74 el estado de convección estacionaria es estable y después de 24.74 comienza la convección no estacionaria, así que el sabía que algo extraño tenía que ocurrir.

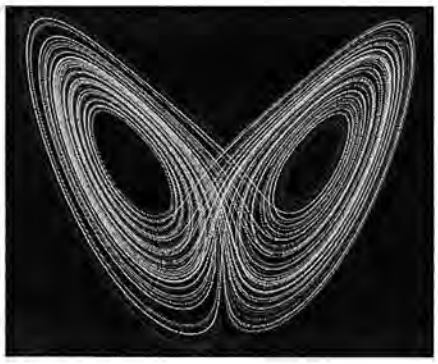


Figura 3.1: Mariposa de Lorenz

El sistema de Lorenz tiene dos tipos de puntos de equilibrio. El origen es un punto de equilibrio para todos los valores de los parámetros y representa no convección. Para $\rho > 1$ hay un par de equilibrios simétricos $\left(\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1\right)$ que representan convección estacionaria.

Lorenz no obtuvo los resultados que quería, sin embargo su estudio aportó mucha información a la matemática, ya que fué el primer sistema tridimensional autónomo en el cual se encontró un atractor caótico conocido como "La mariposa de Lorenz", ver figura (3.1). Haremos un análisis de la bifurcación de Hopf en este sistema. La mayor parte de los cálculos que presentaremos a continuación fueron realizados con el paquete *Mathematica* de *Wolfram Research*.

3.1.1. Análisis de bifurcación

Consideremos entonces el sistema de Lorenz

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{x} = X(x,\mu), \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1 x_2 \end{aligned}$$

Sea $\mu = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \rho \end{pmatrix}$ el vector positivo de parámetros de bifurcación. Consideremos el punto de equilibrio $x_0 = \left(\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1\right)^T$ en el primer octante. Observe que

$$DX(x_0,\mu) = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} & \sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

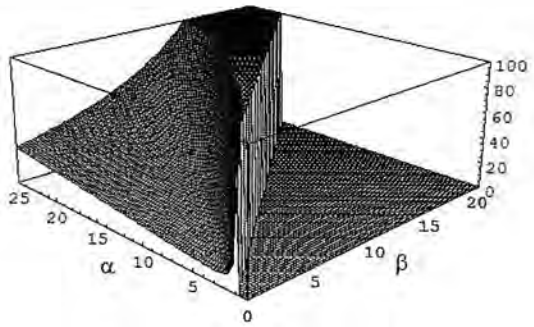


Figura 3.2: Superficie de parámetros que presentan la bifurcación de Hopf.

El polinomio característico está dado por

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha+\beta+1)\lambda^2 + (\rho+\alpha)\beta\lambda + 2\beta\alpha(\rho-1),$$

tenemos que $\lambda = iw_0 \iff 2\beta\alpha(\rho-1) = (\alpha+\beta+1)(\rho+\alpha)\beta$.
Si resolvemos para ρ la ecuación anterior, obtenemos la siguiente superficie en el espacio de parámetros (ver figura 3.2).

$$\mathcal{M} = \left\{ (\beta,\alpha,\rho) \,|\, \rho = \frac{\alpha(\alpha+\beta+3)}{\alpha-\beta-1}, \text{ con } \alpha > \beta+1 \right\},$$

entonces, si $\mu_0 \in \mathcal{M}$,

$$\sigma\,(\,DX(x_0,\mu_0)\,) = \{\,\lambda_0 = -(\alpha+\beta+1),\ \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0\,\},$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\beta\alpha(\alpha+1)}{\alpha-\beta-1}}$. Esto es, para cada $\mu_0 \in \mathcal{M}$, el punto (x_0,μ_0) satisface las hipótesis $(H1)-(H2)$ del Teorema de la bifurcación de Hopf.

3.1.2. Velocidad de cruce

Primero tratemos de calcular la velocidad de cruce de manera usual para observar las ventajas que tiene usar la expresión (2.30). Los valores propios de (3.1) son:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\frac{1}{3}((\alpha+\beta+1) - \frac{2^{\frac{1}{3}}\Gamma_2}{(\Gamma_1+\sqrt{(\Gamma_1)^2+4(\Gamma_2)^3})^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}(\Gamma_1+\sqrt{(\Gamma_1)^2+4(\Gamma_2)^3})^{\frac{1}{3}}) \\
\lambda_2 &= -\frac{1}{3}((\alpha+\beta+1) + \frac{(1+\sqrt{3}i)\Gamma_2}{2^{\frac{1}{3}}(\Gamma_1+\sqrt{(\Gamma_1)^2+4(\Gamma_2)^3})^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}(1-\sqrt{3}i)(\Gamma_1+\sqrt{(\Gamma_1)^2+4(\Gamma_2)^3})^{\frac{1}{3}}) \\
\lambda_3 &= -\frac{1}{3}((\alpha+\beta+1) + \frac{(1-\sqrt{3}i)\Gamma_2}{2^{\frac{1}{3}}(\Gamma_1+\sqrt{(\Gamma_1)^2+4(\Gamma_2)^3})^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}(1+\sqrt{3}i)(\Gamma_1+\sqrt{(\Gamma_1)^2+4(\Gamma_2)^3})^{\frac{1}{3}})
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= -2-6\beta-6\beta^2-2\beta^3+9\beta\rho+9\beta^2\rho-6\alpha+51\beta\alpha+3\beta^2\alpha-45\beta\rho\alpha-6\alpha^2+3\beta\alpha^2-2\alpha^3\\ \Gamma_2 &= -(\alpha+\beta+1)^2+3\beta(\rho+\alpha)\end{aligned}$$

Por simple inspección podemos ver que nos quedamos ante la imposibilidad de tomar la parte real de cualquiera de los valores propios, ya que no podemos saber el signo del término $(\Gamma_1)^2+4(\Gamma_2)^3$ que aparece en todos éstos. Sólo podríamos tomar la parte real de los valores propios para valores específicos de los parámetros y nos interesa un análisis general del sistema. Concluimos entonces que para el sistema de Lorenz no nos sirve la forma usual en que se calcula la velocidad de cruce. Ahora intentemos con (2.30),
Los vectores propios asociados a los valores propios de $DX(x_0,\mu_0)$ son:
Para λ_0

$$v_0=\begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta-1\\ \sqrt{\frac{\beta(\alpha+\beta+1)(\alpha-\beta-1)}{\alpha+1}}\end{pmatrix},$$

Para λ_1

$$v_1=\begin{pmatrix}\alpha\sqrt{\beta(\rho-1)}\\ \sqrt{\beta(\rho-1)}\\ \omega_0^2\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\ \omega_0\sqrt{\beta(\rho-1)}\\ -\omega_0(\alpha+1)\end{pmatrix},$$

entonces

$$P=\begin{pmatrix}0 & \alpha\sqrt{\beta(\rho-1)} & \alpha\\ \omega_0\sqrt{\beta(\rho-1)} & \alpha\sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta-1\\ -\omega_0(\alpha+1) & \omega_0^2 & \sqrt{\frac{\beta(\alpha+\beta+1)(\alpha-\beta-1)}{\alpha+1}}\end{pmatrix},$$

con $\rho=\frac{\alpha(\alpha+\beta+3)}{\alpha-\beta-1}$.
Tenemos que esta matriz cumple con

$$P^{-1}DX(x_0,\mu_0)P=\begin{pmatrix}0 & -\omega_0 & 0\\ \omega_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_0\end{pmatrix}.$$

Observación 6. *Es importante mencionar que la forma en que se tome P no repercutirá en la expresiones finales para la velocidad de cruce. Para el primer coeficiente de Lyapunov esto no sucede así, si tomamos una P distinta obtenemos una expresión final distinta como veremos más adelante.*

Si $e_1^T=(1,0,0)$ y $e_2^T=(0,1,0)$, entonces definimos $v_1=Pe_2$, $v_2=Pe_1$, $w_1^T=e_1^TP^{-1}$, y

$w_2^T = e_2^T P^{-1}$. Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &= F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - \left((DF(x_0,\mu_0))^{-1}F_\mu(x_0,\mu_0)\right)^T D^2F(x_0,\mu_0) \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & -\alpha_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

donde $\alpha_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\rho-1}}$, y $\alpha_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho-1}{\beta}}$. Entonces, siguiendo (2.30), la velocidad de cruce está dada por:

$$
d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta\alpha(1+\alpha)}{\beta^3-(-1+\alpha)(1+\alpha)^2+\beta^2(3+\alpha)-3\beta(-1+\alpha^2)} \\ -\frac{\beta(3+\beta^2+2\alpha-\alpha^2+2\beta(2+\alpha))}{2(\beta^3-(-1+\alpha)(1+\alpha)^2+\beta^2(3+\alpha)-3\beta(-1+\alpha^2))} \\ -\frac{\beta(1+\beta-\alpha)^2}{2(\beta^3-(-1+\alpha)(1+\alpha)^2+\beta^2(3+\alpha)-3\beta(-1+\alpha^2))} \end{pmatrix}.
$$

No es difícil probar que, para $\mu_0 \in \mathcal{M}$, $d_1 d_3 \neq 0$. Esto es, el sistema de Lorenz puede presentar la bifurcación de Hopf en (x_0,μ_0) en la dirección β o en la dirección ρ. Para la dirección α

$$
d_2 = 0 \iff \alpha = \beta + 1 + \sqrt{2\beta^2 + 6\beta + 4}.
$$

Definamos la curva

$$
\gamma = \left\{ (\beta, \alpha_0, \rho_0) \mid \alpha_0 = \beta + 1 + \sqrt{2\beta^2 + 6\beta + 4},\ \ \rho_0 = \frac{\alpha_0(\alpha_0 + \beta + 3)}{\alpha_0 - \beta - 1},\ \ \beta > 0 \right\} \subset \mathcal{M}
$$

Entonces, para cada $\mu_0 \in \mathcal{M} - \gamma$, el sistema de Lorenz presenta la bifurcación de Hopf en (x_0,μ_0) en cualquier dirección.

Se puede hacer un análisis similar para el punto de equilibrio $x_0 = \left(-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1\right)^T$.

3.1.3. Primer coeficiente de Lyapunov

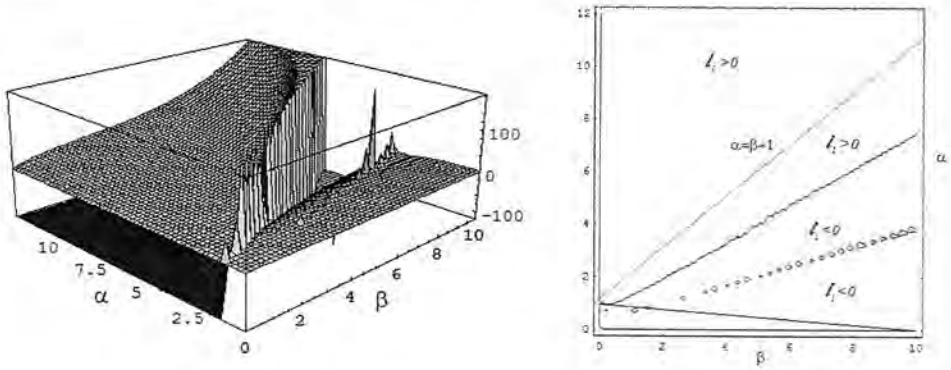
Siguiendo (2.33), el primer coeficiente de Lyapunov está dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} l_1 = & -(\beta\alpha^2(1+\alpha)(3\beta^8+(-1+\alpha)^2(1+\alpha)^6+\beta^7(22+4\alpha)-2\beta^6(-35+\alpha+18\alpha^2) \\ & -2\beta^3(1+\alpha)^2(-49+118\alpha-59\alpha^2+2\alpha^3)-2\beta^2(1+\alpha)^3(-21+56\alpha-41\alpha^2+2\alpha^3) \\ & +2\beta(1+\alpha)^4(5-11\alpha+\alpha^2+5\alpha^3)-2\beta^5(-63+23\alpha+83\alpha^2+9\alpha^3) \\ & +4\beta^4(35-20\alpha-72\alpha^2+2\alpha^3+19\alpha^4)))/(8l_{11}l_{12}) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} l_{11} &= \beta^3-(-1+\alpha)(1+\alpha)^2+\beta^2(3+\alpha)+\beta(3-6\alpha-9\alpha^2) \\ l_{12} &= (\beta^3-(-1+\alpha)(1+\alpha)^2+\beta^2(3+\alpha)-3\beta(-1+\alpha^2))^2 \end{aligned}$$

Haciendo un análisis gráfico podemos ver que el primer coeficiente de Lyapunov siempre es positivo en la región de factibilidad (ver figura 3.3), por lo que concluimos que al ocurrir la bifurcación de Hopf, se presenta una órbita repulsora.



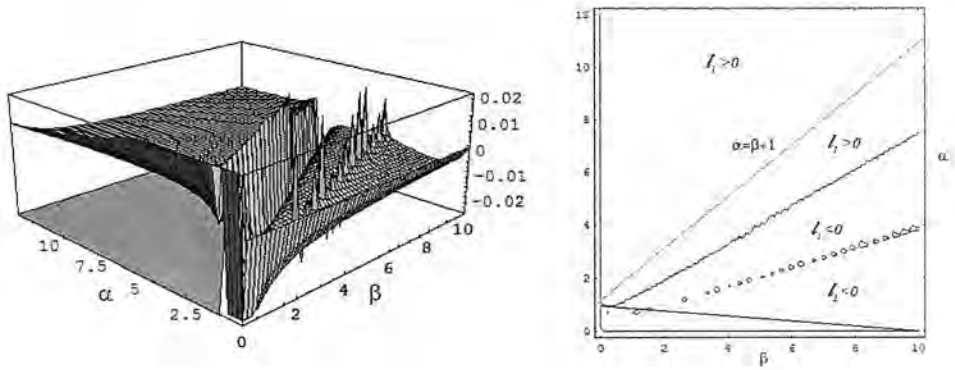
a) b)

Figura 3.3: *En a) se ilustra la superficie de parámetros que representa al primer coeficiente de Lyapunov, en b) se ilustra el contorno 0 de la superficie y las regiones de estabilidad.*

Observación 7. *Si utilizamos el siguiente cambio de variables:*

$$\tilde{P}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{\beta\alpha(1+\alpha)(-1-\beta+\alpha)}}{\alpha^2+\alpha(\beta-1)+2\beta} & \frac{\alpha(-1-\beta+\alpha)}{\alpha^2+\alpha(\beta-1)+2\beta} & -\frac{\alpha}{\beta+1} \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{\beta\alpha(1+\alpha)(-1-\beta+\alpha)}(-1+\beta+\alpha)\delta}{\beta\alpha^3+2\beta^2\alpha^2+(\beta^3+2\beta^2-\beta)+2\beta^3+2\beta^2} & \frac{2(1+\beta-\alpha)\delta}{\alpha^3+2\beta\alpha^2+(\beta^2+2\beta-1)+2\beta^2+2\beta} & \frac{(-1-\beta+\alpha)\delta}{(\beta+1)(\alpha+1)} \end{pmatrix}$$

donde $\delta=\sqrt{\frac{\beta(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)}{\alpha-\beta-1}}$,
obtenemos una expresión distinta para el primer coeficiente de Lyapunov, sin embargo, haciendo un análisis gráfico podemos ver que en la región de factibilidad, éste sigue siendo positivo (ver figura 3.4).



a) b)

Figura 3.4: *En a) se ilustra la superficie de parámetros que representa al primer coeficiente de Lyapunov, en b) se ilustra el contorno 0 de la superficie y las regiones de estabilidad.*

3.2. Motores de inducción

Los motores asíncronos o de inducción son un tipo de motores eléctricos de corriente alterna. El primer prototipo de motor eléctrico capaz de funcionar con corriente alterna fue desarrollado y construido por el ingeniero Nikola Tesla y presentado en el American Institute of Electrical Engineers (en español, Instituto Americano de Ingenieros Eléctricos, actualmente IEEE) en 1888.

El motor asíncrono trifásico está formado por un rotor, que puede ser de dos tipos: a) de jaula de ardilla; b) bobinado, y un estátor, en el que se encuentran las bobinas inductoras. Estas bobinas son trifásicas y están desfasadas entre sí 120°. Según el Teorema de Ferraris, cuando por estas bobinas circula un sistema de corrientes trifásicas, se induce un campo magnético giratorio que envuelve al rotor. Este campo magnético variable va a inducir una tensión en el rotor según la Ley de inducción de Faraday:

$$V_\epsilon = -N\frac{d\phi}{dt}$$

donde V es el voltaje inducido , $\frac{d\phi}{dt}$ es la tasa de variación temporal del flujo magnético y N son las vueltas de alambre de las bobinas. Entonces se da el efecto Laplace (ó efecto motor): todo conductor por el que circula una corriente eléctrica, inmerso en un campo magnético experimenta una fuerza que lo tiende a poner en movimiento. Simultáneamente se da el efecto Faraday (ó efecto generador): en todo conductor que se mueva en el seno de un campo magnético se induce una tensión.

El campo magnético giratorio, a velocidad de sincronismo, creado por el bobinado del estator, corta los conductores del rotor, por lo que se genera una fuerza electromotriz de inducción. La acción mutua del campo giratorio y las corrientes existentes en los conductores del

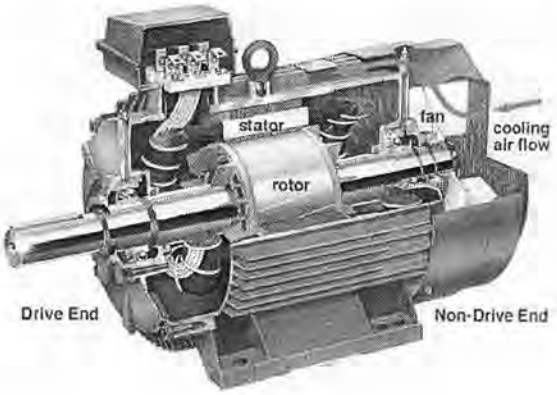


Figura 3.5: Motor de inducción

rotor, originan una fuerza electrodinámica sobre dichos conductores del rotor, las cuales hacen girar el rotor del motor. La diferencia entre las velocidades del rotor y el campo magnético se denomina deslizamiento.

3.2.1. Constitución del motor

Circuito magnético

La parte fija del circuito magnético (estátor) es un anillo cilíndrico de chapa magnética ajustado a la carcasa que lo envuelve. La carcasa tiene una función puramente protectora. En la parte interior del estátor van dispuestos unas ranuras donde se coloca el bobinado correspondiente.

En el interior del estátor va colocado el rotor, que es un cilindro de chapa magnética fijado al eje. En su periferia van dispuestas unas ranuras en las que se coloca el bobinado correspondiente. El entrehierro de estos motores es constante en toda su circunferencia y su valor debe ser el mínimo posible.

Circuitos eléctricos

Los dos circuitos eléctricos van situados uno en las ranuras del estátor (primario) y otro en las del rotor (secundario), que esta cortocircuitado.
El rotor en cortocircuito puede estar formado por bobinas que se cortocircuitan en el exterior de la maquina directamente o mediante reóstatos; o bien, puede estar formado por barras de cobre colocadas en las ranuras, que han de ser cuidadosamente soldadas a dos anillos del mismo material, llamados anillos de cortocircuito. Este conjunto de barras y anillos forma el motor jaula de ardilla.

3.2.2. Formulación del problema

Consideremos el Campo Indirecto Orientado con regulación de velocidad de un motor de inducción dado por [16]

$$\dot{x}_1 = -c_1x_1 + c_2x_4 - \frac{kc_1}{u_2^0}x_2x_4 \tag{3.2}$$

$$\dot{x}_2 = -c_1x_2 + c_2u_2^0 + \frac{kc_1}{u_2^0}x_1x_4 \tag{3.3}$$

$$\dot{x}_3 = -c_3x_3 - c_4(c_5(x_2x_4 - u_2^0x_1) - (T_m + \frac{c_3}{c_4}\omega_{ref})) \tag{3.4}$$

$$\dot{x}_4 = (k_i - k_pc_3)x_3 - k_pc_4(c_5(x_2x_4 - u_2^0x_1) - (T_m + \frac{c_3}{c_4}\omega_{ref})) \tag{3.5}$$

donde x_1 y x_2 son las coordenadas del flujo del rotor; $x_3 = \omega_{ref} - \omega$ es el error de la velocidad angular del rotor, donde ω_{ref} es la velocidad de referencia y asumimos que es constante; $x_4 = i_{qs}$ es la coordenada del estator; T_m es la carga, la cual se considera constante; u_2^0 es una constante de referencia para la magnitud del flujo del rotor y es un parámetro diseñado; k_p y k_i son los gastos proporcional e integral del regulador de velocidad PI, respectivamente; y c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 son parámetros positivos. k es la razón entre los valores estimado y conocido de la resistencia del rotor, es decir, $k = \frac{\hat{R}_r}{R_r}$. La resistencia del rotor es desconocida debido a que ésta cambia con el tiempo. Por lo tanto, se escoge k como parámetro de bifurcación. Notemos que solo los valores positivos de k son de interés físico.

3.2.3. Puntos de equilibrio

Sea $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04})^T$ un punto de equilibrio del sistema (3.2)-(3.5), definimos los parámetros adimensionales

$$r = \frac{x_{04}}{u_2^0}, \text{ y } r^* = \frac{c_1(c_4T_m + c_3\omega_{ref})}{c_2c_4c_5(u_2^0)^2}.$$

r^* representa de alguna manera el sistema de carga. Entonces cualquier equilibrio $x_0 = x_0(k, r^*)$ puede ser escrito como

$$x_0(k, r^*) = \begin{pmatrix} \frac{c_2u_2^0(1-k)r}{c_1(1+k^2r^2)} \\ \\ \frac{c_2u_2^0(1+kr^2)}{c_1(1+k^2r^2)} \\ \\ 0 \\ \\ u_2^0r \end{pmatrix},$$

donde $r = r(k, r^*)$ es cualquier solución real de la ecuación

$$kr^3 - r^*k^2r^2 + kr - r^* = 0. \tag{3.6}$$

Ris T. 1820

Observación 8.

$$x_{03} = 0 \iff kr^3 - r^* k^2 r^2 + kr - r^* = 0.$$

De (3.6) obtenemos la superficie de puntos de equilibrio $\mathcal{S}$,

$$r^* = \frac{kr(1+r^2)}{1+k^2r^2}, \tag{3.7}$$

esto es, cada punto sobre $\mathcal{S}$ representa un punto de equilibrio de nuestro sistema. Ver figura (3.6). Entonces, dependiendo de el par (k, r^*), nuestro sistema tiene uno, dos o tres puntos de equilibrio.

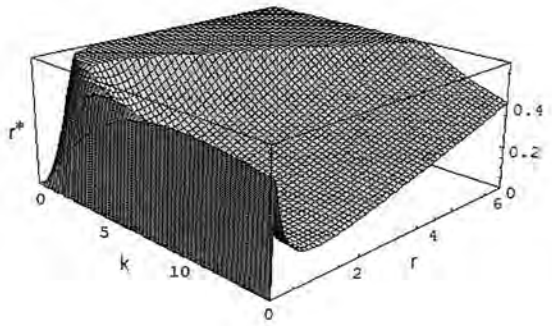


Figura 3.6: Superficie de puntos de equilibrio

3.2.4. Análisis de bifurcación

Consideremos $\mu = (k, r^*)$ como el vector de parámetros de bifurcación, entonces para cada μ tenemos el punto de equilibrio $x_0(\mu)$. La idea es encontrar μ_0 tal que nuestro sistema satisfaga las hipótesis $(H1) - (H2)$ del teorema de Hopf. Si $\dot{x} = F(x, \mu)$ representa nuestro sistema, entonces

$$DF(x_0(\mu), \mu) = \begin{pmatrix} -c_1 & -c_1 kr & 0 & \alpha(k) \\ c_1 kr & -c_1 & 0 & kr\alpha(k) \\ a_{31} & -a_{31} r & -c_3 & \beta(k) \\ a_{31} k_p & -a_{31} k_p r & k_i - c_3 k_p & k_p \beta(k) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} a_{31} &= c_4 c_5 u_2^0, \\ \alpha(k) &= \frac{c_2(1-k)}{1+k^2r^2}, \\ \beta(k) &= -\frac{a_{31} c_2 (1+kr^2)}{c_1(1+k^2r^2)} \end{aligned}$$

El polinomio característico está dado por

$$p(\lambda) = \lambda^4 + a_3(\mu)\lambda^3 + a_2(\mu)\lambda^2 + a_1(\mu)\lambda + a_0(\mu),$$

donde

$$\begin{aligned}
a_0(\mu) &= \frac{d_0 k_i (k^2 r^4 + (3-k^2)r^2 + 1)k}{1+k^2r^2}, && (3.8)\\
a_1(\mu) &= \frac{\alpha_2 r^4 + \alpha_1 r^2 + \alpha_0}{1+k^2r^2}, && (3.9)\\
a_2(\mu) &= \frac{\beta_2 r^4 + \beta_1 r^2 + \beta_0}{c_1(1+k^2r^2)}, && (3.10)\\
a_3(\mu) &= \frac{\delta_1 r^2 + \delta_0}{c_1(1+k^2r^2)}, && (3.11)
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= d_1 + d_2 k_i + (d_2 k_i + d_0 k_p)k,\\
\alpha_1 &= -d_0 k_p k^3 + (2d_1 - d_2 k_i)k^2 + (3d_2 k_i + 3d_0 k_p)k,\\
\alpha_2 &= d_1 k^4 + d_0 k_p k^3,\\
\beta_0 &= c_1^3 + 2d_1 + d_2 k_i + d_0 k_p(1+k),\\
\beta_1 &= (2c_1^3 + 2d_1 - d_0 k_p)k^2 + (d_2 k_i + 3d_0 k_p)k,\\
\beta_2 &= c_1^3 k^4,\\
\delta_0 &= 2c_1^2 + c_1 c_3 + d_2 k_p,\\
\delta_1 &= (2c_1^2 + c_1 c_3)k^2 + d_2 k_p k,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
d_0 &= c_1 c_2 c_4 c_5 u_2^0,\\
d_1 &= c_1^2 c_3,\\
d_2 &= c_2 c_4 c_5 u_2^0.
\end{aligned}$$

Tenemos que $\lambda = iw_0 \iff a_1(\mu)^2 - a_1(\mu)a_2(\mu)a_3(\mu) + a_0(\mu)a_3(\mu)^2 = 0$.
Obtenemos la siguiente curva en el espacio de parámetros (ver figura 3.7)

$$\mathcal{N} = \{\, (k, r^*) \,|\, a_1(\mu)^2 - a_1(\mu)a_2(\mu)a_3(\mu) + a_0(\mu)a_3(\mu)^2 = 0, \text{ con } a_1(\mu)a_3(\mu) > 0 \,\},$$

entonces, si $\mu_0 \in \mathcal{N}$,

$$\sigma\,(\,DF(x_0,\mu_0)\,) = \{\, \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0,\ \ Re(\lambda_j) \neq 0,\ \ j = 3,4 \}\,.$$

Esto es, para cada $\mu_0 \in \mathcal{N}$, el punto (x_0, μ_0) satisface las hipótesis $(H1) - (H2)$ del Teorema de la bifurcación de Hopf.

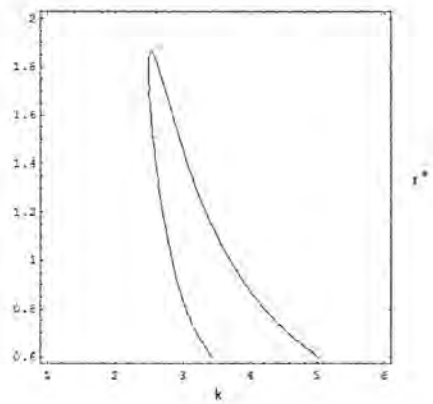


Figura 3.7: *Representación de la curva de parámetros que presentan la bifurcación de Hopf para* $c_1 = 4.4868, c_2 = 0.3567, c_3 = 0.1, c_4 = 9.743, c_5 = 1.911, u_2^0 = 11.3, k_p = 4.5, k_i = 500.$

En la figura (3.8) se puede ver que $a_1(\mu) > 0$ y por tanto $a_1(\mu)a_3(\mu) > 0$.
Si tomamos la pareja en particular $\mu_0 = (3, 0.8349)$ tendríamos solo un punto de equilibrio

$$x_0 = \begin{pmatrix} -0.0931 \\ 0.3143 \\ 0 \\ 23.6183 \end{pmatrix},$$

ya que solo se obtiene $r = 2.0901$ de (3.6)

$$DF(x_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} -4.4868 & -28.1338 & 0 & -0.0176 \\ 28.1338 & -4.4868 & 0 & -0.110952 \\ 210.393 & -439.746 & -0.1 & -5.85199 \\ 9467.7 & -1978.86 & 499.55 & -263.34 \end{pmatrix}$$

Valores propios: $\lambda_{1,2} = \pm 23.96i$, $\lambda_{3,4} = -17.7037 \pm 53.7077i$
Vectores propios:

Para $\lambda_1 = 23.96i$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0.0061 \\ -0.0078 \\ 0.0098 \\ 0.9988 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0073 \\ -0.0040 \\ 0.0457 \\ 0 \end{pmatrix} i$

Para $\lambda_{3,4} = -17.7037 + 53.7077i$, $v_3 = \begin{pmatrix} -0.0008 \\ 0.0011 \\ 0.0234 \\ 0.9932 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0.0011 \\ 0.0022 \\ 0.1134 \\ 0 \end{pmatrix} i$

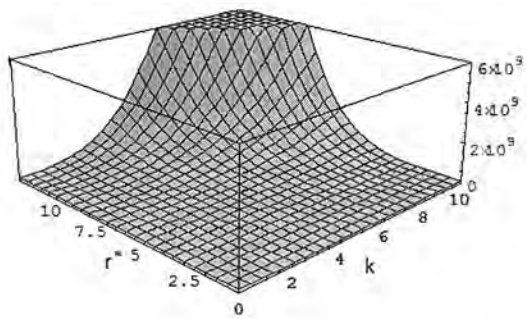


Figura 3.8: Superficie $a_1(\mu)$

Con estos vectores propios construimos la matriz cambio de coordenadas

$$P = \begin{pmatrix} -0.0073 & 0.0061 & 0.0011 & -0.0008 \\ -0.0040 & -0.0078 & 0.0022 & 0.0011 \\ 0.0457 & 0.0098 & 0.1134 & 0.0234 \\ 0 & 0.9988 & 0 & 0.9932 \end{pmatrix}$$

Tenemos que esta matriz cumple con

$$P^{-1}DF(x_0,\mu_0)P = \begin{pmatrix} 0 & -23.96 & 0 & 0 \\ 23.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -17.7037 & -53.7077 \\ 0 & 0 & 53.7077 & -17.7037 \end{pmatrix}.$$

3.2.5. Velocidad de cruce

Si $e_1^T = (1,0,0,0)$ y $e_2^T = (0,1,0,0)$, entonces

$$\begin{aligned} v_1 &= Pe_2 = (0.0061, -0.0078, 0.0098, 0.9988), \\ v_2 &= Pe_1 = (-0.0073, -0.0040, 0.0457, 0), \\ w_1^T &= e_1^T P^{-1} = (-84.2119, -69.0408, 2.2116, -0.0473), \\ w_2^T &= e_2^T P^{-1} = (47.7462, -75.1253, 0.995402, 0.106276). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &= F_{\mu x}(x_0,\mu_0) - \left((DF(x_0,\mu_0))^{-1}F_{\mu}(x_0,\mu_0)\right)^T D^2F(x_0,\mu_0) \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -22.5416 & 0 & 0.0188 \\ 0 & -49.7663 & 0 & 0.0610 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 22.5416 & 0 & 0 & 0.0290 \\ 49.7663 & 0 & 0 & 0.1865 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -205.756 & 0 & 2.2445 \\ 0 & -777.873 & 0 & 0.9542 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -925.9 & 0 & 10.1006 \\ 0 & -3500.43 & 0 & 4.2939 \end{pmatrix} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Entonces, siguiendo (2.30), la velocidad de cruce está dada por:

$$
d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.92754 \\ 4.78524 \end{pmatrix}
$$

lo que significa que presenta la bifurcación de Hopf en (x_0, μ_0), dándose el cruce de los valores propios complejos conjugados de izquierda a derecha en ambas direcciones canónicas.

3.2.6. Primer coeficiente de Lyapunov

Siguiendo (2.33), el primer coeficiente de Lyapunov es:

$$
l_1 = -0{,}00241836
$$

lo cual implica que se presenta una órbita periódica atractora para $\mu > \mu_0$.

Capítulo 4

Conclusiones

En este capítulo expondremos las conclusiones a las que llegamos en este trabajo, esta exposición se hará por capítulos. En el capítulo 1, recordamos la teoría de la variedad central y de la bifurcación de Hopf.

En el capítulo 2, el cual es el más importante de este trabajo, obtuvimos las fórmulas para los invariantes. En cuanto a la expresión que se obtuvo para calcular la velocidad de cruce, ésta quedó compacta, manejable y en términos del campo original. Quizá sea la aportación más importante de este trabajo, ya que no existía una fórmula para calcular la velocidad de cruce. La expresión que se obtuvo para calcular el primer coeficiente de Lyapunov en términos del campo original resultó ser algo extensa, pero a fin de cuentas manejable. De tal manera que para cualquier campo no lineal, es suficiente con calcular los vectores propios derecho e izquierdo de la matriz A y utilizar las fórmulas que se obtuvieron, y así podremos calcular d y l_1.

Para encontrar la expresión para l_1, hicimos uso de un recurso alterno: P_1h. Lo llamamos alterno porque no necesitamos calcular la variedad central, sino una expresión modificada de ella. Esta expresión quizá sea más importante que la expresión para calcular l_1, porque ya no tenemos que resolver la complicada ecuación homológica para calcular la variedad central. Ahora tenemos una expresión para calcular directamente P_1h, la cual se ocupa para el cálculo de los términos cúbicos y posteriormente de el primer coeficiente de Lyapunov.

En el capítulo 3 aplicamos las expresiones obtenidas en este trabajo a dos sistemas: El sistema de Lorenz y un sistema que modela el funcionamiento de un motor de inducción. En el caso del sistema de Lorenz obtuvimos una expresión en términos de los parámetros del sistema para calcular la velocidad de cruce en cualquiera de las direcciones canónicas, es decir, α, β, ρ. También obtuvimos una expresión en términos de los parámetros para el primer coeficiente de Lyapunov e hicimos un análisis gráfico de ésta, observando que en la región de factibilidad l_1 siempre es positivo.

En el ejemplo acerca del funcionamiento de un motor de inducción no se pudieron calcular los vectores propios derecho e izquierdo, en el sentido de que éstos dependieran de los parámetros del sistema: Hubo que tomar un punto en particular de la curva de equilibrios

que satisface las hipótesis $H1) - H2)$ del teorema de Hopf, sin embargo se puede hacer un programa para tomar todos los puntos de ésta curva y así hacer un análisis general del sistema.

Apéndices

Apéndice A

Cálculo de la fórmula de estabilidad

Si el sistema reducido (aproximado) tiene un par de valores propios puramente imaginarios $\lambda, \bar{\lambda} = \pm i\omega$, entonces éste se puede representar convenientemente como una simple ecuación compleja:

$$\dot{z} = \lambda z + h(z, \bar{z}), \tag{A.1}$$

donde

$$z = x + iy \text{ y } \lambda = i\omega.$$

La forma normal (1.11) se convierte, en $\mu = 0$,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + c_2 w^3 \bar{w}^2 + \cdots + c_k w^{k+1} \bar{w}^k + \mathcal{O}(|w|^{2k+3}) \\ &= \lambda w + \hat{h}(w, \bar{w}), \end{aligned} \tag{A.2}$$

donde los coeficientes complejos son de la forma

$$c_j = l_j + ib_j, \tag{A.3}$$

y la barra denota conjugación compleja.
Como en coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= l_1 r^3 + l_2 r^5 + \cdots, \\ \dot{\theta} &= \omega + b_1 r^2 + b_2 r^4 + \cdots, \end{aligned}$$

los primeros coficientes distintos de cero l_j, b_j determinan la estabilidad (y la amplitud de crecimiento local) de la órbita periódica y la modificación dependiente de la amplitud de su período.
Hasta ahora nos hemos remitido a llevar nuestro sistema a forma compleja. Ahora, siguiendo a Hassard y Wan [1978], mostraremos como ésta forma nos permite calcular el coeficiente principal, $l_1 = Re(c_1)$, relativamente simple. Los cálculos son considerablemente más fáciles que aquellos de Marsden y McCracken [1976]. Para transformar (A.1) en (A.2) usamos la transformación cercana a la identidad

$$z = w + \psi(w, \bar{w}), \quad \psi = \mathcal{O}(|w|^2). \tag{A.4}$$

sustituyendo (A.4) en (A.1) y usando (A.2) obtenemos

$$\lambda(w\psi_w - \psi) + \overline{\lambda w}\psi_{\bar{w}} = h(w+\psi, \bar{w}+\bar{\psi}) - \hat{h}(w,\bar{w})(1+\psi_w) - \overline{\hat{h}(w,\bar{w})}\psi_{\bar{w}}, \tag{A.5}$$

donde los subíndices denotan diferenciación parcial. Ahora expresamos ψ en serie de Taylor (con $\psi_{jk} = \partial\psi^{j+k}/\partial w^j \partial\bar{w}^k$):

$$\psi(w,\bar{w}) = \sum_{2\leq j+k\leq 3} \psi_{jk}\frac{w^j\bar{w}^k}{j!k!} + \mathcal{O}(|w|^4). \tag{A.6}$$

Enseguida, usando el hecho de que la forma normal $\hat{h}(w,\bar{w}) = c_1 w^2\bar{w} + \mathcal{O}(|w|^5)$ y sustituyendo (A.6) en (A.5), obtenemos

$$\lambda\psi_{ww}\frac{w^2}{2} + \bar{\lambda}\psi_{w\bar{w}}w\bar{w} + (2\bar{\lambda}-\lambda)\psi_{\overline{ww}}\frac{\bar{w}^2}{2} = h_{ww}\frac{w^2}{2} + h_{w\bar{w}}w\bar{w} + h_{\overline{ww}}\frac{\bar{w}^2}{2} + \mathcal{O}(|w|^3) \tag{A.7}$$

Igualando coeficientes nos da los términos principales en la transformación

$$\psi_{ww} = \frac{h_{ww}}{\lambda} = -\frac{ih_{ww}}{\omega}, \quad \psi_{w\bar{w}} = \frac{h_{w\bar{w}}}{\bar{\lambda}} = \frac{ih_{w\bar{w}}}{\omega},$$

$$\psi_{\overline{ww}} = \frac{h_{\overline{ww}}}{(2\bar{\lambda}-\lambda)} = \frac{ih_{\overline{ww}}}{3\omega} \tag{A.8}$$

ahora realizamos la expansión a un orden más alto e igualamos los coeficientes del término de la forma normal $w^2\bar{w}$. El lector puede checar que, para éste término, el coeficiente de la izquierda de (A.5) se hace idénticamente cero y el de la derecha se vuelve por lo tanto

$$h_{ww}\psi_{w\bar{w}} + h_{w\bar{w}}(\frac{\psi_{ww}}{2} + \bar{\psi}_{w\bar{w}}) + h_{\overline{ww}}\frac{\overline{\psi_{\overline{ww}}}}{2} + \frac{h_{ww\bar{w}}}{2} - c_1 = 0,$$

o usando (A.8)

$$c_1 = \frac{i}{2\omega}(h_{ww}h_{w\bar{w}} - 2|h_{w\bar{w}}|^2 + \frac{1}{3}|h_{\overline{ww}}|^2) + \frac{h_{ww\bar{w}}}{2}. \tag{A.9}$$

de aquí tenemos

$$2l_1 = 2Re(c_1) = h^R_{ww\bar{w}} - \frac{1}{w}(h^R_{ww}h^I_{w\bar{w}} + h^R_{w\bar{w}}h^I_{ww}), \tag{A.10}$$

donde los subíndices R, I denotan las partes real e imaginaria respectivamente. Una expresión similar se puede encontrar para b_1. En esta forma vemos precisamente como los términos de tercer orden se modifican por nuestra transformación $\phi = id + \psi$ en la cual hemos removido los términos de segundo orden. En la publicación de Hassard y Wan [1978] se calcula el segundo coeficiente c_2 (de quinto orden), y el sistema es incrustado en un problema de dimensión mayor, así que uno también tiene términos adicionales surgiendo de la aproximación de la variedad central.

Hacemos incapié que esos cálculos se pueden verificar para el sistema original en variable real, pero son mucho más complicados en esa forma. Sin embargo, ya que tenemos que trabajar normalmente con sistemas en forma real, es conveniente expresar l_1 en términos de funciones

reales f, g de la ecuación (1.11). Expandiendo f y g en serie de Taylor y tomando las partes real e imaginaria de la función compleja evaluada h (y su serie) encontramos que los términos relevantes en (A.10) se pueden expresar como

$$\left.\begin{array}{l} h^R_{ww\bar{w}} = \frac{1}{8}(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}), \\ h^R_{ww} = \frac{1}{4}(f_{xx} - f_{yy} + 2g_{xy}), \\ h^I_{ww} = \frac{1}{4}(g_{xx} - g_{yy} - 2f_{xy}), \\ h^R_{w\bar{w}} = \frac{1}{4}(f_{xx} + f_{yy}), \\ h^I_{w\bar{w}} = \frac{1}{4}(g_{xx} + g_{yy}). \end{array}\right\} \tag{A.11}$$

La fórmula de estabilidad (1.13) ahora se puede derivar de sustituir las expresiones (A.11) en (A.10):

$$16l_1 = (f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + \frac{1}{\omega}[f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]$$

Terminamos notando que la forma normal para la bifurcación de Hopf parametrizada es claramente expresada en variable compleja como

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + \mathcal{O}(|w|^5), \tag{A.12}$$

cuando $\lambda = \mu + i\omega$.

Apéndice B

Cálculo de la forma de Jordan

Considere el sistema no lineal

$$\dot{z} = F(z) \tag{B.1}$$

con $z \in \mathbb{R}^n$ y F un campo suave. Para simplificar la exposición y sin pérdida de generalidad supongamos que $z = 0$ es un equilibrio no-hiperbólico de F y que $E^u = \emptyset$ ($\Leftrightarrow W^u(z_0) = \emptyset$).
Sean $E^s = \langle v_1, v_2, \cdots, v_{n_1} \rangle$ y $E^c = \langle w_1, w_2, \cdots, w_{n_2} \rangle$ con $n_1 + n_2 = n$
Sea $J = DF(0)$ y P la matriz cambio de base tal que

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} (A)_{n_2 \times n_2} & 0 \\ 0 & (B)_{n_1 \times n_1} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

donde $A_{n_2 \times n_2}$ posee los valores propios con parte real cero y $B_{n_1 \times n_1}$ posee los valores propios con parte real negativa. Sea $P^{-1}z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^{n_2}$ y $y \in \mathbb{R}^{n_1}$.
Este cambio de variables ortogonaliza el espacio central con los eigenespacios estable e inestable, ver figura (B.1).
Veamos como se expresa nuestro sistema original (B.1) en términos de las nuevas variables x, y

$$P^{-1}z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\left(P^{-1}z(t)\right)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} F(z) &= F(0) + DF(0)z + \frac{1}{2}D^2F(0)(z,z) + ... \\ F(z) &= Jz + F_2(z) + ... \end{aligned}$$

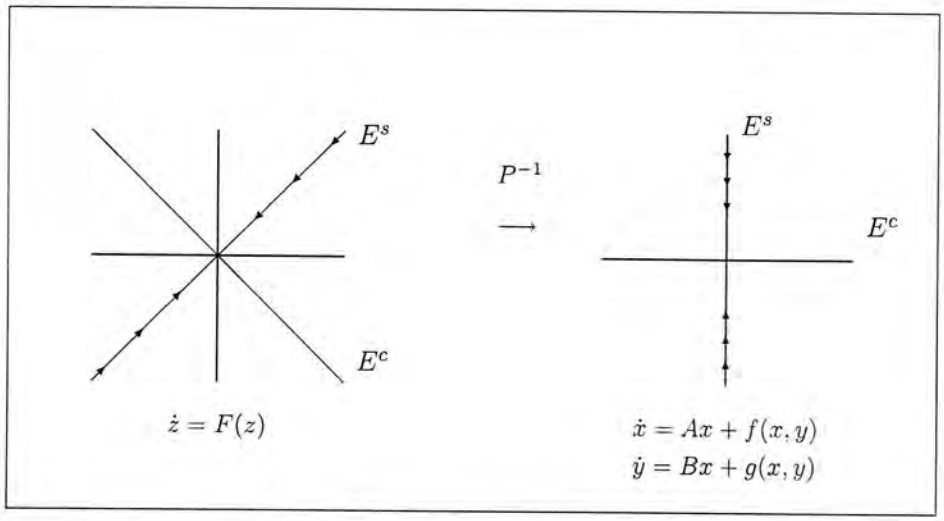


Figura B.1: Rotación de los ejes

donde $F_2(z)$ representa los términos de orden dos. Entonces

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= P^{-1}\dot{z} = P^{-1}(F(z)) \\
&= P^{-1}\left(Jz + F_2(z) + \cdots\right) \\
&= P^{-1}Jz + P^{-1}F_2(z) + \cdots \\
&= P^{-1}JP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + P^{-1}F_2\left(P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \tilde{F}_2(x,y) + \cdots \\
\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Ax \\ By \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + f(x,y) \\
\dot{y} &= By + g(x,y)
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Apéndice C

Identidades

De (2.2) obtenemos las siguientes identidades

$$\begin{aligned} PP^{-1} = I_n &\iff \begin{pmatrix} V_0 & P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ Q_1 \end{pmatrix} = I_n \\ &\iff V_0W_0 + P_1Q_1 = I_n \\ &\iff P_1Q_1 = I_n - V_0W_0 \end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}P = I_n &\iff \begin{pmatrix} W_0V_0 & W_0P_1 \\ Q_1V_0 & Q_1P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \\ &\iff \left.\begin{aligned} W_0V_0 &= I_2 \\ W_0P_1 &= 0 \\ Q_1V_0 &= 0 \\ Q_1P_1 &= I_{n-2} \end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = J &\iff \begin{pmatrix} W_0AV_0 & W_0AP_1 \\ Q_1AV_0 & Q_1AP_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} \\ &\iff \left.\begin{aligned} W_0AV_0 &= J_0 \\ W_0AP_1 &= 0 \\ Q_1AV_0 &= 0 \\ Q_1AP_1 &= J_1 \end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}A^kP = J^k &\iff A^kP = PJ^k \\ &\iff \begin{pmatrix} A^kV_0 & A^kP_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0J_0^k & P_1J_1^k \end{pmatrix} \\ &\iff \left.\begin{aligned} A^kV_0 &= V_0J_0^k \\ A^kP_1 &= P_1J_1^k \end{aligned}\right\}, \quad k \in \mathcal{Z} \end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned} A^k = PJ^kP^{-1} &\iff A^{-k} = PJ^{-k}P^{-1} \\ &= (V_0 \;\; P_1) \begin{pmatrix} J_0^{-k} & 0 \\ 0 & J_1^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ Q_1 \end{pmatrix} \\ &= V_0J_0^{-k}W_0 + P_1J_1^{-k}Q_1, \quad k \in \mathcal{Z} \end{aligned} \tag{C.5}$$

$$
\begin{aligned}
P^{-1}A^{-k}P = J^{-k} &\iff A^{-k}P = PJ^{-k} \\
&\iff \begin{pmatrix} A^{-k}V_0 & A^{-k}P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 J_0^{-k} & P_1 J_1^{-k} \end{pmatrix} \\
&\iff \left.\begin{array}{l} A^{-k}V_0 = V_0 J_0^{-k} \\ A^{-k}P_1 = P_1 J_1^{-k} \end{array}\right\}, \quad k \in \mathcal{Z}
\end{aligned} \tag{C.6}
$$

Si multiplicamos (C.5) por Q_1 y usamos (C.2) obtenemos

$$
Q_1 A^k = J_1^k Q_1, \quad k \in \mathcal{Z} \tag{C.7}
$$

Apéndice D

Invertibilidad

En esta sección demostraremos que si tenemos una matriz $A_{n\times n}$ invertible, entonces A^2+I_n también es invertible. Veamos

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= J \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_s \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i &= \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n \\ \mathcal{C}_j &= \begin{pmatrix} \mathcal{D}_j & I_2 & 0 \\ 0 & \ddots & I_2 \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, s \end{aligned}$$

con

$$\mathcal{D}_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$A^2 = PJ^2P^{-1}$$

entonces

$$\begin{aligned} A^2 + I_n &= PJ^2P^{-1} + I_n \\ &= P(J^2 + I)P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1^2 + I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_r^2 + I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_1^2 + I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_s^2 + I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y sabemos que

$$det(A^2 + I_n) = det(\mathcal{R}_1^2 + I) \cdots det(\mathcal{C}_s^2 + I).$$

Veamos si este determinante es diferente de cero. Consideremos el $i-$ésimo bloque

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i^2 &= (\lambda_i I + N)^2 \\ &= \lambda_i^2 I + 2\lambda_i N + N^2, \end{aligned}$$

donde N es una matriz nilpotente. Entonces

$$\mathcal{R}_i^2 + I = (\lambda_i^2 + 1)I + 2\lambda_i N + N^2,$$

por tanto

$$det(\mathcal{R}_i^2 + I) = (\lambda_i^2 + 1)^k \neq 0.$$

De forma análoga se demuestra que

$$det(\mathcal{C}_i^2 + I) \neq 0,$$

de tal manera que

$$det(A^2 + I_n) \neq 0,$$

lo cual implica que $A^2 + I_n$ es invertible.

Bibliografía

[1] Andronov, A.A., Witt, *A. Sur la theórie mathematiques des autooscillations.* C.R. Acad. Sci. Paris 190. 1930

[2] D.E. Chang,W. Kang and A.J. Krener *Normal forms and bifurcations of control systems*, Proc. 39th IEEE CDC, Sydney. Australia. 2000.

[3] F. Verduzco, F. A. Carrillo. *Characterization of Takens-Bogdanov bifurcation points in indirect field-oriented control of induction motors.*

[4] F. Verduzco, H. Leyva, *Notas de Ecuaciones Diferenciales 2*, Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas.

[5] F. Verduzco, J. Alvarez. *Hopf bifurcation control for affine systems.* American Control Conference 2004. Boston, MA, USA. 2004.

[6] Gordillo, F., F. Salas, R. Ortega, J. Aracil. (2002). *Hopf bifurcation in indirected field-oriented control of induction motors.* Automatica, Vol. 38, pp. 829-835.

[7] Hilborn, R.C., *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press. New York, 1994.

[8] Hopf, E. Abzweigung einer periodishen Losung von einer stationaren Losung eines Differential systems, Ber. Math-Phys. Sachsische Adademie der Wissenshaften Leipzig 94, 1-22. 1942

[9] J. A. Castillo. *Control de la Bifurcación de Hopf.* Tesis de Licenciatura. Junio de 2007.

[10] J. Carr, *Application of Center Manifold Theory*, Springer. 1981.

[11] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, Dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag. 1993.

[12] Kuznetsov, Y., *Elements of Applied Bifurcation Theory.* Springer 1997.

[13] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer. 1988.

[14] Marsden, J. E., McCracken, M. *The Hopf bifurcation and its applications.* Applied Mathematical Sciences. Vol 19. Springer-Verlag. 1976.

[15] Poincaré, H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste.* Vol. I. Paris. 1982.

[16] Salas, F., F. Gordillo, J. Aracil, R. Reginatto. (2008). Codimension-two bifurcations in indirect field oriented control of induction motors drives. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, Vol. 18, No. 3, pp. 779-792.