

SOBRE TOPOLOGÍA DE CLANES ALEATORIOS

TESIS

Que para obtener el grado academico de:

Maestro en ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Nicolas Pierre André Campanelli Prestini

Director de tesis: Dr Martín Eduardo Frías Armenta

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

We've arranged a global civilization in which the most crucial elements - transportation, communications, and all other industries; agriculture, medicine, education, entertainment; protecting the environment; and even the key democratic institution of voting - profoundly depend on science and technology.

We have also arranged things so almost no one understands science and technology. This is a prescription for disaster. We might get away with it for a while, but sooner or later this combustible mixture of ignorance and power is going to blow up in our faces.

UNIVERSIDAD DE SONORA

Acta de Examen de Grado

En la ciudad de Hermosillo, Sonora, México, siendo las 17:00 horas del día 19 de Agosto del 2011, se reunieron en:

El Auditorio del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, los señores:

Dr. Eduardo Frías Armenta

Dr. Carlos Yee Romero, M.C. Jesús Francisco Espinoza Fierro

Dr. Agustín Brau Rojas

bajo la Presidencia del primero y fungiendo como Secretario el último, para efectuar el Examen de Grado a:

Nicolas Pierre Andre Campanelli Prestini

de: Maestro en Ciencias (Matemáticas)

quien presentó el trabajo de tesis:

"Sobre la teoría de complejos de clanes aleatorios"



EL SABER DE MIS HIJOS PARA MI GRANDEZA

Acta No. 17
Foja 17
Libro 1
Exp. No. 204203612

Los sinodales replicaron a 1 sustentante y después de debatir entre si reservada y libremente, lo declararon:

Aprobado por unanimidad

Acto continuo el Presidente del Jurado le hizo saber el resultado de su examen y para constancia se levanta la presente, firmando los que intervinieron.

Firma del sustentante

SECRETARIO

M. Eduardo Frías A.
PRESIDENTE

VOCAL

Dr. Oscar Vega Anaya Coordinador
del Programa de: Posgrado en Matemáticas
de la Universidad de Sonora, hace constar que las firmas que anteceden corres-
ponden a los sinodales que intervinieron en el examen que contiene la presente
acta.

Hermosillo, Sonora, a 19 de Agosto del 2011.



Dr. Oscar Vega Anaya
Oscar Vega Anaya
Coordinador del Programa

Dra. Arminda Guadalupe García de León Peñuñuri Vicerrectora
de la Unidad Regional Centro de la Universidad de Sonora, hace
constar que: el Dr. Oscar Vega Anaya
es a la fecha de expedición de este documento, Coordinador del Programa arriba
citado y suya la firma que aparece al calce del mismo.

Hermosillo, Sonora, a 19 de Agosto del 2011.

Dra. Arminda Guadalupe García de León Peñuñuri



EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA
UNIDAD REGIONAL
CENTRO
VICERRECTORIA

Arminda
VICERRECTORA
UNIDAD REGIONAL CENTRO

Dr Martín Eduardo Frías Armenta.
Universidad de sonora, Hermosillo, México.

SINODALES

M.C. Jesús Francisco Espinoza Fierro.
Universidad de sonora, Hermosillo, México.

Dr Carlos Yee Romero.
Universidad de Baja California, Ensenada, México.

Dr Agustín Brau Rojas.
Universidad de sonora, Hermosillo, México.

Contenido

1	Gráficas	11
1.1	Terminología y definiciones	11
2	Probabilidades y gráficas	17
2.1	Definiciones básicas	17
2.2	Modelos de gráficas aleatorias	20
2.3	El Método Probabilístico	22
3	Topología algebraica	37
3.1	Definiciones básicas	37
3.2	Homología	39
4	Topología de complejos de clanes aleatorios	47
4.1	Conexidad	47
4.2	Homología nula	61
4.3	Retracciones esfericas	68
4.4	Números de betti	70
4.5	Complejos simpliciales Aleatorios	81
5	Apéndice	83

Agradecimientos

Quiero agradecer a todos los que formaron parte de mi vida antes y durante la elaboración de esta tesis. Mi mamá, que siempre me ha creído en mí, mi papa quien me ha dado una buena vida, y mi hermano por haber sido un modelo a seguir.

Quiero agradecer mi director de tesis Martin Eduardo Fras Armenta quien me ha ayudado y soportado tantos años, además de hacerme descubrir la teoría de gráficas. De igual forma, quiero decir gracias a todos los maestros que me impartieron clases o que me ayudaron en el desarrollo de esta tesis.

Quiero agradecer a mis amigos de la carrera quienes me ayudaron tanto con los problemas de computación o de matemáticas con los que me encontré. También gracias a ellos de soportar los momentos de enojo cuando algo no salía bien.

También quiero agradecer a mis amigos de la infancia, les mythes, quienes me siguen haciendo reír y pasar tantos buenos ratos.

Gracias igualmente al CONACYT por haberme ayudado econmicamente durante toda la duración de esta maestría, con el número de folio 335640.

Por último, y más importante, quiero agradecer con todo corazón a mi esposa e hija quienes son las mayores impulsoras de mi desarrollo profesional. Las amo con todo mi corazón.

Capítulo 1

Gráficas

Un trabajo de Leonhard Euler, en 1736, sobre el problema de los puentes de Königsberg es considerado el primer resultado de la teoría de gráficas. También se considera uno de los primeros resultados topológicos en geometría. Este ejemplo ilustra la profunda relación entre la teoría de gráficas y la topología.

En 1845 Gustav Kirchhoff publicó sus leyes de los circuitos para calcular el voltaje y la corriente en los circuitos eléctricos. En 1852 Francis Guthrie planteó el problema de los cuatro colores que pregunta si es posible, utilizando solamente cuatro colores, colorear cualquier mapa de países de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color. Este problema, que no fue resuelto hasta un siglo después por Kenneth Appel y Wolfgang Haken, puede ser considerado como el nacimiento de la teoría de gráficas. Al tratar de resolverlo, los matemáticos definieron términos y conceptos teóricos fundamentales de las gráficas.

En la actualidad, la teoría de gráficas está en constante expansión y se aplica a muchas áreas. Basta notar por ejemplo que cualquier cosa de lenguaje binomial puede ser estudiado como gráfica, así, ayuda a mejorar considerablemente los algoritmos computacionales. En la sección siguiente veremos algunas definiciones básicas de la teoría de gráficas necesarias para lo que sigue de estas tesis.

1.1 Terminología y definiciones

Una *gráfica* G es una pareja (V, E) donde V es el conjunto de *vértices* de G , y E es el conjunto de *aristas* de G , una arista es un subconjunto de dos elementos de V . Una arista caracteriza entonces un vínculo entre dos vértices de una gráfica.

Una *hipergráfica* H es una pareja (V, E') donde V es el conjunto de vértices de H , y E' es el conjunto de *hiperaristas* de H . Una hiperarista es un subconjunto de n elementos, con $2 \leq n \leq |V|$.

Si $\{u, v\} \in E$ (que denotaremos frecuentemente uv), diremos entonces que u y v son *adyacentes*, o más simplemente que u *incide en* v . Si $u \in V$ y $e \in E$ son tales que $u \in e$, diremos que el vértice u es *incidente* en la arista e , o también que u es un *extremo* de e ; y si $e, f \in E$ y $e \cap f \neq \emptyset$, diremos que las aristas e y f son *adyacentes*.

Si no están dados explícitamente, notaremos por $V(G)$ el conjunto de vértices de G y por $E(G)$ el conjunto de aristas de G .

Llamaremos *subgráfica de* G una gráfica $H = (V', E')$, con $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Diremos que la subgráfica $G' = (V', E')$ es subgráfica inducida de $G = (V, E)$ si y solo si para toda $uv \in E'$, $uv \in E$.

Diremos que G *contiene* una gráfica G' si existe una subgráfica inducida de G isomorfa a G' . En el caso contrario, diremos que G *no contiene* G' .

Para un vértice $u \in V$, designaremos por $N(u)$ el conjunto de vértices de G adyacentes a u , y por $N[u]$ el conjunto $N(u) \cup \{u\}$, usualmente a $N(u)$ se le llama vecindad abierta de u y a $N[u]$, la vecindad cerrada de u . Si $N[u] = V$ diremos que u es un *vértice universal*, y que la gráfica G es una *estrella centrada en* u .

Para $u, v \in V$, llamaremos *cadena o camino* de u a v , a una sucesión $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de vértices distintos de G con $u = u_1$ y $v = u_n$ tal que para $i = 1, 2, \dots, n - 1$, tenemos $u_i u_{i+1} \in E$. La *longitud* del camino es el número de vértices que contiene menos uno, es decir $n - 1$. Una *cuerda de un camino* es una arista compuesta de dos vértices no consecutivos de un camino. Si para todo $u, v \in V$ existe al menos un camino de u a v , entonces diremos que G es *conexa*.

Un *ciclo* es una sucesión $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de vértices distintos de G tal que para todo $i = 1, 2, \dots, n$ tenemos $u_i u_{i+1} \in E$ (considerando $u_{n+1} = u_1$). La *longitud* de un ciclo es el número de vértices, es decir n . Una *cuerda* de un ciclo es una arista compuesta de dos vértices no adyacentes del ciclo. Un *hoyo* es un ciclo sin cuerda que tiene longitud de al menos cuatro. Diremos que un camino, un ciclo, o un hoyo es *par* si su longitud es par, e *impar* si su longitud es impar.

La *distancia* de u a v es la distancia más pequeña entre todos los caminos de u a v y se denota por $d(u, v)$ por ejemplo si G es una trayectoria de n vértices y x_1, x_2 los extremos entonces, $d(x_1, x_2) = n - 1$. El diámetro de una gráfica G es el máximo sobre todas las distancias $d(u, v)$, para $u, v \in V(G)$.

El *complemento* de una gráfica $G = (V, E)$ se define como $G^c = (V, E')$ tal que $xy \in E'$ si y solo si $xy \notin E$.

Una gráfica o subgráfica $G = (V, E)$ se dice *completa* si para cada par de vértices $\{x, y\}$ implica que $xy \in E$. Un *clan* es una completa que no está contenida en ninguna otra completa ó lo que es lo mismo un clan es una completa maximal.

Una *coloración* de una gráfica G es asignar un color a cada vértice de G . Una *buena coloración* de G es una coloración de G tal que si dos vértices x y y son adyacentes entonces x y y no tienen el mismo color. Una *n-coloración* de G es una buena coloración de G con n colores. El *número cromático*, denotado $\chi(G)$, está definido como el mínimo n tal que G tiene una n -coloración. Una gráfica G es *n-coloreable* si $\chi(G) \leq n$ y es *n-cromático* si $\chi(G) = n$.

Dado una gráfica $G = (V, E)$, la subgráfica inducida por un conjunto $S \subseteq V$ es denotada $G(S)$ donde $G(S) = (S, E)$ tal que si $xy \in E(G)$ y $x, y \in S$ entonces $xy \in E$.

Definimos un *octaedro* O_d como una gráfica G que consta de $2d$ vértices $v_1, v_2, \dots, v_{2d-1}, v_{2d}$, con el conjunto de aristas $E(G)$ definido como: $v_i v_j \in E(G)$ si y solo si $j \neq i+d$ (módulo $2d$). En otras palabras es una gráfica con $2d$ parejas de vértices no adyacentes, y con todas las demas aristas posibles.

Se dice que una gráfica G es *estrictamente balanceada* (diremos tambien *balanceada*) si el grado promedio de los vértices en G es mayor que en cualquier subgráfica de H de G . Lo que es equivalente a decir que una gráfica es estrictamente balanceada si la razón de las aristas sobre los vértices en G es estrictamente menor que la misma razón para cualquier subgráfica H de G . Ilustraremos esta definición con un lema:

Lemma 1.1. *Si $G = O_d$ para alguna d , entonces G es estrictamente balanceada.*

Demostración: Sea $G = O_d$ un octaedro, llamaremos $R(G)$ a la razón de las aristas sobre los vértices de G . El número de aristas en G esta dado por :

$$\binom{2d}{2} - d = \frac{2d!}{2(2d-2)!} - d = d(2d-1) - d$$

Como G consta de $2d$ vértices, se tiene que

$$R(G) = \frac{d(2d-1) - d}{2d} = \frac{2d-1}{2} - \frac{1}{2} = d-1$$

Ahora calcularemos $R(H)$ para una subgráfica $H \subseteq G$ arbitraria. Sea ℓ_1 el número de parejas no adyacentes, y sea ℓ_2 el número de vértices universales (para los cuales su respectiva pareja en O_d no se encuentra en H). Entonces el número de vértices en H es $2\ell_1 + \ell_2$ y el número de aristas esta dado por :

$$\binom{2\ell_1 + \ell_2}{2} - \ell_1 = \frac{(2\ell_1 + \ell_2)!}{2(2\ell_1 + \ell_2 - 2)!} - \ell_1 = \frac{(2\ell_1 + \ell_2)(2\ell_1 + \ell_2 - 1)}{2} - \ell_1$$

y se tiene que

$$R(H) = \frac{\frac{(2\ell_1 + \ell_2)(2\ell_1 + \ell_2 - 1)}{2} - \ell_1}{2\ell_1 + \ell_2} = \frac{2\ell_1 + \ell_2 - 1}{2} - \frac{\ell_1}{2\ell_1 + \ell_2}$$

y como $2\ell_1 + \ell_2 < 2d - 1$:

$$R(H) = \frac{2\ell_1 + \ell_2 - 1}{2} - \frac{\ell_1}{2\ell_1 + \ell_2} < \frac{2d - 2}{2} - \frac{\ell_1}{2\ell_1 + \ell_2} < \frac{2d - 2}{2} = d - 1 = R(G)$$

□

A continuación definiremos dos operaciones básicas de gráficas. Sea $G = (V, E)$ una gráfica, $x, y \in V(G)$ y $xy \in E(G)$. Llamaremos *subdivisión elemental* de una arista al hecho de reemplazar la arista $e = xy$ por un vértice w y dos aristas $e' = xw$ y $e'' = wy$. Simétricamente, si tenemos dos aristas $e' = xw$ y $e'' = wy$, llamaremos *eliminación débil* de un vértice al hecho de contraer estas dos aristas (sustituirlas) por una arista $e = xy$, así se agrega la arista e y desaparecen tanto las aristas e' y e'' como el vértice w .

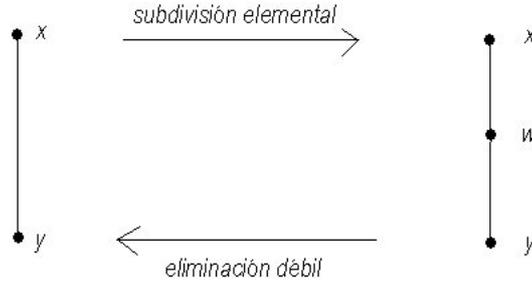


Figure 1.1: una subdivisión elemental de arista y una eliminación débil de un vértice

Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos gráficas. Si existe \tilde{G} tal que G y G' se pueden obtener de \tilde{G} mediante subdivisiones elementales, entonces diremos que G y G' son homeomorfas.

Terminaremos esta sección con algún ejemplo de demostración en gráficas.

Teorema 1.1. *i) Cualquier gráfica G que no es completa contiene tres vértices x, y, z tal que $xy, xz \in E(G)$ y $yz \notin E(G)$.*

ii) Si G es 2-conexa y tiene grado mínimo 3 entonces existe una terna x, y, z como en el inciso anterior tal que al remover y, z , G sigue conexa.

Demostración: i) Sea G una gráfica que no es completa. Como G no es completa, existen $y, z \in V(G)$ tal que $yz \notin E(G)$. Sea $P = \{y, x_1, \dots, x_n, z\}$ el camino (o uno de los caminos) más corto de y a z . Si P es de longitud 2 ya terminamos, suponga que P tiene longitud al menos 3. Como P es el camino mínimo entre y y z se tiene que $yx_1, x_1x_2 \in E(G)$, $x_1x_i \notin E(G) \forall x_i \in P$ con $3 \leq i \leq x_n$ y $x_1z \notin E(G)$, además $yx_2 \notin E(G)$, pues de no ser así, P no sería el camino más corto. Por lo tanto, para la terna y, x_1, x_2 se tiene que $yx_1, x_1x_2 \in E(G)$ y $yx_2 \notin E(G)$.

ii) Sea G una gráfica 2-conexa con $\delta(G) = 3$. Sea x un vertice de grado 3, y sean v_1, v_2, v_3 sus vertices adyacentes. Haremos la prueba por casos:

CASO 1: No hay ninguna arista entre v_1, v_2, v_3 . Como G es 2-conexa debe haber un camino P_1 (sin pérdida de generalidad) de $N(v_1)$ a $N[v_2]$ con $v_1 \notin P_1$ (de no ser así v_1 sería punto de corte), además, con el mismo argumento, debe de haber un camino P_2 de $N(v_3)$ a $N[v_2]$ con $v_3 \notin P_2$. Si $v_1 \notin P_2$ entonces se tiene que $xv_1, xv_3 \in E(G)$ y $v_1v_3 \notin E(G)$, podemos quitar v_1, v_3 sin desconectar la gráfica, y ya tenemos la terna deseada. Si v_1 está en todos los caminos de $N(v_3)$ a $N(v_2)$, si $v_2 \notin P_1$ escogemos la terna v_2, x, v_3 y al quitar v_2 y v_3 no se desconecta la gráfica. Si v_1 está en todos los caminos de $N(v_3)$ a $N(v_2)$ y además v_2 está en todos los caminos de $N(v_1)$ a $N[v_2]$ entonces existe un camino P_3 de $N(v_2)$ a $N[v_3]$, si $v_3 \notin P_3$ entonces escogemos la terna v_2, x, v_3 y al quitar v_2 y v_3 no se desconecta G , si v_3 está en todos los caminos de $N(v_2)$ a $N[v_3]$, sea $z \in N(v_3)$, entonces escogemos la terna x, v_3, z y al quitar x, z no se desconecta la gráfica.

CASO 2: $v_1v_2 \in E(G)$ y $v_1v_3, v_2v_3 \notin E(G)$. Como G es 2-conexa existe un camino P_1 de $N(v_3)$ a $N[v_2]$ (escogemos el más corto), como v_3 tiene al menos grado 3, existe $z \in N(v_3)$ tal que $z \notin P_1$, luego como G es 2-conexa, al quitar z , G no se desconecta, así escogiendo como terna a x, v_3, z tenemos que $xv_3, v_3z \in E(G)$ y $xz \notin E(G)$ tales que al quitar x y z , G sigue conexa.

CASO 3: $v_1v_2, v_2v_3 \in E(G)$ y $v_1v_3 \notin E(G)$.

CASO 4: $v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3 \in E(G)$

Para los casos 3 y 4, utilizando los mismos argumentos que en el caso dos se termina la prueba.

□

Capítulo 2

Probabilidades y gráficas

2.1 Definiciones básicas

Al realizar un experimento, tenemos varios resultados posibles. Llamaremos al conjunto de todos los posibles resultados el *espacio muestral* y lo denotaremos por Ω . Llamaremos evento (con respecto a Ω) a una colección de elementos (puntos) de Ω . Una σ -álgebra \mathcal{A} de eventos es una colección no vacía de eventos de Ω tales que:

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$ (donde A^c es el complemento de A).
- Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Una medida de probabilidad en una σ -álgebra \mathcal{A} , es una función $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ tal que:

1- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2- Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \cap B = \emptyset$ entonces $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Un espacio de probabilidad es una terna $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\}$.

Cuando Ω es numerable o finito (finito o infinito), es usual considerar la σ -álgebra \mathcal{A} consistente de todos los subconjuntos de Ω , es decir $|\mathcal{A}| = 2^\Omega$ y la medida de probabilidad está determinada por una función de probabilidad

$$p : \Omega \rightarrow [0, 1] \text{ tal que } \sum_{x \in \Omega} p(x) = 1.$$

mediante

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A} p(x) \text{ para cada } A \subseteq \Omega$$

Obviamente $\mathbb{P}(\{x\}) = p(x)$. Sin riesgo de confusión, en lo que sigue de esta tesis, denotaremos tanto por $\mathbb{P}(A)$ o $p(A)$ a la medida de probabilidad \mathbb{P} obtenida de una función de probabilidad p . A un espacio de probabilidad con Ω numerable o finito se le llama un **espacio discreto de probabilidad**. En lo que resta de esta tesis, consideraremos únicamente espacios de probabilidad discretos.

Se entiende por *distribución uniforme*, una distribución en la cual cada $x \in \Omega$ tiene la misma probabilidad, es decir, $\mathbb{P}(x) = \frac{1}{|\Omega|}$.

Observaciones:

- Denotaremos por A^c al evento de que A no ocurra, es decir $A^c = \Omega \setminus A$,
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Demostración: Como A y $(\Omega \setminus A)$ son ajenos y $A \cup (\Omega \setminus A) = \Omega$ se tiene que $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\Omega \setminus A) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ de donde se sigue que $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Demostración: Por definición se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \sum_{x \in A \cup B} \mathbb{P}(x) \\ &= \sum_{x \in A} \mathbb{P}(x) + \sum_{x \in B} \mathbb{P}(x) - \sum_{x \in A \cap B} \mathbb{P}(x) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

- $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Demostración: Se sigue directamente de la propiedad de aditividad. Generalizando esta propiedad tenemos que $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$. Esta desigualdad es llamada **subaditividad de la probabilidad**. \square

- Para cada partición de Ω en subconjuntos disjuntos B_1, \dots, B_n :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap B_i)$$

Demostración: Se sigue de la aditividad ya que $A = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)$ y $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset$ para $i \neq j$ \square

Para dos espacios de probabilidades finitos (Ω_1, \mathbb{P}_1) , y (Ω_2, \mathbb{P}_2) , definamos el **espacio producto** como el espacio muestral $\Omega_1 \times \Omega_2$ y la función de probabilidad \mathbb{P} definida como $\mathbb{P}((x, y)) = \mathbb{P}_1(x)\mathbb{P}_2(y)$. Luego podemos ampliar esta definición para obtener el producto finito de subespacios. Por ejemplo, el experimento de lanzar n monedas diferentes se puede modelar como un espacio producto. Veremos otro ejemplo del espacio producto con gráficas en la sección siguiente.

Para dos eventos A y B , la probabilidad condicional de A dado B , que denotaremos por $\mathbb{P}(A|B)$, es intuitivamente la probabilidad de que ocurra A si sabemos que B pasó. Formalmente, $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ que se lee como la probabilidad de A dado B . Si $\mathbb{P}(B) = 0$ tomaremos $\mathbb{P}(A|B) := \mathbb{P}(A)$.

Una *variable aleatoria real* X (que abreviaremos por v.a) es una función real definida en el espacio muestral Ω asociado a un experimento aleatorio, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Por ejemplo, si G es una gráfica y $\Omega = V(G)$, el grado de un vértice es una variable aleatoria. Si Ω es el conjunto de todas las subgráficas de G de orden k , el número de aristas en una subgráfica $H \subset G$ de orden k , es una variable aleatoria, nótese que $|\Omega| = \binom{n}{k}$. Utilizaremos este ejemplo posteriormente en esta tesis.

Llamaremos *rango* de una v.a X y lo denotaremos R_X , al conjunto de los valores reales que X puede tomar. Si tomamos los dos ejemplos mencionados en el párrafo anterior con $|V(G)| = n$, se tiene que en el primer caso $R_X \subseteq \{0, 1, \dots, n-1\}$ y en el otro caso, $R_X \subseteq \{0, 1, \dots, \binom{k}{2}\}$. En otras palabras, el rango de una v.a se define como:

$$R_X = \{x \in \mathbb{R} | X(a) = x, a \in \Omega\} \quad (2.1)$$

Sea Ω un espacio muestral y X una variable aleatoria con $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ y con función de probabilidad p , entonces se define la *esperanza* o *valor esperado* de X como:

$$E(X) := \sum_{i=1}^k x_i p(x_i)$$

Hay que notar que en la práctica, $E(X)$ no es siempre un valor del rango de X . Por ejemplo para el lanzamiento de un solo dado se tiene que $E(X) = 1(\frac{1}{6}) + 2(\frac{1}{6}) + 3(\frac{1}{6}) + 4(\frac{1}{6}) + 5(\frac{1}{6}) + 6(\frac{1}{6}) = \frac{21}{6} = 3.5$ y $3.5 \notin R_X$. Cabe mencionar que el valor esperando también se conoce como *media* y se denota frecuentemente por μ .

Una de las propiedades más notables de la esperanza es que es un operador lineal, ya que para X, Y variables aleatorias y $a \in (R)$ es fácil comprobar que:

- 1 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- 2 $E(aX) = aE(X)$

Definimos la varianza de una variable aleatoria (discreta), que denotaremos por σ^2 ó $Var(X)$ como:

$$Var(X) = \sigma^2 = E((X - \mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$$

y llamaremos a σ la desviación estándar de X .

En la sección siguiente, presentaremos modelos de gráficas aleatorias, luego volveremos a las definiciones probabilísticas enfocadas a nuestro objeto de trabajo.

2.2 Modelos de gráficas aleatorias

En esta sección se presentarán los modelos de gráficas aleatorias más usados, algunos de ellos surgen naturalmente del concepto de gráfica y de probabilidad, otros, menos obvios, se estudian por ser una herramienta poderosa al momento de resolver problemas. En cada modelo que veremos a continuación, utilizaremos un conjunto de V de n vértices $V = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Notamos que la gráfica completa K_n sobre $[n]$ tiene $N = \binom{n}{2}$ aristas y 2^N subgráficas.

El primer modelo aleatorio que presentaremos es el espacio $G(n, p)$, y es el modelo que utilizaremos en esta tesis. Para cada uno de los $\binom{n}{2}$ conjuntos de dos vértices, se realiza un ensayo de bernoulli: con probabilidad p la arista correspondiente se incluye en la gráfica aleatoria y con probabilidad $1 - p = q$ no se incluye. La gráfica aleatoria estará entonces determinada por N ensayos independientes. Así, el espacio muestral de $G(n, p)$ es el conjunto de las 2^N gráficas sobre $[n]$, y la probabilidad de obtener una cierta gráfica H con m aristas está dada por $p^m(1 - p)^{N-m}$. Pues claramente, cada una de las m aristas de H tiene que estar seleccionada y las $N - m$ otras aristas no tienen que estar seleccionadas. Se acostumbra también escribir q para la probabilidad $1 - p$ de no seleccionar una arista, así, para una gráfica aleatoria G se tiene que:

$$\mathbb{P}_p(G_p = H) = p^{e(H)}q^{N-e(H)}$$

Otro modelo importante en las aplicaciones se denota por $\mathcal{G}(n, M)$ para $0 \leq M \leq N$. El espacio muestral de $\mathcal{G}(n, M)$ consta de todas las $\binom{N}{M}$ subgráficas de K_n que contienen M aristas. Introducimos una probabilidad en este espacio muestral haciendo equiprobable a cada uno de sus elementos. Entonces, para una gráfica aleatoria G_M , en este espacio, la probabilidad que G_M sea una gráfica dada H con M aristas es $1/\binom{N}{M}$. En otras palabras, dada una gráfica H con n vértices y M aristas se tiene que:

$$\mathbb{P}(G_M = H) = \binom{M}{N}^{-1}$$

El último modelo, que denotaremos por $\tilde{\mathcal{G}}^n$, es un espacio de sucesiones de gráficas aleatorias, una para cada $t \in \{0, 1, \dots, N\}$, un elemento de $\tilde{\mathcal{G}}^n$ es una sucesión de gráficas anidadas $G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_N$, donde G_t tiene exactamente t aristas para $0 \leq t \leq N$. Claramente existen $N!$ procesos de gráficas $\tilde{G} = (G_t)_0^N$, para n vértices. Para verificarlo basta asociar cada proceso \tilde{G} con una permutación $(e_i)_1^N$ de las N aristas de la gráfica completa K_n de n vértices, esa asociación está dada por $A(G_t) - A(G_{t-1})$ (donde $A(G_t)$ es el conjunto de aristas de G_t). Luego definimos $\tilde{\mathcal{G}}^n$ como el conjunto que contiene a cada uno de los $N!$ procesos \tilde{G} , y lo hacemos un espacio de probabilidad dando a cada proceso gráfico la misma probabilidad. Denotaremos también a un proceso de gráficas $\tilde{G} \in \tilde{\mathcal{G}}$ por $(G_t)_0^N$. Una manera de interpretar este modelo es imaginar un organismo que comienza su vida como una gráfica vacía G_0 de n vértices y crece adquiriendo en cada tiempo t una arista de las $N - t$ posibles.

En cada uno de esos ejemplos, estamos interesados en saber que pasa cuando $n \rightarrow \infty$. Notamos también que tanto M como p son funciones de n , i.e., $M = M(n)$ y $p = p(n)$. Por ejemplo, en el espacio $G(n, p)$, es de gran interés un valor de p fijo, en particular, si escogemos $p = 1/2$ tenemos un espacio de probabilidades con 2^N gráficas de n vértices, las cuales tienen todas la misma probabilidad. Así, una gráfica $G \in G(n, 1/2)$ se obtiene escogiendo al azar una de las 2^N gráficas de n vértices. Pero aunque para un valor fijo de p sea interesante el primer modelo, un valor fijo de M no lo es tanto para el modelo $\mathcal{G}(n, M)$, pues fácilmente uno puede ver que si $n \rightarrow \infty$, $G(n, M)$, con probabilidad 1, es un conjunto de M aristas independientes (sin vértices en común) y $n - 2M$ vértices también independientes.

Para ilustrar el modelo binomial, daremos un ejemplo de cálculo de esperanza y de varianza. Sea X el número de triángulos en una gráfica aleatoria $G \in G(n, p)$, es decir, $X : G(n, p) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ es la v.a tal que

$$X(G) = \text{número de triángulos en } G.$$

Calcularemos $E(X)$ y $V(X)$. Sea $G \in \mathcal{G}(n, p)$.

Sea $X(G) =$ el número de triángulos en G . Definemos $X_{i,j,k} = 1$ si el triángulo $v_i v_j v_k$ está contenido en G y 0 en otro caso. Notamos que $X = \sum_{i,j,k} X_{i,j,k}$, y que $E(X_{i,j,k}) = p^3$. Así se tiene que:

$$E(X) = E\left(\sum_{i,j,k} X_{i,j,k}\right) = \sum_{i,j,k} E(X_{i,j,k}) = C_3^n p^3 = \frac{p^3 n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Utilizaremos la notación t para una terna arbitraria v_i, v_j, v_k . Calculemos $V(x)$.

$$\begin{aligned}
V(X) = V\left(\sum_t X_t\right) &= E\left[\left(\sum_t X_t\right)^2\right] - \left[E\left(\sum_t X_t\right)\right]^2 \\
&= E\left(\sum_t X_t^2\right) + 2E\left(\sum_{t \neq t'} X_t X_{t'}\right) - \left[E\left(\sum_t X_t\right)\right]^2 \\
&= E\left(\sum_t X_t\right) + 2E\left(\sum_{t \neq t'} X_t X_{t'}\right) - \left[E\left(\sum_t X_t\right)\right]^2
\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que X_t es una función de Bernoulli. Ahora calculamos $E(\sum_{t \neq t'} X_t X_{t'})$. Tenemos 3 casos :

Caso 1 : Si $t \cap t' = \emptyset$, entonces $E(X_t X_{t'}) = p^6 C_3^n C_3^{n-3}$.
Caso 2 : Si $|t \cap t'| = 1$ entonces $E(X_t X_{t'}) = p^6 C_3^n C_2^{n-3}$.
Caso 3 : Si $|t \cap t'| = 2$ entonces $E(X_t X_{t'}) = p^5 C_2^n C_2^n$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
V(X) = V\left(\sum_t X_t\right) &= E\left(\sum_t X_t\right) + 2E\left(\sum_{t \neq t'} X_t X_{t'}\right) - \left[E\left(\sum_t X_t\right)\right]^2 \\
&= \frac{p^3 n(n-1)(n-2)}{6} + 2p^6 C_3^n C_3^{n-3} \\
&\quad + p^5 C_2^n C_2^n - \left(\frac{p^3 n(n-1)(n-2)}{6}\right)^2
\end{aligned}$$

Para terminar esta sección daremos una última definición. Diremos que una gráfica $G_p \in G(n, p)$ cumple una propiedad Q **asintóticamente casi seguramente** si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G \text{ cumple } Q) = 1$. Abreviaremos *asintóticamente casi seguramente* con a.c.s a lo largo de esta tesis.

Sea Q una propiedad de gráficas. Sean $p(n)$ y $r(n)$ funciones de n . Diremos que $r(n)$ es una *función umbral para la propiedad Q* si se tiene que:

- Si $p(n) \ll r(n)$ entonces casi seguramente Q no se cumple.
- Si $p(n) \gg r(n)$ entonces casi seguramente Q se cumple.

La notación $p(n) \ll r(n)$ significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{r(n)} = 0$, y similarmente $p(n) \gg r(n)$ significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{r(n)} = \infty$

2.3 El Método Probabilístico

El método probabilístico es generalmente utilizado para probar la existencia de algunos objetos matemáticos sin la necesidad de construirlos. En general, si uno está interesado en saber si algún objeto con ciertas propiedades existe, define

un espacio de probabilidad sobre todos los candidatos posibles. Si la probabilidad de escoger un objeto con la propiedad requerida es estrictamente positiva, entonces el objeto debe existir. En esta sección estudiaremos conceptos básicos del método probabilístico, los cuales emplearemos mucho a lo largo de esta tesis. Primero estudiaremos las desigualdades de Markov y de Chebichev.

La desigualdad de Markov proporciona una cota superior para la probabilidad de que una función no negativa de una variable aleatoria sea mayor o igual que una constante positiva. Su nombre le viene del matemático ruso Andrey Markov.

Teorema 2.1. (*Desigualdad de Markov*) Si X es una variable aleatoria con valores no negativos y a una constante positiva, entonces : $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$.

Demostración: Demostraremos esta desigualdad para el caso discreto ya que con este modelo trabajamos en esta tesis. Sea X una variable aleatoria discreta con $\mathbb{P}(X = x_i) = p_{x_i}$ y $\sum_i p_{x_i} = 1$, luego $E(X) = \sum_i x_i p_{x_i}$. Sea A el conjunto de todos las i tales que $x_i \geq a$, i.e $A = \{i | x_i \geq a\}$. Entonces se tiene que $\mathbb{P}(X \geq a) = \sum_{i \in A} p_{x_i}$, luego calculando :

$$\begin{aligned} a\mathbb{P}(X \geq a) &= \sum_{i \in A} a p_{x_i} \\ &\leq \sum_{i \in A} x_i p_{x_i} \\ &\leq \sum_{i \in A} x_i p_{x_i} + \sum_{i \in A^c} x_i p_{x_i} = E(X) \end{aligned}$$

Por lo que $a\mathbb{P}(X \geq a) \leq E(X)$, luego como $a > 0$ se tiene que $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$, como queríamos demostrar. \square

El siguiente teorema (Desigualdad de Chebyshev) es una aplicación directa de la desigualdad de markov.

Teorema 2.2. (*Desigualdad de Chebyshev*) Si X es una variable aleatoria con $E(X) = \mu < \infty$ y varianza σ^2 , entonces para cualquier $k > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$.

Demostración: Como $(X - \mu)^2 > 0$ y $k > 0$ entonces podemos utilizar la desigualdad de Markov. Entonces tenemos que:

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq k) = \mathbb{P}((X - \mu)^2 \geq k^2) \leq \frac{E((X - \mu)^2)}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2}$$

\square

El teorema siguiente puede ser utilizado como base para pruebas probabilísticas de existencia. Nos dice que una variable aleatoria debe tomar tanto valores menores o iguales como valores mayores o iguales que su valor esperado.

Teorema 2.3. *Sea X una variable aleatoria (discreta) con $E(X) = \mu$ entonces,*

$$\mathbb{P}(X \geq \mu) > 0 \quad y \quad \mathbb{P}(X \leq \mu) > 0 \quad (2.2)$$

Demostración: Suponga por contradicción que $\mathbb{P}(X \leq \mu) = 0$, i.e $\mathbb{P}(X > \mu) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \mu &= E(X) \\ &= \sum_{x_i > \mu} \mathbb{P}(X = x_i)x_i \\ &> \sum_{x_i > \mu} \mathbb{P}(X = x_i)\mu = \mu \end{aligned}$$

ya que $\mathbb{P}(X = x_i) > 0$ para algún $x_i > \mu$. Entonces se tiene $\mu > \mu$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathbb{P}(X \geq \mu) > 0$. La prueba para $\mathbb{P}(X \leq \mu) > 0$ es similar. \square

A continuación veremos los métodos del primer momento y del segundo momento, los cuales son herramientas poderosas del método probabilístico.

Teorema 2.4. *(Método del primer momento) $X_n \in \mathbb{N}_0$ una secuencia de variables aleatorias con valores enteros no negativos para $n = 0, 1, \dots$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = 0$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1$*

Demostración: La prueba del método del primer momento es una aplicación directa de la desigualdad de Markov 2.1. Como X toma valores no negativos, se tiene que $\mathbb{P}(X_n > 0) = \mathbb{P}(X_n \geq 1)$, luego utilizamos la desigualdad de Markov para $a = 1$. $\mathbb{P}(X_n \geq 1) \leq \frac{E(X_n)}{1}$, luego por hipótesis se tiene que $\frac{E(X_n)}{1} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como $\mathbb{P}(X_n > 0) \rightarrow 0$ podemos concluir que la probabilidad de que X_n sea igual a 0 tiende a 1, i.e $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1$, lo que queríamos demostrar. \square

El método del primer momento es una herramienta poderosa en la demostración de existencia, pero puede que en algunos problemas no sea suficiente, por lo que utilizaremos a veces el siguiente método, llamado *método del segundo momento*.

Teorema 2.5. *(Método del segundo momento) Sea $X_n; n \in \mathbb{N}$ una sucesión de variables aleatorias con valores enteros no negativos para $n = 0, 1, \dots$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{E(X_n)^2} = 0, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$$

Demostración: La prueba del segundo momento es una aplicación de la desigualdad de Chebyshev. Primero claramente se tiene que $\mathbb{P}(X_n = 0) \leq \mathbb{P}(|X_n - E(X_n)| \geq E(X_n))$. Utilizando 2.2, se tiene que

$$\mathbb{P}(|X_n - E(X_n)| \geq E(X_n)) \leq \frac{\sigma^2}{E(X_n)^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

Por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 0$, como queríamos demostrar. \square

A manera de ilustración presentamos algunas aplicaciones de los métodos descritos anteriormente:

Teorema 2.6. *Sea $G = (V, E)$ una gráfica tal que $|V| = n$ y $m := |E| \geq n/2$. Entonces,*

$$\alpha(G) \geq \frac{n^2}{4m},$$

donde $\alpha(G)$ denota el número de independencia de G que se define como la máxima cardinalidad entre los conjuntos independientes de V , i.e.,

$$\alpha(G) = \max\{|U| : U \subset V, U \text{ es un conjunto independiente}\}.$$

Demostración: Sea $G = (V, E)$ tal que $|E(G)| = m \leq \frac{n}{2}$. Presentaremos un algoritmo que nos encuentra un conjunto independiente de G .

Paso 1: Eliminamos cada vértice de G con una probabilidad $1 - p$

Paso 2: Eliminamos cada arista restante borrando exactamente uno de sus extremos (nota que para varias aristas puede que sea el mismo vértice).

Llamemos G' a la gráfica resultante después de aplicar el paso 1, y G'' la gráfica resultante después de aplicar el paso 2. Vemos que después de aplicar el algoritmo, el conjunto resultante es independiente. Pues supongamos que existen $x, y \in G$ tal que $xy \in E(G)$ y $x, y \in G''$, como $xy \in G$ sigue que en el paso 2 se debe haber eliminado y al mismo tiempo o a x o a y , por lo que es una contradicción. Calcularemos cuantos vértices y aristas hay en G' . Sea X el número de vértices en G' . Como cada vértice esta en G' con probabilidad p y que hay n vértices, se tiene que $E(X) = np$. Sea Y el número de aristas en G' , como cada arista esta en G' si y solo sus dos extremos no fueron borrados en el paso 1, entonces cada arista esta en G' con probabilidad p^2 , como hay m aristas en G tenemos que $E(Y) = mp^2$.

Sea Z el número de vértices en G'' . Puesto que en el paso 2 para cada arista que quitamos, quitamos un vértice o ninguno se tiene que $Z \geq X - Y$. Luego por linealidad de la esperanza tenemos que

$$E(Z) \geq E(X) - E(Y) = np - mp^2 = (n - mp)p$$

Queremos encontrar p tal que $(n - mp)p^2 = \frac{n^2}{4m}$. Tomando $p = \frac{n}{2m}$, primero notamos que puesto que $m \geq \frac{n}{2}$ se tiene que $1 - p = 1 - \frac{n}{2m} \geq 0$ y que por lo tanto p esta bien definida. Luego sigue que $(n - mp)p = (n - \frac{n}{2})\frac{n}{2m} = \frac{n^2}{4m}$ por lo tanto $E(Z) \geq \frac{n^2}{4m}$, y por lo tanto G contiene un conjunto independiente de al

menos $\frac{n^2}{4m}$ vértices. □

Teorema 2.7. *Sea $H = (V, E)$ una hipergráfica tal que $|E| < 2^{k-1}$ y cada hiperarista tiene al menos k vértices. Entonces existe una 2-coloración propia de V (una 2-coloración de V es propia si ninguna hiperarista es monocromática).*

Demostración: Sea $H = (V, E)$ una hipergráfica con $|E| < 2^{k-1}$ tal que cada una de sus hiperaristas tiene al menos k vértices. Coloreamos los vértices de H de forma aleatoria, asignando el color rojo o azul con probabilidad $1/2$ para cada color y de manera independiente para cada vértice. Para cada hiperarista e definimos la variable aleatoria X_e del modo siguiente : $X_e = 1$ si e es monocromática y $X_e = 0$ en otro caso. Luego definimos $X = \sum_{e \in H} X_e$, entonces X representa el número de aristas monocromáticas. Vamos a ver que cada hiperarista es monocromática con probabilidad $\leq 2^{-(k-1)}$ (1).

Por hipótesis, e tiene tamaño mayor o igual que k , veremos dos casos :

Caso 1: $k \geq 3$, entonces hay al menos dos vértices de mismo color y por lo tanto $\mathbb{P}(e \text{ sea monocromática}) \leq 2^{-(k-1)}$.

Caso 2: $k = 2$, entonces $\Omega = \{(A, A), (R, R), (A, R), (R, A)\}$. Así $\mathbb{P}(e \text{ sea monocromática}) = 1/2 = 2^{-(k-1)}$.

De (1) se sigue que $E(X_e) \leq 2^{-(k-1)}$ ya que $E(X_e) = \sum_{i=0,1} i \times \mathbb{P}(X_e = i) = 1 \times \mathbb{P}(X_e = 1) + 0 \times \mathbb{P}(X_e = 0) = \mathbb{P}(X_e = 1) \leq 2^{-(k-1)}$. Utilizando la linealidad de la esperanza se tiene que $E(X) = \sum_{e \in H} E(X_e) \leq |E(H)| \times 2^{-(k-1)}$, como por hipótesis, $|E(H)| < 2^{k-1}$ se tiene que $E(X) < 2^{k-1}/2^{k-1} = 1$. Por lo tanto, la probabilidad de que $X = 0$ (i.e la probabilidad de que ninguna arista sea monocromática) es positiva lo que prueba que existe una 2-coloración de H . □

Teorema 2.8. *Sea $G = (V, E)$ una gráfica bipartita sobre n vértices. Si cada vértice v tiene asociada una lista de colores $S(v)$ tal que $|S(v)| > \ln_2(n)$, entonces existe una coloración propia de V que asigna a cada vértice un color de su lista.*

Demostración: Sea $G = (V, E)$ una gráfica bipartita y sean A y B sus componentes. Sea $|S_V| := \min\{|s_{v_i}| : v_i \in G\}$. Sea $S = \bigcup_j S_{v_j}$ para alguna j con $1 \leq j \leq n$. Sea P y N dos subconjuntos de S tales que $P \cap N = \emptyset$ y $P \cup N = S$ que construimos de la manera siguiente, para $x \in S$, mandamos x a P con probabilidad $1/2$, así la probabilidad que x este en N también es de $1/2$. Coloreamos A con los colores de P y B con los colores de N (Notamos que obtenemos una coloración propia de V). Definimos $X_{x_i} = 1$ si x_i está pintado en un color de su lista y $X_{x_i} = 0$ en otro caso. Ahora vemos que la probabilidad de que un vértice esté coloreado con un color de su propia lista es $\leq \frac{1}{2^{|s_v|}}$, así como G contiene n

vértices se tiene que $E(X) \leq \sum_{x_i \in G} X_{x_i} \leq \frac{n}{2^{|S_v|}} < \frac{n}{n} = 1$. Por lo tanto existe una coloración propia de los vértices de G cada uno coloreado con colores de su lista. \square

El siguiente teorema será utilizado en el último capítulo.

Teorema 2.9. *Sea $\omega(n) \rightarrow \infty$. Para una gráfica $G \in G(n, p)$ se tiene que:*

- Si $p = \frac{\ln(n) - \omega(n)}{n}$ entonces G es casi seguramente desconexa.
- Si $p = \frac{\ln(n) + \omega(n)}{n}$ entonces G es casi seguramente conexa.

Demostración: En toda la prueba del teorema suponemos que $\omega(n)$ no crece muy rápido, digamos $\omega(n) \leq \ln(\ln(\ln(n)))$, y n es suficientemente grande para que $\omega(n) \geq 10$. Para $k \in \mathbb{N}$, sea X_k el número de componentes conexas de $G \in G(n, p)$ de exactamente k vértices.

- Sea $p = \frac{\ln(n) - \omega(n)}{n}$ y sea μ el valor esperado del número de vértices aislados de G . La probabilidad de que un vértice de G sea aislado es $(1 - p)^{n-1}$, pues no debe ser adyacente ningún otro vértice, luego como G contiene n vértices se tiene:

$$\mu = E(X_1) = n(1 - p)^{n-1}$$

El término $(1 - p)^{n-1}$ es del mismo orden que e^{-p} , así:

$$\mu = n(1 - p)^{n-1} \sim ne^{-p} = ne^{-\ln(n) + \omega(n)} = e^{\omega(n)} \rightarrow \infty$$

Con los mismos argumentos se tiene que el valor esperado de pares ordenados de vértices aislados esta dado por:

$$\begin{aligned} E(X_1, (X_1 - 1)) &= E(X_1)E(X_1 - 1) \\ &= n(1 - p)^{n-1}[(n - 1)(1 - p)^{n-2}] \\ &= n(n - 1)(1 - p)^{2n-3} \end{aligned}$$

Por lo que :

$$E(X_1^2) = n(n - 1)(1 - p)^{2n-3} + n(1 - p)^{n-1}$$

Entonces la varianza de X_1 esta dada por:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E((X_1 - \mu)^2) = E(X_1^2) - \mu^2 \\
&= n(n-1)(1-p)^{2n-3} + n(1-p)^{n-1} - n^2(1-p)^{2n-2} \\
&= n(1-p)^{n-1} + n^2n^{-1}(n-1)(1-p)^{2n-3} - n^2(1-p)^{2n-3}(1-p) \\
&= n(1-p)^{n-1} + n^2(1-p)^{2n-3}[n^{-1}(n-1) - (1-p)] \\
&= n(1-p)^{n-1} + n^2(1-p)^{2n-3}\left[1 - \frac{1}{n} - 1 + p\right] \\
&\leq n(1-p)^{n-1} + pn^2(1-p)^{2n-3} \\
&= \mu + (\ln(n) - \omega(n))n(1-p)^{2n}(1-p)^{-3} \\
&\leq \mu + (\ln(n) - \omega(n))ne^{-2pn}(1-p)^{-3} \\
&= \mu + (\ln(n) - \omega(n))ne^{-2(\ln(n) - \omega(n))}(1-p)^{-3} \\
&= \mu + (\ln(n) - \omega(n))ne^{-2\ln(n) + 2\omega(n)}(1-p)^{-3} \\
&\leq \mu + \ln(n)nn^{-2}e^{2\omega(n)}(1-p)^{-3} \\
&= \mu + \frac{\ln(n)}{n}e^{2\omega(n)}(1-p)^{-3} \\
&\leq \mu + \frac{2\ln(n)}{n}e^{2\omega(n)} \\
&\leq \mu + 1
\end{aligned}$$

En penúltima desigualdad utilizamos el hecho de que p se vuelve pequeño cuando n crece, así para valores grandes de n se tiene que $(1-p)^3 \geq \frac{1}{2}$, por lo que $(1-p)^{-3} \leq 2$. Queremos ver que la probabilidad de que G sea conexa tiende a 0, para ello utilizaremos el segundo momento, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G \text{ es conexa}) &\leq \mathbb{P}(X_1 = 0) \\
&\leq \frac{\sigma^2}{\mu^2} \\
&\leq \frac{E((X_1 - \mu)^2)}{\mu^2} \\
&\leq \frac{\mu + 1}{\mu^2} \\
&= \mu^{-1} + \mu^{-2} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Ya que $\mu \rightarrow \infty$. Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G \text{ es conexa}) = 0$, lo que muestra que G casi seguramente es desconexa.

- Sea $p = \frac{\ln(n) + \omega(n)}{n}$, queremos demostrar que $G \in G(n, p)$ es casi seguramente conexa. Claramente:

$$\mathbb{P}(G \text{ es desconexa}) = \mathbb{P}\left[\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} X_k \geq 1\right]$$

Hacemos correr k hasta $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ya que si existe una componente C con $|C| = k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ entonces existe otra componente C' con $|C'| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Luego, utilizando la desigualdad de Markov, y la linealidad del valor esperado:

$$\mathbb{P}\left[\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} X_k \geq 1\right] \leq E\left[\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} X_k\right] = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} E(X_k)$$

Cada uno de los $\binom{n}{k}$ conjuntos de k vértices tiene probabilidad $(1-p)^{k(n-k)}$ de no estar conectado con el resto de la gráfica, entonces si no tomamos en cuenta la probabilidad que este conjunto sea conexo, se tiene que :

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} E(X_k) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)}$$

Por lo que:

$$\mathbb{P}(G \text{ es desconexa}) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)}$$

calcularemos este valor dividiendo la suma en dos sumas, a saber:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)} = \\ & \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)} + \sum_{n^{3/4} \leq k \leq \frac{n}{2}} \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)} \end{aligned}$$

Entonces, se tiene:

I

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)} &\leq \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} \left(\frac{en}{k}\right)^k (1-p)^{k(n-k)} \\
&\leq \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} \left(\frac{en}{k}\right)^k e^{-pk(n-k)} \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} \left(\frac{en}{k}\right)^k e^{-pkn} e^{k^2 p} \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} \left(\frac{en}{k}\right)^k e^{-k(\ln(n)+\omega(n))} e^{k^2 \left(\frac{\ln(n)+\omega(n)}{n}\right)} \\
&\leq \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} \left(\frac{en}{k}\right)^k e^{-k(\ln(n)+\omega(n))} e^{\frac{2k^2 \ln(n)}{n}} \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} \left(\frac{n}{k}\right)^k e^k e^{-k\omega(n)} e^{-k(\ln(n))} e^{\frac{2k^2 \ln(n)}{n}} \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} \left(\frac{n}{k}\right)^k e^{k(1-\omega(n))} e^{-k(\ln(n))} e^{\frac{2k^2 \ln(n)}{n}} \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} \left(\frac{1}{k^k}\right) e^{k(1-\omega(n))} e^{\frac{2k^2 \ln(n)}{n}} \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} e^{-k \ln(k)} e^k e^{-k\omega(n)} e^{\frac{2k^2 \ln(n)}{n}} \\
&\leq e^{-\omega(n)} \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} e^{\omega(n)} e^k e^{-k\omega(n)} e^{\frac{2k \ln(n)}{n^{1/4}}}
\end{aligned}$$

Como $\frac{\ln(n)}{n^{1/4}} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)} &\leq e^{-\omega(n)} \sum_{1 \leq k \leq n^{3/4}} e^k e^{-k\omega(n)} e^k e^{\omega} \\
&\leq e^{-\omega(n)} \left[e^2 + \sum_{2 \leq k \leq n^{3/4}} e^{2k} e^{-\frac{k}{2}\omega(n)} \right] \\
&\leq e^{-\omega(n)} \left[e^2 + \sum_{2 \leq k \leq n^{3/4}} \left(\frac{e^2}{e^{\frac{1}{2}\omega(n)}} \right)^k \right] \\
&\leq e^{-\omega(n)} \left[e^2 + \frac{1}{1 - \frac{e^2}{e^{\frac{1}{2}\omega(n)}}} \right] \\
&\leq e^{-\omega(n)} [e^2 + 1.5] \rightarrow 0
\end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Luego, para grandes valores de k , se tiene:

II

$$\begin{aligned}
\sum_{n^{3/4} \leq k \leq \frac{n}{2}} \binom{n}{k} (1-p)^{k(n-k)} &\leq \sum_{n^{3/4} \leq k \leq \frac{n}{2}} \left(\frac{en}{k}\right)^k (1-p)^{k(n-k)} \\
&\leq \sum_{n^{3/4} \leq k \leq \frac{n}{2}} \left(\frac{en}{k}\right)^k e^{-pk(n-k)} \\
&= \sum_{n^{3/4} \leq k \leq \frac{n}{2}} \left(\frac{en}{k}\right)^k e^{-pkn+pk^2} \\
&\leq \sum_{n^{3/4} \leq k \leq \frac{n}{2}} \left(\frac{en}{k}\right)^k e^{-pkn+\frac{pkn}{2}} \\
&= \sum_{n^{3/4} \leq k \leq \frac{n}{2}} \left(\frac{en}{k}\right)^k e^{-\frac{pkn}{2}} \\
&\leq \sum_{n^{3/4} \leq k \leq \frac{n}{2}} \left(\frac{en}{n^{3/4}}\right)^k e^{-\frac{pkn}{2}} \\
&= \sum_{n^{3/4} \leq k \leq \frac{n}{2}} (en^{1/4})^k e^{-\frac{k}{2}(\ln(n)+\omega(n))} \\
&= \sum_{n^{3/4} \leq k \leq \frac{n}{2}} (en^{1/4})^k e^{-\frac{k}{2} \ln(n)} e^{-\frac{k}{2} \omega(n)} \\
&\leq \sum_{n^{3/4} \leq k \leq \frac{n}{2}} (en^{1/4})^k e^{-\frac{k}{2} \ln(n)} \\
&= \sum_{n^{3/4} \leq k \leq \frac{n}{2}} (en^{1/4})^k \frac{1}{n^{k/2}} \\
&= \sum_{n^{3/4} \leq k \leq \frac{n}{2}} \left(\frac{en^{1/4}}{n^{1/2}}\right)^k \\
&= \sum_{n^{3/4} \leq k \leq \frac{n}{2}} (en^{-1/4})^k \\
&\leq \sum_{n^{3/4} \leq k \leq \frac{n}{2}} \left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)^k \\
&\leq 1.5n^{-\frac{n^{3/4}}{5}} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Utilizando I y II tenemos que para n suficientemente grande:

$$\mathbb{P} (G \text{ es desconexa }) \rightarrow 0$$

Lo que muestra que G casi seguramente es conexa.

□

Para terminar esta sección, mostraremos un teorema que utilizaremos en la última sección de esta tesis. Este teorema se debe a Erdős y Rényi, prueba que cuando $p(n)$ crece, aparecen repetidamente subgráficas balanceadas en $G(n, p)$.

Teorema 2.10. *Sea $k \geq 2$, $k-1 \leq \ell \leq \binom{k}{2}$ y $F = G(k, \ell)$ una gráfica balanceada de k vértices y ℓ aristas. Si $p(n)n^{k/\ell} \rightarrow 0$ entonces casi siempre $G(n, p)$ no contiene a F como subgráfica inducida. Si $p(n)n^{k/\ell} \rightarrow \infty$ entonces $G(n, p)$ contiene a F como subgráfica inducida casi seguramente.*

Demostración: Sea $\gamma = pn^{k/\ell}$ así $p = \gamma n^{-k/\ell}$, con $0 < \gamma < n^{k/\ell}$. Probaremos primero que si $p(n)n^{k/\ell} \rightarrow 0$ entonces $G(n, p)$ casi seguramente no contiene a F . Sea $X = X(G)$ el número de copias de F contenidas en $G(n, p)$, buscamos el valor esperado de X .

Sea, K un subconjunto de $V(G)$ de k vértices y sea k_F el número de gráficas isomorfas a F sobre K . Como existen $k!$ maneras de etiquetar los k vértices, podemos concluir que a lo más hay $k!$ gráficas isomorfas a F en K . Como existen $\binom{n}{k}$ maneras de escoger un conjunto de k vértices de $V(G)$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \mu = E_p(X) &= \binom{n}{k} k_F p^\ell (1-p)^{\binom{k}{2}-\ell} \\ &\leq \frac{n^k}{k!} k! p^\ell (1-p)^{\binom{k}{2}-\ell} \quad \text{ver 4.2} \\ &= n^k p^\ell (1-p)^{\binom{k}{2}-\ell} \\ &= n^k \gamma^\ell n^{-k} (1-p)^{\binom{k}{2}-\ell} \\ &= \gamma^\ell (1-p)^{\binom{k}{2}-\ell} \\ &\leq \gamma^\ell \end{aligned}$$

Ya que $\gamma \rightarrow 0$, se tiene que $E(X) \rightarrow 0$, y queda demostrada la primera parte del teorema. Ahora queremos demostrar que si $p(n)n^{k/\ell} \rightarrow \infty$, entonces casi siempre, $G(n, p)$ tiene a F como subgráfica inducida. Utilizaremos el método del segundo momento, calcularemos la varianza de X cuando $\gamma \rightarrow \infty$. Primero, veremos que existe una constante c_1 tal que $\mu \geq c_1 \gamma^\ell$ para toda γ .

$$\begin{aligned}
\mu &= \binom{n}{k} k_F p^\ell (1-p)^{\binom{k}{2}-\ell} \\
&= \binom{n}{k} k_F (\gamma^\ell n^{-k}) (1-p)^{\binom{k}{2}-\ell} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!} \frac{k_F}{n^k k!} \gamma^\ell (1-p)^{\binom{k}{2}-\ell} \\
&= \left(\frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n^k} \right) \frac{k_F}{k!} \gamma^\ell (1-p)^{\binom{k}{2}-\ell} \\
&= \left[1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \right] \frac{k_F}{k!} \gamma^\ell (1-p)^{\binom{k}{2}-\ell}
\end{aligned}$$

Como $p \rightarrow 0$ entonces $(1-p)^{\binom{k}{2}-\ell} \rightarrow 1$, además $1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \rightarrow 1$. Concluimos que μ tiende a $\frac{k_F}{k!} \gamma^\ell$ y por lo tanto existe un constante c_1 tal que $\mu \geq c_1 \gamma^\ell$ para cada ℓ . Recordamos que en general, en $G(n, p)$, para $\mu = E(X)$, se tiene que $P(X=0) \leq \frac{\sigma^2}{\mu^2}$. Queremos calcular $E(X^2)$, es decir la probabilidad que tiene $G(n, p)$ de contener a dos gráficas F', F'' isomorfas a F como subgráficas inducidas. Dividiremos los casos por intersecciones de F' y F'' . Si s es el número de vértices en común entre F' y F'' entonces definimos A_s como:

$$A_s := \sum_s P(F' \cup F'' \subset G(n, p)) \quad (2.4)$$

donde \sum_s es la suma sobre todos los pares de gráficas (F', F'') posibles que tienen s vértices en común, es decir $\binom{n}{k} \binom{k}{s} \binom{n-k}{k-s}$ pares posibles. Observamos que para A_0 , F' y F'' no tienen intersección, por lo que la probabilidad de la unión es el producto de las probabilidades, así claramente se tiene que $A_0 \leq \mu^2$ pues :

$$\begin{aligned}
A_0 &= \sum_{(F', F''), F' \cap F'' = \emptyset} P(F' \cup F'' \subset G(n, p)) \\
&\leq \sum_{F'} P(F' \subset G(n, p)) \sum_{F'} P(F' \subset G(n, p)) \\
&= E(X)E(X) = [E(X)]^2 = \mu^2.
\end{aligned}$$

Ahora calcularemos A_s . Para eso, ya vimos que hay $\binom{n}{k} \binom{k}{s} \binom{n-k}{k-s}$ formas de escoger F' y F'' con s vértices en común, y $k_F \leq k!$ maneras de etiquetar a una de estas. También, en la intersección sabemos que hay t aristas y por ende en lo que queda de F' (fuera de la intersección), hay $\ell - t$ aristas. Como F es una gráfica balanceada, para cada una de sus subgráficas con t aristas ($t \leq \ell$)

se tiene $\frac{t}{s} \leq \frac{\ell}{k}$, de donde, $t \leq \frac{\ell s}{k}$. Como F' y F'' son simétricos (en el sentido que sus probabilidades son las mismas) tenemos que:

$$\begin{aligned} A_s &= \sum_{t \leq \ell s/k} \binom{n}{k} \binom{k}{s} \binom{n-k}{k-s} [k_F p^{\ell-t} (1-p)^{\binom{k}{2} - \binom{s}{2} - (\ell-t)}]^2 p^t (1-p)^{\binom{s}{2} - t} \\ &= \mu \sum_{t \leq \ell s/k} \binom{k}{s} \binom{n-k}{k-s} k_F p^{\ell-t} (1-p)^{\binom{k}{2} - \binom{s}{2} - \ell + t} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para algunas c_2, c_3 constantes, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{A_s}{\mu} &= \sum_{t \leq \ell s/k} \binom{k}{s} \binom{n-k}{k-s} k_F p^{\ell-t} (1-p)^{\binom{k}{2} - \binom{s}{2} - \ell + t} \\ &\leq \sum_{t \leq \ell s/k} \binom{k}{s} \binom{n-k}{k-s} k! p^{\ell-t} (1-p)^{\binom{k}{2} - \binom{s}{2} - \ell + t} \\ &\leq \sum_{t \leq \ell s/k} \binom{k}{s} \left(\frac{(n-k)^{k-s}}{(k-s)!} \right) k! p^{\ell-t} (1-p)^{\binom{k}{2} - \binom{s}{2} - \ell + t} \\ &= \sum_{t \leq \ell s/k} \binom{k}{s} \frac{k!}{(k-s)!} (n-k)^{k-s} p^{\ell-t} (1-p)^{\binom{k}{2} - \binom{s}{2} - \ell + t} \\ &\leq \sum_{t \leq \ell s/k} \left[(1-p)^{\binom{k}{2} - \binom{s}{2} - \ell + t} \binom{k}{s} \frac{k!}{(k-s)!} \right] n^{k-s} p^{\ell-t} \\ &= \sum_{t \leq \ell s/k} c_2 n^{k-s} p^{\ell-t} \\ &= \sum_{t \leq \ell s/k} c_2 n^{k-s} (\gamma n^{-k/\ell})^{\ell-t} \\ &= c_2 n^{-s} \gamma^\ell + \sum_{1 \leq t \leq \ell s/k} c_2 n^{k-s} (\gamma n^{-k/\ell})^{\ell-t} \\ &\leq c_2 n^{-s} \gamma^\ell + c_3 \gamma^{\ell-1} \end{aligned}$$

En uno de los pasos siguientes utilizaremos que existe una constante c_1 tal que $\mu \geq c_1 \gamma$ para toda γ . Por lo tanto, $1/\mu \leq c_1^{-1} \gamma^{-\ell}$ para toda γ . Veamos.

Como $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \sum_{s=0}^k A_s - \mu^2$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2}{\mu^2} &= \frac{1}{\mu^2} \sum_{s=0}^k A_s - 1 = \frac{1}{\mu^2} A_0 + \sum_{s=1}^k A_s - 1 \\
&\leq 1 + \frac{1}{\mu^2} \sum_{s=1}^k \mu(c_2 n^{-s} \gamma^\ell + c_3 \gamma^{\ell-1}) - 1 \\
&\leq \mu^{-1} k (c_2 n^{-1} \gamma^\ell + c_3 \gamma^{\ell-1}) \\
&\leq c_1^{-1} \gamma^{-\ell} k (c_2 n^{-1} \gamma^\ell + c_3 \gamma^{\ell-1}) \\
&= c_1^{-1} k c_2 n^{-1} + c_1^{-1} k c_3 \gamma^{-1} \\
&\leq c_4 \gamma^{-1},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es válida para n suficientemente grande, ya que $n^{-s} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \frac{\sigma^2}{\mu^2} \leq c_4 \gamma^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Capítulo 3

Topología algebraica

El objetivo de la topología algebraica es clasificar los espacios topológicos. Un nombre antiguo de la topología algebraica era el de Topología combinatoria, que ponía el énfasis en cómo un espacio dado X podía construirse a partir de espacios más pequeños.

La topología algebraica asocia a cada espacio topológico una sucesión de grupos, los llamados grupos de homología, de modo que las aplicaciones continuas entre espacios inducen homomorfismos entre sus grupos de homología, y los homeomorfismos inducen isomorfismos. Esto nos proporciona una técnica para probar que dos espacios dados no son homeomorfos. En general, si dos espacios son homeomorfos podemos tratar de probarlo construyendo un homeomorfismo explícito entre ambos, pero si no lo son, la topología algebraica resulta casi indispensable. En efecto, si los grupos de homología de ambos espacios resultan ser no isomorfos, entonces podemos asegurar que los espacios no son homeomorfos. También se estudian grupos de cohomología.

Otra forma de hacer esto es a través de grupos de homotopía. Los grupos fundamentales de homotopía nos dan información básica sobre la estructura de un espacio topológico, pero son a menudo no-abelianos y pueden ser difíciles de calcular. El grupo fundamental de un complejo simplicial (finito) tiene una presentación finita.

Los grupos de homología y cohomología, por otra parte, son abelianos, y en muchos casos importantes son finitamente generados. Los grupos abelianos finitamente generados pueden clasificarse completamente y son particularmente fáciles de usar.

3.1 Definiciones básicas

En este capítulo daremos definiciones básicas de topología algebraica. La topología es una rama de las matemáticas que estudia los invariantes respecto a funciones continuas.

Sea X un conjunto no vacío y τ una familia de subconjuntos de X . Diremos

que τ es una **topología en X** si satisface las siguientes condiciones:

- $\emptyset, X \in \tau$
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$ entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$
- Si $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

Llamaremos a la pareja (X, τ) un **espacio topológico**. Llamaremos **puntos** a los elementos de X y a los elementos de τ , **conjuntos abiertos**. Si (X, τ) es un espacio topológico, diremos que $A \subseteq X$ es un **conjunto cerrado** si X/A es un conjunto abierto. Las dos topología más elementales son la **topología discreta**, la cual consta de todos los subconjuntos de un conjunto X y la **topología indiscreta**, la cual consta del vacío y del mismo conjunto X (i.e, $\tau = \{\emptyset, X\}$). Estas dos topologías son importantes puesto que nos dicen que cualquier conjunto X admite al menos dos topologías.

Sea (X, τ) y (Y, τ') dos espacios topológicos y F una aplicación entre ellos, diremos que F **es continua** si para cada conjunto abierto $A \in \tau'$, $F^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en τ , donde $F^{-1}(A) = \{x \in X | F(x) \in A\}$.

En la geometría plana, cuando se quiere hablar de dos formas equivalentes, se utilizan conceptos como la semejanza o la congruencia, en el caso de la topología, la noción de equivalencia es la de homeomorfismo. Diremos que dos espacios topológicos (X, \mathfrak{T}) y (X', \mathfrak{T}') son **homeomorfos** (o equivalentes) si existe una función biyectiva continua y con inversa continua. A una función que cumple estas condiciones la llamaremos un **homeomorfismo**.

El problema de determinar si dos espacios son homeomorfos o no utilizando solamente la definición de homeomorfismo puede resultar bastante complicado. Para probar que dos espacios topológicos son homeomorfos, tenemos que dar un homeomorfismo entre ellos, lo cuál puede ser muy difícil. En el caso contrario, para mostrar que dos espacios topológicos no son homeomorfos, hay que demostrar que no existe ningún homeomorfismo entre ellos, lo cuál puede resultar aún más difícil. Por estas razones, se utilizan otras técnicas para resolver este problema. Una de ellas consiste en encontrar propiedades de los espacios topológicos que se preserven bajo homeomorfismos, así, si uno de los espacios posee una de estas propiedades y el otro no, concluimos que no pueden ser homeomorfos.

Un ejemplo de resultados de espacios topológicos homeomorfos es el siguiente:

Lemma 3.1. *Si X y Y son dos espacios topológicos homeomorfos, entonces:*

- X es conexo si y sólo si Y es conexo
- X es compacto si y sólo si Y es compacto

Usando el Teorema de Heine Borel podemos concluir que la recta real \mathbb{R} y el círculo unitario S^1 no son homeomorfos ya que \mathbb{R} no es un conjunto acotado y por lo tanto no es compacto mientras que S^1 es un conjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}^2 , y por lo tanto un conjunto compacto.

Diremos que una aplicación $\phi : A \rightarrow B$ es un morfismo si para cada par de elementos $x, y \in A$ se tiene que $\phi(x * y) = \phi(x) *' \phi(y)$, donde $*$ y $*'$ son las operaciones algebraicas en A y B respectivamente. Por ejemplo, sea $\phi : (Z) \rightarrow (Z)$ definido por $\phi(x) = x + 1$, considerando $(A, +)$ y $(B, +')$ donde $+$ es la suma natural de los enteros y $x +' y = x + y - 1$, entonces ϕ es un morfismo ya que $\phi(x + y) = x + y + 1 = (x + 1) + (y + 1) - 1 = \phi(x) +' \phi(y)$.

Una *categoría* es una clase de objetos. Por ejemplo, la clase de los grupos (o grupos abelianos), donde los objetos son los grupos (o grupos abelianos). Otro ejemplo es el de la categoría de complejos simpliciales, (o espacios topológicos). Dos categorías se relacionan mediante aplicaciones llamadas **morfismos**, en el ejemplo de los grupos, dichos morfismos son los homomorfismos de grupos. Si construimos ahora un universo de categorías (que también es una categoría), podemos relacionar sus objetos (las categorías), mediante **funtores** que son cierta generalización del concepto de función para categorías: un funtor asocia a cada objeto de una categoría un objeto de la otra, y a cada aplicación de la primera una aplicación de la segunda. En la sección que sigue estudiaremos un funtor de homología para complejos simpliciales de gráficas.

3.2 Homología

Sea $\{A_i, \partial_i\}_{i \in I}$ un conjunto donde A_i es una estructura algebraica (por ejemplo un grupo, un anillo, un Λ -módulo, etc.) y ∂_i un morfismo, entonces diremos que $\{A_i, \partial_i\}_{i \in I}$ es un *complejo de cadenas* (del inglés chain complex) si la siguiente sucesión:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} A_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots$$

satisface la ecuación : $\partial_n(\partial_{n+1}(A_{n+1})) = 0$ para cada n . Esta ecuación es clave para definir la homología ya que gracias a ella, se tiene que $Im(\partial_{n+1}) \subseteq Ker(\partial_n)$ para cada n , donde $Im(\partial_{n+1})$ es la imagen de ∂_{n+1} y $Ker(\partial_n)$ es el kernel de ∂_n .

Definimos el *n-ésimo grupo de homología* asociado a un complejo de cadenas

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} A_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots$$

como el grupo abeliano

$$H_n(A) := \frac{Ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}.$$

Si para un complejo de cadenas tomamos como convención $H_0(A) = 0$, entonces estaremos hablando de homología reducida, y denotaremos sus grupos de homología por $\tilde{H}_n(A)$. Informalmente se dice que la homología aplicada a un complejo simplicial (los cuales son el objeto de este trabajo y que definiremos poco más tarde en esta sección) mide el número de hoyos n -dimensionales, o que mide la falta de exactitud de un complejo de cadenas en cada uno de sus eslabones. Por ejemplo si tenemos el complejo de cadenas

$$0 \xrightarrow{\partial_3} A_2 \xrightarrow{\partial_2} A_1 \xrightarrow{\partial_1} 0$$

entonces :

$$H_2(A_*) = \frac{Ker(\partial_2)}{Im(\partial_3)} \quad H_1(A_*) = \frac{Ker(\partial_1)}{Im(\partial_2)} = \frac{A_1}{Im(\partial_2)} \text{ y } H_n(A_*) = 0 \text{ para } n \geq 3$$

A continuación veremos como vamos a aplicar la teoría de Homología establecida anteriormente para el estudio de las gráficas. Brevemente, dada una gráfica $G(V, E)$, nuestras estructuras algebraicas (que denotaremos por $C_n(V, E)$) serán grupos abelianos generados por el conjunto de completas n -dimensionales, y nuestros morfismos, el operador frontera.

Un n -simplejo de gráficas es una gráfica isomorfa a una completa de $n + 1$ vértices. Así, un 0-simplejo es la gráfica que consta de un solo vértice (K_1), un 1-simplejo es isomorfo a la gráfica que consta de 2 vértices y una arista (K_2), un 2-simplejo es isomorfo a la gráfica que consta de 3 vértices y 3 aristas (K_3), en general si Δ es un n -simplejo, tenemos que $\Delta \cong K_{n+1}$.

Llamaremos *caras* de un n -simplejo Δ a las subgráficas completas de Δ (de cualquier dimension menor que n). Por ejemplo si Δ es isomorfo a K_3 con vértices v_1, v_2, v_3 entonces sus caras son : $\{\{\emptyset\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}\}$. Notamos tambien que un k -simplejo puede ser cara de un simplejo de dimension mayor que k . Llamaremos k -cara a las caras de dimension k , por ejemplo si G es una gráfica completa con $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una 2-cara. Por lo que resta de esa tesis, denotaremos tambien una k -cara $\sigma := \{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$ por $v_1 v_2 \dots v_{k+1}$.

Un *complejo simplicial* W es un conjunto de simplejos (de varias dimensiones) que satisface lo siguiente:

- 1- Si un simplejo $\Delta \in W$ entonces todas sus caras están en W .
- 2- La intersección de dos simplejos $\Delta_1, \Delta_2 \in W$ es una cara de Δ_1 y de Δ_2

Notamos que el conjunto vacío es cara de cualquier simplejo. Llamaremos k -complejo simplicial a un complejo simplicial en el cual la mayor dimension es

k . Por ejemplo, un 2-complejo simplicial debe de contener al menos un triángulo y no contener tetraedro o simplejo de dimensión mayor que 2.

El *complejo de completas* $X(G)$ de una gráfica G es un complejo simplicial formado por los conjuntos de vértices de las subgráficas completas de G (los conjuntos de vértices de los n -simplejos G , para toda n). Como cualquier subconjunto de completa es también completa, entonces un complejo de completas es cerrado bajo subconjuntos. Llamaremos *k -esqueleto* al conjunto de caras de dimensión K o menor, y lo denotaremos por $\Delta^{(k)}$ o por $X(G)^{(k)}$.

Una k -cadena es una suma formal de k -caras con coeficientes enteros (podríamos tomar otro objeto algebraico para los coeficientes pero no es de nuestro interés). Por ejemplo $2v_1v_2v_4 + 3v_2v_3v_4 - 5v_1v_2v_3$ es una 2-cadena.

Sea $k > 0$ y $\sigma = v_0v_1v_2\dots v_k$ un k -simplejo. Denotaremos por $\partial(\sigma)$ y llamaremos *la frontera de σ* a la $k - 1$ cadena dada por:

$$\partial(\sigma) := \sum_{i=0}^k (-1)^i \hat{\sigma}^i$$

donde $\hat{\sigma}^i$ es la $k - 1$ -cara de σ en la cual omitimos el i -ésimo vértice, en otras palabras,

$$\hat{\sigma}^i = v_0v_1v_2\dots v_{i-1}v_{i+1}\dots v_k$$

Por ejemplo si $xyzw, yzw, zw, w$ son 3, 2, 1 y 0-simplejos respectivamente entonces:

$$\begin{aligned} \partial(xyzw) &= yzw - xzw + xyw - xyz \\ \partial(yzw) &= zw - yw + yz \\ \partial(zw) &= w - z \\ \partial(w) &= \emptyset \end{aligned}$$

Diremos que una k -cadena C es un *k -ciclo* si $\partial_k(C) = 0$. Diremos que un k -ciclo C es trivial si es frontera de alguna $k + 1$ -cadena, es decir, si $\partial(C') = C$ para alguna $k + 1$ -cadena C' .

Diremos que dos k ciclos γ, γ' son homólogos si difieren por una frontera, i.e si $\gamma = \gamma' - \partial(\beta)$ para alguna $k + 1$ -cadena β .

Diremos que un k -ciclo C es *minimal* (o que tiene soporte de vértices minimal) si no contiene propiamente a otro. Veamos un ejemplo de un 1-ciclo que no tiene soporte de vértices minimal. Sean los dos 1-ciclos γ y γ' (ver figura 3.1) definidos por:

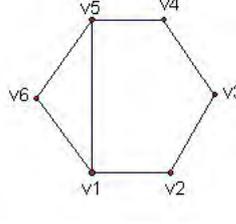


Figure 3.1: ejemplo de gráfica con 1-ciclo no minimal

$$\begin{aligned}\gamma &:= v_1v_2 + v_2v_3 + v_3v_4 + v_4v_5 + v_5v_6 + v_6v_1 + v_1v_5 + v_5v_6 + v_6v_1 \\ \gamma' &:= v_1v_2 + v_2v_3 + v_3v_4 + v_4v_5 + v_5v_1\end{aligned}$$

Queremos ver que γ no tiene soporte de vértices minimal. Como el conjunto de vértices de γ' esta contenido en el conjunto de vértices de γ , si mostramos que γ y γ' son homólogos entonces podremos concluir que γ no es minimal. Veremos entonces que la resta $\gamma - \gamma'$ es frontera de alguna 2-cadena. Se tiene que $\gamma - \gamma' = v_5v_6 + v_6v_1 + v_1v_5 + v_5v_6 + v_6v_1 - v_5v_1$ la cual es frontera de la dos cadena $2v_1v_5v_6$, por lo que γ no es un 1-ciclo minimal.

Para todo el resto de esta tesis trabajaremos solamente con complejos de completas, es decir por lo que queda del trabajo, nuestro objeto de estudio será la homología en gráficas, y nuestros morfismos el operador frontera. Es decir trabajemos con el complejo de cadenas:

$$C_* = \dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

donde $C_n = C_n(V, E)$ se define como el grupo abeliano generado por el conjunto de completas n -dimensionales de la gráfica $G = (V, E)$. Nos falta entonces demostrar que C_* es realmente un complejo de cadenas, es decir, tenemos que verificar que para un n -simplejo de graficas σ se cumple que $\partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = 0$, vemos un ejemplo sencillo que nos ayuda a ilustrar la demostración presentada a continuación.

Ejemplo: Sea σ un 3-simplejo con vértices v_1, v_2, v_3, v_4 . Queremos ver que $\partial_2(\partial_3(\sigma)) = 0$.

$$\begin{aligned}
\partial_2(\partial_3(\sigma)) &= \partial(\partial(v_1v_2v_3v_4)) \\
&= \partial(v_2v_3v_4 - v_1v_3v_4 + v_1v_2v_4 - v_1v_2v_3) \\
&= v_3v_4 - v_2v_4 + v_2v_3 - (v_3v_4 - v_1v_4 + v_1v_3) + v_2v_4 - v_1v_4 + v_1v_2 - (v_2v_3 - v_1v_3 + v_1v_2) \\
&= v_3v_4 - v_2v_4 + v_2v_3 - v_3v_4 + v_1v_4 - v_1v_3 + v_2v_4 - v_1v_4 + v_1v_2 - v_2v_3 + v_1v_3 - v_1v_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Hay que notar que el operador frontera es lineal, utilizaremos este hecho en la demostración del lemma siguiente.

Lemma 3.2. *Sea σ un k -simplejo de gráficas, entonces $\partial_{k-1}(\partial_k(\sigma)) = 0$.*

Demostración: Sea σ un k -simplejo de gráficas, con vértices v_0, v_1, \dots, v_k . Queremos ver que la frontera de la frontera de σ es la $k-2$ -cadena vacía.

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1}(\partial_k(\sigma)) &= \partial_{k-1}\left(\sum_{i=0}^k (-1)^i (v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k)\right) \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i (\partial_{k-1}(v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k)) \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\sum_{j \neq i, j=0}^k (-1)^j (v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k) \right)
\end{aligned}$$

Hago notar que por conveniencia de escritura se utilizó la forma : $(v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k)$ pero que hay que contemplar también los términos en cuales se tiene $j < i$. Luego, dividimos la suma en dos sumas ajenas en cuales $j < i$ y $i < j$, entonces tenemos :

$$\begin{aligned}
&\partial_{k-1}(\partial_k(\sigma)) \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k) + \sum_{j=i+1}^k (-1)^{j-1} (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k) \right) \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k) + \sum_{i=0}^k (-1)^i \sum_{j=i+1}^k (-1)^{j-1} (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k) \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^{i+j} (v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k) + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j-1} (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k) \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^{i+j} (v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k) - \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Para terminar esta sección veremos un resultado sencillo sobre los grupos de homología de un n -simplejo de gráficas.

Teorema 3.1. *Si Δ es un n -simplejo de gráficas (i.e $\Delta \cong K_{n+1}$), entonces $H_0(\Delta) \cong \mathbb{Z}$ y $H_i(\Delta) \cong 0$ para $i \geq 1$*

Demostración: Dada una gráfica G , tenemos un complejo simplicial Δ formado por sus subgráficas completas. Nos fijamos en el complejo de cadenas siguiente:

$$C_* = \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

donde $C_n = C_n(V, E)$ es el grupo abeliano generado por el conjunto de completas n -dimensionales de la gráfica G . Luego construimos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \cdots \\ & & \downarrow \text{id}_{n+1} & \swarrow b_n & \downarrow \text{id}_n & \swarrow b_{n-1} & \downarrow \text{id}_{n-1} & & \\ & & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \cdots \end{array}$$

donde $id_n : C_n \rightarrow C_n$ es el operador identidad, $O_n : C_n \rightarrow C_n$ es el operador que manda cualquier elemento de C_n al 0 y donde $b_n : C_n \rightarrow C_{n+1}$ es el operador cono, el cual consiste a agregar un vértice universal a los elementos de C_n . Claramente se tiene que:

$$\begin{aligned} \partial_{n+1}b_n + b_{n-1}\partial_n &= id \\ &= id - 0 \end{aligned}$$

Entonces hay una homotopía de cadenas entre id y 0 . Luego por un teorema de [25], se tiene que $id_* = 0_*$, por lo que

$$H_n(\Delta) \xrightarrow{id_*} 0_* \quad H_*(\Delta) = 0.$$

Por lo tanto, $H_n(\Delta) = 0$ para $n \geq 1$

□

Para cerrar esta sección, anunciaremos resultados y definiciones importantes, que serán de gran utilidad para entender el último capítulo. No se harán demostraciones de estos resultados ya que son bastante conocidos y no es el propósito de esta tesis. Diremos que un espacio topológico X es k -conexo si $\tilde{H}_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ para $i = 0, 1, \dots, k$. Para un complejo simplicial X de dimensión d , se tiene:

1. $\tilde{H}_0(X, \mathbb{Z}) = 0$ si y solo si X es conexo.
2. $\tilde{H}_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ para toda $i > d$.
3. Si $\tilde{H}_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ para $0 \leq i \leq m$ entonces $\tilde{H}_i(X, k) = 0$ para cualquier coeficiente k .
4. $\tilde{H}_i(X, \Lambda)$ es un grupo abeliano finitamente generado. En caso que Λ es un campo, entonces $\tilde{H}_i(X, \Lambda)$ es un campo vectorial sobre Λ .
5. $\tilde{H}_1(X, \mathbb{Z})$ es la abelianización del grupo fundamental de homotopía $\pi_1(X)$

Por último recordamos que los grupos reducidos de homología son invariantes topológicos, es decir si dos espacios son homeomorfos, entonces sus grupos reducidos de homología son isomorfos.

Capítulo 4

Topología de complejos de clanes aleatorios

En un artículo, Erdős y Renyi identificaron una función umbral no mejorable para la conexidad de una gráfica $G(n, p)$. En particular mostraron que si $p \gg \ln(n)/n$ entonces $G(n, p)$ es casi siempre conexa, y si $p \ll \ln(n)/n$ entonces $G(n, p)$ es casi siempre desconexa, cuando $n \rightarrow \infty$.

En este capítulo, estudiaremos los complejos simpliciales y los grupos de homología superior de ellos. Para $k > 0$ mostraremos que si $P = n^\alpha$ con $\alpha < \frac{-1}{k}$ o bien $\alpha > \frac{-1}{2k+1}$ entonces el k -ésimo grupo de homología de un complejo simplicial es casi siempre nulo. Pero si $\frac{-1}{k} < \alpha < \frac{-1}{k+1}$ entonces es casi siempre no nulo. Daremos también estimaciones para el rango de homología esperado y exhibiremos explícitamente clases de homología no triviales en el régimen no nulo.

4.1 Conexidad

Sea $\{\Delta_i\}_{i \in I}$ un familia finita de subcomplejos no vacíos de un complejo simplicial Δ . El *nervio* de $\{\Delta_i\}_{i \in I}$ sobre I , es el complejo simplicial $\mathcal{N}(\{\Delta_i\}_{i \in I})$ donde $\sigma \in \mathcal{N}(\{\Delta_i\}_{i \in I})$ si y solo si $\bigcap_{i \in \sigma} \Delta_i \neq \emptyset$. Nota que el nervio depende de toda la familia, sin embargo utilizaremos la notación $\mathcal{N}(\Delta_i)$ al lugar de $\mathcal{N}(\Delta_i)_{i \in I}$. Veamos algunos ejemplos. Sea $\{\Delta_i\}_{i \in \mathbb{Z}} = \{[i, i+1]/i \in \mathbb{Z}\}$, aquí claramente, $\mathcal{N}(\Delta_i) = \{\{i\}/i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{i, i+1\}/i \in \mathbb{Z}\}$.

Otro ejemplo es el siguiente, sea H la gráfica octaedro (ver dibujo 4.1) y sea $(\Delta_i)_{i=1, \dots, 8}$ la familia de triángulos del octaedro (es decir la familia de clanes del octaedro). Si representamos el complejo simplicial $\mathcal{N}(\Delta_i)$ con una gráfica, poniendo un vértice por cada elemento de cardinalidad 1 (i.e, 8 vértices), luego, poniendo la arista ij si $\{i, j\} \in \mathcal{N}(\Delta_i)$ y así sucesivamente para dimensiones superiores, lo que obtenemos es una caja con sus tapas totalmente rellenas pero totalmente hueco por dentro.

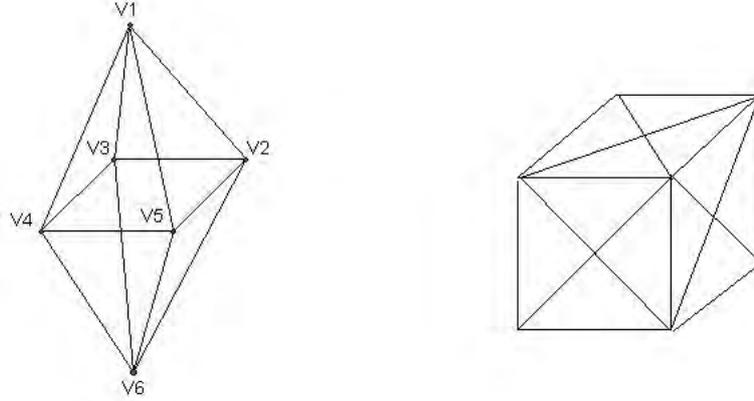


Figure 4.1: un octaedro y la gráfica generada por su nervio

Notamos que facilmente tenemos el siguiente resultado : G una gráfica, el conjunto de completas de $K(G)$ es isomorfo a $\mathcal{N}(\{\Delta_i\}_{i \in I})$, donde $(\{\Delta_i\}_{i \in I})$ es la familia de clanes de G . Otra manera de verlo es decir que para una gráfica G , $K(G)$ es isomorfa a la gráfica inducida (el complejo simplicial visto como gráfica) por el nervio de los clanes de G .

Sea Δ un complejo simplicial, definimos la *estrella* de un vértice v como el subcomplejo $st_{\Delta}(v)$ que contiene a todas las caras de Δ que contienen a v . Notamos que $\Delta = \bigcup_{v \in \Delta} st_{\Delta}(v)$.

Para una gráfica H y algún subconjunto de vértices $U \subseteq V(H)$, definimos el complejo simplicial $S(U) := \bigcap_{v \in U} st_{X(H)}(v)$.

Teorema 4.1. (*Bjorner*). *Sea Δ un complejo simplicial y $\Delta_{i \in I}$ una familia de subcomplejo tal que $\Delta = \bigcup_{i \in I} \Delta_i$. Suponga que cada intersección finita no vacía $\Delta_{i_1} \cap \Delta_{i_2} \cap \dots \cap \Delta_{i_t}$ es $(k - t - 1)$ -conexa con $t \geq 1$. Entonces Δ es k -conexo si y solo si $\mathcal{N}(\Delta_i)$ es k -conexo.*

Teorema 4.2. (*Meshulam*) *Si en cada subconjunto de $2k + 2$ vértices de H , todos los vértices tienen un vecino en común, entonces $X(H)$ es k -conexo.*

Notamos que en el caso que H sea una gráfica aleatoria, esta cota se puede mejorar. Por ejemplo, para $k = 0$, Erdős y Rényi probaron que la función umbral para que una gráfica sea conexa es la misma que la función umbral para que cada vértice tenga al menos un vecino, al saber $p(n) = \ln(n)/n$.

Demostración: Sea H una gráfica. Queremos ver que si cada subconjunto

de $2 + 2k$ vértices tiene un vecino en común, entonces $X(H)$ es casi siempre k -conexa. Haremos la prueba por inducción sobre k . Para $k = 0$ tenemos que cada par de vértices tiene un vecino en común, entonces H es conexa y $X(H)$ es 0-conexa. Supongamos ahora que si cada conjunto de $2 + 2k$ vértices, $k = 0, 1, \dots, i - 1$ con $i \geq 1$, tiene un vecino en común entonces $X(H)$ es k -conexa. Sea H una gráfica tal que cada conjunto de $2i + 2$ vértices tiene un vecino en común, queremos mostrar que $X(H)$ es i -conexa.

Nos fijamos en el conjunto de todas las $st_{X(H)}(v)$, con v vértice de $X(H)$. Queremos aplicar el teorema de Björner, ya vimos que $X(H) = \bigcup_{v \in X(H)} st_{X(H)}(v)$, tenemos que demostrar ahora que cada t -intersección finita de estrellas es $(k - t - 1)$ -conexa para $t = 1, 2, \dots, i + 1$ y que $\mathcal{N}(st_{X(H)}(v))$ es i -conexo.

Mostraremos primero que cada t -intersección es $(i - t + 1)$ -conexa. Para $t = 1$ (la intersección de una sola estrella), se tiene que una estrella es un cono y por ende contraíble y en particular i -conexo.

Ahora bien, sea U con $|U| = t$ y $S(U)$ una t -intersección de estrellas, afirmamos que $S(U)$ es un complejo de completas en cual cada conjunto de $2i + 2 - t$ vértices tiene un vecino en común. Veamos esto, sea W un subconjunto de $(2i + 2 - t)$ vértices de $S(U)$, nos fijamos en $W \cup U$, como $|U| = t$, se tiene que $W \cup U$ tiene a lo más $2i + 2$ vértices y por lo tanto estos vértices tienen un vecino en común en H , digamos v . Como v es adyacente a todos los vértices de U entonces $v \in S(U)$. Ahora bien, por hipótesis sabemos que si cada conjunto de $2\ell + 2$ vértices tienen un vecino en común entonces $X(H)$ es ℓ -conexo, como sabemos que en $S(U)$ cada conjunto de $2i + 2 - t$ vértices tienen un vecino en común se tiene que $X(S(U))$ es $i - \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ -conexo pues :

$$\begin{aligned} 2\ell + 2 &= 2i + 2 - t \\ 2\ell &= 2i - t \\ \ell &= i - \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

Como $t \geq 2$ se tiene que $i - \lfloor \frac{t}{2} \rfloor \geq i - t + 1$ y por consecuencia que la t -intersección de estrellas es $i - t + 1$ -conexo.

Probaremos ahora que $\mathcal{N}(st_{\Delta}(v))$ es i -conexo. Por hipótesis se tiene que cada $2i + 2$ vértices tienen un vecino en común, entonces la intersección de $2i + 2$ estrellas de vértices es no vacía, así, el esqueleto $2i + 2$ -dimensional de $\mathcal{N}(st_{\Delta}(v))$ es completo, es decir, contiene a todas las caras de dimension $2i + 2$ posibles, y obviamente, todas las caras de dimension menor, por lo que podemos concluir que $\mathcal{N}(st_{\Delta}(v))$ es $2i$ -conexo, y en especial i -conexo. □

Teorema 4.3. Si $p = \left(\frac{\ell \ln(n) + \omega(n)}{n} \right)^{\frac{1}{\ell}}$ con $\omega(n) \rightarrow \infty$ entonces ℓ vértices de $G(n, p)$ tienen un vecino en común casi siempre.

Demostración: Sea $p = \left(\frac{\ell \ln(n) + \omega(n)}{n}\right)^{\frac{1}{\ell}}$ con $\omega(n) \rightarrow \infty$. Para demostrar el teorema mostraremos que el valor esperado de conjuntos de ℓ vértices que no tienen vecinos en común tiende a 0. Sea la variable aleatoria:

Y = el número de conjuntos de ℓ vértices que no tienen vecino en común.

Primero notemos que existen $\binom{n}{\ell}$ conjuntos de ℓ vértices en $G(n, p)$. Calculemos ahora la probabilidad que un conjunto A de ℓ vértices tenga un vecino en común. Un vértice $x \in V(G - A)$ tiene una probabilidad p^ℓ de ser adyacente a todos los vértices de A , así tiene una probabilidad $(1 - p^\ell)$ de no ser vecino común de todos los vértices de A . Como existen $n - \ell$ vértices en $V(G - A)$ tenemos que $E(Y) = \binom{n}{\ell}(1 - p^\ell)^{n-\ell}$. Veremos ahora que $E(Y) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Utilizando la linealidad del valor esperado, se tiene que:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \binom{n}{\ell}(1 - p^\ell)^{n-\ell} \quad (\text{utilizando la desigualdad 5.1) tenemos que} \\
&\leq \binom{n}{\ell}e^{-p^\ell(n-\ell)} \quad \text{sustuyendo } p \\
&= \binom{n}{\ell}e^{-\frac{\ell \ln(n) + \omega(n)}{n}(n-\ell)} \\
&= \binom{n}{\ell}n^{-\ell}n^{\frac{\ell^2}{n}}e^{-\frac{\omega(n)(n-\ell)}{n}} \\
&= \binom{n}{\ell}n^{-\ell(1-\frac{\ell}{n})}e^{-\frac{\omega(n)(n-\ell)}{n}} \\
&= \binom{n}{\ell}n^{-\ell(1-o(1))}e^{-\frac{\omega(n)(n-\ell)}{n}} \\
&\leq e^{-\omega(n)(1-\frac{\ell}{n})} \quad \text{ya que } \omega(n) \rightarrow \infty \text{ se tiene que} \\
&= o(1)
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.4. *Sea $k \geq 1$. H una gráfica, tal que cada conjunto de $2k + 1$ vértices tienen un vecino en común, y tal que para cada conjunto $U \subseteq H$ con $|U| = 2k$, $S(U)$ es conexo, entonces $X(H)$ es k -conexo.*

Demostración: Sea $k \geq 1$ y H una gráfica tal que para cada conjunto de $2k + 1$ vértices, los $2k + 1$ vértices tienen un vecino en común. Suponga que para cada conjunto $U \subseteq V(H)$ con $|U| = 2k$, $S(U)$ es conexo. Como en la prueba de teorema anterior (teorema 4.3) utilizaremos el teorema de Björner. Después de haber etiquetado los vértices v_1, v_2, \dots, v_n , escogemos la familia de subcomplejos $\{st_{X(H)}(v_i)\}_{i=0}^n$ que denotaremos $\{st(v_i)\}$. Claramente $\bigcup_{i=1, \dots, n} st(v_i) = X(H)$.

Tenemos por demostrar que cada intersección de t estrellas es $k - t + 1$ conexa y

que $\mathcal{N}(st(v_i))$ es k conexo.

Como cada $2k + 1$ vértices tienen un vecino en común, se tiene que el $2k$ esqueleto de $\mathcal{N}(st(v_i))$ es completo. Verifiquemos este hecho, como cada $2k + 1$ vértices tienen un vecino en común, la intersección de $2k + 1$ estrellas es no vacía, entonces $\mathcal{N}(st(v_i))$ contiene a toda σ con $|\sigma| = 2k + 1$ lo que equivale a decir que el $2k$ -esqueleto es completo, y entonces $\mathcal{N}(st(v_i))$ es $2k - 1$ -conexo, y en particular k conexo.

Nos falta mostrar que cada intersección de t estrellas es $k - t + 1$ conexas con $2 \leq t \leq k + 1$, i.e. que $S(U)$ es $k - t + 1$ conexo para U con $|U| = t$. El caso $t = 1$ es trivial ya que la estrella de un vértice es contraíble y por lo tanto k conexo. Mostraremos algo poco más fuerte, que si $0 \leq j \leq k$ y $i \leq 2k - 2j$, entonces cada intersección de i estrellas es j conexas. Primero vemos que este hecho implica que cada intersección de t estrellas es $k - t + 1$ conexas. Tomando $t = 2k - 2j$ se tiene que $j = k - \frac{t}{2} \geq k - t + 1$ y por lo tanto que cada intersección de t estrellas es $j \geq k - t + 1$ conexas.

Sea $0 \leq j \leq k$, $i \leq 2k - 2j$ y $|U| = i$, haremos la prueba por casos. Para $j = 0$, se tiene que $i \leq 2k$. Si $i = 2k$, se tiene que $S(U)$ es conexo por hipótesis, y si $i < 2k$, $S(U)$ sigue siendo conexo ya que cada par de vértices en $S(U)$ tienen un vecino común en $S(U)$.

Para $j = 1$, queremos demostrar que si $i \leq 2k - 2$ y $|U| = i$, entonces $S(U)$ es 1-conexo. Cubrimos $S(U)$ con estrellas de vértices $st_{S(U)}(v)$ con $v \in S(U)$ y aplicamos otra vez el teorema de Bjorner. Como ya vimos que se cumple las otras hipótesis de teorema, no más nos falta demostrar que cada intersección de t estrellas es $-t + 2$ conexas, i.e. que cada intersección de 2 estrellas es conexas. Para eso observamos que para dos vértices $u, v \in S(U)$, se tiene que :

$$st_{S(U)}(u) \cap st_{S(U)}(v) = S(U \cup \{u, v\})$$

Donde $S(U \cup \{u, v\})$ es la intersección de $i + 2$ estrellas, con $i + 2 \leq 2k$, lo cual es conexo por hipótesis.

Para $j = 2$ queremos demostrar que si $i \leq 2k - 4$ y $|U| = i$, entonces $S(U)$ es 2-conexo. Cubrimos $S(U)$ con estrellas de vértices $st_{S(U)}(v)$ con $v \in S(U)$ y aplicamos el teorema de Bjorner. Queremos mostrar que cada t intersección de estrellas es $-t + 3$ conexas. Notamos que para $u, v, w \in S(U)$, se tiene que :

$$st_{S(U)}(u) \cap st_{S(U)}(v) \cap st_{S(U)}(w) = S(U \cup \{u, v, w\})$$

Donde $S(U \cup \{u, v, w\})$ es la intersección de a lo más $i + 3 \leq 2k - 1$ estrellas, la cual es conexas por hipótesis. Cada intersección de 3 estrellas en $S(U)$ es la intersección de a lo más $i + 2 \leq 2k - 2$ vértices, la cual es 1 conexo por lo visto en el caso anterior. Por lo tanto, $S(U)$ es 2-conexo.

Procediendo de esta manera para j mayores, el teorema queda demostrado.

□

Antes de ver el próximo teorema, es necesario hacer algunas observaciones que utilizaremos varias veces a lo largo de la demostración y una otra definición. Notamos que para una gráfica H y un subconjunto de vértices $U \subseteq V(H)$, $S(U)$ es un complejo de completas de alguna subgráfica de H . Anunciaremos este hecho como un lema, donde veremos que $S(U)$ es el complejo de completas de la gráfica generada por el conjunto de las intersecciones de las vecindades cerradas de los vértices de U .

Lemma 4.1. $S(U) = X(G(\bigcap_{u \in U} N[u]))$

Demostración: Sea $y \in S(U)$, entonces y proviene de la intersección de las estrellas de los vértices de U y y es completa de G , por lo que $y \cup \{u\}$ también es completa de G para cada $u \in U$, entonces $y \in \bigcap_{u \in U} N[u]$, luego, como y es completa se sigue que $y \in X(G(\bigcap_{u \in U} N[u]))$. Para la otra demostración se invierten los argumentos. □

La segunda observación que queremos hacer aquí es que para cualquier $v \in S(U)$, $st_{S(U)}(v) = S(U \cup \{v\})$. La anunciaremos también como lema:

Lemma 4.2. H una gráfica, $U \subseteq V(H)$. Para cualquier vértice $v \in S(U)$ se tiene $st_{S(U)}(v) = S(U \cup \{v\})$

Demostración: Haremos la prueba por contención. Sea $v \in S(U)$ y

$$x \in st_{S(U)}(v) \quad (1)$$

claramente como tomamos la estrella de v sobre $S(U)$,

$$x \in S(U) = \bigcap_{w \in U} st_{S(U)}(w) \quad (2)$$

De (1) y (2) deducemos que $x \in (\bigcap_{w \in U} st_{S(U)}(w)) \cap (st_{S(U)}(v))$, por lo que $x \in \bigcap_{w \in U \cup \{v\}} st_{S(U)}(w) = S(U \cup \{v\})$. Para la otra demostración se invierten los argumentos. □

Ahora veremos la última definición y lema necesarios para la demostración del teorema 4.5. Sea v un vértice de un complejo simplicial $X(H)$, definimos el *link* de v en $X(H)$ como :

$$Lk_{X(H)}(v) := \{\sigma | v \notin \sigma \text{ y } \sigma \cup \{v\} \in X(H)\}$$

La primera observación que podemos hacer sobre la diferencia entre $Lk(v)$ y $st(v)$ es que $Lk(v) \subseteq st(v)$ y que los únicos elementos que pueden estar contenidos en $st(v)$ y no en $Lk(v)$ son las completas que contienen al vértice v .

Ahora sea U un conjunto de vértices sobre $X(H)$, definimos:

$$L(U) := \bigcap_{v \in U} Lk(v).$$

Claramente, la diferencia entre $L(U)$ y $S(U)$ es que $S(U)$ puede contener completas (caras) que contienen a vértices de U , y $L(U)$ no. Veamos un ejemplo para ilustrar $L(U)$ y $S(U)$. Sea $G = K_3$ con $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ y sea $U = \{v_1, v_2\}$. Así $S(U) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}\}$ y $L(U) = \{\{v_3\}\}$. Ahora veremos un lema que nos sera de gran utilidad para la demostración del teorema 4.5.

Lemma 4.3. *Sea $k \geq 1$ y H una gráfica tal que cada $2k + 1$ vértices tienen un vecino en común y $|U| = 2k$ entonces si $L(U)$ es conexo, también lo es $S(U)$.*

Demostración: Primero vemos que $L(U) \neq \emptyset$. Como $|U| = 2k$, por hipótesis existe un vértice $u' \notin U$ tal que u' es adyacente a cada $u \in U$, y por lo tanto $u' \in L(U)$. Ahora veremos que $S(U)$ es conexo. Nos fijamos en $S(U) - L(U)$. Si $S(U) - L(U) = \emptyset$, hemos terminado. Entonces supongamos que existe un vértice $x \in S(U) - L(U)$, claramente $x \in U$, pues suponga que $x \notin U$, como $x \in S(U)$, entonces x es adyacente a todos los vértices de U , y como $x \notin U$ se tiene que $x \in L(U)$, una contradicción.

Por hipótesis, $L(U)$ es conexo, y vimos que es no vacío. Sea $v \in L(U)$ y $u \in U - \{x\}$ (ver figura 4.2). Como $u, x \in U$ y $x, y \in S(U)$, se tiene que ux, uv y vx son aristas de H , entonces $\{u, v, x\}$ es un elemento (cara) de $X(H)$ y por lo tanto $\{v, x\} \in st_{X(H)}(u)$. De ahí, $\{v, x\} \in S(U)$, para cada $x \in S(U) - L(U)$ y cada $v \in L(U)$, por lo tanto $S(U)$ es conexo. □

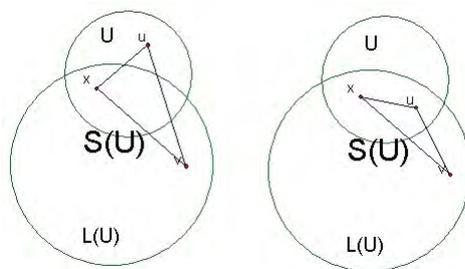


Figure 4.2:

Teorema 4.5. *Si $p = \left(\frac{(2k+1) \ln(n) + \omega(n)}{n}\right)^{\frac{1}{2k+1}}$ con $\omega(n) \rightarrow \infty$ entonces $X(n, p)$ es casi siempre k -conexo.*

Demostración: Primero vemos el caso $k = 0$. Tenemos que demostrar que si $p = \frac{\ln(n)+\omega(n)}{n}$ entonces $X(n, p)$ es conexo, i.e $G(n, p)$ es conexa. La demostración de este hecho se encuentra en el capítulo 2 (teo 2.9)

Para la demostración de este teorema utilizaremos los dos teoremas anteriores. Por el teorema 4.3, sabemos que si $p = \left(\frac{(2k+1)\ln(n)+\omega(n)}{n}\right)^{\frac{1}{2k+1}}$ entonces cada $2k + 1$ vértices arbitrarios de la gráfica tienen un vecino en común. Luego utilizando el teorema 4.4, basta demostrar que para cada conjunto de $2k$ vértices $U \subseteq H$, $S(U)$ es conexo, de ahí concluiremos que $X(H)$ es k -conexo. Aquí mostraremos que $L(U)$ es conexo, y utilizando el lema 4.3, concluiremos que $S(U)$ es conexo.

Sea $k \geq 1$, $p = \left(\frac{(2k+1)\ln(n)+\omega(n)}{n}\right)^{\frac{1}{2k+1}}$ y H una gráfica y $U \subseteq V(H)$ con $|U| = 2k$, queremos demostrar que casi siempre $L(U)$ es conexo. Consideremos el 1-esqueleto de $L(U)$ el cual es una gráfica aleatoria en la cual cada arista se elige de forma independiente a las otras. Notamos también que el número de vértices de $L(U)$ no es constante pero más bien una distribución, pues existen $\binom{n}{2k}$ maneras de elegir a U donde las aristas en $L(U)$ no son necesariamente independientes de las aristas de $L(U')$ para $U \neq U'$. Aún así, las aristas en una gráfica generada por un conjunto U_0 siguen siendo elegidas de manera independiente a las otras, y utilizaremos la linealidad del valor esperado para mostrar que la probabilidad que al menos una de estas gráficas no sea conexa tiende a 0.

Sea $U \subseteq V(G)$ con $|V(G)| = n$ y $|U| = 2k$. Llamaremos X al número de vértices en $L(U)$, es decir $X = |L(U)|$. Notamos que X no es constante pero es estrechamente concentrado, es decir, los valores de X para diferentes U s no están muy dispersos. X es la suma de $n - 2k$ variables indicadoras independiente aleatorias, puesto que para que un vértice v esté en $L(U)$, se necesita que v esté en el complemento de U , el cual consta de $n - 2k$ vértices, luego asignando 1 si $v \in L(U)$ y 0 si $v \notin L(U)$, tenemos que X es la suma de los valores asignados. Luego cada $v \in V - U$ tiene una probabilidad de p^{2k} de estar en $L(U)$. Así el valor esperado de X , que denotaremos μ , esta dado por:

$$\mu = E[X] = p^{2k}(n - 2k) \sim p^{2k}n$$

Como k es constante, trabajemos con $\mu = p^{2k}n$ para facilitar los caclulos. Claramente no altera el resultado ya que $p^{2k}(n - 2k) \leq p^{2k}n$. Además supondremos por conveniencia que $p = o(1)$, lo cual podemos hacer ya que si el resultado es valido para $p = o(1)$, con más razón lo será para una constante. Por la cota de desviación estándar grande, tenemos que :

$$Pr(|X - \mu| > \epsilon\mu) < e^{-c\epsilon\mu}$$

para una constante $c_\epsilon > 0$ que depende unicamente de ϵ . Tomamos $\epsilon = 1/100$ y $c = c_\epsilon$. Vemos el comportamiento de $e^{-c\mu}$.

$$\begin{aligned} e^{-c\mu} &\sim e^{-cp^{2k}n} \\ &= e^{-cp^{-1}np^{2k+1}} \\ &\leq e^{-cp^{-1}(2k+1)\ln(n)} \end{aligned}$$

La última desigualdad viene del hecho que $p = \left(\frac{(2k+1)\ln(n)+\omega(n)}{n}\right)^{\frac{1}{2k+1}}$, así tenemos que $np^{2k+1} = (2k+1)\ln(n) + \omega(n) > (2k+1)\ln(n)$, por lo que $e^{-np^{2k+1}} \leq e^{-(2k+1)\ln(n)}$. Luego por propiedades de logaritmos, se sigue que:

$$e^{-c\mu} \leq e^{-cp^{-1}(2k+1)\ln(n)} = n^{-c(2k+1)p^{-1}}$$

donde $p^{-1} \rightarrow \infty$. Entonces para un conjunto arbitrario U , se tiene que la probabilidad que $|X - p^{2k}n| > (1/100)p^{2k}n$ es menor que $\binom{n}{2k}n^{-c(2k+1)p^{-1}}$, luego:

$$\begin{aligned} \binom{n}{2k}n^{-c(2k+1)p^{-1}} &= \frac{\binom{n}{2k}}{n^{c(2k+1)p^{-1}}} \\ &\leq \frac{n^{2k}}{2k!n^{c(2k+1)p^{-1}}} \\ &= o(1) \end{aligned}$$

Hemos visto que para n suficientemente grande, la probabilidad que $|X - p^{2k}n| > (1/100)p^{2k}n$ tiende a 0. Por lo tanto, se tiene que casi seguramente $|X - p^{2k}n| < \epsilon p^{2k}n$. Desarrollando la desigualdad anterior obtenemos que $0.99p^{2k}n < X < 1.01p^{2k}n$ para cada U . Asumiremos este hecho hasta el final de la prueba. Notamos también que por nuestra hipótesis sobre p , se tiene que $X \rightarrow \infty$, pues $np^{2k} \sim (2k+1)\ln(n) + \omega(n)$.

Durante lo que resta de esta demostración utilizaremos varias veces las desigualdades siguientes, a cuales daremos las siguientes referencias:

Para $p < 1$,

$$(1-p)^n \leq e^{-nx} \tag{4.1}$$

$$\binom{n}{m} \leq \frac{n^m}{m!} \tag{4.2}$$

$$0.99p^{2k}n < X < 1.01p^{2k}n \tag{4.3}$$

$$(2k+1)\ln(n) \leq p^{2k}n \tag{4.4}$$

Denotaremos por P_i la probabilidad que $L(U)$ contenga componentes de orden i para al menos un subconjunto U de orden $2k$. Por una componente M de orden i , nos referimos a un subconjunto conexo de $L(U)$ de i vértices tal que ningún vértice en M tenga adyacencia con vértices de $L(U) - M$.

Para P_1 , veamos que no puede haber vértices aislados en $L(U)$. Por hipótesis, $|U| = 2k$ y cada conjunto de $2k + 1$ vértices en H tiene un vecino común. Sea $v \in L(U)$, como $|U| = 2k$, existe un vértice $x \notin U$ que es adyacente a todos los vértices de $U \cup \{v\}$, entonces $x \in L(U)$ y $\{x, v\} \in L(U)$ y por lo tanto v no es vértice aislado en $L(U)$.

Ahora calcularemos y acotaremos P_2 . Existen $\binom{n}{2k}$ maneras de escoger U , luego para cada U denotaremos X al número de vértices en $L(U)$. Notamos que X depende de la elección de U . Dado $u, v \in L(U)$, la probabilidad que exista la arista uv es p , y la probabilidad que v no sea adyacente a los demás vértices de $L(U)$ es de $(1-p)^{X-2}$. Como es la misma probabilidad para u y v , se tiene que la probabilidad que $\{u, v\}$ genere un componente de orden 2 en $L(U)$ es $p(1-p)^{2(X-2)}$. Por último, existen $\binom{X}{2}$ maneras de escoger $\{u, v\}$ en $L(U)$, por lo tanto se tiene que:

$$P_2 = \binom{n}{2k} \binom{X}{2} p(1-p)^{2(X-2)}$$

Veamos que $P_2 = o(n^{-1})$.

$$\begin{aligned} P_2 &= \binom{n}{2k} \binom{X}{2} p(1-p)^{2(X-2)} \\ &\leq n^{2k} \binom{X}{2} p(1-p)^{2(X-2)} \quad \text{por 4.2} \\ &\leq n^{2k} \binom{\lceil 1.01p^{2k}n \rceil}{2} p(1-p)^{2(X-2)} \quad \text{por 4.3} \\ &\leq n^{2k} \binom{\lceil 1.01p^{2k}n \rceil}{2} p e^{-2p(X-2)} \quad \text{por 4.1} \\ &\leq n^{2k} 1.01^2 p^{4k} n^2 p e^{-2p(X-2)} \quad \text{por 4.2} \\ &\sim n^{2k+2} p^{4k+1} e^{-2p(X-2)} \quad \text{reacomodando y omitiendo la constante} \\ &\leq n^{2k+2} p^{4k+1} e^{-2pX(1-2/X)} \quad \text{factorizando X} \\ &\leq n^{2k+2} p^{4k+1} e^{-1.98p^{2k+1}n(1-2/X)} \quad \text{por 4.3} \\ &\leq n^{2k+2} p^{4k+1} e^{-1.98(2k+1)\ln(n)(1-2/X)} \quad \text{por 4.4} \\ &\leq n^{2k+2} p^{4k+1} n^{-1.98(2k+1)(1-2/X)} \end{aligned}$$

Queremos ver ahora que $n^{2k+2}p^{4k+1}e^{-1.98(2k+1)(1-2/x)}$ es de orden $n - 1$.

$$\begin{aligned}
P_2 &\leq n^{2k+2}p^{4k+1}n^{-1.98(2k+1)(1-2/X)} \\
&\leq n^{2k+2}n^{-1.98(2k+1)(1-2/X)} \quad \text{porque } p < 1 \\
&= n^{2k+2}n^{-1.98(2k+1)}n^{1.98(2k+1)(X/2)} \\
&= n^{0.2}n^{-1.96k}n^{1.98(2k+1)(X/2)} \quad \text{porque } k \geq 1 \\
&= n^{-1.96}n^{0.2+1.98(2k+1)(X/2)} \\
&= n^{-1.94}n^{1.98(2k+1)(X/2)}
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $X/2 \rightarrow \infty$, se tiene que después de cierto valor de n , el exponente $1.98(2k+1)(X/2)$ se vuelve menor que $1/2$, así tenemos que:

$$\begin{aligned}
P_2 &\leq n^{-1.94}n^{1.98(2k+1)(X/2)} \\
&\leq n^{-1.94}n^{0.5} \\
&= n^{-1.44}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $P_2 = o(n^{-1})$. Ahora calcularemos P_i , lo haremos en dos casos, el primero tomaremos $3 \leq i \leq 100$, y en el otro caso, tomaremos $100 \leq i \leq 0.6p^{2k}n$.

Para que un subconjunto $S \subseteq L(U)$ con i vértices genere una componente conexa de orden i , necesita contener al menos un árbol generador. Ya vimos que el número de árboles generadores etiquetados sobre i vértices es i^{i-2} . También sabemos que el número de aristas de un árbol de i vértices es $i - 1$. La probabilidad que todas las $i - 1$ aristas de un árbol en particular aparezcan es p^{i-1} ya que cada arista se determina de manera independiente a las otras. Suponiendo que $3 \leq i \leq 100$ y $X \rightarrow \infty$, acotaremos P_i :

$$\begin{aligned}
P_i &\leq \binom{n}{2k} \binom{X}{i} i^{i-2} p^{i-1} (1-p)^{i(X-i)} \\
&\leq n^{2k} \binom{X}{i} i^{i-2} p^{i-1} (1-p)^{i(X-i)} \quad \text{por 4.2} \\
&\leq n^{2k} \frac{X^i}{i!} i^{i-2} p^{i-1} (1-p)^{i(X-i)} \quad \text{por 4.2} \\
&\leq n^{2k} \frac{X^i}{i!} i^{i-2} p^{i-1} e^{-ip(X-i)} \quad \text{por 4.1} \\
&= n^{2k} \frac{X^i}{i!} i^{i-2} p^{i-1} e^{-ipX(1-i/X)} \\
&= c_i n^{2k} X^i p^{i-1} e^{-ipX(1-i/X)} \quad \text{donde } c_i = \frac{i^{i-2}}{i!} \\
&\leq c_i n^{2k} X^i p^{i-1} e^{-ip^{2k+1} 0.99n(1-i/X)} \quad \text{por 4.3} \\
&\leq c_i n^{2k} (1.01p^{2k}n)^i p^{i-1} e^{-ip^{2k+1} 0.99n(1-i/X)} \quad \text{por 4.3} \\
&\leq c_i n^{2k} (1.01p^{2k}n)^i p^{i-1} e^{-0.99i(2k+1)\ln(n)(1-i/X)} \quad \text{porque } np^{2k+1} \geq (2k+1)\ln(n) \\
&= c_i n^{2k+i} 1.01^i p^{2ki+i-1} e^{-0.99i(2k+1)\ln(n)(1-i/X)} \\
&= c_i e^{[(2k+i)\ln(n)+i\ln(1.01)+2ki+i-1\ln(p)-0.99i(2k+1)\ln(n)(1-i/X)]} \\
&= c_i e^{[i\ln(1.01)+i\ln(p)+(2ki-1)\ln(p)+[2k+i-0.99i(2k+1)(1-i/X)]\ln(n)]} \\
&\leq c_i e^{[2k+i-0.99i(2k+1)(1-i/X)]\ln(n)}
\end{aligned}$$

La última desigualdad se cumple ya que $i\ln(1.01) + i\ln(p) = i\ln(p1.01) < 0$ y $(2ki - 1)\ln(p) < 0$. De ahí se sigue que:

$$\begin{aligned}
P_i &\leq c_i e^{[2k+i-0.99i(2k+1)(1-i/X)]\ln(n)} \\
&= c_i e^{[2k+i-0.99i(2k+1)+0.99(2k+1)(i/X)]\ln(n)}
\end{aligned}$$

Como $0.99(2k+1)(i/X) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ lo denotaremos por $o(1)$ para facilitar la notación. Entonces:

$$\begin{aligned}
P_i &\leq c_i e^{[2k+i-0.99i(2k+1)+o(1)]\ln(n)} \\
&= c_i e^{[2k+0.01i-1.98ik+o(1)]\ln(n)} \\
&= c_i e^{[2k+0.01i-0.98ik-ik+o(1)]\ln(n)} \\
&\leq c_i e^{[2k+0.01i-0.98i-3k+o(1)]\ln(n)} \quad \text{porque } i \geq 3, k \geq 1
\end{aligned}$$

Para valores grandes de n , se tiene que $o(1) < \frac{k}{2}$, y entonces

$$\begin{aligned}
P_i &\leq c_i e^{[2k+0.01i-0.98i-3k+o(1)]\ln(n)} \\
&\leq c_i n^{-k/2-.97i}
\end{aligned}$$

Ahora sumando sobre todas las i se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=3}^{100} P_i &\leq \sum_{i=3}^{100} c_i n^{-\frac{k}{2}-0.97i} \\
&= \sum_{i=3}^{100} c_i n^{-\frac{k}{2}} n^{-0.97i} \\
&\leq 97c_i n^{-\frac{k}{2}} n^{3(-0.97)} \\
&\leq 97c_i n^{3(-0.97)-\frac{k}{2}} \\
&\leq 97c_i n^{-3-0.41} \quad \text{para } n \text{ suficientemente grande} \\
&= o(n^{-3})
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $100 < i < \lfloor 0.6p^{2k}n \rfloor$, notamos que no hay i más grande ya que $L(U) = X \leq 1.01p^{2k}n$ y pues si la propiedad no se cumple para este intervalo, no lo cumplirá en su complemento. En esta demostración necesitamos ser un poco más cuidadosos con el coeficiente $c_i = \frac{i^{i-2}}{i!}$. Utilizaremos la fórmula de Stirling, y obtenemos la cota $\frac{i^{i-2}}{i!} \leq e^i$ que será suficiente para la prueba.

Se tiene:

$$\begin{aligned}
P_i &= \binom{n}{2k} \binom{X}{i} i^{i-2} p^{i-1} (1-p)^{i(X-i)} \\
&\leq n^{2k} \binom{X}{i} i^{i-2} p^{i-1} (1-p)^{i(X-i)} \\
&\leq n^{2k} \frac{X^i}{i!} i^{i-2} p^{i-1} (1-p)^{i(X-i)} \\
&\leq n^{2k} \frac{X^i}{i!} i^{i-2} p^{i-1} (1-p)^{iX(1-o(1))}
\end{aligned}$$

Luego, para n lo suficientemente grande y utilizando la desigualdad 4.1:

$$\begin{aligned}
P_i &\leq n^{2k} \frac{X^i}{i!} i^{i-2} p^{i-1} (1-p)^{iX(1-o(1))} \\
&\leq n^{2k} \frac{X^i}{i!} i^{i-2} p^{i-1} e^{-0.4piX} \\
&\leq n^{2k} X^i e^i p^{i-1} e^{-0.4piX} \quad \text{por la formula de Stirling} \\
&\leq n^{2k} (1.01p^{2k}n)^i e^i p^{i-1} e^{-0.4i(0.99p^{2k+1}n)} \quad \text{sustituyendo } X \\
&= n^{2k+i} 1.01^i p^{2ki+i-1} e^i e^{-0.396ip^{2k+1}n} \\
&\leq n^{2k+i} 1.01^i p^{2ki+i-1} e^i e^{-0.396i(2k+1)\ln(n)} \quad \text{por 4.4} \\
&= e^{(2k+i)\ln(n)+i(1+\ln(1.01))+(2ki+i-1)\ln(p)-0.396i(2k+1)\ln(n)} \\
&= e^{(2k+i-0.792ki-0.396i)\ln(n)+(2ki+i-1)\ln(p)+i(1+\ln(1.01))} \\
&= e^{(2k+0.604i-0.792ki)\ln(n)+(2ki+i-1)\ln(p)+i(1+\ln(1.01))}
\end{aligned}$$

Como el término $(2ki + i - 1)\ln(p)$ es negativo, tenemos:

$$P_i \leq e^{(2k+0.604i-0.792ki)\ln(n)+i(1+\ln(1.01))}$$

Claramente se cumple la desigualdad $\frac{i(1+\ln(1.01))}{i\ln(n)} \leq o(1)$, y entonces se cumple que $i(1+\ln(1.01)) \leq o(1)i\ln(n)$, por lo que se tiene ahora la desigualdad:

$$P_i \leq e^{(2k+0.604i-0.792ki+o(1)i)\ln(n)} = e^{(2k+(0.604+o(1))i-0.792ki)\ln(n)}$$

Como $k \geq 1$ y $i > 100$ por hipotesis, para cierta n lo suficientemente grande, se tiene la desigualdad:

$$\begin{aligned}
P_i &\leq e^{(2k+0.605i-0.792ki)\ln(n)} \\
&= e^{(2k+0.605i-0.092ki-0.7ki)\ln(n)} \\
&\leq e^{(2k+0.605i-9.2k-0.7i)\ln(n)} \\
&= e^{(-7.2k-0.095i)\ln(n)} \\
&= n^{-7.2k-0.095i}
\end{aligned}$$

Ahora calculamos la probabilidad sobre todas las i :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=101}^{0.6p^{2k}n} P_i &\leq \sum_{i=101}^{\infty} P_i \\
&\leq \sum_{i=101}^{\infty} n^{-7.2k-0.095i} \\
&= n^{-7.2k} \sum_{i=101}^{\infty} n^{-0.095i} \\
&\leq n^{-7.2k} n^{-0.095(100)} \sum_{i=0}^{\infty} n^{-0.095i} \\
&= n^{-7.2k} n^{-9.5} \sum_{i=0}^{\infty} n^{-0.095i} \\
&= n^{-7.2k} n^{-9.5} \left(\frac{1}{1+n^{-0.095}} \right) \\
&= o(n^{-15})
\end{aligned}$$

Utilizando los resultados para $i = 1$, $i = 2$, $3 \leq i \leq 100$ y $101 \leq i \leq \lfloor 0.6p^{2k}n \rfloor$ tenemos que $L(U)$ es de orden X con $0.99p^{2k}n < X < 1.01p^{2k}n$ y que no hay componente de orden i (completas disconexas de i vértices en $L(U)$) para $1 \leq i \leq \lfloor 0.6p^{2k}n \rfloor$ en ningún $L(U)$ con $|U| = 2k$, entonces cada componente en $L(U)$ es de tamaño X , y por lo tanto $L(U)$ es conexo. \square

4.2 Homología nula

En esta sección mostraremos que si $p = n^\alpha$ y $\alpha < \frac{-1}{k}$ entonces casi siempre se tiene $\tilde{H}_k(X(G(n, p), \mathbb{Z})) = 0$. También haremos mucha referencia al capítulo 3 y a la topología simplicial. Empezaremos recordando y presentando algunas definiciones y notaciones notables para este capítulo.

Una k -cadena (o k -cadena simplicial) es una combinación lineal formal (suma formal) de k -simplejos. En general la denotaremos por $C_k := \sum_{f_i \in \Delta^k} \lambda_i f_i$. Para un k -cadena C_k , llamaremos el *soporte* de C_k a la unión de las k -caras en C_k con coeficientes diferentes de 0, y lo denotaremos $sop(C_k)$. De misma forma, llamaremos *soporte de vértices* de C_k al conjunto de vértices subyacente al soporte de C_k , y lo denotaremos $vsop(C_k)$. Por ejemplo, si nuestro complejo de completas es $X(G)$ donde G es el octaedro O_3 de la figura 4.3, entonces $C_2 = 2F_2 + 3F_4 + F_5$ es una 2-cadena y $vsop(C_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.

Un k -ciclo es una k -cadena cuya frontera es 0. Por ejemplo, en el octaedro de la figura 4.3, la 2-cadena $C'_2 := F_1 + F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 - F_7 - F_8$ es un

2-ciclo ya que $\partial(C'_2) = 0$.

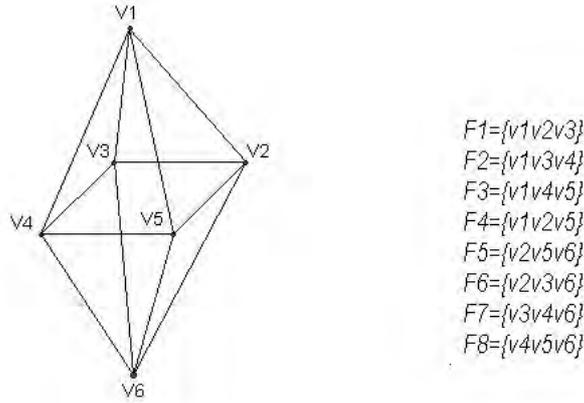


Figure 4.3: Un octaedro O_3 y sus caras 3-dimensionales

Diremos que un subcomplejo k -dimensional Δ es *puro* si cada cara de dimensión i con $i \leq k$ esta contenida en un cara de dimensión k , por ejemplo el octaedro de la figura 4.3 es un complejo 2-dimensional puro. Diremos que un complejo k -dimensional puro es *fuertemente conexo* si cada par de caras $\sigma, \tau \in \Delta^k$ puede ser conectada por una secuencia de k -caras $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_j = \tau$ tal que $\dim(\sigma_i \cap \sigma_{i+1}) = k - 1$ para $0 \leq i \leq j - 1$. Otra vez, el ejemplo de la figura 4.3 es un ejemplo de un subcomplejo 2-dimensional fuertemente conexo. Una observación importante es que cada k -ciclo es una combinación lineal con coeficientes enteros de k -ciclos con soporte fuertemente conexo.

Primero mostraremos que cada subcomplejo fuertemente conexo tiene un número de vértices acotado en su soporte de vértices, y luego que cada ciclo de dimension baja (menor que a cota que veremos) es frontera de alguna cadena de mayor dimension.

Teorema 4.6. *Si $\alpha < \frac{-1}{k}$ y $0 < \frac{1}{N} < \frac{-1}{k} - \alpha$, entonces casi siempre no hay subcomplejos k -dimensional de $X(n, p)$ fuertemente conexos y puros con soporte de vértices con más de $N + k + 1$ vértices.*

Demostración: Sea $G(n, p)$ un gráfica aleatoria y $X(n, p)$ su complejo de completas. Sea Δ un complejo puro k -dimensional fuertemente conexo. Notamos que por ser Δ fuertemente conexo, podemos ordenar los vértices de su soporte de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de tal manera que $\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$ genere una cara k -dimensional y que v_i es adyacente con al menos k vértices v_j con $j < i$, $k + 1 \leq i$. Una manera de ver este hecho es que como Δ es fuertemente

conexo, podemos ordenar sus caras k -dimensionales f_1, f_2, \dots, f_m de tal manera que f_i tenga intersección $k - 1$ dimensional con la union de la caras anteriores, es decir, $\dim(f_i \cap \{\bigcup_{j=1}^{i-1} f_j\}) = k - 1$. Claramente, vemos que en la sucesión $f_1, f_1 \cup f_2, f_1 \cup f_2 \cup f_3, \dots$, agregamos a lo más un vértice en cada paso, entonces esto nos da el orden de vértices que buscábamos.

Supongamos que Δ tiene $N + k + 1$ vértices, entonces hay al menos $\binom{k+1}{2} + Nk$ aristas en Δ por lo visto anteriormente, pues $\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$ consta de $\binom{k+1}{2}$ aristas y cada uno de los N vértices restantes son adyacentes con al menos k vértices. Claramente si la gráfica subyacente de Δ no es subgráfica inducida de $G(n, p)$ entonces Δ no es subcomplejo de $X(n, p)$. Utilizaremos este hecho y veremos que la probabilidad que haya un subcomplejo isomorfo a Δ en $X(n, p)$ tiende a 0.

Sean ϵ y N tales que $\frac{1}{N} < \epsilon < -\alpha - \frac{1}{k}$. Notamos que por la desigualdad $\epsilon < -\alpha - \frac{1}{k}$, se tiene que $\alpha < \epsilon - \frac{1}{k}$ y entonces $P = n^\alpha < n^{\epsilon - \frac{1}{k}}$, esto sera nuestra primera observación. La segunda observación es que por la desigualdad $\frac{1}{N} < \epsilon$, se tiene que $1 < N\epsilon$ y por lo tanto $k < kN\epsilon$. Si denotamos por $Pr(\exists \text{ sub})$ a la probabilidad de que exista un subcomplejo isomorfo a Δ en $X(n, p)$, tenemos que :

$$Pr(\exists \text{ sub}) \leq (N + k + 1)! \binom{n}{N + k + 1} p^{\binom{k+1}{2} + Nk}$$

Donde $(N + k + 1)!$ es el número de maneras que existen para etiquetar $N + k + 1$ vértices, el término $\binom{n}{N + k + 1}$ corresponde al número de maneras que existen para escoger $N + k + 1$ vértices de un conjunto de n vértices y $p^{\binom{k+1}{2} + Nk}$ corresponde a la probabilidad que haya $\binom{k+1}{2} + Nk$ aristas. Así, calculando, se tiene que :

$$\begin{aligned} Pr(\exists \text{ sub}) &\leq (N + k + 1)! \binom{n}{N + k + 1} p^{\binom{k+1}{2} + Nk} \\ &\leq (N + k + 1)! \frac{n^{N+k+1}}{(N + k + 1)!} p^{\binom{k+1}{2} + Nk} \quad \text{por 4.2} \\ &= n^{N+k+1} p^{\binom{k+1}{2} + Nk} \\ &\leq n^{N+k+1} n^{-\left(\frac{1}{k} + \epsilon\right)\left(\binom{k+1}{2} + Nk\right)} \quad \text{por la observación 1} \\ &\leq n^{N+k+1} n^{-\left(\frac{1}{k}\right)\left(\binom{k+1}{2} + Nk\right)} n^{-\epsilon\left(\binom{k+1}{2} + Nk\right)} \\ &= n^{N+k+1} n^{-\left(\frac{1}{k}\right)\left(\binom{k+1}{2}\right)} n^{-\left(\frac{1}{k}\right)Nk} n^{-\epsilon\left(\binom{k+1}{2}\right)} n^{-Nk\epsilon} \\ &= n^{k+1} n^{-\left(\frac{1}{k}\right)\left(\binom{k+1}{2}\right)} n^{-\epsilon\left(\binom{k+1}{2}\right)} n^{-Nk\epsilon} \end{aligned}$$

Luego, la segunda observación nos da que $k < \epsilon Nk$, por lo que $n^{-k} > n^{-\epsilon Nk}$ y entonces:

$$\begin{aligned}
Pr(\exists \text{sub}) &= n^{k+1} n^{-\binom{k+1}{k}} n^{-\epsilon \binom{k+1}{2}} n^{-Nk\epsilon} \\
&\leq n^{k+1} n^{-\binom{k+1}{k}} n^{-\epsilon \binom{k+1}{2}} n^{-k} \\
&= n n^{-\binom{k+1}{k}} n^{-\epsilon \binom{k+1}{2}} \\
&= n^{1-\binom{k+1}{k}} n^{-\epsilon \binom{k+1}{2}} \\
&= n^{1-\frac{k+1}{2}} n^{-\epsilon \frac{k+1}{2}} \\
&= n^{1-\frac{k+1}{2}(1+k\epsilon)}
\end{aligned}$$

Finalmente, como $k \geq 1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
Pr(\exists \text{sub}) &= n^{1-\frac{k+1}{2}(1+k\epsilon)} \\
&\leq n^{1-(1+\epsilon)} \\
&= n^{-\epsilon} \\
&= O(n^{-\epsilon})
\end{aligned}$$

Entonces hemos demostrado que para un complejo k -dimensional Δ fuertemente conexo, casi siempre Δ no es subcomplejo de $X(n, p)$. Para terminar la prueba notamos que solo existe un número finito de tipo de isomorfismos de complejos fuertemente conexos k -dimensionales Δ sobre $N + k + 1$ vértices. Repitiendo para cada uno el argumento anterior, concluimos que casi siempre no hay subcomplejos k -dimensionales puros fuertemente conexos de $X(n, p)$. Claramente tampoco existen tales subcomplejos para un conjunto con más de $N + k + 1$ vértices ya que cada uno contendría un subcomplejo fuertemente conexo con $N + k + 1$ vértices (exactamente). \square

Como conclusión sabemos que la homología esta generada por ciclos con soporte de vértices pequeños (menos de $N + k + 1$ vértices). Para los teoremas que siguen necesitaremos algunas definiciones. Diremos que un k -ciclo γ es trivial si es la frontera de alguna $k + 1$ -cadena, en otras palabras, γ es trivial si existe una $K + 1$ cadena γ' tal que $\partial(\gamma') = \gamma$. Igualmente diremos que γ es no trivial si no existe tal γ' . Para las definiciones siguientes, consideramos un k -ciclo no trivial γ en un complejo simplicial Δ , con soporte de vértices minimal, que denotaremos por la combinación lineal:

$$\gamma = \sum_{f \in \text{sop}(\gamma)} \lambda_f f \quad (4.5)$$

donde $\lambda_f \in \mathbb{Z}$ y las f 's representan las caras de γ .

Sea Δ un complejo de gráficas. Para lo que resta de esta sección siempre cuando hablaremos de un soporte de vértices $vsop(\gamma)$ para un k -ciclo γ nos referiremos al subcomplejo de Δ inducido por $vsop(\gamma)$ que denotaremos por $\Delta(\gamma)$. Notamos que γ sigue siendo un k -ciclo no trivial en $\Delta(\gamma)$ ya que para cada cara f de γ con $f \in \Delta$ se tiene que $f \in \Delta(\gamma)$. Además, esta claro que si γ era no trivial en Δ , no lo es tampoco en $\Delta(\gamma)$.

Para $\gamma = \sum_{f \in sop(\gamma)} \lambda_f f$ y $v \in vsop(\gamma)$ definimos la intersección de γ con la estrella de v como la k -cadena:

$$\gamma \cap st(v) := \sum_{f \in st(v)} \lambda_f f \quad (4.6)$$

y de manera análoga, la $k - 1$ -cadena

$$\gamma \cap lk(v) := \sum_{f \in st(v)} \lambda_f (f - \{v\}) \quad (4.7)$$

Si ordenamos los vértices poniendo v a lo último, se induce una orientación en cada una de las caras. Notamos que como γ es ciclo entonces $\partial(\gamma) = 0$ en especial se eliminan todas las caras que contienen a v , y como todas están contenidas en $st(v)$, se tiene que $\partial(\gamma \cap st(v))$ consta de las caras $k - 1$ dimensionales de $st(v)$ sobre el soporte de γ que no contienen a v . Podemos resumir este hecho a la igualdad:

$$\gamma \cap lk(v) = \partial(\gamma \cap st(v)). \quad (4.8)$$

Además, si aplicamos el operador frontera en ambas partes de la igualdad, se tiene que:

$$\partial(\gamma \cap lk(v)) = \partial(\partial(\gamma \cap st(v))) = 0 \quad (4.9)$$

por lo que concluimos que $\gamma \cap lk(v)$ es un $(k - 1)$ -ciclo. Queremos ver ahora que $\gamma \cap lk(v)$ es no trivial.

Teorema 4.7. $\gamma \cap lk(v)$ es un $(k - 1)$ -ciclo no trivial.

Demostración: Solo tenemos que demostrar que $\gamma \cap lk(v)$ no es trivial, es decir que no existe k -cadena β tal que $\partial(\beta) = \gamma \cap lk(v)$. Haremos la prueba por contradicción, suponiendo que existe un k -ciclo β tal que $\partial(\beta) = \gamma \cap lk(v)$ con $sop(\beta) \subseteq lk(v)$ y en particular $v \notin vsop(\beta)$. Entonces podemos escribir:

$$\beta := \sum_{f \in sop(\beta)} \mu_f f \quad (4.10)$$

con $\mu_f \in \mathbb{Z}$ y definimos ahora la $k + 1$ -cadena

$$\beta * \{v\} := \sum_{f \in sop(\beta)} \mu_f (f \cup \{v\}) \quad (4.11)$$

Queremos encontrar un k -ciclo γ' homólogo a γ con $|vsop(\gamma')| < |vsop(\gamma)|$. Definiremos γ' y luego veremos que es homólogo a γ y que diferencian por una frontera. Sea

$$\gamma' := \gamma - (\gamma \cap st(v) + (-1)^{k+2}\beta) = (\gamma - \gamma \cap st(v)) + (-1)^{k+3}\beta. \quad (4.12)$$

Probaremos que $\partial(\beta * \{v\}) = \gamma \cap st(v) + (-1)^{k+2}\beta$. Nota que para una cara $f_0 = v_1v_2 \dots v_{k+1}$ en particular, y haciendo (por conveniencia de notación) $v = v_{k+2}$ se tiene que :

$$\begin{aligned} \partial(f_0 * \{v\}) &= \sum_{i=0}^{k+2} (-1)^{i+1} v_1 v_2 \dots \hat{v}_i \dots v_{k+1} v_{k+2} \\ &= (-1)^{k+2} f_0 + \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{i+1} v_1 v_2 \dots \hat{v}_i \dots v_{k+1} v \\ &= (-1)^{k+2} f_0 + \partial(f_0) * \{v\} \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} \partial(\beta * \{v\}) &= \partial\left(\sum_{f \in sop(\beta)} \mu_f(f \cup \{v\})\right) \\ &= \sum_{f \in sop(\beta)} \partial(\mu_f(f * \{v\})) \\ &= \sum_{f \in sop(\beta)} \mu_f [(-1)^{k+2} f + \partial(f) * \{v\}] \\ &= (-1)^{k+2} \sum_{f \in sop(\beta)} \mu_f f + \sum_{f \in sop(\beta)} \mu_f (\partial(f) * \{v\}) \\ &= (-1)^{k+2} \beta + \gamma \cap st(v) \end{aligned}$$

por lo que γ y γ' son homólogos ya que también γ' es un k -ciclo, pues:

$$\partial(\gamma') := \partial(\gamma) - \partial((\gamma \cap st(v) + (-1)^{k+2}\beta)) = 0 - \partial(\partial(\beta * \{v\})) = 0 \quad (4.13)$$

Como se tiene por definición de γ' que $vsop(\gamma') \subseteq vsop(\gamma)$, y observando que $\gamma - (vsop \cap st(v)) \subseteq vsop(\gamma) - \{v\}$ y $vsop(\beta) \subset vsop(lk(v)) \subset vsop(\gamma) - \{v\}$ se tiene que $vsop(\gamma') \subseteq vsop(\gamma) - \{v\}$, una contradicción al hecho γ es minimal. \square

Hemos demostrado que no hay subcomplejo puro fuertemente conexo con soporte de vértices de tamaño mayor que $N + k + 1$ y que para un k -ciclo no trivial γ , $\gamma \cap lk(v)$ es un $(k - 1)$ -ciclo no-trivial en $lk(v)$. Veremos ahora que $|vsop(\gamma)| \geq 2k + 2$

Lemma 4.4. *Sea H una gráfica y $X(H)$ su complejo de completas. Suponga que γ es un k -ciclo no trivial, entonces $|vsop(\gamma)| \geq 2k + 2$*

Demostración: Haremos la prueba por inducción. Para $k = 1$, claramente el 2-ciclo γ más pequeño tiene 4 vértices, cumpliendo que $|vsop(\gamma)| \geq 2k + 2 = 4$. La hipótesis de inducción nos da entonces que para cada m -ciclo γ' con $m < k$, se tiene que $|vsop(\gamma')| \geq 2m + 2$.

Sea γ un k -ciclo no-trivial, queremos demostrar que $|vsop(\gamma)| \geq 2k + 2$. Suponga ahora por contradicción que $|vsop(\gamma)| \leq 2k + 1$ y sea $v \in vsop(\gamma)$. Por el lemma anterior sabemos que $\gamma \cap lk(v)$ es un $(k-1)$ -ciclo no trivial, así, utilizando la hipótesis de inducción tenemos que $|vsop(\gamma \cap lk(v))| \geq 2(k-1) + 2 = 2k$. Además como $v \in vsop(\gamma)$ claramente, $|vsop(\gamma \cap lk(v))| < |vsop(\gamma)|$. Agrupando estas desigualdades, se obtiene que :

$$2k \leq |vsop(\gamma \cap lk(v))| < |vsop(\gamma)| \leq 2k + 1 \quad (4.14)$$

De lo cual podemos concluir que $|vsop(\gamma \cap lk(v))| = 2k$ y $|vsop(\gamma)| = 2k + 1$, de lo cual deducimos que v tiene grado $2k$ en γ . Si repetimos el mismo argumento para cada $v \in vsop(\gamma)$, se obtiene que $vsop(\gamma)$ genera una gráfica completa en G . Entonces también podemos decir que γ genera una $2k$ -cara en $X(H)$, lo cual siempre es frontera de alguna $2k+1$ -cadena. Pero entonces γ no es trivial, lo que es una contradicción a nuestra hipótesis. Por lo tanto, $|vsop(\gamma)| \geq 2k + 2$. \square

Teorema 4.8. *Si $p = n^\alpha$ con $\alpha < -1/k$ entonces casi siempre:*

$$\tilde{H}_k(X(n, p), \mathbb{Z}) = 0$$

Demostración: Sea γ un k -ciclo con soporte de vértices minimal. Lo primero que queremos hacer notares que cada vértice $v \in \gamma$ tiene al menos grado $2k$ en la gráfica inducida por $vsop(\gamma)$. Para verlo, sea $v \in vsop(\gamma)$, existe una cara k dimensional $C \subseteq vsop(\gamma)$ tal que $v \in C$. Como C es una cara con $k+1$ vértices, v es adyacente con al menos k vértices. Luego, como γ es un ciclo se tiene que $\partial(\gamma) = 0$, es decir que cada cara $k-1$ dimensional debe compensarse con otra (eliminarse), en otras palabras para una cara $k-1$ dimensional $vv_2 \dots \hat{v}_i \dots v_k$ debe existir otra cara $C_1 = vv_2 \dots \hat{v}_j \dots v_k$ con $v_i \neq v_j$ con coeficiente contrario, nota que v es adyacente a v_j . Lo que queremos es utilizar este argumento para cada uno de los k vértices de $C - \{v\}$. Notamos que si v_i y v_j son adyacentes, $vv_1 v_2 \dots v_{k-1} v_i v_j$ es una k -cara, así debe existir un k -ciclo γ' homólogo a γ que no contiene a v_k , lo que implica que $vsop(\gamma') \subset vsop(\gamma)$, contradiciendo el hecho que γ es minimal. Así concluimos que v_j es diferente para cada v_i y por lo tanto que v tiene al menos $2k$ vecinos en $vsop(\gamma)$.

La segunda observación es que para un k -ciclo γ , se tiene por el teorema 4.7 que para cada $v \in vsop(\gamma)$, $lk(v)$ es $(k-1)$ -ciclo no trivial sobre $vsop(\gamma)$, luego, aplicando el lemma 4.4 se tiene que contiene al menos $2(k-1) + 2 = 2k$ vértices.

Sea H una gráfica etiquetada con grado mínimo $2k$. Sea $m = |V(H)|$, entonces $|E(H)| \geq \frac{m(2k)}{2} = mk$ ya que hay que contar 2 vértices para cada arista.

Sea $G(n, p)$ una gráfica aleatoria con $p = n^\alpha$ y $\alpha < \frac{-1}{k}$, notamos que así, $p < \frac{1}{n^k} = n^{-k}$. Queremos mostrar que H casi siempre, no es una subgráfica de $G(n, p)$, así habremos demostrado que no contiene k -ciclos con soporte de vértices minimal, entonces, en general k -ciclos y por lo tanto podremos concluir que $\tilde{H}_k(X(n, p), \mathbb{Z}) = 0$. Haremos la prueba acotando a probabilidad que H sea subgráfica de $G(n, p)$.

Existen $m!$ formas de etiquetar a m vértices y $\binom{n}{m}$ maneras de ecoger m vértices de un conjunto de n . Además como la probabilidad que haya mk aristas entonces la probabilidad que H sea una subgráfica de $G(n, p)$ esta dada por $m! \binom{n}{m} p^{mk}$. Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned} m! \binom{n}{m} p^{mk} &\leq m! \frac{n^m}{m!} p^{mk} \\ &= n^m p^{mk} \\ &\leq n^m (n^\alpha)^{mk} \\ &= n^{m^2 k \alpha} \end{aligned}$$

Como por hipotesis $\alpha < \frac{-1}{k}$, entonces $k\alpha < -1$ y por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} n^{m^2 k \alpha} &\leq \frac{1}{n^{m^2}} \\ &= o(1) \end{aligned}$$

Entonces casi siempre $G(n, p)$ no contiene H como subgráfica. Notamos que existe solamente un número finito de gráficas con grado mínimo 2 con $m = N + k$ vértices, las cuales tienen cada una al menos mk aristas. Podemos afirmar eso último ya que por el teorema 4.6 sabemos que no hay subcomplejos de $X(n, p)$ fuertemente conexos k -dimensional con soporte de más de $N + K + 1$ vértices. Así aplicando el resultado obtenido para H a cada una de ellas, concluimos que $X(n, p)$ no contiene k -ciclos con soporte minimal y por lo tanto su homología es nula, es decir, $\tilde{H}_k(X(n, p), \mathbb{Z}) = 0$. \square

4.3 Retracciones esfericas

En esta sección veremos que si $p^{k+1}n \rightarrow 0$ y $p^k n \rightarrow \infty$ entonces $X(n, p)$ casi siempre se puede retraer sobre una esfera S^k . Primero daremos otra manera de describir un octaedro que la que hemos visto en el capítulo I.

Denotaremos por S^d al octaedro d -dimensional (también llamado el octaedro d -dimensional esférico, ver capítulo I), que vamos a definir a continuación y por

$(S^d)^{(1)}$ a su 1-esqueleto. Definimos la gráfica del octaedro d -dimensional S^d como la gráfica $O_{k+1} = (V, E)$ con :

$$V(O_{k+1}) = \{u_1, u_2, \dots, u_{k+1}\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$$

y

$$E(O_{k+1}) = (\{(u_i v_i)\}_{i=1}^{k+1})^C$$

Donde C representa el complemento del conjunto descrito. Por ejemplo, para O_3 tenemos:

$$V(O_3) = \{u_1, u_2, u_3\} \cup \{v_1, v_2, v_3\}$$

y

$$E(O_3) = \{u_1 u_2, u_1 u_3, u_1 v_2, u_1 v_3, u_2 u_3, u_2 v_1, u_2 v_3, u_3 v_1, u_3 v_2, v_1 v_2, v_1 v_3, v_2 v_3\}$$

Así notamos que su número de vértices es $|O_{k+1}| = 2(k+1)$ y su número de aristas es $|E(O_{k+1})| = \binom{2(k+1)}{2} - (k+1)$. Recordamos que O_{k+1} es una gráfica estrictamente balanceada, es decir que $\frac{|E(H)|}{|V(H)|} < \frac{|E(O_{k+1})|}{|V(O_{k+1})|}$ para cada subgráfica propia H de O_{k+1} (ver demostración capítulo I). También recordamos que $n^{-\frac{1}{k}}$ es una función umbral no mejorable para que una gráfica $G(n, p)$ contenga a una gráfica balanceada (ver capítulo II), la cual podemos aplicar entonces a O_{k+1} . En particular, como visto en el teorema, si $p^k n \rightarrow \infty$ entonces $G(n, p)$ contiene casi seguramente un O_{k+1} .

Teorema 4.9. *$G(n, p)$ una gráfica aleatoria. Si $p^{k+1}n \rightarrow 0$ y $p^k n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces $X(n, p)$ casi siempre se puede retraer a una esfera S^k y por lo tanto $\tilde{H}_k(X(n, p), \mathbb{Z})$ casi siempre tiene un \mathbb{Z} sumando.*

Demostración: Sea $G(n, p)$ una gráfica aleatoria tal que $p^{k+1}n \rightarrow 0$ y $p^k n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Vimos antes de anunciar el teorema que $G(n, p)$ con estas propiedades casi siempre tiene como subgráfica inducida un $(S^k)^{(1)}$. Sea $S = \{u_1, u_2, \dots, u_{k+1}\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$ el conjunto de vértices de dicha subgráfica. Calcularemos la probabilidad de que los vértices $\{u_1, u_2, \dots, u_{k+1}\}$ tengan un vecino en común fuera del octaedro, es decir, sobre los $n - 2(k+1) = n - 2k - 2$ vértices restantes (denotaremos este evento por W). Como $\{u_1, u_2, \dots, u_{k+1}\}$ contiene $k+1$ vértices, se tiene que:

$$P(W) \leq (n - 2k - 2)p^{k+1} = np^{k+1} - 2kp^{k+1} - 2p^{k+1} = o(1)$$

La última igualdad se debe a que por hipótesis se tiene $np^{k+1} \rightarrow 0$. Entonces casi siempre $G(n, p)$ contiene un $(S^k)^{(1)}$ como subgráfica y tal que $\{u_1, u_2, \dots, u_{k+1}\}$ no contienen vecino común. Además como en $(S^k)^{(1)}$ se tiene que u_i no es adyacente a v_i , para cada i , nos permite definir la retracción

$r : V(G) \rightarrow V((S^k)^{(1)})$ de la manera siguiente: Si $x \in S$ entonces $r(x) = x$, si $x \notin S$ entonces $r(x) = v_i$ para u_i no adyacente a x . Notamos que esto se puede hacer ya que para cualquier $x \notin S$ se puede encontrar un vértice u_i con x no adyacente a u_i . Esta claro que la retracción esta bien definida ya que si dos vértices x, y son adyacentes en $G(n, p)$, lo son también en $(S^k)^{(1)}$, pues $\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$ induce una completa. Para terminar la demostración basta extender r a $X(n, p)$ de manera natural a una retracción $\tilde{r} : X(n, p) \rightarrow X(S)$, luego, $X(S)$ es homoeomorfo a S^k . \square

Si reagrupamos los resultados principales de los teoremas anteriores, es decir los teoremas 4.5, 4.8 y 4.9 tenemos el resultado siguiente:

Corolario 4.1. (*Homologías nula y no nula*) Si $p = n^\alpha$ entonces:

(1) Si $\alpha < \frac{-1}{k}$ o $\alpha > \frac{-1}{2k+1}$ entonces casi siempre $\tilde{H}_k(X(n, p), \mathbb{Z}) = 0$.

(2) Si $\frac{-1}{k} < \alpha < \frac{-1}{k+1}$ entonces casi siempre $\tilde{H}_k(X(n, p), \mathbb{Z}) \neq 0$.

Lo cual es nuestro primer gran resultado, pues tenemos un intervalo bastante amplio para p para cual sabemos si sus grupos de homología son triviales o no. Aún así, el corolario 4.1 no nos dice nada sobre el caso en donde $\frac{-1}{k+1} < \alpha < \frac{-1}{2k+1}$. El autor del artículo (y nosotros también) cree (conjetura) que el teorema 4.5 puede ser mejorado y convertirse en : si $p = n^\alpha$ con $\alpha > \frac{-1}{k+1}$ entonces casi siempre $\tilde{H}_k(X(n, p), \mathbb{Z}) = 0$.

4.4 Números de betti

En esta sección trataremos de dar una evidencia a la conjetura propuesta en la sección anterior. Para ello calcularemos el valor esperado del rango de homología y mostraremos que pasa por una fase de transición en $\alpha = \frac{-1}{k}$ y $\alpha = \frac{-1}{k+1}$. Denotaremos por β_i al i -ésimo número de Betti definido como $\beta_i := \dim(\tilde{H}_i(X, \mathcal{Q}))$ (aunque los resultados sean válidos sobre cualquier campo). Denotaremos por f_i al número de caras i -dimensionales de X . Unos de los resultados principales que utiliza los números de Betti es la siguiente formula de Euler, una demostración de esta puede encontrarse en ??.

$$f_0 - f_1 + \dots + (-1)^k f_k = \beta_0 - \beta_1 + \dots + (-1)^k \beta_k \quad (4.15)$$

de esta se desprende, haciendo unas consideraciones de dimensiones, la siguiente desigualdad de Morse ??:

$$-f_{i-1} + f_i - f_{i+1} \leq \beta_i \leq f_i \quad (4.16)$$

Anunciaremos este hecho en un lema:

Lemma 4.5. *Sea X un complejo simplicial. Si β_k es el k -ésimo número de betti (i.e $\beta_k := \dim H_k(X, \mathbb{Q})$) y f_k es el número de caras de dimensión k de X , entonces:*

$$-f_{k-1} + f_k - f_{k+1} \leq \beta_k \leq f_k$$

Demostración: Para probar la primera desigualdad, usaremos el siguiente complejo de cadenas simpliciales de X :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_n} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

Así,

$$H_k(X, \mathbb{Z}) := \text{Ker}(\partial_k) / \text{Im}(\partial_{k+1})$$

Se tienen los siguientes hechos:

- Por definición, para todo i , $f_i = \text{Rk}(C_i(X))$.
- Como $H_k(X, \mathbb{Z})$ es un grupo finitamente generado se sigue que $\beta_k = \dim(H_k(X, \mathbb{Q})) = \text{Rk}(H_k(X, \mathbb{Z}))$ (ver ??)
- De la \mathbb{Z} linealidad del operador frontera, se sigue que :

$$f_k = \text{Rk}(C_k(X)) = \text{Rk}(\text{Im}(\partial_k)) + \text{Rk}(\text{Ker}(\partial_k))$$

- Por cuestiones de dimensiones, tenemos también que:

$$f_{k-1} \geq \text{Rk}(\text{Im}(\partial_k)) \text{ y } f_{k+1} \geq \text{Rk}(\text{Im}(\partial_{k+1}))$$

Utilizando estos resultados se tiene:

$$\begin{aligned} -f_{k-1} + f_k - f_{k+1} &\leq -\text{Rk}(\text{Im}(\partial_k)) + \text{Rk}(\text{Im}(\partial_k)) + \text{Rk}(\text{Ker}(\partial_k)) - \text{Rk}(\text{Im}(\partial_{k+1})) \\ &\leq \text{Rk}(\text{Ker}(\partial_k)) - \text{Rk}(\text{Im}(\partial_{k+1})) \\ &\leq \text{Rk}(H_k(X, \mathbb{Z})) = \beta_k \end{aligned}$$

Lo que muestra la primera desigualdad. Para la segunda, notamos que:

$$\begin{aligned} \beta_k &= \text{Rk}(H_k(X, \mathbb{Z})) \\ &= \text{Rk}(\text{Ker}(\partial_k) / \text{Im}(\partial_{k+1})) \\ &\leq \text{Rk}(\text{Ker}(\partial_k)) \\ &\leq \text{Rk}(C_k(X)) = f_k \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-f_{k-1} + f_k - f_{k+1} \leq \beta_k \leq f_k$$

□

Mostraremos que dadas las hipótesis del teorema 4.9 (es decir con $p^{k+1}n \rightarrow 0$ and $p^k n \rightarrow \infty$), f_k es una buena aproximación para β_k pero fuera de este rango, β_k es mucho más pequeño. Utilizaremos la notación $X \sim Y$ si para cada $\epsilon > 0$ y para $n \rightarrow \infty$ se tiene:

$$Pr((1 - \epsilon) \leq Y/X \leq (1 + \epsilon)) \rightarrow 1 \quad (4.17)$$

En otras palabras, escribiremos $X \sim Y$ cuando las probabilidades de X y Y están relacionadas. La primera afirmación que hicimos se convierte entonces en el teorema siguiente:

Teorema 4.10. *Si $p^{k+1}n \rightarrow 0$ y $p^k n \rightarrow \infty$ entonces $\frac{E(\beta_k)}{E(f_k)} \rightarrow 1$. Además casi siempre $\beta_k \sim E[\beta_k]$ y $f_k \sim E[f_k]$, entonces casi siempre $\beta_k \sim f_k$.*

Demostración: Sea $p^{k+1}n \rightarrow 0$ y $p^k n \rightarrow \infty$. Queremos ver que para p en este intervalo, f_k es mucho más grande que $f_{k-1} + f_{k+1}$. Por la desigualdad de Morse se tiene que:

$$-f_{k-1} + f_k - f_{k+1} \leq \beta_k \leq f_k$$

Utilizando la linealidad del valor esperado se tiene que

$$-E[f_{k-1}] + E[f_k] - E[f_{k+1}] \leq E[\beta_k] \leq E[f_k] \quad (4.18)$$

La probabilidad que un conjunto de k vértices sea una cara $K-1$ dimensional es $p^{\binom{k}{2}}$, luego como hay $\binom{n}{k}$ maneras de escoger un conjunto de k vértices, el valor esperado del número de caras $k-1$ dimensional esta dado por:

$$E[f_{k-1}] = \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}$$

Siguiendo la misma idea tenemos que:

$$E[f_k] = \binom{n}{k+1} p^{\binom{k+1}{2}} E[f_{k+1}] = \binom{n}{k+2} p^{\binom{k+2}{2}}$$

Así, sustituyendo en la ecuación 4.18, obtenemos:

$$-\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{k+1} p^{\binom{k+1}{2}} - \binom{n}{k+2} p^{\binom{k+2}{2}} \leq E[\beta_k] \leq \binom{n}{k+1} p^{\binom{k+1}{2}} \quad (4.19)$$

Queremos ver que $\frac{E[f_{k-1}]}{E[f_k]} \rightarrow 0$ y $\frac{E[f_{k+1}]}{E[f_k]} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, para ello recordamos que $p^{k+1}n \rightarrow 0$ y $p^k n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
\frac{E[f_{k-1}]}{E[f_k]} &= \frac{\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}}{\binom{n}{k+1} p^{\binom{k+1}{2}}} \\
&= \frac{\frac{n!}{(n-k)!k!}}{\frac{n!}{(n-(k+1))!(k+1)!}} p^{\binom{k}{2} - \binom{k+1}{2}} \\
&= \frac{(n-(k+1))!(k+1)!}{(n-k)!k!} p^{\frac{k(k-1)}{2} - \frac{(k+1)k}{2}} \\
&= \frac{(n-(k+1))!(k+1)}{(n-k)!} p^{\frac{k(k-1-k-1)}{2}} \\
&= \frac{k+1}{n-k} p^{-k} \\
&= \frac{k+1}{p^k n - k p^k} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

La última afirmación se debe a que $p^k n \rightarrow \infty$. Ahora probaremos que $\frac{E[f_{k+1}]}{E[f_k]} \rightarrow 0$, utilizando que $p^{k+1} n \rightarrow 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{E[f_{k-1}]}{E[f_k]} &= \frac{\binom{n}{k+2} p^{\binom{k+2}{2}}}{\binom{n}{k+1} p^{\binom{k+1}{2}}} \\
&= \left(\frac{\frac{n!}{(n-(k+2))!(k+2)!}}{\frac{n!}{(n-(k+1))!(k+1)!}} \right) p^{\binom{k+2}{2} - \binom{k+1}{2}} \\
&= \left(\frac{(k+1)!(n-(k+1))!}{(k+2)!(n-(k+2))!} \right) p^{\frac{(k+2)(k+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}} \\
&= \left(\frac{n-(k+1)}{k+1} \right) p^{k+1} \\
&= \left(\frac{n}{k+1} - 1 \right) p^{k+1} \\
&= \frac{n}{k+1} p^{k+1} - p^{k+1} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Utilizando estos dos resultados concluimos que $\frac{E[\beta_k]}{E[f_k]} \rightarrow 1$. Si escribimos $Y_k := f_{k-1} + f_k - f_{k+1}$, entonces hemos demostrado que:

$$E[Y_k] \sim E[\beta_k] \sim E[f_k] \quad (4.20)$$

Utilizaremos ahora el metodo del segundo momento, ver 2. Recordamos que la desigualdad de chebyshev dice que si $E[X] \rightarrow \infty$ y $Var[X] = o(E[X]^2)$ entonces casi siempre $X \sim E[X]$. Entonces para probar el teorema tenemos que mostrar que:

1- $Var[f_k] = o(E[f_k]^2)$ para mostrar que $f_k \sim E[f_k]$ ya que esta claro que $E[f_k] \rightarrow \infty$.

2- $Var[Y_k] = o(E[Y_k]^2)$ para mostrar que $\beta_k \sim E[\beta_k]$

La varianza de f_k esta por $Var[f_k] = E[f_k^2] - (E[f_k])^2$. Sea $\mu = E[f_k]$, entonces tenemos $\mu^2 = (E[f_k])^2 = \binom{n}{k+1}^2 p^{2\binom{k+1}{2}}$, así se tiene que :

$$Var[f_k] = E[f_k^2] - \mu^2 \quad (4.21)$$

Calcularemos ahora $E[f_k^2]$. Hay $\binom{n}{k+1}$ subconjuntos de $V(G)$ con $k+1$ vértices, que denotaremos por $1, 2, \dots, \binom{n}{k+1}$. Sea A_i el evento que el conjunto i genere una k -cara en $X(n, p)$ y sea $A_i \cup A_j$ el evento que ambos ocurren. Primero hacemos la observación que si I_i es la función indicadora de A_i , es decir $I_i = 1$ si A_i es una completa y $I_i = 0$ en otro caso, entonces:

$$E[f_k^2] = E[(\sum I_i)^2] = \sum_i \sum_j E[I_i I_j] = \sum_{A_i, A_j} Pr(A_i \cup A_j)$$

donde la suma es sobre todos los pares (A_i, A_j) . Por lo que tenemos :

$$\begin{aligned} E[f_k^2] &= \sum_{i=1}^{\binom{n}{k+1}} \sum_{j=1}^{\binom{n}{k+1}} Pr(A_i \cup A_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\binom{n}{k+1}} Pr(A_1 \cup A_j) + \sum_{j=1}^{\binom{n}{k+1}} Pr(A_2 \cup A_j) + \dots + \sum_{j=1}^{\binom{n}{k+1}} Pr(A_{\binom{n}{k+1}} \cup A_j) \end{aligned}$$

Pero claramente se tiene que $\sum_{j=1}^{\binom{n}{k+1}} Pr(A_1 \cup A_j) = \sum_{j=1}^{\binom{n}{k+1}} Pr(A_2 \cup A_j) = \dots$,

y por lo tanto tenemos que:

$$E[f_k^2] = \binom{n}{k+1} \sum_{j=1}^{\binom{n}{k+1}} Pr(A_1 \cup A_j)$$

Agruparemos ahora los A_j en función del tamaño de su intersección con A_1 . Existen $k+1$ casos de intersecciones no vacías y 1 caso donde A_1 y A_j tienen intersección vacía. Como A_1 está fijo, si m es el tamaño de la intersección, existen $\binom{k+1}{m}$ maneras de escoger el conjunto de intersección y luego, existen $\binom{n-(k+1)}{k+1-m}$ maneras de escoger A_j . Por último, para que $A_1 \cup A_j$ sea completa se necesitan $2\binom{k+1}{2} - \binom{m}{2}$ aristas. Así se obtiene:

$$\begin{aligned}
E[f_k^2] &= \binom{n}{k+1} \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} \binom{n-k-1}{k+1-m} p^{2\binom{k+1}{2} - \binom{m}{2}} \\
&= \binom{n}{k+1} p^{2\binom{k+1}{2}} \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} \binom{n-k-1}{k+1-m} p^{-\binom{m}{2}} \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Separaremos el caso $m = 0$, es decir cuando A_1 y A_j tienen intersección vacía. El término para $m = 0$ en la ecuación 4.22 es $\binom{n}{k+1} p^{2\binom{k+1}{2}} \binom{n-k-1}{k+1}$, luego como $\binom{n-k-1}{k+1} \leq \binom{n}{k+1}$ entonces:

$$\binom{n}{k+1} p^{2\binom{k+1}{2}} \binom{n-k-1}{k+1} \leq \binom{n}{k+1}^2 p^{2\binom{k+1}{2}} = \mu^2$$

Utilizando esto en la ecuación 4.22 tenemos que:

$$E[f_k^2] \leq \mu^2 + \binom{n}{k+1} p^{2\binom{k+1}{2}} \sum_{m=1}^{k+1} \binom{k+1}{m} \binom{n-k-1}{k+1-m} p^{-\binom{m}{2}}$$

Queremos ver que $Var[f_k] = o(E[f_k]^2)$. Mostraremos lo equivalente, que $\frac{\sigma^2}{\mu^2} \rightarrow 0$ (donde σ^2 es la varianza de f_k). Por la ecuación anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2}{\mu^2} &= \frac{E[f_k^2] - \mu^2}{\mu^2} \leq \frac{\binom{n}{k+1} p^{2\binom{k+1}{2}} \sum_{m=1}^{k+1} \binom{k+1}{m} \binom{n-k-1}{k+1-m} p^{-\binom{m}{2}}}{\binom{n}{k+1}^2 p^{2\binom{k+1}{2}}} \\
&= \frac{\sum_{m=1}^{k+1} \binom{k+1}{m} \binom{n-k-1}{k+1-m} p^{-\binom{m}{2}}}{\binom{n}{k+1}} \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Luego, para cada valor de m , despreciando las constantes, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{k+1}{m} \binom{n-k-1}{k+1-m} p^{-\binom{m}{2}}}{\binom{n}{k+1}} &= c \frac{\binom{n-k-1}{k+1-m}}{\binom{n}{k+1} p^{\binom{m}{2}}} \leq c \frac{\frac{(n-k-1)^{k+1-m}}{(k+1-m)!}}{\frac{n! p^{\binom{m}{2}}}{(n-k-1)!(k+1)!}} \\
&= c_1 \frac{(n-k-1)^{k+1-m} (n-k-1)!}{n! p^{\binom{m}{2}}} = c_1 \frac{(n-k-1)^{k+1} (n-k-1)!}{n! n^m p^{\binom{m}{2}}} \\
&= c_1 \frac{(n-k-1)^{k+1}}{n(n-1) \dots (n-k)} \frac{1}{n^m p^{\binom{m}{2}}} \leq \frac{1}{n^m p^{\binom{m}{2}}} = O(n^{-m} p^{-\binom{m}{2}})
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación 4.23 tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2}{\mu^2} &= \sum_{m=1}^{k+1} O(n^{-m} p^{-\binom{m}{2}}) \\
&= \sum_{m=1}^{k+1} O(n^{-m} p^{-\frac{m(m-1)}{2}}) \\
&= \sum_{m=1}^{k+1} O((n^{-1} p^{-\frac{(m-1)}{2}})^m) \\
&= o(1)
\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que por hipótesis $p^k n \rightarrow \infty$. Así concluimos que $\text{Var}[f_k] = o(E[f_k]^2)$ y por lo tanto $f_k \sim E[f_k]$ casi siempre. En todo el desarrollo, no hemos hecho hipótesis sobre k , por lo que podemos afirmar también que $-f_{k-1} \sim E[-f_{k-1}]$ y $-f_{k+1} \sim E[-f_{k+1}]$. Sumando estos tres resultados se tiene que :

$$\begin{aligned}
Y_k &= -f_{k-1} + f_k - f_{k+1} \sim E[-f_{k-1}] + E[f_k] + E[-f_{k+1}] \\
&= E[-f_{k-1} + f_k - f_{k+1}] = E[Y_k]
\end{aligned}$$

con lo cual concluimos que $Y_k \sim E[Y_k]$. Luego, utilizando las ecuaciones 4.18 y 4.20 concluimos que $\beta_k \sim E[\beta_k]$ y por lo tanto: $\beta_k \sim E[\beta_k] \sim E[f_k] \sim f_k$. Entonces hemos demostrado que $f_k \sim \beta_k$, y eso termina la prueba del teorema 4.10. \square

En lo que resta de esta sección, nos dedicaremos a ver que ocurre cuando las hipótesis del teorema 4.10 no se cumplen, es decir, si $p^{k+1}n \rightarrow \infty$ o $p^k n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Más aún, mostraremos que en este caso, $E[\beta_k]/E[f_k] = o(1)$, es decir, que $E(\beta_k)/E(f_k)$ pasa por una fase de transición para los valores $p = n^{\frac{-1}{k+1}}$ y $p = n^{\frac{-1}{k}}$. Para ello, necesitaremos algunas definiciones. Utilizaremos un resultado de la teoría de Morse, anunciando los resultados sin entrar más en los detalles de esa teoría. El teorema más importante de la teoría de Morse llamado el teorema de Forman, es el siguiente:

Teorema 4.11. (Forman) Δ un complejo simplicial con un campo vectorial discreto gradiente V . Entonces es homotópicamente equivalente a un complejo CW con una celda de dimensión k para cada simplejo crítico k -dimensional.

Para σ, β caras de $X(n, p)$, escribiremos $\sigma < \tau$ si σ es una cara de τ de codimensión 1, es decir, si $\text{vsop}(\sigma) \subset \text{vsop}(\tau)$ y $\dim(\tau) - \dim(\sigma) = 1$. Por ejemplo si $\sigma = v_0 v_1 \dots v_k$ y $\tau = v_0 v_1 \dots v_k v_{k+1}$ son caras k y $k+1$ dimensionales respectivamente, entonces $\sigma < \tau$.

Un *campo vectorial discreto* V de un complejo simplicial Δ es una colección de pares de forma $\{\alpha_i < \beta_i\}$, con $\alpha_i, \beta_i \in \Delta$, tal que cada cara esta contenida en a lo más un par. Es decir, $\alpha_i \neq \alpha_j$ y $\beta_i \neq \beta_j$ para toda $i \neq j$. Por ejemplo si $G = K_4$, entonces $V := \{\{12, 123\}, \{23, 234\}, \{24, 124\}\}$ es un campo vectorial discreto de $X(G)$ pero $V' := \{\{12, 123\}, \{23, 234\}, \{24, 124\}, \{13, 123\}\}$ no lo es ya que la cara 123 esta contenida en dos pares distintos.

Dado un campo vectorial discreto V , definimos un *camino V -cerrado* como una secuencia de caras de forma:

$$\alpha_0 < \beta_0 > \alpha_1 < \beta_1 > \dots < \beta_n > \alpha_{n+1} = \alpha_0 \text{ con } n \geq 1$$

tal que $\{\alpha_i < \beta_i\} \in V$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Nota que por la definición de campo vectorial discreto, $\{\beta_i > \alpha_{i+1}\} \notin V$. Si tomamos el ejemplo del parrafo anterior, vemos que

$$12 < 123 > 23 < 234 > 24 < 124 > 12$$

es un V -camino cerrado ya que $\{12, 123\}, \{23, 234\}, \{24, 124\} \in V$.

Diremos que V es un *campo vectorial gradiente discreto* si no contiene V -caminos cerrados. Por ejemplo: $G = K_4$ y $V := \{\{12, 123\}, \{23, 234\}, \{14, 134\}\}$, podemos probar facilmente que V es un campo vectorial gradiente discreto. Si V es un campo vectorial discreto, diremos que un simplejo de $X(G)$ es *crítico* si no está contenido en ningún elemento (nigun par) de V .

El orden que utilizamos en el diccionario para clasificar las palabras se llama el orden *lexicográfico*. Aplicamos este orden a unas secuencias de números, como por ejemplo a los índices de los vértices de una gráfica para ordenar las caras. Hay que notar que no es el mismo orden que los mismos números, por ejemplo para las secuencias $a = 1, 9$ y $b = 1, 3, 2$ entonces se tiene que b es menor que a , pues $a_1 = b_1 = 1$ pero $b_2 = 3 < 9 = a_2$.

Así, para $\sigma, \beta \in X(n, p)$, denotaremos $\sigma <_{lex} \beta$ si σ viene antes en el orden lexico gráfico, es decir, si $\gamma = v_1 v_2 \dots v_i \dots v_s$ y $\sigma = v_1 v_2 \dots \hat{v}_i v_j \dots v_r$ donde v_i es el primer vértice (en posición) que γ y β no tienen en común, entonces denotaremos por $\gamma <_{lex} \beta$ si $i < j$ y $\beta <_{lex} \gamma$ si $j < i$. Para un conjunto S de caras de $X(n, p)$, denotaremos por $lexmin(S)$ al primer elemento de S en el orden lexicográfico. Con esto, demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 4.12. *Si $p^{k+1}n \rightarrow \infty$ o $p^k n \rightarrow 0$ entonces $E[\beta_k]/E[f_k] \rightarrow 0$*

Demostración: Sea $G(n, p)$ una gráfica aleatoria con un conjunto de vértices etiquetados $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Supongamos en un primer tiempo que $p^{k+1}n \rightarrow \infty$. Como los vértices de V están etiquetados, si denotamos las caras de $X(n, p)$ por $v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_r}$ con $i_j < i_{j+1}$, esto induce un orden lexicográfico sobre las caras de $X(n, p)$. Definimos ahora el siguiente conjunto, sea:

$$V := \{\{\alpha < \beta\} | \dim(\alpha) = k \text{ y } \beta = \text{lexmin}(\{b | \alpha < b \text{ y } \alpha <_{\text{lex}} b\})\}$$

Vemos que V es un campo vectorial gradiente discreto. Sean dos caras α_i y α_j distintas, y suponga que existen β_i, β_j tal que $\alpha_i < \beta_i$ y $\alpha_j < \beta_j$ y $\{\alpha_i, \beta_i\}, \{\alpha_j, \beta_j\} \in V$. Tenemos que $\alpha_i = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{k+1}}$ y $\alpha_j = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_j} v'_{i_{k+1}}$ donde v_{i_j} es el primer vértice (con índice menor) distinto entre α_i y α_j . Como $\alpha_i <_{\text{lex}} \beta_i$ entonces $\beta_i = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{k+1}} v_{i_{k+2}}$, de misma manera, $\alpha_j = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_j} v'_{i_{k+1}} v'_{i_{k+2}}$, y claramente no son iguales ya que $v_{i_j} \in \beta_i$ y $v_{i_j} \notin \beta_j$.

Vemos ahora que V no contiene caminos V -cerrados. Suponga que $C := \alpha_0 < \beta_0 > \alpha_1 < \beta_1 > \dots < \beta_n > \alpha_{n+1} = \alpha_0$ es un V -camino cerrado. Sea $\alpha_0 = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{k+1}}$ con $i_j < i_{j+1}$, entonces $\beta_0 = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{k+1}} v_{i_{k+2}}$, luego se tiene que $\alpha_1 < \beta_0$, además $\alpha_0 \neq \alpha_1$, así debe de existir v_{i_j} con $i_1 \leq i_j \leq i_{k+1}$ tal que $v_{i_j} \notin \alpha_1$, siguiendo esa idea vemos que $v_{i_j} \notin \alpha_r$ para toda $0 < r \leq n$, en particular $v_{i_j} \notin \alpha_n$ y por lo tanto $v_{i_j} \notin \beta_n$, por lo que α_0 no es subconjunto de β_n , una contradicción al hecho que C es un V -camino cerrado. Así hemos demostrado que V es un campo vectorial gradiente discreto. Otro punto que cabe mencionar es que como lo vimos, si $\alpha_i = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{k+1}}$ entonces β_i si existe, esta compuesto por los mismo vértices de α_i más algún otro vértice $v_{i_{k+2}}$ con $i_{k+1} < i_{k+2}$, pues de no ser así implicaría que $\alpha_i > \beta_i$, una contradicción a la definición de V . Entonces, $\beta_i = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{k+1}} v_{i_{k+2}}$.

Sea $\sigma := v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{k+1}}$ con $i_j < i_{j+1}$ y sea $m = k + 1$. Por definición de V , σ es crítico si cumple que $\sigma \in X(n, p)$ y $\sigma \cup \{v_r\} \notin X(n, p)$ para toda $r \geq i_{k+2}$. Estos dos eventos son independientes por la manera de escoger las aristas de $G(n, p)$, entonces la probabilidad que σ sea una k -cara crítica esta dada por el producto de las probabilidades de los eventos mencionados. La probabilidad de que $\sigma \in X(n, p)$ esta dada por $p^{\binom{k+1}{2}}$, pues σ debe ser completa, y por tanto contener todas las aristas. Luego, la probabilidad que un vértice $v_{i_{k+2}}$ no sea adyacente a todos los vértices de σ es $(1 - p^{k+1})$, pues es el complemento del evento que $v_{i_{k+2}}$ sea adyacente a todos los vértices de σ , como existen $n - i_{k+1} = n - m$ tales vértices, la probabilidad que ningún vértice $v_{i_{k+2}}$ sea adyacente a todos los vértices de σ es: $(1 - p^{k+1})^{n-m}$. Entonces:

$$Pr(\sigma \text{ es una } k\text{-cara crítica}) = p^{\binom{k+1}{2}} (1 - p^{k+1})^{n-m}$$

Dado i_{k+2} , existen $\binom{i_{k+2}-1}{k}$ maneras de escoger σ . Claramente, i_{k+1} puede tomar valores desde $k + 2$ hasta n , es decir $k + 2 \leq i_{k+2} \leq n$. Sea \tilde{f}_k el número de k -caras críticas, entonces el valor esperado de f_k está dado por:

$$\begin{aligned}
E(\tilde{f}_k) &= \sum_{i_{k+2}=k+2}^n \binom{i_{k+2}-1}{k} p^{\binom{k+1}{2}} (1-p^{k+1})^{n-i_{k+2}} \\
&= \sum_{i=k+2}^n \binom{i-1}{k} p^{\binom{k+1}{2}} (1-p^{k+1})^{n-i} \\
&\leq \sum_{i=k+2}^n \binom{n}{k} p^{\binom{k+1}{2}} (1-p^{k+1})^{n-i} \\
&\leq \binom{n}{k} p^{\binom{k+1}{2}} \sum_{i=k+2}^n (1-p^{k+1})^{n-i} \\
&\leq \binom{n}{k} p^{\binom{k+1}{2}} \sum_{i=-\infty}^n (1-p^{k+1})^{n-i} \quad \text{usando desarrollo de Taylor (ver 5.3)} \\
&= \binom{n}{k} p^{\binom{k+1}{2}} \frac{1}{p^{k+1}}
\end{aligned}$$

Ahora, calculamos $\frac{E[\tilde{f}_k]}{E[f_k]}$. Como $E[f_k] = \binom{n}{k+1} p^{\binom{k+1}{2}}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{E[\tilde{f}_k]}{E[f_k]} &\leq \frac{\binom{n}{k} p^{\binom{k+1}{2}} \frac{1}{p^{k+1}}}{\binom{n}{k+1} p^{\binom{k+1}{2}}} \\
&= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} \frac{1}{p^{k+1}} \\
&= \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}} \frac{1}{p^{k+1}} \\
&= \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{k!(n-k)!} \frac{1}{p^{k+1}} \\
&= \frac{k+1}{n-k} \frac{1}{p^{k+1}} \quad \text{por } k \text{ es constante se tiene} \\
&= O\left(\frac{1}{np^{k+1}}\right) \\
&= o(1)
\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que por hipótesis $np^{k+1} \rightarrow \infty$. Como V es un campo vectorial discreto gradiente de $X(n, p)$, por el teorema 4.11, $X(n, p)$ es homotópicamente equivalente a un complejo CW con una celda de dimensión k para cada k -simplejo crítico, es decir, con a lo más \tilde{f}_k caras. Luego por homología celular, se tiene que $\beta_k \leq \tilde{f}_k$, entonces:

$$\frac{E[\beta_k]}{E[f_k]} \leq \frac{E[\tilde{f}_k]}{E[f_k]} = o(1)$$

Lo que termina la demostración de la primera parte. Ahora demostraremos que obtenemos el mismo resultado si suponemos que $p^k n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sea τ una k -cara, ie. $\tau = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{k+1}}$. Para cada τ , escogemos un número $i(\tau) \in \{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}\}$ de manera aleatoria, independiente y con probabilidad uniforme. Queremos definir un campo vectorial gradiente discreto V para $X(n, p)$. Quisiermo definir V quitando un vértice $v_{i(\tau)}$ aleatoriamente a cada k -cara k dimensional τ y asociarlos en un par $\{\tau - \{v_{i(\tau)}\}\tau\}$, formalmente, definimos V como:

$$V := \{\{\tau - v_{i(\tau)}, \tau\} | \tau \in X(n, p) \text{ y } \dim(\tau) = k\}$$

Claramente, V no es un campo vectorial gradiente discreto, pues puede contener 2 pares de forma $\{\alpha_i < \beta_i\}$, $\{\alpha_i, \beta_j\}$ con $i \neq j$, una contradicción a que V sea campo vectorial discreto. Por ejemplo si $\tau_0 = v_1 v_2 v_3$, y que $i(\tau_0) = 3$ y que $\tau_1 = \{v_1 v_2 v_4\}$ con $i(\tau_1) = 4$, entonces por la definición de V se tiene que $\tau_0 - v_3 = v_1 v_2$ y que $\tau_1 - v_4 = v_1 v_2 = \tau_0$, y por lo tanto V no es campo vectorial discreto. Otro obstáculo en nuestra definición es que V puede contener V caminos cerrados, por ejemplo, si $\tau_0 = v_1 v_2 v_3 v_4$, $\tau_1 = v_1 v_2 v_3 v_5$, $\tau_2 = v_2 v_3 v_4 v_5$ con $i(\tau_0) = 1$, $i(\tau_1) = 5$, $i(\tau_2) = 4$ así hemos formado el V -camino:

$$v_2 v_3 v_4 < v_1 v_2 v_3 v_4 > v_1 v_2 v_3 < v_1 v_2 v_3 v_5 > v_2 v_3 v_5 < v_2 v_3 v_4 v_5 \quad (4.24)$$

Entonces V puede contener $(k - 1)$ -caras que se encuentren en más de un par de V , y además V puede contener V -caminos cerrados. Si llamamos evento malo al evento de encontrarse con una $k - 1$ -cara en dos pares distintos o con un V -camino cerrado, y que cada vez que nos encontramos con un evento malo quitamos un par de V entonces al final del proceso, claramente V es un campo vectorial gradiente discreto, luego, aplicando el toerema 4.11, es homotopicamente equivalente a un complejo con a lo más una cara crítica por cada evento malo. Entonces calcularemos el valor esperado de número de eventos malos.

Observamos que escogemos V según su conjunto de k -caras, entonces no se pueden repetir (no pueden estar en dos pares distintos), por lo tanto, en cada evento malo debe existir al menos dos k -caras que tienen en sus pares respectivos la misma $k - 1$ -cara, en otras palabras, para cada evento malo, existen $\{\tau'_0, \tau_0\}$ y $\{\tau'_1, \tau_1\}$ tal que $\tau'_0 = \tau'_1$. De hecho, estas $(k - 1)$ -caras pueden estar en varios pares de V , o en varios V -caminos cerrados. Llamemos d al número de tales pares, es decir d es el número de pares de k -caras que tienen k vértices en común. Este número es igual al número de pares de subgráficas de $G(n, p)$ isomorfas a K_{k+1} tales que se intersectan en exactamente k vértices. En tal situación, hay dos conjuntos de $k + 1$ vértices que se intesectan en k vértices, es decir $(k + 1) + (k + 1) - k = k + 2$ vértices. Los dos vértices que no están en la intersección no están forzados a ser adyacentes, entonces existen al menos $\binom{k+2}{2} - 1$. Por último, existen $\binom{k+2}{2}$ posibilidades de escoger un par de vértices. Queremos ver que $E[d]/E[f_k] \rightarrow 0$. El valor esperado de d esta dado por:

$$\begin{aligned}
E(d) &= \binom{k+2}{2} \binom{n}{k+2} p^{\binom{k+2}{2}-1} \\
&= \binom{k+2}{2} \binom{n}{k+2} p^{\frac{(k+2)(k+1)}{2}-1} \\
&= \binom{k+2}{2} \binom{n}{k+2} p^{\frac{k(k+3)}{2}}
\end{aligned}$$

Así, se tiene que :

$$\begin{aligned}
\frac{E[d]}{E[F_k]} &= \frac{\binom{k+2}{2} \binom{n}{k+2} p^{\frac{k(k+3)}{2}}}{\binom{n}{k+1} p^{\frac{k(k+1)}{2}}} \\
&= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \frac{\frac{n!}{(n-k-2)!(k+2)!}}{\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}} p^{\frac{k(k+3)-k(k+1)}{2}} \\
&= \frac{(k+1)!(k+2)(k+1)(n-k-1)!}{2(n-k-2)!(k+2)!} p^k \\
&= \frac{k+1}{2} (n-k-1) p^k \\
&= c_1 n p^k \\
&= O(np^k) = o(1)
\end{aligned}$$

la última igualdad se debe a que por hipótesis, $p^k n \rightarrow 0$. Aplicando el teorema 4.11, se tiene que $X(n, p)$ es homotopicamente equivalente a un complejo con una celda de dimensión k para cada k -cara crítica. Utilizando homología celular, se tiene que $\beta_k \leq d$, así $\frac{E[\beta_k]}{E[F_k]} \leq \frac{E[d]}{E[F_k]} \rightarrow 0$, lo que termina la prueba del teorema. □

4.5 Complejos simpliciales Aleatorios

$X(n, p)$ parece ser un espacio de probabilidad de complejos simpliciales natural para ser estudiado topologicamente, en parte porque todo complejo simplicial es homeomorfo a un complejo de completas. Pero claramente existen varias otras definiciones de complejos simpliciales aleatorios.

Por ejemplo, Linial y Meshulam dan una definición para un 2-complejo aleatorio $Y(n, p)$ el cual se ve localmente como $G(n, p)$, y dan una función umbral \mathbb{Z}_2 -homológica a la de Erdős y Rényi [19]. En [17], se muestra que la función umbral para que $\pi_1(Y(n, p))$ sea vacío es más grande la función umbral de Linial-Meshulam-Wallach para $H_1(Y(n, p), \mathbb{Z}_2)$.

Pippenger y Schelich estudiaron un tipo diferente de 2-complejos, pegando aristas de triángulos aleatoriamente [21].

En otro artículo [18], M.Khale estudia el complejo de vecindad de una gráfica aleatoria $\mathcal{N}[G(n, p)]$. Los resultados son comparables a los que se encuentran en este capítulo, las homologías no triviales de un d -complejo están concentradas en un número pequeño de dimensiones.

Para terminar estas tesis, vemos las direcciones futuras que M.Khale propone. Conjetura que para $p = n^\alpha$ con $\alpha > \frac{-1}{k+1}$ entonces casi siempre $X(n, p)$ es k -conexo (el trabajo en [17] sugiere que esto no es verdad para $k = 1$, pero cree probablemente sea válido para $k > 1$).

En un sentido, eso está cerca de determinar el tipo de homotopía para $X(n, p)$ cuando $\frac{-1}{k} < \alpha < \frac{-1}{k+1}$. En particular, si se podría hacer esa conjetura y además mostrar que $\tilde{H}_k(X(n, p), \mathbb{Z})$ está libre de torsión, entonces el resultado principal de [15] implicaría que si $p = n^\alpha$ con $\frac{-1}{k} < \alpha < \frac{-1}{k+1}$, entonces $X(n, p)$ es casi siempre homotópicamente equivalente a pegaduras de esferas k -dimensionales. Aún así, notamos que aunque demostráramos que $\tilde{H}_k(X(n, p), \mathbb{Z})$ está libre de m -torsión para cada m fija, no sería suficiente ya que es posible que haya m -torsión con $m \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Varios complejos simpliciales que surgen en combinatoria son homotópicamente equivalentes a pegaduras de esferas. Robin Forman (entre otros) se pregunta si hay alguna buena razón que esto ocurra (ver [18]). Tales complejos surgen frecuentemente como complejos de orden de posets (conjuntos parcialmente ordenados), y naturalmente como complejos de completas, y creemos que este trabajo es un escalón más a la respuesta de esta pregunta.

Capítulo 5

Apéndice

En este capítulo probaremos algunas desigualdades que serán utilizadas en pruebas del capítulo posterior.

Desigualdad 1: Desigualdad de Bernoulli: Para $x > 1$. Si $a < 0$ ó $a > 1$ entonces $(1+x)^a \geq (1+ax)$. La demostración de esta desigualdad es obvia.

Desigualdad 2: Si $x < 1$ entonces

$$(1-x)^n \leq e^{-nx} \quad (5.1)$$

Demostración: Mostraremos que $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ y de ahí concluiremos que $1-x \leq e^{-x}$ y que $(1-x)^n \leq e^{-nx}$.

Sea $S_n = (1 + \frac{x}{n})^n$. Primero notamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e^x$. Vamos a demostrar que S_n es una sucesión creciente, para ello veremos que $\frac{S_{n+1}}{S_n} \geq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+1}}{S_n} &= \frac{(1 + \frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{x}{n})^n} = \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} \right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= \left(\frac{(n+1+x)n}{(n+x)(n+1)} \right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \left(\frac{n^2 + n + nx}{n^2 + n + nx + x} \right)^{n+1} \left(\frac{n+x}{n} \right) \\ &= \left(\frac{n^2 + n + nx + x - x}{n^2 + n + nx + x} \right)^{n+1} \left(\frac{n+x}{n} \right) = \left(1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)} \right)^{n+1} \left(\frac{n+x}{n} \right) \end{aligned}$$

Así tenemos que $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)} \right)^{n+1} \left(\frac{n+x}{n} \right)$ (5.2)

Utilizando Bernoulli en $\left(1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)} \right)^{n+1}$ se tiene que

$$\left(1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)} \right)^{n+1} \geq \left(1 - \frac{x}{n+x} \right)$$

Aplicando esta desigualdad en 5.2 se tiene que:

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1} \left(\frac{n+x}{n}\right) \geq \left(1 - \frac{x}{x+n}\right) \left(\frac{n+x}{n}\right) = 1$$

entonces la sucesión S_n es creciente y converge a e^x , por lo que:

$$e^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Luego, como $\frac{x}{n} \geq -1$ se tiene que

$$e^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \frac{x}{n} = 1 + x$$

Por la desigualdad anterior podemos concluir que $e^{-x} \geq 1 - x$. Luego, para $x < 1$ se tiene que

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} \leq \frac{1}{1-x}$$

□

Desigualdad 3: La formula de Stirling.

La desigualdad de Stirling es una aproximación para factoriales. Sostiene que para n suficientemente grandes,

$$Ln(n!) \approx n \ln(n) - n$$

Más exactamente, la formula de Stirling esta dada por $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$, que podemos reescribir como $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Desigualdad 4: $\binom{m}{n} \leq \frac{m^n}{n!}$.

Demostración:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!} \left(\frac{1}{n!}\right) = m(m-1)\dots(m-n+1) \left(\frac{1}{n!}\right) \leq \frac{m^n}{n!}$$

Igualdad 1:

$$\sum_{i=-\infty}^n (1-x)^{n-i} = \frac{1}{x} \tag{5.3}$$

Demostración: Utilizaremos el desarrollo en serie de Taylor, recordamos que el desarrollo de Taylor alrededor del 1 de una función $f(x)$ esta dado por: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(1)}{k!} (x-1)^k$.

Aplicado a $\frac{1}{x}$, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(1)}{k!} (x-1)^k \\
&= \frac{f^0(1)}{0!} (x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1!} (x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!} (x-1)^2 + \dots \\
&= 1 + [-(1)^{-2}(x-1)] + \left[\frac{2}{2!}(x-1)^2\right] + \dots \\
&= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots \\
&= 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \dots
\end{aligned}$$

Ahora desarrollaremos la expresión $\sum_{i=-\infty}^n (1-x)^{n-i}$ en sentido inverso, es decir el primer término ser n , el segundo $n-1$ etc.. y comparemos cada término con la serie de Taylor que hemos calculado.

$$\sum_{i=-\infty}^n (1-x)^{n-i} = (1-x)^{n-n} + (1-x)^{n-(n-1)} + (1-x)^{n-(n-2)} + \dots \quad (5.4)$$

$$= (1-x)^0 + (1-x)^1 + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \dots \quad (5.5)$$

$$= 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \dots \quad (5.6)$$

Claramente, los desarrollos son iguales, y queda demostrada la igualdad. \square

Bibliography

- [1] A.Hachter, algebraic topology, cambridge University Press, 2001

- [2] F. Harary. Graph Theory. Addison-Wesley Series in Mathematics. Seven printing, August 1997.

- [3] The Probabilistic Method (Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization), Noga Alon, Joel H. Spencer 0471370460(1)

- [4] Discrete Morse Theory and the cohomology Ring, Robin Forman, *Transactions of the American Mathematical Society*, volume 354, number 12, Pages 5063-5085

- [5] Edge contraction and edge Removal on iterated clique Graphs, M.E Frías Armenta, F. Larrión, V. Neumann Lara, M.A Pizaña. Elsevier Science, 22 june 2010.

- [6] P. Erdős y A.Rényi, On the evolution of radom graphs, *Publication of the mathematical Institute of the Hungarian Academy of science* 5 (1960).

- [7] P. Erdős y A.Rényi, On Random Graph I, textitPublication of the mathematical Institute of the Hungarian Academy of science number 6, pages 290 - 297.

- [8] A user's Guide to discrete Morse Theory, Robin Forman, Department of Mathematics Publications, Rice University, Houston, Texas TX 77251.

- [9] Topology of Random Cliques Complex, Matthew Khale, Discrete Mathematics (309) 2009- Pages 1658-1671.

- [10] The Clique Complex and Hypergraph Matching, Roy Meshulam, Combinatorica 21 (1)(2001) Pages 89-94.

- [11] Connectivity Threshold for Random Chordal Graphs, F.R. Mc Morris and Edward R. Sheinerman, Graphs and combinatorics (7) (1991) Pages 177-181.

- [12] Notas: Equivalencia Homotópica y grupos de Homotopía Superior, Rafael Potrie, In Topolgy, abril 2010.

- [13] Graph Colouring and the Probabilistic Method, Micheal Molloy y Bruce Reed, Algorithm and Combinatorics 23, Springer 2002, ISBN 3-540-42139-4.

- [14] N. Alon, J. Spencer, The probabilistic Method, second edition, John Wiley, 2000.

- [15] A. Björner, Topological methods, in: Handbook of combinatorics, vol.2, 1996, Pages 1819-1872.

- [16] B. Bollobás, Random Graphs, second edition, Cambridge University Press, 2001.

- [17] E. Babson, C. Hoffman, M. Khale, simple connectivity of random 2-complexes, arXiv:math.CO/0711.2704.

- [18] M. Khale. The neighborhood complex of a random graph, *J. Combin.Theory Ser. A* 114 (2007) Pages 380-387.

- [19] L.Linial, R.Meshulam, Homological connectivity of random 2-complexes, *Combinatorica* 26 (2006) Pages 475-487.

- [20] R.Meshulam N.Wallach, Homological connectivity of random k -dimensional complexes (submitted for publication) arXiv:math.CO/0609773.

- [21] N. Pippenger, K.Scheich, Topological characteristics of random triangulated surfaces, *Random Structures Algorithms* 28(2006) Pages 247-288.

- [22] Richard Stanley, enumerative combinatorics, Vol.2, Cambridge University Press, 1999.

- [23] Internet.

- [24] Topología General, C.A Robles, J.C Ávila, departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, Material Didáctico N.9, Agosto 2005.

- [25] Álgebra homológica, cohomología de grupos y K-teoria, Emilio Luis Puebla.