



UNIVERSIDAD DE SONORA
DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

**DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN EN
FÍSICA**

*“ESTUDIO DE LA GENERACIÓN DE SEÑALES ÓPTICAS A 40 GHz
UTILIZANDO LA DINÁMICA DE LOS LÁSERES DE SEMICONDUCTOR”*

TESIS

**PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

PRESENTA:

Carlos Iván Ham Rodríguez

DIRECTOR DE TESIS

Milka del Carmen Acosta Enríquez

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



“El saber de mis hijos
hará mi grandeza”



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

CONTENIDO

| | |
|---|----|
| AGRADECIMIENTOS..... | 2 |
| RESUMEN..... | 3 |
| INTRODUCCIÓN: Redes de Comunicación..... | 3 |
| ANTECEDENTES: | |
| Generación de Ondas Óptica..... | 5 |
| Modelos Basados en Ecuaciones de Evolución..... | 6 |
| CAPÍTULO I: Conceptos Básicos | |
| I.0 Introducción | |
| I.0.1 Láseres de Semiconductor..... | 8 |
| I.0.2 Óptica no lineal..... | 10 |
| I.1 Semiconductores | |
| I.1.1 Semiconductores Intrínsecos..... | 11 |
| I.1.2 Semiconductores Extrínsecos..... | 14 |
| I.1.3 Diodo Láser..... | 16 |
| I.2 Láser tipo Fabry-Pérot | |
| I.2.1 Cavity F-P..... | 17 |
| I.2.2 Interacción Radiación-Materia..... | 20 |
| I.2.3 Teoría de Oscilación Láser..... | 27 |
| I.3 Mezcla de Cuatro Ondas | |
| I.3.1 Mezcla de Cuatro Ondas en Fibras Ópticas..... | 29 |
| I.3.2 Mezcla de Cuatro Ondas en Láseres de Semiconductor..... | 31 |
| I.3.3 Acoplamiento de Modos Pasivo..... | 33 |
| CAPÍTULO II: Modelo Analítico | |
| II.0 Introducción..... | 37 |
| II.1 Densidad de portadores: N | 38 |
| II.2 Campo Eléctrico: $E_k^{(C)}$ | |
| II.2.1 Desarrollo General..... | 41 |
| II.2.2 3 Modos..... | 43 |
| II.2.3 5 Modos..... | 48 |
| II.2.4 7 Modos..... | 53 |
| II.3 Simulación | |
| II.3.1 Ecuaciones..... | 56 |
| II.3.2 Implementación..... | 60 |
| CAPÍTULO III: Resultados | |
| III.1 3 Modos..... | 65 |
| III.2 5 Modos..... | 67 |
| III.3 7 Modos..... | 69 |
| III.4 Señales Generadas a 40 GHz..... | 71 |
| CONCLUSIONES..... | 73 |
| APÉNDICES..... | 74 |
| REFERENCIAS..... | 94 |

Agradecimientos

Esta tesis culmina el trabajo de investigación realizado a lo largo de dos años y a través de la ayuda de varios investigadores, que me permitió adentrarme a un área nueva y fascinante con las dudas, retos, trabas y recompensas implicadas. El conocimiento fluyó en varias ocasiones sin protocolos ni intereses, con el saber implícito de que compartido es más valioso. Por lo que el agradecimiento se vuelve inversamente proporcional a los intereses involucrados.

Antes que nadie, debo agradecer a 3 personas sin las que esto no hubiera podido siquiera imaginarse: a mis padres, pues mi lucha no es más que la continuación de sus frutos y esfuerzos, y a Laura Yeomans, cuyas lecciones y ejemplo trascienden lo científico y resuenan a lo largo de este trabajo y de mi espíritu.

Un gran agradecimiento para las 4 personas que estuvieron involucradas directamente en la realización de esta tesis: Milka Acosta, Ramón Maldonado-Basilio, Gibrán Etchevery y Miguel Cervantes. Sin alguno de ellos el rompecabezas no estaría completo.

Sin inconveniente en reiterar, se extiende un agradecimiento al grupo de investigación de la universidad de Dublín, en especial a Ramón y Pascal Landais por invitarnos a colaborar y compartirnos su experiencia, que fue el eje que guió este trabajo.

Va un agradecimiento a esos maestros que fueron sinceros aliados como Anton Lipovka, cuya actitud manifestaba una clara apuesta por el estudiante, o Marcelino Barboza, que no puso en un examen nada que no hubiera resuelto en clase una infinidad de veces. También me parece importante mencionar la participación en un curso de matlab impartido por Tom Peters en la semana de Ing. Electrónica y resaltar, agradeciendo, este tipo de actividades. Va otro agradecimiento a todos los amigos que nos aguantamos a pesar del estrés y las cabezas caídas, porque nunca creímos cuando se dijo que entre nosotros estaba nuestra propia competencia. Gracias a los que me supieron comprender sin tomarse personales mis defectos y limitaciones.

El fin del presente ciclo representa la culminación de un proceso que se inicia antes de la maestría y va más allá de lo académico. No ha sido fácil y en la marcha hemos aprendido a no tomarnos muy en serio la cuesta, para no perder la desatendida humanidad detrás de un escritorio inmerso en ecuaciones. Recordando con una melancolía positiva las relaciones que se nos escaparon de las manos, y por lo mismo, celebrando las amistades que hasta hoy se mantienen... en retrospectiva, el camino cobra sentido y cuando se asume la responsabilidad de las decisiones nace un agradecimiento natural hacia los involucrados en toda la gama de experiencias. Con un ánimo renovado que se lleva la pena por los errores cometidos y con la clara idea de que no es necesario pedir disculpas ni explicaciones, se extiende un fraternal saludo: por todas mis relaciones.

RESUMEN

En este trabajo de tesis se realiza el estudio de un **láser de semiconductor (LS)** utilizado como generador óptico de ondas de **radiofrecuencias (RF)**.

- Se estudian los conceptos necesarios para entender el principio de operación de un LS tipo **Fabry-Pérot (F-P)** con modos longitudinales pasivamente acoplados (capítulo I y apéndices A, B y C).
- Se utiliza un modelo basado en ecuaciones de evolución para describir la generación de la señal RF en términos de los parámetros característicos del dispositivo [1, 2]. El desarrollo analítico de las ecuaciones para 3, 5 y 7 modos está en el capítulo II y los apéndices D y E.
- Se implementa el modelo mediante un programa de simulación computacional en el que se resuelve el par de ecuaciones acopladas del modelo para: el número de portadores en la banda de conducción (N) y la amplitud compleja del campo eléctrico del modo k (E_k). En la ecuación de E_k se incluye un término no lineal que depende de la parte oscilatoria de la densidad de portadores ΔN y toma en cuenta el efecto no lineal conocido como modulación de la densidad de portadores [1].
- Se presenta la evolución temporal de N y la densidad espectral de la potencia total obtenidas a través de la simulación (Capítulo III).

INTRODUCCIÓN

Redes de Comunicación^[3]

Las **redes de comunicación (RC)** han logrado ampliarse y evolucionar de manera que su impacto en la sociedad es innegable: el creciente uso de los celulares, y sobre todo, las nuevas posibilidades que presenta internet. El advenimiento del telégrafo en la década de 1830 y el desarrollo de las redes telefónicas alrededor del mundo en el siglo XX, permitieron avances trascendentales en el diseño de los sistemas de comunicación. Un paso importante en este avance de las RC fue el uso de la fibra óptica para la transmisión de señales a grandes distancias. En 1966 se propuso teóricamente la transmisión de ondas electromagnéticas en fibras por C. K. Kao y G. Hockham, al demostrar que las altas pérdidas en los vidrios se debían a dopantes que podían ser removidos. El primer sistema de prueba se instaló en Inglaterra en 1977 y, su desarrollo masivo y mundial en la década de 1980 revolucionó la tecnología detrás de los sistemas de telecomunicaciones [4]. Se ha demostrado que la fibra óptica es un medio de comunicación más eficiente que los medios inalámbricos o basados en cables de cobre [5]. Dos de sus características más sobresalientes son el enorme ancho de banda y la inmunidad a la interferencia electromagnética. Eventualmente se implementó una mejor manera de propagación: múltiples canales de información viajando en una sola fibra [6,7]. Existen dos mecanismos para separar las señales en distintos canales: **división por longitud de onda (DLO)** y división en el dominio del tiempo [3,7]. En particular, la DLO consiste en dividir el espectro de transmisión de la fibra óptica

en un número determinado de canales (o longitudes de onda), manteniendo un ancho de banda de separación entre ellos para evitar interferencias [7]. El aumento en la capacidad de transmisión que representan estos mecanismos, sin la necesidad de utilizar más cables, ha mejorado la rentabilidad de los servicios de comunicación y en la actualidad se ofrecen televisión por cable, telefonía e internet de manera conjunta.

Las RC actuales están formadas por ruteadores (routers) de gran capacidad (en su mayoría comerciales, universitarios y gubernamentales) llamados enlaces dorsales (backbones). Estos enlaces dorsales se conectan a través de ciudades, países y continentes, formando una RC interconectada a través de cables de fibra óptica. De esta red se desprenden nodos inferiores cuyos puntos finales son las computadoras de los usuarios y que trabajan en esencia con señales eléctricas (conducción de electrones en forma de una corriente). De cualquier manera, la posibilidad de que esta red principal, formada de fibra óptica (interconectando usuarios en una red global sin servidor central), llegue a ser completamente óptica; representa un incremento notable en la eficiencia de las RC actuales. Cuando una señal se propaga en la fibra óptica se necesitan emplear regeneradores para amplificar la señal debido a los efectos de atenuación y dispersión. Esta regeneración se realiza mediante dispositivos ópticos, comúnmente se usa fibra dopada con tierras raras como Erblio [8]. Sin embargo, si hay un punto en la red en la que los canales deben tomar rutas hacia distintos nodos (enrutamiento), la señal óptica es convertida a eléctrica para procesarse y se reconvierte a óptica para continuar viajando en la fibra. Entonces, a pesar de que la propagación de señales ópticas es aplicada actualmente, el procesamiento de las señales aún está en desarrollo.

La implementación de dispositivos ópticos en todos los bloques de procesamiento implicaría lograr que las RC, al nivel de los enlaces dorsales, fueran completamente ópticas (los nodos inferiores de la red pueden mantenerse usando señales eléctricas, inalámbricas o, en cables de par trenzado o coaxiales de cobre). Esta posibilidad es de gran interés, pues las limitaciones de velocidad de procesamiento que poseen los dispositivos electrónicos, en comparación con el enorme ancho de banda que posee la fibra óptica, representan un cuello de botella. Se requieren múltiples bloques de procesamiento que realicen diferentes funciones completamente ópticas. Entre algunas de tales funciones se encuentran [3]: la generación síncrona de pulsos cortos, la multicanalización en tiempo y en longitud de onda, la conmutación, la conversión en longitud de onda, la regeneración de la señal de información y la recuperación de la señal de reloj contenida en la señal de información.

El desarrollo de generadores ópticos de señales constituye uno de estos bloques y es al que se aboca este trabajo. Las frecuencias de emisión en los láseres están cerca del visible ($\sim 10^{15}$ Hz) y en estas ondas se inserta la señal de **radiofrecuencias (RF, 3 Hz-300 GHz)** a través de la modulación de la potencia de salida. El interés en las RF del orden de GHz, se debe a que la transmisión actual en las fibras (a nivel comercial) con sistemas DLO es normalmente de 10 Gbps en cada canal [9]. Por lo tanto, las fuentes de señales deben ser capaces de generar pulsos cortos (en el régimen de los sub-pico-segundos), con una variación reducida en su ancho de pulso (low

timing-jitter), una variación reducida en su frecuencia debido a efectos de dispersión en las fibras ópticas (low chirp), una tasa de repetición mínima de 40 GHz y un ancho de línea reducido.

Uno de los dispositivos más prometedores para su uso como generador completamente óptico de señales a frecuencias de 40 GHz y superiores, es el **láser de semiconductor (LS)** con modos longitudinales acoplados [10]. Es pertinente mencionar también que la generación óptica de señales a frecuencias iguales o superiores a 40 GHz se ha estudiado teóricamente y se ha propuesto experimentalmente utilizando diferentes tipos y estructuras de LS con modos acoplados [1,12]. Algunos de los aspectos más importantes que pueden definir la elección de una estructura o tipo de láser sobre algún otro son: su complejidad de construcción, el número de secciones que componen al láser, la cantidad de energía necesaria para su operación, el tamaño del dispositivo y el proceso con el cual se obtiene el acoplamiento entre los modos. Con respecto a éste último punto, el mecanismo de acoplamiento puede realizarse de manera activa (en la cual se requiere una inyección externa para lograrlo) o de manera pasiva. En un LS con modos pasivamente acoplados, las señales que producen el acoplamiento son generadas internamente, mediante interacciones no lineales entre los modos. Esto sucede cuando la intensidad de los modos es suficientemente grande para saturar al medio semiconductor.

En este contexto se realiza esta investigación, que se centra en el estudio de los LS con modos pasivamente acoplados y su descripción mediante un modelo basado en ecuaciones de evolución.

ANTECEDENTES

Generación de Ondas Ópticas

Los primeros LS mostraban pulsaciones inducidas en la intensidad de salida a pesar de ser diseñados para funcionar en forma de onda continua. Las causas eran: 1) las interacciones no lineales entre los modos longitudinales a muy altas frecuencias causan una pulsación (beating) entre ellos y 2) defectos en la región activa actúan como áreas de absorción saturable [13]. El posterior entendimiento de ambas causas ha permitido el desarrollo de LS pulsados más eficientes a través de los fenómenos de **acoplamiento de modos pasivo (AMP, passive mode-locking)** y Q-switching, respectivamente.

Los LS con modos acoplados son candidatos interesantes para utilizarse como generadores de pulsos ópticos ultracortos. Se ha reportado la generación de pulsos cortos desde 40 GHz a 346 GHz en LS tipo quantum-dash a través del **acoplamiento pasivo (AP)** [14]. El AP presenta varias características interesantes como son: una variación periódica de su emisión bajo condiciones de corriente continua, un reducido ancho de línea de la señal generada y bajo consumo de potencia [14,15]. El AP, permite que la generación de señales ópticas sea más eficiente (sin la necesidad de fuentes de modulación externa o alguna otra fuente que no sea la de bombeo que se utiliza para invertir la población). Así mismo, se ha reportado la generación de señales ópticas en LS a través del AP de los modos longitudinales, en láseres de **retroalimentación distribuida (distributed feedback, DFB)** [16, 17] y en láseres F-P tipo quantum-dash, ver fig. 0.1) [18].

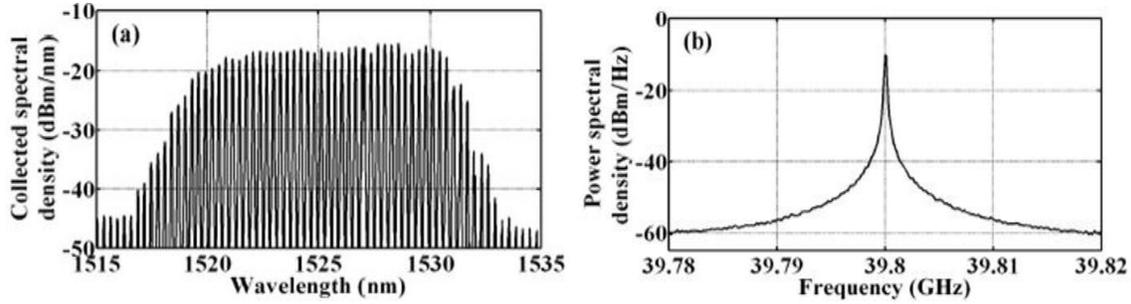


Fig. 0.1 Generación de una señal óptica de 40 GHz a través de un láser multimodo tipo F-P q-dash [18].
Panel izquierdo: Espectro de emisión del láser. Panel derecho: Señal RF generada.

Un caso de particular interés es el estudio del ancho de línea de la señal con respecto al número de modos longitudinales. Se ha observado experimentalmente que en un LS con AP, el ancho de línea de la señal generada disminuye a medida que el número de modos aumenta [15, 18].

Modelos Basados en Ecuaciones de Evolución

Los LS han sido ampliamente descritos a través **ecuaciones de evolución (EV)**. Hasta hace poco menos de 3 décadas, los modelos solamente describían el funcionamiento de los dispositivos en condiciones lineales de intensidad [19, 20,21]. En años posteriores encontramos modelos que incluyen saturación de la ganancia [22]. Estos modelos intentaban emular de una manera simple y directa la evolución de los dos parámetros principales de estos dispositivos: la intensidad (o potencia) de los modos a la salida del láser y el número de portadores en la banda de conducción.

En una etapa posterior se encuentra en la literatura la inclusión de términos no lineales en las EV. Además, se empieza a utilizar el campo eléctrico para describir la evolución de la intensidad ($I=EE^*$). En [23] se encuentra una expresión analítica para la ganancia no lineal en un LS a través del formalismo de la matriz de densidad. En [2] se desarrolla un modelo basado en una ecuación del campo eléctrico obtenida a través de las leyes de Maxwell y una ecuación estándar para la el número de portadores. En este modelo se incluyen efectos de pulsación de portadores y mezcla de cuatro ondas en LS utilizados como amplificadores. El modelo contiene coeficientes de auto-saturación, saturación cruzada y mezcla de cuatro ondas presentados en [23]. Los términos que incluyen estos coeficientes, en la ecuación del campo eléctrico, toman en cuenta los efectos producidos por los fenómenos no lineales de auto-saturación, saturación cruzada, **hoyo espectral (HE, spectral hole burning)** y **calentamiento de portadores (CP, carrier heating)**; mientras que otro término (que tiene como coeficiente la parte oscilatoria de la densidad de portadores) toma en cuenta la **modulación de la densidad de portadores (MDP, carrier density modulation)**. Un modelo similar obtenido a través de ecuaciones de matriz de densidad y que incluye los 3 fenómenos no lineales característicos de la mezcla de cuatro ondas (HE, CP y MDP), se encuentra en la referencia [25]. El modelo utilizado en este trabajo está basado en [10], que es igual al presentado en [23], despreciando los términos asociados a HE y CP. La razón es que para un espaciado entre modos de 40 GHz CDM es el efecto dominante. Además se ha agregado un término que toma en cuenta el desfaseamiento en frecuencia de los modos en una cavidad F-P al lograr el acoplamiento.

CAPÍTULO

I

CONCEPTOS BÁSICOS

I.0 Introducción

Con la finalidad de presentar un panorama claro respecto al funcionamiento de los **láseres de semiconductor (LS)** y los procesos involucrados en el **acoplamiento pasivo (AP)** de los modos, a manera de introducción, a continuación se presenta en I.0.1 una síntesis de la sección I.1.1 y en I.0.2 ideas preliminares a la sección I.3 y referentes a la óptica no lineal.

En la sección I.2 se ve de manera detallada la propagación de un haz en una cavidad **Fabry-Pérot (F-P)** y la propagación a través de un sistema atómico, para posteriormente utilizar lo obtenido para hacer la descripción del sistema láser completo (cavidad F-P más región activa).

En la sección I.3.1 se ha desarrollado de manera breve la obtención de términos no lineales (asociados al fenómeno mezcla de cuatro ondas) de la polarización al propagarse 4 haces a través de un cable de fibra óptica. En complemento, la sección I.3.2 trata el marco conceptual referente a la **mezcla de cuatro ondas (MCO)** en LS y los tres fenómenos asociados a este: hoyo espectral, calentamiento de portadores y **modulación de la densidad de portadores (MDP)**, así como las características del acoplamiento de modos y la relación entre la MCO y el acoplamiento pasivo en los LS.

I.0.1 Láseres de semiconductor

Además de su uso como un sistema láser de gran eficiencia, los semiconductores han mostrado su utilidad en la electrónica, en particular, en la construcción de diodos (uniones n-p) y transistores (uniones p-n-p y n-p-n). De hecho, el LS es un diodo. En la actualidad, el diodo láser es candidato para su uso como generador de ondas ópticas [10, 13, 12, 14,15]. En condiciones de saturación, el fenómeno no lineal **mezcla de cuatro ondas (MCO)** genera nuevas señales que hacen que se logre el acoplamiento entre los modos y se genere la señal de **radiofrecuencias (RF)** [1, 23, 24,25].

SEMICONDUCTORES

Los materiales semiconductores más conocidos son el cristal de **Silicio (Si)** y el de **Arseniuro de Galio (GaAs)**. Su uso masivo para la creación de los transistores (compuerta lógica) revolucionó la tecnología. Al introducirse la lógica en los dispositivos eléctricos, mediante el código binario (ceros y unos) se abrió paso al desarrollo de la electrónica. Un cristal de semiconductor, por ejemplo el Si, se forma con una gran cantidad de átomos de Si que se enlazan creando una estructura periódica. Todos los átomos de Si tienen los mismos estados atómicos, por lo que al confinar a N átomos en un espacio reducido, y ya que estados iguales no pueden coexistir en el mismo espacio, los niveles de energía se desdoblán para formar nuevos estados con energías ligeramente distintas. Si N es muy grande, los niveles son tantos que forman bandas cuasi-continuas de energía.

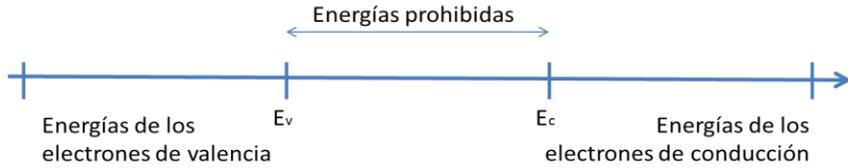


Fig. I.0.1 Diagrama de energías con energías de conducción mayores que las de valencia.

Un semiconductor tiene una energía de Fermi entre las **bandas de conducción (BC)** y **banda de valencia (BV)**, por lo que a temperatura ambiente hay muy poca probabilidad de encontrar electrones en la BC, mientras que todos los estados de valencia permanecen prácticamente llenos. Se requiere una inyección de corriente que aporte a los electrones la energía necesaria para traspasar el umbral que representa la región de energías prohibidas, y así, el semiconductor se comporte como un conductor. A los materiales semiconductores que se dopan con una pequeña cantidad de impurezas (átomos de otro elemento) se les conoce como **semiconductores extrínsecos (SE)**.

LÁSER

Un sistema láser básico consta de dos componentes: una región activa y una cavidad óptica. La cavidad consiste en dos espejos donde se atrapan los fotones generados en la región activa. Una cavidad tipo F-P está formada por dos espejos planos separados una distancia l . Tiene una infinidad de modos longitudinales de resonancia con una separación en frecuencia igual a [26]: $\Delta\nu = c/2l\eta$, donde c es la velocidad de la luz y η es el índice de refracción. La región activa es un sistema atómico con energías de transición correspondientes a frecuencias de emisión láser (cercano al visible), en el que se inyecta energía a los electrones para pasar a los estados excitados y que estos al volver a los estados de mínima energía emitan luz en el proceso. De esta manera, a través de la emisión estimulada también se amplifica un haz al pasar por el sistema atómico. La región activa tiene una curva característica de ganancia que describe la amplificación o atenuación de una onda al pasar por la región activa según sea su frecuencia. Las frecuencias de resonancia que coinciden con la curva de ganancia definen las frecuencias de emisión del láser (teniendo en cuenta que existen pérdidas tanto en los espejos como en la región activa y que estas representan una ganancia umbral debajo de la cual no hay amplificación).

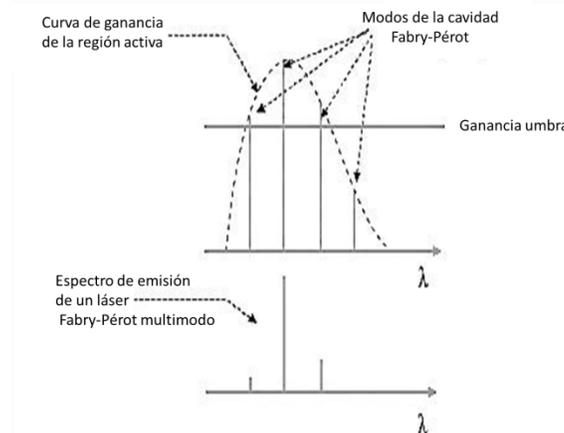


Fig. I.0.2 Espectro de emisión de un láser F-P con 3 modos.

I.0.2 Óptica no lineal

Durante gran parte de la historia de la óptica se creyó que todos los medios ópticos eran lineales. Se pensaba que las propiedades ópticas de los materiales (como el índice de refracción y el coeficiente de absorción) eran independientes de la intensidad de la luz, que la frecuencia de la luz no se alteraba al pasar por un medio y que dos haces de luz en la misma región de un medio no interactuaban entre sí [27]. Fue hasta hace unas cuantas décadas, con la llegada de los láseres, que se pudo observar el comportamiento de la luz a mayores intensidades que las anteriormente logradas. Los experimentos que se llevaron a cabo después de la aparición de los láseres mostraron que los medios ópticos exhiben un comportamiento no lineal. El principio del campo de la óptica no lineal se toma comúnmente como el descubrimiento de la generación de segundo armónico por Franken et al. en 1961, un poco después de la demostración del primer láser funcionando por Maiman en 1960 [28].

Un medio lineal se caracteriza por una relación lineal entre la densidad de polarización P (inducida en el material) y el campo eléctrico incidente: $P = \epsilon_0 \chi E$, donde ϵ_0 es la permitividad en el vacío y χ es la susceptibilidad eléctrica del medio. Además se ha tomado en cuenta que el campo eléctrico se propaga en una sola dirección y la polarización inducida está en la misma dirección que el campo.

Por ejemplo, al incidir un campo eléctrico en un material dieléctrico (aislante), no conduce corriente. Sin embargo, la respuesta de un material dieléctrico es a través de una redistribución de las cargas en cada átomo: orientándose ligeramente los núcleos (carga positiva) en dirección del campo y los electrones (carga negativa) en dirección opuesta. La polarización inducida en un átomo individual está caracterizada por un momento dipolar p . Por lo que en el caso de un material dieléctrico formado por N partículas idénticas, la densidad de polarización o polarización inducida ($P = \epsilon_0 \chi E$) por el campo incidente, corresponde a la suma de todos los momentos dipolares inducidos: $P = Np$. Esta formación de dipolos produce un nuevo campo eléctrico que se suma al campo incidente: $E_{total} = E_{incidente} + \epsilon_0 \chi E_{incidente}$. La relación entre P y E es lineal cuando E es pequeña. Esto se ve más claramente si expresamos la polarización como una serie de potencias, expandiendo P en serie de Taylor alrededor de $E=0$:

$$P = \epsilon_0 \chi E \\ \approx \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \dots \right)$$

Las no linealidades ocurren para campos muy grandes. Otro posible origen de una respuesta no lineal de un material sobre el que se incide un campo eléctrico es a través de la dependencia de N con el campo eléctrico, ya que $P = Np$.

En el caso de un LS los haces incidiendo son los que están atrapados reflejándose en los espejos e incidiendo una y otra vez sobre la región activa. Los haces tienen un campo eléctrico asociado E y la intensidad óptica es normalmente escrita como $S=EE^*$.

En el presente trabajo ambos orígenes están presentes: 1) se tienen intensidades de los campos eléctricos asociados a los modos suficientemente grandes para producir nuevas señales y 2) la densidad de portadores en la banda de conducción oscila (o pulsa) y es la responsable de la generación de esas nuevas señales. Además, si los modos están bien acoplados, esta pulsación produce la señal a la frecuencia de separación entre los modos.

I.1 SEMICONDUCTORES

En esta sección se hace un desarrollo básico de las propiedades de los semiconductores intrínsecos y extrínsecos basado en el **Silicio (Si)**, pero estas ideas son aplicables a otros semiconductores tales como el GaAs, InP o Ge.

Un semiconductor intrínseco es un cristal ideal que no tiene impurezas o defectos. Entonces, el cristal de Si intrínseco está formado sólo por átomos de Si perfectamente enlazados unos a otros en una estructura de diamante. Un semiconductor extrínseco es un semiconductor intrínseco al que se le ha agregado una pequeña cantidad de impurezas (átomos de otro elemento).

I.1.1 Semiconductores Intrínsecos



El **Silicio (Si)** tiene 14 protones en el núcleo (carga: +14e), por lo que puede aceptar 14 electrones para equilibrar su carga y mantenerse de manera estable. Aun así, un átomo de Si individual tenderá a acoplarse, pues el último nivel de energía no está lleno.

La configuración electrónica del Si es $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$. Los orbitales en los niveles de energía (o capas) 1 y 2 ($1s$, $2s$ y $2p$) están llenos, por lo que estos “niveles cerrados” no interaccionan cuando un átomo se enlaza con otros. Efectivamente, los enlaces de un átomo están caracterizados por su última capa, la que se conoce como capa de valencia.

La última capa del átomo de Si es la 3, en la que tiene 4 electrones, 2 en el nivel $3s$ y 2 en el $3p$. Como todas las capas, excepto la primera, se llenan con 8 electrones, el Si tiene 4 electrones de valencia y le faltan otros 4 para llenar esa capa.

En la cercanía de otros átomos de Si, los niveles $3s$ y $3p$ de cada átomo están tan cerca que la interacción resulta en una mezcla de los cuatro orbitales $\psi(3s)$, $\psi(3p_x)$, $\psi(3p_y)$ y $\psi(3p_z)$ para formar cuatro nuevos orbitales híbridos (ψ_{hib}) que están separados simétricamente y a la mayor distancia posible entre ellos (en las 4 esquinas de un tetraedro) [29]. Estos orbitales híbridos (conocidos como sp^3) contienen, cada uno, un electrón de los 4 de valencia y son los responsables

de los enlaces en el cristal de Si. Por esta razón, un átomo de Si llena su capa de valencia si le comparten 4 electrones. Como ejemplo, en la fig. I.1.3 se muestra la hibridación de un átomo de C (cuya valencia es igual al Si) y su enlace con cuatro átomos de hidrogeno para formar la molécula de Metano.

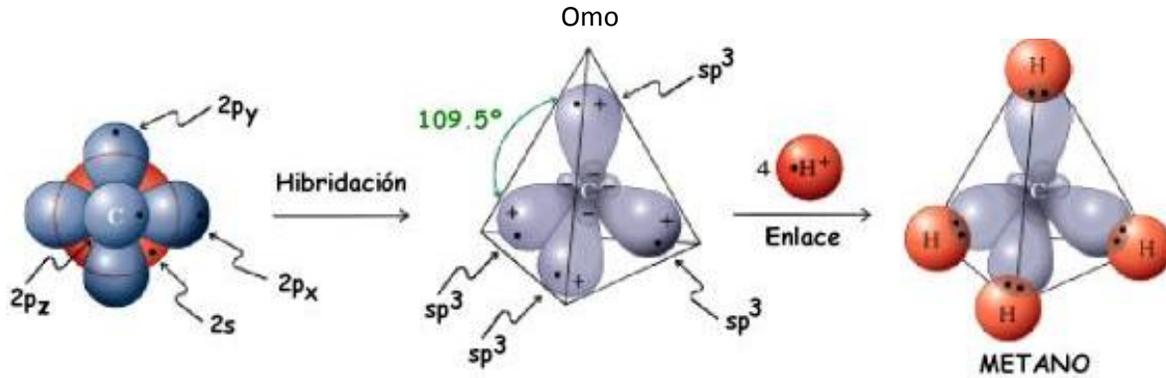


Fig. I.1.3 Hibridación de los niveles 3s y 3p en el nivel sp³ en un C y la formación de la molécula de SiH₄.

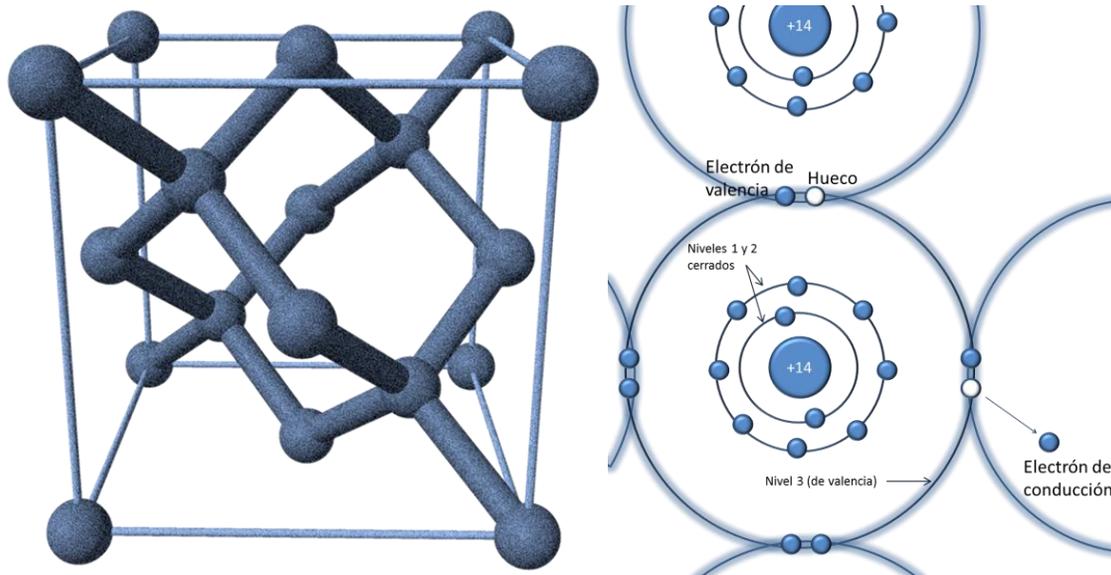


Fig. I.1.4 Estructura del cristal de Si (tipo diamante). Cada átomo se enlaza a 4 vecinos a una distancia de 235 pm. Panel izquierdo: diagrama en 3D. Panel derecho: diagrama en 2D.

Los 4 orbitales híbridos corresponden al mismo nivel de energía, de cualquier manera, estos pueden coexistir ya que tienen distintos números cuánticos asociados al momento angular y al spin. Pero al enlazarse los átomos en una red cristalina, los distintos electrones de cada átomo encuentran electrones en los átomos vecinos que se encuentran en los mismos orbitales (y tienen los mismos números cuánticos), por lo que los niveles se desdoblán en bandas continuas de energía (bandas de conducción y de valencia). Esto se debe al principio de exclusión de Pauli, que enuncia que las partículas con spin semi-entero (en este caso electrones) no pueden ocupar un mismo estado (en este caso el estado atómico de energía asociado al orbital sp³) descrito por los mismos números cuánticos [30].

Los electrones de enlace, en un diagrama de bandas, tienen estados que están representados en la **banda de valencia (BV)**; mientras que los electrones que tienen suficiente energía para comportarse como electrones libres en el interior del semiconductor, tiene estados energéticos que están en la **banda de conducción (BC)**. Estas bandas están separadas por una región de energías prohibidas conocida como banda de energías prohibidas (bandgap) y está definida por la mínima energía de la BC (E_c) y la máxima de la BV (E_v): $\Delta E_{\text{gap}} = E_c - E_v$.

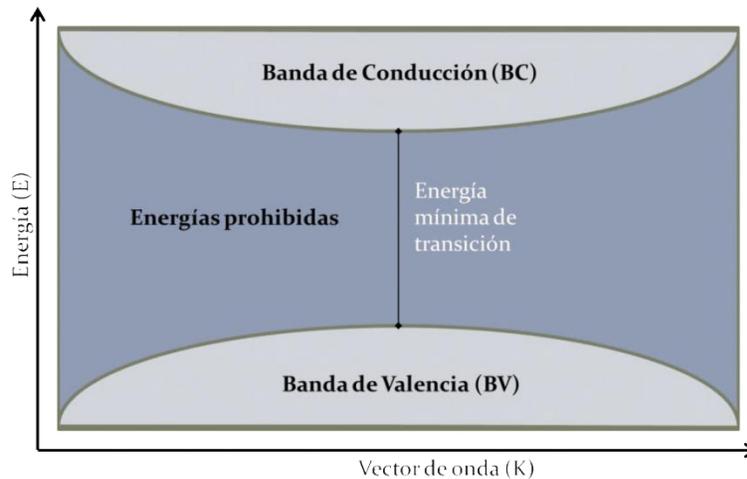


Fig. I.1.5 Diagrama de bandas.

El nivel de Fermi representa el estado de mínima energía de un sistema de partículas con spin semientero. Un semiconductor tiene el nivel o energía de Fermi en la región de energías prohibidas. Por lo tanto, si no incide sobre el semiconductor alguna fuente de energía y este se mantiene a 0° K , entonces todos los estados debajo de la energía de Fermi (estados de valencia) están ocupados y los que están por encima (estados de conducción) están vacíos. A temperatura ambiente la probabilidad de encontrar un electrón es tan pequeña que prácticamente las poblaciones se mantienen iguales: BV completamente poblada y la BC deshabitada.

Si un electrón es capaz de adquirir suficiente energía (ya sea por inyección óptica, eléctrica o aumento de la temperatura), de manera que sobrepase la brecha de energías prohibidas, entonces éste podrá ocupar un estado en la BC. Esto representa liberar a un electrón de un enlace covalente y permitirle comportarse como un electrón libre (con masa efectiva) en el interior del semiconductor (ver el panel derecho de la fig. I.1.4).

Un electrón que pasa de la BV a la BC, deja un estado desocupado en la BV. Los huecos son estados no ocupados en la BV que “se comportan como electrones con carga positiva en la BV”. Los electrones son los portadores de carga en la BC y los huecos en la BV. Un hueco puede ser ocupado por: 1) electrones de enlaces vecinos (esta es la manera en que un hueco se desplaza en la BV y conduce corriente) o por 2) un electrón de la BC (a lo que se le conoce como recombinación). Este último fenómeno es de gran interés pues al recombinarse un electrón cede su energía de dos posibles maneras: emisión de luz (fotones) o vibración de la red cristalina (fonones).

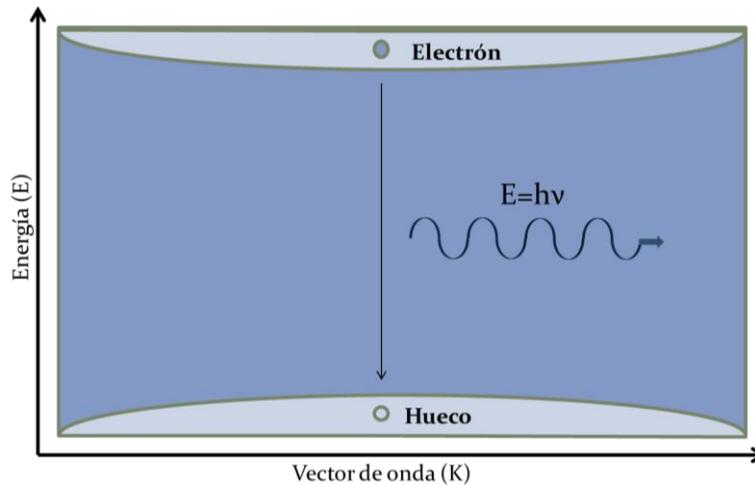


Fig. I.1.6 Recombinación de un electrón con un hueco, emitiendo luz (de frecuencia ν) en el proceso.

I.1.2 Semiconductores Extrínsecos^[29]

Al introducir una pequeña cantidad de impurezas (dopar) en un cristal de semiconductor podemos obtener un material cuya concentración de portadores de carga de un tipo (electrones o huecos), sea mayor que la del otro. Esto se debe a que las impurezas generan estados de energía en la banda prohibida que funcionan como trampas de electrones.

SEMICONDUCTOR TIPO N (PORTADOR MAYORITARIO: ELECTRONES)

Si se dopa a un cristal de Si, cuya valencia es 4, con un elemento de 5 electrones de valencia como As, P o Sb, se crean átomos donadores de electrones con posición fija en el interior del cristal de Si. De esta manera, se está forzando a unirse a un elemento pentavalente con los átomos de Si, lo que hace que este átomo se una como si fuera otro átomo de Si, quedando un electrón débilmente ligado que puede ser arrancado con mayor facilidad. La impureza o trampa genera un estado energético por debajo de la banda de conducción.

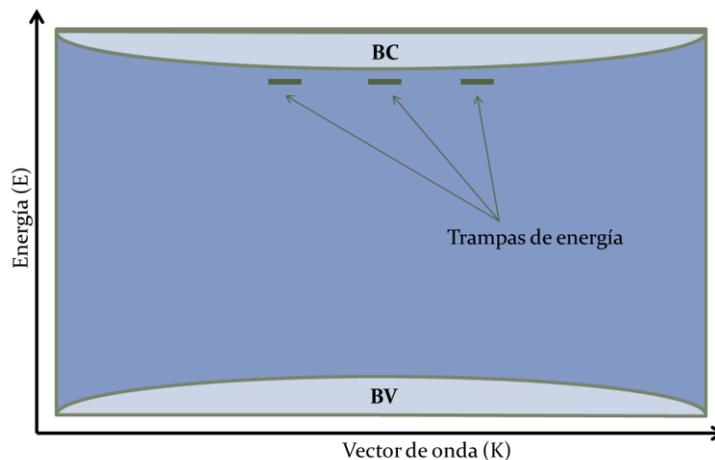


Fig. I.1.7 Trampas de energía asociadas a las impurezas de un semiconductor extrínsecos tipo n.

SEMICONDUCTOR TIPO P (PORTADOR MAYORITARIO: HUECOS)

Si se dopa al cristal de Si con un elemento de valencia 3 como el B, Al o Ga, se generan átomos aceptadores de electrones. De esta manera, se está forzando a unirse a un elemento trivalente con los átomos de Si, por lo que se enlazarán con 4 vecinos que le compartirán un electrón y le faltará uno más para llenar la última capa. Esto genera un estado de energía por encima de la BV.

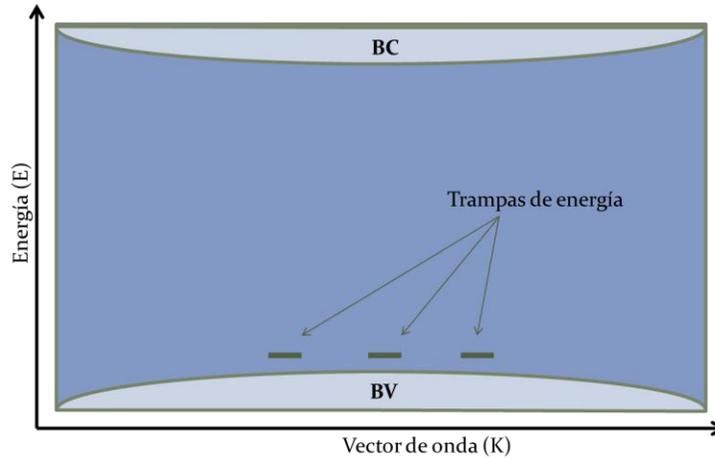


Fig. I.1.8 Trampas de energía asociadas a las impurezas de un semiconductor extrínseco tipo n.

CONDUCTIVIDAD DE UN SEMICONDUCTOR

La densidad de corriente que se desplaza por un material caracterizado por una conductividad σ , al aplicarle un campo eléctrico E_z , está definida como: $J = \sigma E_z$. La conductividad de un semiconductor es

$$\sigma = en\mu_e + ep\mu_h$$

donde e es la carga del electrón, n y p son las concentraciones de electrones en la BC y huecos en la BV, respectivamente. La movilidad de deriva de los electrones y los huecos es: $\mu_x = e\tau_x / m_x^*$, con m_x como la masa relativa de los portadores tipo x ($x = e, h$).

En un SE tipo n, cuando todas las trampas están ionizadas el número de electrones en la banda de conducción es n y la conductividad es: $\sigma \cong en\mu_e$. Si la temperatura no es lo suficientemente alta, no todas las trampas estarán ionizadas, por lo que hay que considerar la distribución de probabilidad de que un electrón tenga energía E_d en la trampa (ver apéndice B.2). Los electrones son fermiones (spin semientero), por lo que su distribución $f_d(E_d)$ es muy similar a la de Fermi-Dirac solo que multiplicada por 1/2 (ya que una trampa solo acepta un electrón, mientras que un nivel atómico acepta un par de electrones con spin opuesto). El número de donadores ionizados a cierta temperatura T es:

$$N_d^+ = N_d * (\text{probabilidad de no encontrar un electrón en } E_d)$$

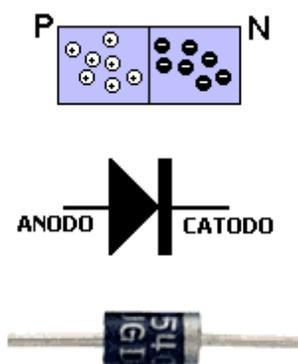
$$N_d^+ = N_d * [1 - f_d(E_d)] = \frac{N_d}{1 + 2e^{\frac{E_d - E_F}{kT}}}$$

donde E_F es la energía de Fermi del semiconductor.

I.1.3 Diodo Láser

DIODO (UNIÓN N-P)

El diodo es un dispositivo de dos terminales que permite el paso de corriente en una sola dirección. Su estructura consiste en un semiconductor extrínseco tipo p unido a uno tipo n cada uno conectado a una terminal eléctrica. Al unir los materiales, se manifiesta una difusión de electrones (J_e) del cristal n al p. Al establecerse una corriente de difusión, aparecen cargas fijas en



una zona a ambos lados de la unión, zona que recibe el nombre de región de agotamiento. A medida que progresa el proceso de difusión, la región de agotamiento va incrementando su anchura a ambos lados de la unión. Sin embargo, la acumulación de iones positivos en la zona n y de iones negativos en la zona p, genera una diferencia de potencial que actuará sobre los electrones libres de la zona n con una determinada fuerza de desplazamiento, que se opondrá a la corriente de electrones y terminará deteniéndolos. Este campo eléctrico (asociado a la diferencia de potencial generada) es de 0,7 V en el caso del Si.

Si el diodo está polarizado directamente (polo positivo + conectado al SE tipo p y - al n), conduce corriente. Al conectar en polarización inversa al diodo, aumenta la zona de carga espacial hasta que esta zona adquiere el mismo potencial eléctrico que la batería y se detiene la conducción.

DIODO LÁSER ^[31]

Como se comentó en la introducción, un sistema láser está compuesto por una región activa y una cavidad óptica. En el caso de un diodo láser (DL) la región activa está en el interior de la unión.

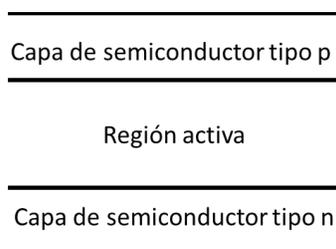


Fig. I.1.9 Región activa en el interior de la unión n-p.

De esta manera, al conectar en polarización directa al diodo, los electrones serán inyectados desde la capa n y los huecos desde la p. De esta manera se promueve la recombinación en la región activa y se emiten fotones con energía correspondiente a la banda prohibida. Si la región activa está compuesta por un semiconductor extrínseco, los portadores inyectados se recombinarían con las impurezas, reduciendo el tiempo de vida de los portadores en la BC sin contribuir en las transiciones láser, que decrecen en eficiencia.

I.2 Láser tipo Fabry-Pérot^[26]

En esta sección se realiza un análisis de un sistema láser: un haz resonando en el interior de una cavidad óptica (en este caso tipo Fabry-Pérot) e interaccionando con un medio activo de constante dieléctrica ϵ' . A partir de este análisis se obtienen la ganancia umbral y la frecuencia de oscilación en la sección 1.2.3. Para esto, antes es necesario hacer antes los siguientes desarrollos:

- En la sección 1.2.1, mediante un análisis de una cavidad **Fabry-Pérot (F-P)** se obtiene la intensidad de los haces reflejados y transmitidos y, la diferencia de fase entre haces reflejados.
- En la sección 1.2.2, mediante un análisis de las transiciones de un sistema atómico y su interacción con un haz incidente, se obtiene la relación de amplificación (o atenuación) del haz a medida que se propaga por el medio: $I_\nu(z) = I(0)e^{\gamma z}$ con
$$\gamma(\nu) = (N_2 - N_1) \left(\frac{c^2 g(\nu)}{8\pi n^2 \nu^2 t_{esp}} \right).$$
- En esta misma sección, utilizando el modelo del oscilador electrónico, se calcula la polarización inducida por un haz propagándose por un medio amplificador, y posteriormente la susceptibilidad electrónica.
- Además se calcula la expresión para la propagación de una onda plana electromagnética propagándose por un medio con polarización inducida, y por lo tanto, una constante dieléctrica $\epsilon' = \epsilon + \epsilon_0 \chi$.
- Finalmente, en la sección 1.2.3 se obtienen, como ya se comentó, la ganancia umbral y la frecuencia de oscilación.

I.2.1 Cavidad F-P

Una cavidad óptica es utilizada principalmente para regenerar las intensidades de campos muy largos con corrientes de entrada moderadas. Las cavidades están formadas por un par de espejos en donde se atrapa la luz.

Un resonador tipo F-P es una cavidad óptica formada por dos espejos planos. El desarrollo teórico fue realizado por C. Fabry y A. Pérot como un nuevo método de interferometría en 1899 y es el arquetipo del resonador óptico. El análisis consiste en un haz de amplitud \mathbf{A}_i incidiendo en un plato plano de grosor l e índice de refracción n que es inmerso en un medio de índice n' . Se obtienen las intensidades de los haces reflejados ($\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots$) y transmitidos ($\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots$) como se muestra a continuación. El plato se considera lo suficientemente largo como para aproximar como infinito al número de haces transmitidos y reflejados.

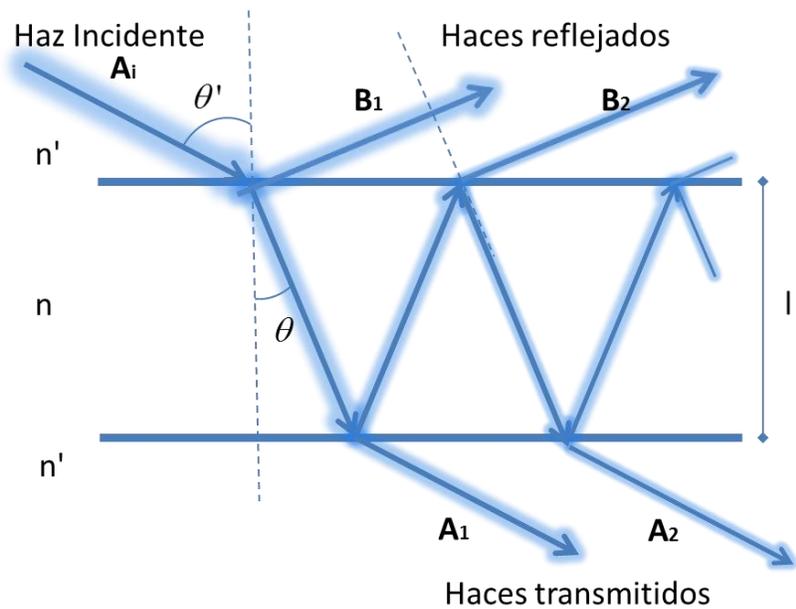


Fig. I.2.1 Haz incidiendo en un en un medio inmerso en otro medio con índices de refracción n y n' respectivamente.

A_i = amplitud del haz incidente

A_p = amplitud de los haces transmitidos

B_p = amplitud de los haces reflejados

Para cualquier tipo de polarización (S o P), $tt' \equiv T$ y $r'^2 = r^2 = R$ ($r = -r'$).

R = Reflectancia, T = Transmitancia, $R + T = 1$.

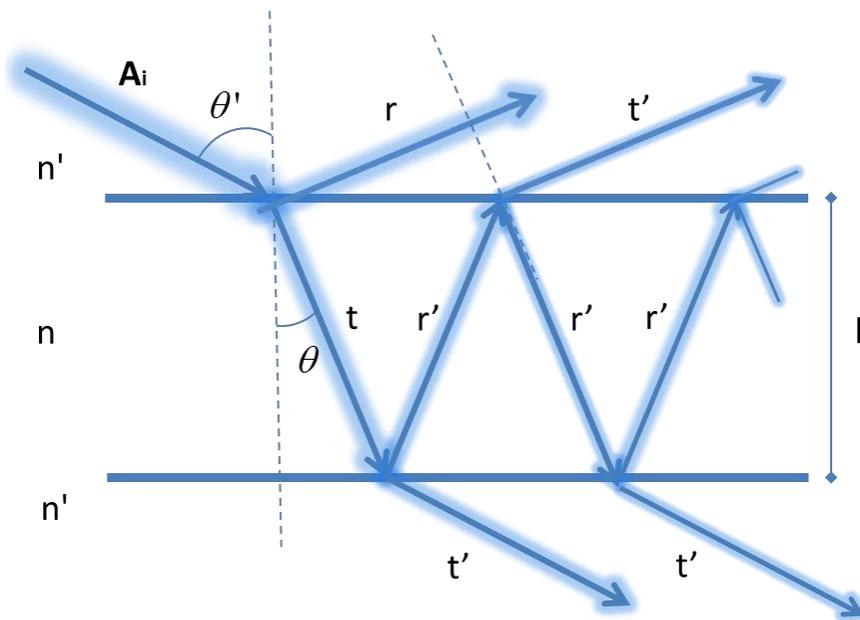


Fig. I.2.2 Constantes de reflexión y transmisión en una cavidad F-P.

De las dos graficas anteriores podemos obtener la siguiente tabla:

| Reflejados | Transmitidos |
|---|---|
| $B_1=A_i r$ | $A_1=A_i t t' (e^{i\delta/2})$ |
| $B_2=A_i t r' t' (e^{i\delta})$ | $A_2=A_i t r'^2 t' (e^{i\delta} e^{i\delta/2})$ |
| $B_3=A_i t r'^3 t' (e^{i2\delta})$ | $A_3=A_i t r'^4 t' (e^{i2\delta} e^{i\delta/2})$ |
| $B_p=A_i t r'^{(2p-3)} t' e^{i(p-1)\delta}$ | $A_p=A_i t t' r'^{(2p-1)} e^{i(p-1)\delta} e^{i\delta/2}$ |

Tabla I.1 Amplitud de los haces reflejados y transmitidos en términos de A_i , r y t .

La diferencia de fase entre dos haces consecutivos es $\delta = 2\pi L/\lambda$, donde L es la diferencia de caminos ópticos (en el apéndice C se obtiene L),

$$\delta = \frac{4\pi n l}{\lambda} \cos \theta \quad (I.2.1)$$

Definiendo A_r^p y A_t^p como la suma de los p haces reflejados y transmitidos, respectivamente,

$$\begin{aligned} A_r^p &= B_1 + B_2 + \dots + B_p & A_t^p &= A_1 + A_2 + \dots + A_p \\ A_r^p &= \left\{ r + t t' r' e^{i\delta} \left[\frac{1 - r'^{2(p-1)} e^{i(p-1)\delta}}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \right] \right\} A_i & A_t^p &= \left\{ t t' e^{i\delta/2} \left[\frac{1 - r'^{2(p-1)} e^{i(p-1)\delta}}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \right] \right\} A_i \\ A_r^\infty &= \left\{ r + t t' r' e^{i\delta} \left[\frac{1}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \right] \right\} A_i & A_t^\infty &= \left\{ t t' e^{i\delta} \left[\frac{1}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \right] \right\} A_i \end{aligned}$$

Finalmente, la suma de las amplitudes los haces reflejados y transmitidos, en términos de la reflectancia ($R=r^2$), son:

$$A_r = \frac{(1 - e^{i\delta})\sqrt{R}}{1 - R e^{i\delta}} A_i \quad A_t = \frac{T}{1 - R e^{i\delta}} A_i$$

Se ha utilizado la serie geométrica:

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = a \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad \text{Si } -1 < r < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

Las intensidades $I_r = |A_r|^2 = A_r A_r^*$,

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{4 \text{sen}^2(\delta/2)}{(1 - R)^2 + 4 \text{sen}^2(\delta/2)} \quad (I.2.2)$$

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4 \text{sen}^2(\delta/2)} \quad (I.2.3)$$

con $-2\pi < \delta < 2\pi$. Las expresiones (I.2.2) y (I.2.3) se conocen como fórmulas de Airy.

El mecanismo básico de operación de un láser requiere, aparte de la cavidad óptica, una región activa. En esta región es donde se genera la luz que se mantendrá resonando en el interior de la cavidad. La siguiente parte está dedicada a explicar los fenómenos implicados en la región activa y que involucran interacciones entre radiación y sistemas atómicos.

I.2.2 Interacción Radiación-Materia

La interacción entre una radiación electromagnética propagándose a través de un sistema atómico conlleva saltos de los electrones entre distintos estados. Los estados de un sistema atómico, según la mecánica cuántica, están descritos por una función de onda:

$$\psi_i(\vec{r}, t) = u_i(\vec{r}) e^{-iE_i t/\hbar}$$

$|u_i(\vec{r})|^2 dV$ es la probabilidad de encontrar a la partícula en la región $dx dy dz$ centrada en \vec{r} .

Si el sistema atómico tiene dos niveles, un número N_2 de átomos idénticos están en el nivel 2. La población de este nivel disminuirá por las transiciones espontáneas del nivel 2 al 1 de manera proporcional a N_2 ,

$$-\frac{dN_2}{dt} = A_{21} N_2 \equiv \frac{N_2}{(t_{\text{esp}})_{21}}$$

donde $(t_{\text{esp}})_{21} \equiv$ tiempo de vida espontánea del nivel 2 y $A_{21} \equiv$ tasa de transición espontánea.

Esta tasa de transición proviene de los niveles discretos de energía del sistema atómico. En el caso de interés, la transición del nivel 2 al 1 se realiza cediendo energía en forma de emisión de luz con energía $h\nu$, $E_2 - E_1 = h\nu$. La energía emitida no está a la frecuencia fija ν , sino que tiene una distribución que está descrita por la función de forma de línea $g(\nu)$, que está normalizada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\nu) d\nu = 1$$

$g(\nu) d\nu$ es la probabilidad "a priori" de que el fotón emitido tenga una frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$. Esta función de línea es característica del material (en el caso de un láser es la región activa) y es la curva de ganancia normalizada (en el apéndice A.4 se detalla más respecto).

Por otra parte, la interacción radiación-materia puede ser de tres maneras: Absorción estimulada, emisión estimulada y emisión espontánea. En un átomo con dos niveles de energía (estado base y estado excitado) esto se ve de manera clara.

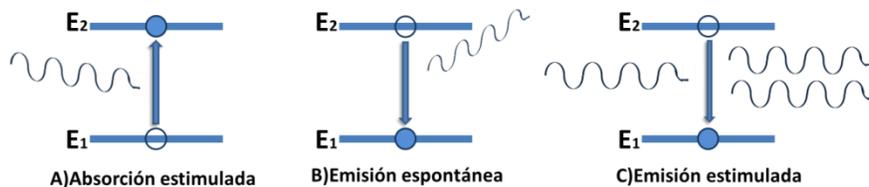


Fig. I.2.3 Tres diferentes posibles interacciones radiación-materia.

A) La absorción se lleva a cabo cuando un fotón de energía $E=h\nu$ colisiona con un átomo en el estado base. Si la energía del fotón es igual a la diferencia de energía entre los estados $E_2 - E_1 \approx h\nu$, el fotón será absorbido y el electrón en el átomo pasará al estado con energía E_2 .

B) Un átomo en el estado 2, este decaerá al estado 1 espontáneamente con un tiempo medio τ_{esp} .

C) Si un haz pasa cerca de un átomo excitado, puede hacer que decaiga al estado base emitiendo un haz coherente al incidente.

Para ver esto con más detalle, consideremos un campo electromagnético (radiación) con espectro blanco en la vecindad de la frecuencia de transición de un sistema atómico de dos niveles. $\rho(\nu)$ es la densidad de energía por unidad de frecuencia. Las tasas de transición entre los niveles son

$$(W_{21}')_{estimada} = B_{21}\rho(\nu)$$

$$(W_{12}')_{estimada} = B_{12}\rho(\nu)$$

Entonces, la tasa de transición del nivel 2 al 1 y del 1 al 2 son

$$W_{21}' = B_{21}\rho(\nu) + A_{21} \quad (1.2.4)$$

$$W_{12}' = B_{12}\rho(\nu) \quad (1.2.5)$$

donde A_{21} , B_{21} y B_{12} , son los coeficientes de transición o de Einstein (ver apéndice A.3).

Si sobre el sistema atómico incide luz radiada de un cuerpo negro (ver apéndice A.2), entonces la intensidad de la radiación es:

$$I(\nu, t) \propto \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1.2.6)$$

y su densidad de radiación

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi n^3 h\nu^3}{c^3} \left(\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \right) \quad (1.2.7)$$

Utilizando esta densidad podemos encontrar una relación general para los coeficientes de transición. Se parte de dos condiciones de equilibrio termodinámico:

- 1) Las poblaciones media en los estados 1 y 2 permanece constante, por lo que el número de transiciones, en cierto intervalo de tiempo, deben ser iguales

$$N_2 W_{21}' = N_1 W_{12}' \quad (1.2.8)$$

- 2) La razón entre las poblaciones está determinada por el factor de Boltzman,

$$N_2 / N_1 = e^{-h\nu/kT} \quad (1.2.9)$$

Las condiciones (1.2.8) y (1.2.9) solo se satisfacen si

$$B_{21} = B_{12} \quad (1.2.10)$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi n^3 h\nu^3}{c^3} \quad (1.2.11)$$

Usando (1.2.10) y (1.2.11), reescribimos las dos tasas de transiciones (1.2.4) y (1.2.5) en un solo término

$$\begin{aligned}
W_i' &= \frac{A_{21}c^3}{8\pi n^3 h\nu^3} \rho(\nu) \\
&= \frac{c^3}{8\pi n^3 h\nu^3 t_{esp}} \rho(\nu)
\end{aligned}
\tag{I.2.12}$$

ABSORCIÓN Y AMPLIFICACIÓN

Considérese el caso de una onda plana monocromática de frecuencia ν e intensidad I_ν propagándose a través de un medio atómico de dos niveles y, N_2 átomos por unidad de volumen en el nivel 2 y N_1 en el nivel 1.

$$\begin{aligned}
I_\nu &\rightarrow |s|_{prom} \\
|s|_{prom} &= \frac{1}{2} \varepsilon c |E|^2
\end{aligned}$$

La potencia generada es:

$$P/Vol. = \overbrace{(N_2 - N_1)W_i}^{\text{\# de transiciones/tiempo}} \overbrace{h\nu}^{\text{Energía por transición}}
\tag{I.2.13}$$

$$P/Vol. = (N_2 - N_1) \frac{c^2 I_\nu}{8\pi n^2 \nu^2 t_{esp}} g(\nu)
\tag{I.2.14}$$

La luz se propaga en la dirección z , entonces $P/Vol. = dI_\nu/dz$

$$\frac{dI_\nu}{dz} = (N_2 - N_1) \frac{c^2 I_\nu h\nu}{8\pi n^2 h\nu^3 t_{esp}} g(\nu)
\tag{I.2.15}$$

La integral de $dI_\nu/I_\nu = \ln I_\nu + c$, por lo que la solución de (40) es

$$\begin{aligned}
I_\nu(z) &= I(0) e^{\gamma(\nu)z} \\
\gamma(\nu) &= (N_2 - N_1) \frac{c^2 g(\nu)}{8\pi n^2 \nu^2 t_{esp}}
\end{aligned}
\tag{I.2.16}$$

Si G es positiva, la onda se amplifica al pasar por el medio.

MODELO DEL OSCILADOR ELECTRÓNICO DE UNA TRANSICIÓN ATÓMICA

Podemos aproximar el comportamiento del sistema atómico como un conjunto de osciladores armónicos, sobre los cuales actúan una fuerza eléctrica, una de fricción y otra de restitución. La ecuación de movimiento del oscilador electrónico unidimensional es:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_e + F_v + F_k
\tag{I.2.17}$$

donde $x(t)$ es la separación del electrón de su posición de equilibrio.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-e\varepsilon - \sigma dx/dt - kx}{m}
\tag{I.2.18}$$

Se proponen soluciones oscilatorias, con frecuencia ω , para el campo eléctrico ϵ y la posición x

$$\epsilon(t) = \text{Re} \left[E e^{-i\omega t} \right] \quad (1.2.19)$$

$$x(t) = \text{Re} \left[X(\omega) e^{-i\omega t} \right] \quad (1.2.20)$$

Sustituyendo las soluciones (1.2.19) y (1.2.20) en (1.2.18),

$$(\omega_0^2 - \omega^2) X + i\omega\sigma X = -\frac{e}{m} E \quad (1.2.21)$$

con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Despejando la susceptibilidad,

$$X = \frac{-\left(\frac{e}{m}\right) E}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\sigma} \quad (1.2.22)$$

Para $\omega \approx \omega_0$,

$$X \approx \frac{-(e/m) E}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) + i\omega_0\sigma} \quad (1.2.23)$$

Por otro lado, el momento dipolar de un electrón es: $\mu = -eX(t)$. Para N osciladores por unidad de volumen resulta una polarización

$$P(t) = -NeX(\omega) = \frac{-Ne^2/m}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) + i\omega\sigma} E \quad (1.2.24)$$

Lo cual, se puede escribir como

$$P(\omega) = \frac{-i(Ne^2/m\sigma\omega_0)}{1 + i\left[2(\omega - \omega_0)/\sigma\right]} E \quad (1.2.25)$$

Se define la susceptibilidad electrónica como la razón de la amplitud compleja de la polarización inducida entre el campo que la induce:

$$P(\omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) E \Rightarrow \chi(\omega) = P(\omega) / \epsilon_0 E \quad (1.2.26)$$

En general, la susceptibilidad tiene un valor complejo. Separando la susceptibilidad en la parte real e imaginaria

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega) \quad (1.2.27)$$

Se sustituye (1.2.25) y (1.2.27) en (1.2.26),

$$\chi'(\omega) = \left(\frac{Ne^2}{m\omega_0\sigma\epsilon_0} \right) \frac{2(\omega_0 - \omega)/\sigma}{1 + 4(\omega - \omega_0)^2 / \sigma^2} \quad (1.2.28)$$

$$\chi''(\omega) = \left(\frac{Ne^2}{m\omega_0\sigma\epsilon_0} \right) \frac{1}{1 + 4(\omega - \omega_0)^2 / \sigma^2} \quad (1.2.29)$$

o bien, en términos de $\nu = \omega/2\pi$ y el ancho de línea $\Delta\nu = \sigma/2\pi$,

$$\chi''(\nu) = \left(\frac{Ne^2}{16\pi^2 m\nu_0\epsilon_0} \right) \frac{\Delta\nu}{\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2 + (\nu - \nu_0)^2} \quad (1.2.30)$$

$$\chi'(\nu) = \frac{2(\nu - \nu_0)}{\Delta\nu} \chi''(\nu) \quad (1.2.31)$$

Este modelo (clásico) tiene una inconsistencia: la ganancia se vuelve negativa al aumentar la parte imaginaria de la susceptibilidad ($\chi''(\nu) > 0 \Rightarrow \gamma(\nu) < 0$). Mediante un desarrollo del modelo cuántico de este sistema, se obtiene una expresión para χ que depende de $(N_2 - N_1)$:

$$\chi'(\nu) = \frac{2(\nu - \nu_0)^2}{\Delta\nu} \frac{(N_2 - N_1)\lambda^3}{8\pi^3 \Delta\nu n t_{esp}} \cdot \frac{1}{1 + \left[4(\nu - \nu_0)^2 / (\Delta\nu)^2 \right]} \quad (1.2.32)$$

$$\chi''(\nu) = \frac{(N_2 - N_1)\lambda^3}{8\pi^3 \Delta\nu n t_{esp}} \cdot \frac{1}{1 + \left[4(\nu - \nu_0)^2 / (\Delta\nu)^2 \right]} \quad (1.2.33)$$

La absorción está determinada por $\chi''(\nu)$, mientras que la dispersión por $\chi'(\nu)$.

SUCEPTIBILIDAD ELÉCTRICA

El vector de desplazamiento eléctrico está definido como

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ &= \epsilon \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} \\ &= \epsilon'(\omega) \vec{E} \end{aligned} \quad (1.2.34)$$

Entonces, la permitividad eléctrica en un medio con una polarización inducida es

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon \left(1 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \chi(\omega) \right) \quad (1.2.35)$$

Consideremos una onda plana con frecuencia angular ω propagándose en la dirección z por un medio con permitividad ϵ' ,

$$e(z, t) = \text{Re} \left[E e^{i(\omega t - k'z)} \right] \quad (1.2.36)$$

Ya que $\omega/k = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$, entonces $k' = \omega\sqrt{\epsilon'\mu}$. Sustituyendo (1.2.35) en k' ,

$$k' = k \sqrt{1 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \chi} \quad (1.2.37)$$

Si $(\epsilon_0/\epsilon)|\chi| \ll 1$,

$$k' \approx k \left[1 + \frac{\epsilon_0}{2\epsilon} \chi \right] = k \left[1 + \frac{\chi'(\omega)}{2n^2} \right] - i \frac{k}{2n^2} \chi''(\omega) \quad (1.2.38)$$

con $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ el índice de refracción lejos de resonancia.

Sustituyendo (1.2.38) en (1.2.36),

$$e(z,t) = \text{Re} \left[E e^{i\omega t - i(k+\Delta k)z} e^{\gamma z/2} \right] \quad (1.2.39)$$

con $\Delta k = k\chi'(\omega)/2n^2$ y $\gamma(\omega) = -k\chi''(\omega)/n^2$.

SATURACIÓN DE LA GANANCIA EN MEDIOS HOMOGÉNEOS

La ecuación para la ganancia (1.2.16) de un sistema de dos niveles en el que un agente de bombeo mantiene una población invertida es

$$\gamma(\nu) = (N_2 - N_1) \frac{c^2 g(\nu)}{8\pi n^2 \nu^2 t_{esp}}$$

La inversión de población producida por la corriente de bombeo, en ausencia de un campo óptico, se define como ΔN^0 . La presencia del campo induce transiciones $2 \rightarrow 1$ y $1 \rightarrow 2$. Además, ya que $N_2 > N_1$ y las tasas de transiciones inducidas son iguales (condición (1.2.10)), un mayor número de átomos pasara del estado 2 al 1, por lo que la nueva población de equilibrio será menor que ΔN^0 .

Entonces, el incremento de las transiciones hace que la inversión de población decrezca, lo que a su vez hace que las transiciones disminuyan... y así sucesivamente, hasta llegar a un punto de equilibrio en el que la ganancia disminuye hasta igualarse con las pérdidas. La reducción en la inversión de población y por lo tanto de la constante de ganancia y acarreada por el campo electromagnético es llamada saturación de la ganancia.

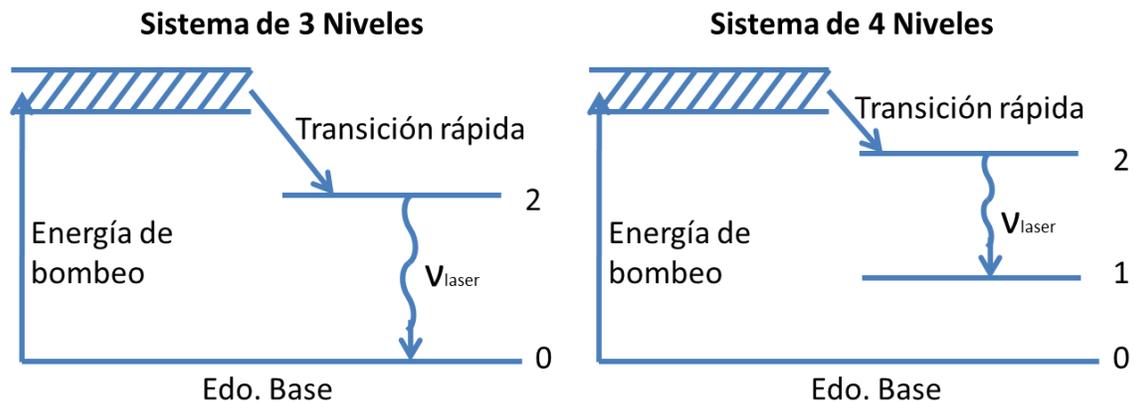


Fig. 1.2.4 Tasas de transición entre niveles de energía.

En un sistema láser de 4 niveles, en presencia de un campo de radiación de frecuencia ν y una bomba (con una densidad de átomos bombeados al nivel 2 y al nivel 1, por unidad de tiempo, R_2 y

R_1 , respectivamente), las poblaciones de ambos niveles puede ser descrita por las siguientes ecuaciones de evolución:

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= R_2 - \frac{N_2}{\tau_2} - (N_2 - N_1)W_i(\nu) \\ \frac{dN_1}{dt} &= R_1 - \frac{N_1}{\tau_1} + \frac{N_2}{\tau_{esp}} + (N_2 - N_1)W_i(\nu) \end{aligned} \quad (1.2.40)$$

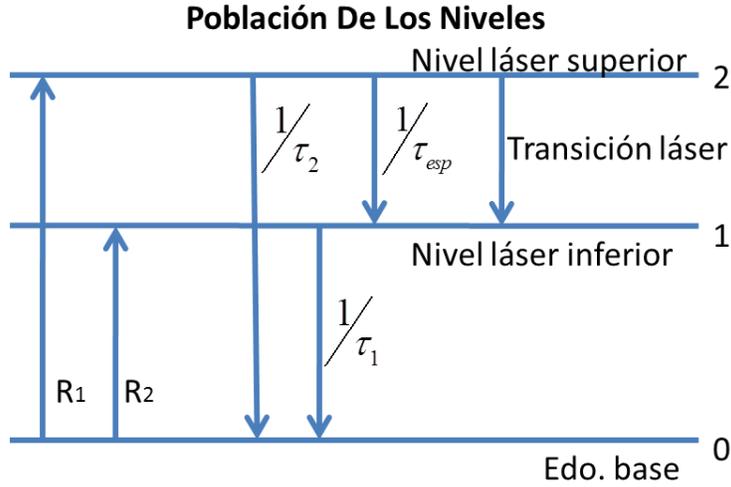


Fig. 1.2.5 Tazas de transición entre niveles.

Las transiciones inducidas están determinadas por (1.2.12):

$$W_i' = \frac{\lambda^2 g(\nu)}{8\pi n^2 h \nu t_{esp}} I_\nu$$

En estado estacionario: $dN_{1,2}/dt = 0$,

$$\Rightarrow N_2 - N_1 = \frac{R_2 t_2 - (R_1 + \delta R_2) t_1}{1 + [t_1(1 - \delta) + t_2] W_i} \quad (1.2.41)$$

con $\delta = t_2 / t_{sp}$. En ausencia de campo óptico $W_i=0$ y las poblaciones quedan

$$N_2 - N_1 = R_2 t_2 - (R_1 + \delta R_2) t_1 \equiv \Delta N_0$$

entonces, reescribiendo (1.2.41) en términos de ΔN_0 ,

$$N_2 - N_1 = \Delta N_0 / (1 + \phi W_i) \quad (1.2.42)$$

donde $\phi = [1 + (1 - \delta) t_1 / t_2]$. En un sistema láser eficiente $t_1 \ll t_2$ y $t_p \approx t_2$, o bien $\delta \approx 1$. Sustituyendo W_i en (1.2.42),

$$N_2 - N_1 = \frac{\Delta N_0}{1 + I_\nu / I_s}$$

donde $I_s = \frac{8\pi n^2 h\nu}{\phi \lambda^2 g(\nu)}$. Cuando $I_\nu = I_s$, la densidad de población es $\Delta N_0/2$. Se puede escribir el coeficiente de ganancia en términos de I_ν e I_s :

$$\gamma = \frac{\Delta N_0}{1 + I_\nu/I_s} \cdot \frac{c^2 g(\nu)}{8\pi n^2 \nu^2 t_{esp}} = \frac{\gamma^0(\nu)}{1 + I_\nu/I_s} \quad (1.2.43)$$

Esta ganancia es para un sistema láser homogéneo (átomos indistinguibles).

1.2.3 Teoría de Oscilación Láser

Un láser tipo F-P de dos espejos es básicamente un etalón F-P con un medio amplificador entre ellos. En la figura 1.2.6 se observa una onda plana de amplitud compleja E_i , que incide sobre el espejo 1 de una cavidad F-P con un medio activo en su interior. El cociente de los campos transmitidos sobre los incidentes se denota como t_1 en el espejo 1 y t_2 en el espejo 2. Mientras que el cociente de los campos reflejados sobre los incidentes se denota como r_1 en el espejo 1 y r_2 en el espejo 2.

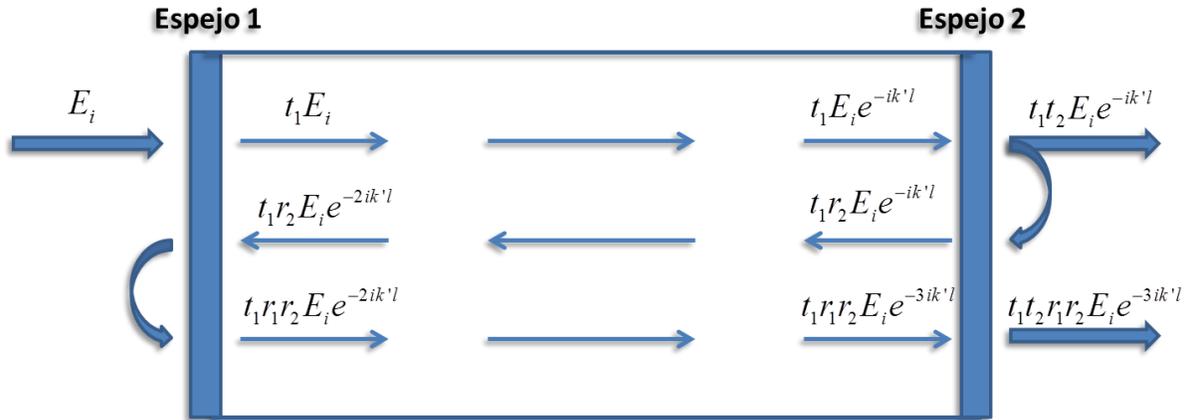


Fig. 1.2.6 Cavidad óptica tipo F-P.

Sumando los haces a la salida, el campo total transmitido en el espejo 2 es:

$$E_t = E_i \left[\frac{t_1 t_2 e^{-ik'l}}{1 - r_1 r_2 e^{-2ik'l}} \right] \quad (1.2.44)$$

La constante dieléctrica y la constante de propagación en un medio activo (con población invertida) son

$$\varepsilon' = \left[1 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \chi(\omega) \right] \quad (1.2.45)$$

$$k' = k \left[1 + \frac{\chi'(\omega)}{2n^2} \right] - i \left[\frac{k}{2n^2} \chi''(\omega) \right] \quad (1.2.46)$$

Para que haya oscilación, al final de un ciclo (ida y vuelta del haz) se debe cumplir que $1 = r_1 r_2 e^{ik'2l}$. Así los haces transmitidos están en fase y se pueden sumar constructivamente (ver fig. 1.2.6). Esto significa en (1.2.44) que en ausencia de un campo incidente se tiene un campo transmitido: $E_t/E_i = t_1 t_2 e^{-ik'l}/0$.

$$e^{i2m\pi} = r_1 r_2 e^{i2(k+\Delta k)l} e^{(\gamma-\alpha)l}$$

Igualando componente a componente, obtenemos la condición de amplitud (1.2.47) y de fase (1.2.48):

$$r_1 r_2 e^{(\gamma-\alpha)l} = 1 \quad (1.2.47)$$

$$2(k + \Delta k)l = 2m\pi \quad (1.2.48)$$

De (1.2.47) se obtiene la condición umbral de oscilación,

$$\begin{aligned} \ln r_1 r_2 + (\gamma - \alpha)l &= 0 \\ \Rightarrow \gamma_{th}(\omega) &= \alpha - \frac{1}{l} \ln r_1 r_2 \end{aligned} \quad (1.2.49)$$

Despejando N_{th} de (1.2.12) y sustituyendo (1.2.4),

$$N_{th} \equiv (N_2 - N_1)_{th} = \left(\alpha - \frac{1}{l} \ln r_1 r_2 \right) \frac{8\pi n^2 t_{sp}}{\lambda^2 g(\nu)} \quad (1.2.50)$$

Antes de pasar a obtener la frecuencia de oscilación hay que distinguir entre las distintas frecuencias que se utilizan:

- ν_0 es la frecuencia del centro de línea de transmisión.
- $\nu_m = mc/2nl$ son las frecuencias de resonancia de la cavidad.
- ν es la frecuencia sin ninguna condición.

Para obtener la frecuencia de oscilación, ponemos atención a la condición de fase (1.2.48)

$$(k + \Delta k)l = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{con } \Delta k = k \chi'(\omega)/2n^2$$

Utilizando (1.2.31) y la definición de $\gamma(\omega) = -\frac{k \chi''(\nu)}{n^2}$ en (1.2.48),

$$\left(1 + \frac{-\frac{2(\nu - \nu_0) n^2}{\Delta \nu} \gamma(\nu)}{2n^2} \right) lk = m\pi$$

Multiplicando la ecuación por c/nl ,

$$\left(1 - \frac{(\nu - \nu_0) \gamma(\nu)}{\Delta \nu} \frac{ck}{k} \right) \frac{ck}{n} = \frac{m\pi c}{nl}$$

pero $c/n = \nu\lambda$ y $k = 2\pi/\lambda$,

$$\nu \left(1 - \frac{(\nu - \nu_0) \gamma(\nu)}{\Delta \nu k} \right) = \nu_m \quad (1.2.51)$$

Supongamos que l es ajustada, así que ν_m está cercana a ν_0 y que cuando ν cercana a ν_0 , es función de variación lenta, por lo que $\gamma(\nu) \approx \gamma(\nu_m)$ y $\nu - \nu_0 \approx \nu_m - \nu_0$, entonces la frecuencia de oscilación en (1.2.51) es

$$\nu = \nu_m - (\nu_m - \nu_0) \frac{\gamma(\nu_m)c}{2\pi n \Delta \nu} \quad (1.2.52)$$

Si la resonancia de la cavidad pasiva ν_m coincide con el centro de la línea atómica ($\nu_m = \nu_0$), la oscilación toma lugar en $\nu = \nu_0$. Si $\nu_m \neq \nu_0$ la oscilación se da cerca de ν_m pero desplazada ligeramente hacia ν_0 . Este fenómeno se conoce como deslizamiento de frecuencia.

I.3 Mezcla de cuatro ondas

La **Mezcla de cuatro ondas (MCO)** es un fenómeno no lineal que fue inicialmente observado en las fibras ópticas [32,33]. Es una interacción entre cuatro haces (por ejemplo, tres generan un cuarto haz). Estas señales generadas en las fibras no eran deseables, pero a medida que se ha comprendido la MCO se han encontrado propiedades interesantes que pueden ser utilizadas para el procesamiento de señales ópticas.

A continuación, se describe este fenómeno en las fibras ópticas, para posteriormente tratar la MCO en los láseres de semiconductor. En la sección 1.3.3 se define el acoplamiento pasivo y su relación con la MCO.

I.3.1 Mezcla de Cuatro Ondas en Fibras Ópticas^[34]

Las fibras ópticas son medios en los que invertir la dirección del campo incidente implica un cambio en la dirección del campo inducido. Esto matemáticamente se representa con un cambio de signo. Por lo tanto, la polarización en su expresión en desarrollo de potencias solo dependerá de los términos con potencias impares, de tal manera que la inversión del signo en el campo incidente corresponda solo a un cambio de signo en la polarización inducida. Esta es la razón de que los efectos de tercer orden (como la generación de tercer armónico y la MCO) sean los efectos no lineales dominantes en estos sistemas y la multicanalización por longitud de onda se haya desarrollado para reducir su impacto.

En la MCO las fibras ópticas juegan un rol pasivo excepto por mediar la interacción entre varias ondas ópticas. A este tipo de procesos no lineales se le conoce como procesos paramétricos porque involucran la modulación de un parámetro del medio, tal como el índice de refracción y

requieren sincronización de las fases (phase-matching) antes de que puedan incrementarse a lo largo de la fibra. Los procesos paramétricos de tercer orden involucran interacciones no lineales de cuatro ondas ópticas. La principal característica de la MCO puede ser entendida desde el término de tercer orden en la polarización,

$$P_{NL}^{(3)} = \epsilon_0 \chi^{(3)} E^3 \quad (I.3.1)$$

donde E es el campo eléctrico y $P_{NL}^{(3)}$ la polarización inducida no lineal de tercer orden.

Considérese el caso de cuatro ondas continuas oscilando a frecuencias $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ y ω_4 linealmente polarizadas a lo largo del mismo eje. El campo eléctrico total puede ser escrito como

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 P_j e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \quad (I.3.2)$$

donde la constante de propagación $k_j = \tilde{n}_j \omega_j / c$, siendo \tilde{n}_j el índice de refracción del modo j. Si sustituimos (I.3.2) en (I.3.1) y lo expresamos de la misma forma que E, usando

$$P_{NL} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 P_j e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c.$$

P_j (j=1,2,3,4) consiste en un número grande de términos involucrando productos de tres campos eléctricos. Por ejemplo, P_4 puede ser expresado como

$$P_4 = \frac{3\epsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[|E_4|^2 E_4 + 2 \left(|E_1|^2 + |E_2|^2 + |E_3|^2 \right) E_4 + 2E_1 E_2 E_3 e^{i\theta_+} + 2E_1 E_2 E_3 e^{i\theta_-} + \dots \right] \quad (I.3.3)$$

donde θ_+ y θ_- están definidas como:

$$\begin{aligned} \theta_+ &= (k_1 + k_2 + k_3 - k_4)z - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)t \\ \theta_- &= (k_1 + k_2 - k_3 - k_4)z - (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)t \end{aligned}$$

Los primeros cuatro términos que contienen E_4 en (I.3.3) son responsables de la auto-modulación de la fase y de la modulación cruzada de la fase. Los términos restantes resultan de la combinación de frecuencias (suma o diferencia) de las cuatro ondas. El número de términos efectivos durante un proceso de MCO depende del desacuerdo de la fase entre E_4 y P_4 gobernado por θ_+ y θ_- , o una cantidad similar.

Sólo puede haber efectos significativos de MCO si el desacuerdo de las fases es aproximadamente cero. Esto requiere un acoplamiento tanto de las frecuencias como de los vectores de onda. El último requisito también es conocido como sincronización de las fases. En términos de la mecánica cuántica, MCO ocurre cuando fotones de una o más ondas son aniquilados y nuevos fotones son creados a diferentes frecuencias, tal que la energía y el momento netos son conservados durante la interacción paramétrica. La condición sincronización de las fases requiere una elección específica de las longitudes de onda de entrada y los parámetros de la fibra antes de que la MCO pueda ocurrir con alta eficiencia.

Hay dos tipos de términos de MCO en (I.3.3). El término conteniendo θ_+ corresponde al caso en el que tres fotones le transfieren su energía a un solo fotón a la frecuencia $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$. Este

término es responsable de los fenómenos tales como la generación de tercer armónico ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$). El término conteniendo θ corresponde al caso en el que dos fotones de frecuencias ω_1 y ω_2 son aniquilados, mientras que dos fotones con frecuencias ω_3 y ω_4 son creados simultáneamente de tal manera que $\omega_3 + \omega_4 = \omega_1 + \omega_2$. El requisito de sincronización de las fases para este proceso es $\Delta k = 0$, donde

$$\Delta k = k_3 + k_4 - k_1 - k_2 \quad (1.3.4)$$

En el caso general, en el cual $\omega_1 \neq \omega_2$, se deben incidir dos haces de bomba para que la MCO ocurra. El caso especial (MCO degenerada), en el cual $\omega_1 = \omega_2$, es interesante ya que la MCO puede iniciarse con un solo haz de bomba. Una intensa onda de bomba con frecuencia ω_1 crea dos señales de menor intensidad (conocidas como bandas laterales o sidebands) localizados simétricamente a las frecuencias ω_3 y ω_4 con un corrimiento en la frecuencia:

$$\Omega_s = \omega_1 - \omega_3 = \omega_4 - \omega_1$$

donde se ha asumido que $\omega_3 < \omega_4$.

La MCO degenerada fue originalmente nombrada mezcla de 3 ondas ya que solo tres distintas frecuencias estaban involucradas en el proceso no lineal. Sin embargo, el término mezcla de tres ondas se reserva para los procesos mediados por $\chi^{(2)}$.

I.3.2 Mezcla de Cuatro Ondas en Láseres de Semiconductor

Al igual que otros efectos en las fibras como la variación en la fase (debido a que la velocidad de propagación depende de la frecuencia), MCO está presente en los LS. En un LS las señales generadas por la MCO son amplificadas en la cavidad óptica al interactuar con la región activa, por lo cual este fenómeno puede ser muy eficiente en este tipo de dispositivos.

La saturación de la ganancia juega un rol muy importante en el desempeño de los LS. Para un láser multimodo, además de incluir la auto-saturación y la saturación cruzada, también es necesario tomar en cuenta la contribución de la MCO [24]. Además de la generación de nuevas señales, en un LS la MCO produce una pulsación de portadores (modulación de la densidad de portadores) que afecta al índice de refracción y la curva de ganancia.

Al suponer que sobre un sistema láser con población invertida inciden dos ondas: una llamada bomba (con frecuencia ω_0) y otra prueba (con frecuencia ω_1). Específicamente, la modulación de la densidad de portadores a la frecuencia de desacuerdo $\Omega = \omega_1 - \omega_0$, crea variaciones en el índice de refracción y la ganancia [25,35]. En otras palabras, los campos de bomba y de sonda se interaccionan entre sí y modifican varios parámetros del medio, en función de la frecuencia de desacuerdo Ω , que corresponden a la presencia de oscilaciones en la ganancia y el índice de

refracción. La difracción de la señal de bomba causada por estas variaciones genera una nueva señal a la frecuencia $\omega_2 = \omega_0 - \Omega$.

Para entender esta relación entre las condiciones no lineales (con intensidades en el régimen de saturación) y la pulsación de la densidad de portadores, hay que tener en cuenta que la MCO involucra tres fenómenos físicos que se manifiestan en un LS según sea la frecuencia de separación entre los modos: **hoyo espectral (HE)**, **calentamiento de portadores (CP)** y **modulación de la densidad de portadores (MDP)**. HE y CP son fenómenos intrabanda (no modifican la densidad de portadores en la BC) y tienen tiempos característicos menores a la MDP, el cual es interbanda (involucra transiciones de electrones entre las bandas) [1, 25,35].

CP y HE afectan para frecuencias de desacuerdo mayores a 1 THz, mientras que el efecto de MDP decrece arriba de 1GHz (pero para frecuencias debajo de 100 GHz MDP aún sigue siendo dominante) [1]. El hecho de que la densidad de portadores pueda responder a tales frecuencias indica la presencia de efectos intrabanda (tiempos menores a 1 ps), ya que los efectos interbanda se asocian con el tiempo de vida de los portadores en la BC (aprox. 1 ns) [24].

HOYO ESPECTRAL

En un medio láser con población invertida, la bomba y la prueba se amplifican y consumen portadores. Al ser la bomba muy intensa y saturar al medio, el consumo de portadores con energía $\hbar\omega_0$ (por encima de la máxima energía de valencia) es tan grande que los electrones aportados por la corriente de bombeo no pueden compensar con eficiencia a los consumidos.

Un electrón en la BC se recombina a través de colisiones portador-portador, cuyo tiempo característico es 50 fs. Al ser mayor la tasa de consumo (o recombinación) que la tasa de inyección de corriente, se crea un hoyo en la distribución de energía de los portadores alrededor de la energía $\hbar\omega_0$. Este hoyo espectral produce una discontinuidad en el espectro de ganancia. Posterior a la creación del hoyo, mediante colisiones portador-portador la energía de los portadores se redistribuye tal como si se intentara “tapar” el hoyo.

A estos fenómenos caracterizados por el tiempo medio de las colisiones portador-portador (frecuencia asociada de $1/50\text{fs}=20$ THz), se les conoce como mecanismo del hoyo espectral [7].

CALENTAMIENTO DE PORTADORES

Las colisiones portador-portador generan portadores de alta energía y el consumo de portadores de mínima energía, por lo que el intento de “tapar” el hoyo hace parecer que la distribución de energía de los portadores aumenta (calentamiento de portadores). Este calentamiento es seguido por un enfriamiento, debido a que los portadores con mayor energía interactúan con la red cristalina cediendo su exceso de energía mediante colisiones portador-fonón (tiempo característico de 650 fs) [7].

Al calentamiento seguido por el enfriamiento se le conoce como mecanismo del CP. Afecta a la curva de ganancia y al índice de refracción y tiene una frecuencia asociada de 1.5 THz.

MODULACIÓN DE LA DENSIDAD DE PORTADORES

La HE y el CP se llevan a cabo antes de que la corriente de bombeo pueda aportar un nuevo portador, que contribuye a normalizar la distribución de energía de los portadores. El tiempo promedio que tarda la corriente de inyección en suministrar a un nuevo portador es aproximadamente 200 ps (frecuencia asociada 5 GHz). Entonces la HE y el CP hacen que la distribución energética de los electrones se enfríe y se caliente varias veces en esta escala de tiempo (200 ps). Esto aunado al efecto de la densidad de carga aportada por la corriente de bombeo forman el fenómeno de MDP [7]. En la generación de señales RF de 40 GHz, este es el efecto no lineal dominante (despreciando HE y CP) que se manifiesta a través de la generación de armónicos de modulación, conocidos en inglés como sidebands, a ambos lados de cada par de modos a una distancia en frecuencia que es igual a la frecuencia de desacuerdo entre la bomba y la prueba.

I.3.3 Acoplamiento de Modos Pasivo

ACOPLAMIENTO DE MODOS [26]

En un láser multimodo común, las fases de los modos varían independientemente, lo que provoca que la intensidad del láser varíe aleatoriamente. Lograr que las fases no cambien sus valores relativos (por ejemplo, todas las fases igual a cero) significaría tener coherencia entre todos los modos y tener un campo eléctrico total con un periodo bien definido $T = 2\pi/\omega$, donde $\omega_q - \omega_{q-1} = \pi c/l = \omega$.

Esto se ve de una manera más clara si consideremos un campo eléctrico total emitido por un láser multimodo con una separación en frecuencia entre modos ω y un modo central de frecuencia ω_0 :

$$E_{total}(t) = \sum_k A_k e^{i(\omega_0+k\omega)t+i\phi_k} \quad (I.3.5)$$

donde la sumatoria se extiende a todos los modos del láser y ϕ_k es la fase del k-esimo modo. Una propiedad de (I.3.5) es el ser periódica ($T = 2\pi/\omega = 2l/c$) y T es el tiempo que tardan los haces en dar una ida y vuelta en la cavidad óptica. El campo después de un tiempo T es:

$$\begin{aligned} E_{total}(t+T) &= \sum_k A_k e^{i(\omega_0+k\omega)(t+2\pi/\omega)+i\phi_k} \\ &= \sum_k A_k e^{i(\omega_0+k\omega)t+i\phi_k} e^{i2\pi(\omega_0/\omega+n)} \end{aligned} \quad (I.3.6)$$

donde $e^{i2\pi(\omega_0/\omega+n)} = 1$ ya que $\omega_0 = m\pi c/l$. La propiedad de periodicidad de E_{total} depende de que las fases estén acopladas. Al hecho de forzar a que las fases mantengan sus valores relativos se le conoce como acoplamiento de modos (mode-locking). Para el caso de (I.3.6) si suponemos que todas las fases $\phi_k=0$ y además todas las amplitudes $A_k=1$, entonces la ecuación queda

$$E_{total}(t+T) = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{i(\omega_0+k\omega)t} \quad (1.3.7)$$

donde N es el número de modos del láser. La potencia promedio del láser a la salida es proporcional a $E_{total}E_{total}^*$:

$$P(t) \propto \frac{\text{sen}^2(N\omega t / 2)}{\text{sen}^2(\omega t / 2)} \quad (1.3.8)$$

La expresión (1.3.8) tiene las siguientes propiedades:

- La potencia es emitida en forma de un tren de pulsos con período $T = 2\pi/\omega = 2l/c$.
- El pico de potencia, $P(sT)$ (para $s=1,2,3,\dots$), es igual a N veces la potencia promedio, donde N es el número de modos acoplados.
- La amplitud del pico del campo es igual a N veces la amplitud de un solo modo.
- El ancho de pulso individual, definido como el tiempo desde el primer pico al primer cero es $\tau_0=T/N$. El número de modos puede ser estimado como $N \approx \Delta\omega/\omega$, con $\Delta\omega$ como el ancho de la función de línea (asociada a la curva de ganancia). Usando este resultado junto con $T = 2\pi/\omega$ en $\tau_0=T/N$, se obtiene:

$$\tau_0 \sim \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu} \quad (1.3.9)$$

Entonces, la longitud de los pulsos generados mediante el acoplamiento de modos es aproximadamente el inverso del ancho de línea de la curva de ganancia.

Debido a que en el interior de la cavidad existen ondas que se mantienen oscilando (o reflejándose) y se pueden considerar como una suma de dos ondas viajeras en direcciones opuestas, el acoplamiento de modos causa que la energía de oscilación del láser sea condensada en paquetes que vienen y van entre los espejos a la velocidad de la luz c, y por lo tanto la emisión se da en forma de pulsos. Además del acoplamiento de modos, existen otras formas en las que un LS puede generar un tren de pulsos, como son: la conmutación de la ganancia o agregar una sección absorbente. La conmutación de la ganancia consiste en modular la ganancia a través de la corriente de bombeo, por ejemplo, la superposición de una señal sinusoidal de alta frecuencia a una corriente de polarización cercana a la corriente umbral. La segunda opción se puede lograr dejando una parte de la región activa sin bombear (por lo tanto sin población invertida), de manera que al interaccionar los haces con esta región absorbente se produzcan pulsos mediante el mecanismo de Q-switching.

El acoplamiento entre modos en LS multimodo consiste en: 1) modos a la misma distancia en frecuencia y 2) fases de los modos sincronizadas. El acoplamiento se puede realizar de dos maneras: activo o pasivo. El acoplamiento activo es logrado mediante la inyección de señales, mientras que el pasivo no requiere una inyección externa. El acoplamiento activo ha sido observado experimentalmente desde la década de los 1970 [36], mientras que el **acoplamiento pasivo de modos (APM)** se encuentra en publicaciones desde finales de los 80s [37].

ACOPLAMIENTO PASIVO

El acoplamiento puede ocurrir de manera pasiva a través de las señales generadas por la MCO, que funcionan como señales de inyección ópticas (ver fig. I.3.1), este efecto es similar al fenómeno de inyección mutua de acoplamiento, que llega al equilibrio cuando todos los modos se sitúan a la misma distancia en frecuencia [1].

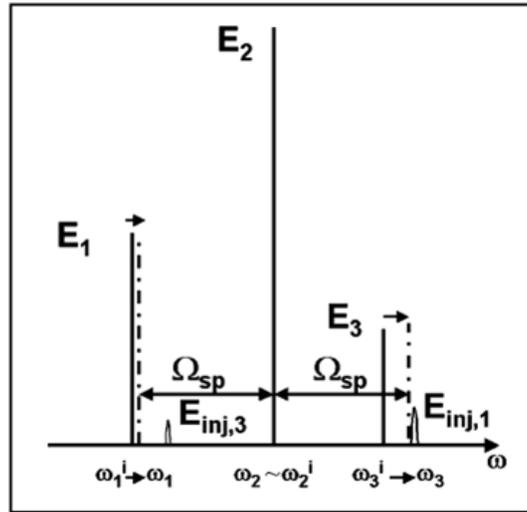


Fig. I.3.1 Señales generadas $E_{inj,3}$ y $E_{inj,1}$ haciendo que los modos E_1 y E_3 se desplacen en frecuencia [1].

Una vez logrado el acoplamiento, la pulsación de la densidad de portadores produce una señal bien definida (en la potencia de salida) a la frecuencia de separación entre los modos Ω . En el caso contrario, si los modos no están a la misma distancia en frecuencia, no habrá una frecuencia de pulsación bien definida y el ancho de línea de la señal RF aumentara considerablemente. De hecho, un criterio para identificar el mecanismo de APM es que el ancho de línea de la señal RF generada sea menor que la suma de los anchos de línea espectrales de los M modos ópticos principales [15]:

$$\Delta V_{RF} \ll \sum_{i=1}^M \Delta V_i \quad (I.3.10)$$

Particularmente, podemos encontrar en la literatura el uso del AP para generar pulsos cortos a 100 GHz a través de láseres F-P (en el que se confirma este fenómeno a través de un estudio de la señal generada en función de la corriente de bombeo) [38]. También se ha reportado la generación a 40 GHz a través de un diodo láser F-P quantum-dash mediante un AP [18]. En este artículo se estudia la dependencia del ancho de línea de la señal RF respecto al número de modos y se observa que el ancho decrece al aumentar el número de modos.

CAPÍTULO

II

MODELO ANALÍTICO

II.0 Introducción

El término **ecuaciones de evolución (EV)** o rate equations es utilizado en las publicaciones relacionadas con los LS para referirse a las ecuaciones fenomenológicas que describen el comportamiento temporal del dispositivo y están en términos de sus parámetros característicos. Los modelos basados en EV han sido ampliamente utilizados para describir el funcionamiento dinámico de los LS [1, 13, 20, 21, 22, 23, 24, 25]. Son un par de ecuaciones diferenciales acopladas de la densidad de portadores (N) y la densidad de fotones (S_k). El modelo utilizado en este trabajo está basado en un par de ecuaciones para la evolución de la densidad de portadores (N) y para las amplitudes complejas de los modos en la cavidad (E_k).

ECUACIÓN DE LA DENSIDAD DE PORTADORES

La densidad de portadores N (electrones en la banda de conducción) depende del número de electrones que suministra la corriente de bombeo I/e , la tasa de recombinación espontánea $1/\tau_{esp}$ y la densidad de portadores recombinados vía emisión estimulada R_{est} :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{eV} - \frac{N}{\tau_{esp}} - R_{est}$$

V es el volumen de la región activa, N/τ_{esp} es la densidad de portadores recombinados vía emisión espontánea, mientras que R_{est} depende de la ganancia en la región activa y de la densidad de fotones en la cavidad.

ECUACIÓN DE LA AMPLITUD COMPLEJA DEL CAMPO ELÉCTRICO

La densidad de fotones en la cavidad es proporcional a la intensidad óptica de salida, de manera que esta intensidad comúnmente se normaliza para representar la densidad de fotones. En nuestro caso, utilizamos un modelo que calcula la densidad de fotones a partir de la amplitud compleja del campo eléctrico E_k (con $1 \leq k \leq M$, $M=3, 5$ y 7) y.

$$|S_{Total}|^2 = \left| \sum_{k=1}^M E_k \right|^2$$

La ecuación de la amplitud compleja del campo eléctrico asociado al k-esimo modo es:

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2} C (1 - i\alpha) (G - \gamma_k) E_k + \Delta\omega + \delta_{MDP}$$

donde C, α , G, y γ_k son el factor de confinamiento, el factor de crecimiento de ancho de línea, la ganancia y las pérdidas del modo k, respectivamente. $\Delta\omega$ es el término que toma en cuenta el desfaseamiento de los modos en la cavidad F-P al acoplarse y δ_{MDP} es el término no lineal que describe la modulación de la densidad de portadores.

II.1 Densidad de Portadores: N

La ecuación de evolución de la densidad de portadores (N) en [1] es

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{eV} - \frac{N}{\tau_e} - v_g g_d (N - N_{tr}) \cdot |E_T|^2 \quad (II.1.1)$$

donde $|E_T|^2$ es la intensidad total de los modos normalizada para representar la densidad de fotones en la cavidad:

$$|E_T|^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^M |E_k|^2 |U|^2}_{P_t} + \underbrace{\sum_{m=1}^{M-1} \sum_{k=m+1}^M (E_k E_{k-m}^* |U|^2 e^{-im\Omega t} + c.c.)}_{SUM_{osc}} \quad (II.1.2)$$

La densidad de fotones depende de la intensidad de cada modo (P_t) y de los productos cruzados (SUM_{osc}). P_t es una suma de números reales, mientras que SUM_{osc} es una suma de términos que oscilan a una frecuencia $(-\phi_k + \phi_{k-m} - m\Omega t)$, que varía en el tiempo según las fases y depende de un múltiplo de Ω según sea la separación entre los modos E_k y E_{k-m} .

Las constantes involucradas en las ecuaciones (II.1.1) y (II.1.2) se muestran a continuación:

| | |
|---|---|
| I = 0.3 A | Intensidad de la corriente de bombeo |
| e = 1.602x10 ⁻²⁴ C | Carga fundamental |
| V = 1000x0.2x1.2 μm ³ | Volumen de la región activa |
| τ _e = 1.7x10 ⁻⁹ s | Tiempo de vida de los portadores en la BC. |
| v _g = 3/4 x108 m/s | Velocidad de grupo |
| g _d ≡ a = 10 ⁻²⁰ m ² | Cte. de ganancia |
| N _{tr} = 10 ²⁴ | Densidad de portadores en transparencia |
| U | Distribución transversal del modo longitudinal TEM _{0,0} |
| Ω = 39.8 GHz | Frecuencia de separación entre los modos |

Tabla II.1 Constantes de la ecuación de la densidad de portadores.

Se propone una solución oscilatoria de frecuencia Ω para resolver la ecuación (II.1.1):

$$N = N_0 + \sum_{m=1}^{M-1} (N_m e^{-im\Omega t} + c.c.) \quad (II.1.3)$$

Sustituyendo (II.1.2) y (II.1.3) en (II.1.1),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[N_0 + \sum_{m=1}^{M-1} (N_m e^{-im\Omega t} + c.c.) \right] &= \frac{I}{eV} - \frac{1}{\tau_e} \left(N_0 + \sum_{m=1}^{M-1} (N_m e^{-im\Omega t} + c.c.) \right) \\ &\quad - v_g g_d \left(N_0 + \sum_{m=1}^{M-1} (N_m e^{-im\Omega t} + c.c.) - N_{tr} \right) \cdot (P_t + SUM_{osc}) \end{aligned}$$

Desarrollando la ecuación,

$$\frac{dN_0}{dt} + \sum_{m=1}^{M-1} \left(-im\Omega_{sp} N_m e^{-im\Omega t} + c.c. \right) = \frac{I}{eV} - \left(\frac{N_0}{\tau_e} + \frac{1}{\tau_e} \sum_{m=1}^{M-1} \left(N_m e^{-im\Omega t} + c.c. \right) \right) - v_g g_d \left(N_0 P_t + \sum_{m=1}^{M-1} \left(N_m e^{-im\Omega t} + c.c. \right) P_t - N_{tr} P_t + N_0 SUM_{osc} - N_{tr} SUM_{osc} \right)$$

En el último término del lado derecho de la igualdad se ha despreciado el término $\sum_{m=1}^{M-1} \left(N_m e^{-im\Omega t} + c.c. \right) SUM_{osc}$, ya que es un producto de dos términos oscilantes y produce nuevos términos que oscilan con frecuencias que no son de nuestro interés. Separando los términos estacionarios de los oscilantes, obtenemos dos ecuaciones de evolución:

$$\frac{dN_0}{dt} = \frac{I}{eV} - \frac{N_0}{\tau_e} - v_g g_d (N_0 - N_{tr}) P_t \quad (II.1.4)$$

$$\sum_{m=1}^{M-1} \left(-im\Omega N_m e^{-im\Omega t} + c.c. \right) = \frac{-1}{\tau_e} \sum_{m=1}^{M-1} \left(N_m e^{-im\Omega t} + c.c. \right) - v_g g_d \left[\sum_{m=1}^{M-1} \left(N_m e^{-im\Omega t} + c.c. \right) P_t + (N_0 - N_{tr}) SUM_{osc} \right] \quad (II.1.5)$$

Trabajando con (II.1.5),

$$\sum_{m=1}^{M-1} \left(\begin{array}{l} -im\Omega_{sp} N_m e^{-im\Omega t} + c.c. + \\ + \frac{1}{\tau_e} N_m e^{-im\Omega t} + c.c. + \\ + v_g g_d P_t N_m e^{-im\Omega t} + c.c. \end{array} \right) = -v_g g_d (N_0 - N_{tr}) \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{k=m+1}^M \left(E_k E_{k-m}^* |U|^2 e^{-im\Omega t} + c.c. \right)$$

Considerando que para toda m se cumple que:

$$\left(-im\Omega + 1/\tau_e + v_g g_d P_t \right) N_m e^{-im\Omega t} + c.c. = -v_g g_d (N_0 - N_{tr}) \sum_{k=m+1}^M E_k E_{k-m}^* |U|^2 e^{-im\Omega t} + c.c.$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por τ_e y expresando los complejos conjugados,

$$\left(1 + v_g g_d \tau_e P_t - im\Omega \tau_e \right) N_m \left(e^{-im\Omega t} + e^{im\Omega t} \right) = -v_g g_d \tau_e (N_0 - N_{tr}) \sum_{k=m+1}^M E_k E_{k-m}^* |U|^2 \left(e^{-im\Omega t} + e^{im\Omega t} \right)$$

$$N_m = |U|^2 \frac{-v_g g_d \tau_e (N_0 - N_{tr}) \sum_{k=m+1}^M E_k E_{k-m}^*}{1 + v_g g_d \tau_e P_t - im\Omega \tau_e} \quad (II.1.6)$$

Definiendo $N_m = |U|^2 \Delta N_m$, entonces

$$\Delta N_m = \frac{-v_g g_d \tau_e (N_0 - N_{tr}) \sum_{k=m+1}^M E_k E_{k-m}^*}{1 + v_g g_d \tau_e P_t - im\Omega \tau_e} \quad (II.1.7)$$

(II.1.6) es el coeficiente de la parte oscilatoria de (II.1.3).

Recapitulando, se ha obtenido (II.1.4) para la parte estacionaria y de la ecuación para la parte oscilatoria(II.1.5) se ha obtenido (II.1.6). Ahora introduciremos el factor de confinamiento (Γ) en la ganancia, para tomar en cuenta los efectos de confinación transversal (o bien, las pérdidas en las fronteras transversales) de la región activa. Además promediando espacialmente la ecuación (II.1.4), obtenemos las siguientes expresiones:

$$\frac{d\bar{N}_0}{dt} = \frac{I}{eV} - \frac{\bar{N}_0}{\tau_e} - \Gamma v_g g_d (N_0 - N_{tr}) \bar{P}_t \quad (II.1.8)$$

$$\Delta N_m = - \frac{\tau_e \Gamma v_g g_d (\bar{N}_0 - N_{tr}) \sum_{k=m+1}^M E_k E_{k-m}^*}{1 + \Gamma v_g g_d \tau_e P_t - im\Omega \tau_e} \quad (II.1.9)$$

Definiendo $G = \Gamma v_g g_d (\bar{N}_0 - N_{tr})$ y $P_s = 1/(\Gamma v_g g_d \tau_e)$, las ecuaciones (II.1.8) y (II.1.9) quedan:

$$\frac{d\bar{N}_0}{dt} = \frac{I}{eV} - \frac{\bar{N}_0}{\tau_e} - G \bar{P}_t \quad (II.1.10)$$

$$\Delta N_m = - (N_0 - N_{tr}) \frac{\sum_{k=m+1}^M E_k E_{k-m}^*}{P_s + P_t - im\Omega \tau_e P_s}$$

Si tomamos en cuenta que $1 + \frac{P_t}{P_s} \ll im\Omega \tau_e$,

$$\Delta N_m = - (N_0 - N_{tr}) \frac{\sum_{k=m+1}^M E_k E_{k-m}^*}{im\Omega \tau_e P_s} \quad (II.1.11)$$

II.2 Campo Eléctrico: $E_k(c)$

En este modelo, se considera al campo eléctrico como una onda plana y monocromática que varía en el tiempo con frecuencia ω_k .

$$E_k^{(c)} = U(x, y) E_k e^{-i\omega_k t} \quad (II.2.1)$$

con $U(x,y)$ como la distribución transversal del modo fundamental y E_k la amplitud compleja. E_k está caracterizada por su amplitud y su fase:

$$E_k(t) = A_k(t) e^{-i\phi_k(t)} \quad (II.2.2)$$

La ecuación de la amplitud compleja del k-ésimo modo longitudinal [1] es

$$\begin{aligned} \frac{dE_k}{dt} = & \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)(G-\gamma_k)E_k - i(\omega_k^i - \omega_k)E_k \\ & + \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)v_g g_d \Gamma C \left(\sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{k-m} + \Delta N_m^* E_{k+m}) \right) \end{aligned} \quad (II.2.3)$$

ΔN_m está definido en (II.1.11). En la siguiente tabla se presentan parámetros utilizados en (II.2.3).

| | |
|-----------------------------------|---|
| $\alpha_H = 4$ | Factor de crecimiento de ancho de línea |
| $G = g_d(N-N_0) m^{-1}$ | Ganancia lineal |
| $\gamma_k = 2.566 \times 10^{11}$ | Pérdidas del k-ésimo modo |
| $\omega_k^{(i)}$ | Frecuencia de resonancia en la cavidad F-P del modo k |
| ω_k | Frecuencia del modo k al acoplarse los modos |
| $\Gamma = 0.06$ | Factor de confinamiento |
| $C = 1$ | Factor de traslape |

Tabla II.2 constantes de la ecuación de la amplitud compleja E_k .

A continuación se realiza la separación de la parte real y la parte imaginaria de la ecuación (II.2.3) para 3 modos ($M=3$), con la finalidad de obtener las ecuaciones de evolución de la amplitud y de la fase. El desarrollo general para $M \leq 7$ se presenta a continuación.

II.2.1 Desarrollo General

En la ecuación de la amplitud compleja (II.2.3) la sumatoria en el último término se desarrolla en los apéndice E. En todos ellos aparece el término común $i(N_0 - N_{tr})/P_s \Omega_{sp} \tau_e$. Además, en todos los desarrollos se factoriza el término E_k y se separa la parte real de la imaginaria, de tal manera que la sumatoria queda de la siguiente manera:

$$\sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{k-m} + \Delta N_m^* E_{k+m}) = \frac{i(N_0 - N_{tr})}{P_s \Omega_{sp} \tau_e} [\text{Re} - i \text{Im}] E_k \quad (II.2.4)$$

Sustituyendo (II.2.4) y las definiciones de $G = v_g g_d \Gamma (N_0 - N_{tr})$ y $\mathcal{G}_{cdm} = C/\Omega_{sp} \tau_e$ en el último término de (II.2.3),

$$\frac{v_g g_d \Gamma C}{2} \frac{(N_0 - N_{tr})}{P_s \Omega_{sp} \tau_e} (i + \alpha_H) [\text{Re} - i \text{Im}] = \frac{1}{2} \frac{G \mathcal{G}_{cdm}}{P_s} [\alpha_H \text{Re} + \text{Im} + i(\text{Re} - \alpha_H \text{Im})] E_k$$

La ecuación (II.2.3) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dE_k}{dt} = & \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)(G-\gamma_k)E_k - i(\omega_k^i - \omega_k)E_k + \\ & + \frac{1}{2} \frac{G \mathcal{G}_{cdm}}{P_s} [\alpha_H \text{Re} + \text{Im} + i(\text{Re} - \alpha_H \text{Im})] E_k \end{aligned} \quad (II.2.5)$$

Introduciendo la definición de la amplitud compleja $E_k = A_k e^{-i\phi_k}$ en (II.2.5), entonces los tres términos toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dE_k}{dt} &= \frac{d}{dt} (A_k e^{-i\phi_k}) = \frac{dA_k}{dt} e^{-i\phi_k} - i \frac{d\phi_k}{dt} A_k e^{-i\phi_k} \\ \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)(G-\gamma_k)E_k &= \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)(G-\gamma_k)A_k e^{-i\phi_k} \\ -i(\omega_k^i - \omega_k)E_k &= -i(\omega_k^i - \omega_k)A_k e^{-i\phi_k}\end{aligned}$$

Sustituyendo en (II.2.5) y eliminando el factor común $e^{-i\phi_k}$,

$$\begin{aligned}\frac{dA_k}{dt} - i \frac{d\phi_k}{dt} A_k &= \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)(G-\gamma_k)A_k - i(\omega_k^i - \omega_k)A_k + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{G\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} [\alpha_H \text{Re} + \text{Im} + i(\text{Re} - \alpha_H \text{Im})] A_k\end{aligned}\quad (\text{II.2.6})$$

Separando la parte real de la imaginaria obtenemos las ecuaciones para la evolución de la amplitud y de la fase,

$$\frac{dA_k}{dt} = \frac{1}{2}(G-\gamma_k)A_k + \frac{1}{2} \frac{G\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} [\alpha_H \text{Re} + \text{Im}] A_k \quad (\text{II.2.7})$$

$$-\frac{d\phi_k}{dt} A_k = -(\omega_k^i - \omega_k) A_k - \frac{1}{2} \alpha_H (G-\gamma_k) A_k + \frac{1}{2} \frac{G\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} (\text{Re} - \alpha_H \text{Im}) A_k \quad (\text{II.2.8})$$

Reacomodando los términos,

$$\frac{dA_k}{dt} = \frac{G}{2} \left(1 + \frac{\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} [\alpha_H \text{Re} + \text{Im}] \right) A_k - \frac{1}{2} \gamma_k A_k \quad (\text{II.2.9})$$

$$\frac{d\phi_k}{dt} = (\omega_k^i - \omega_k) + \frac{G}{2} \left(\alpha_H - \frac{\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} [\text{Re} - \alpha_H \text{Im}] \right) - \frac{\alpha_H}{2} \gamma_k \quad (\text{II.2.10})$$

Las ecuaciones (II.2.9) y (II.2.10) son las ecuaciones de evolución de la amplitud y de la fase del k-ésimo modo, respectivamente. En la siguiente sección se obtienen las ecuaciones de evolución para el caso de M=3, 5 y 7 modos. Se realizan los siguientes pasos:

- 1) Se parte de la sección de sumatorias en el apéndice E y se selecciona la expresión $EE_{k,M}$ correspondiente.
- 2) Se expresa $E_{k,M}$ en términos de las amplitudes y fases.
- 3) Se separa la parte real y la imaginaria y se definen como Re e Im.
- 4) Se sustituyen las expresiones de Re e Im en (II.2.9) y (II.2.10)
- 5) Se reacomodan y se utilizan las identidades del apéndice D.
- 6) Se sustituye en (II.2.9) y (II.2.10).

II.2.2 3 Modos

La ecuación (II.2.3) para M=3 es

$$\begin{aligned} \frac{dE_k}{dt} = & \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)(G-\gamma_k)E_k - i(\omega_k^i - \omega_k)E_k \\ & + \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)v_g g_d \Gamma C \left(\sum_{m=1}^2 (\Delta N_m E_{k-m} + \Delta N_m^* E_{k+m}) \right) \end{aligned} \quad (II.2.11)$$

MODO 1. Desarrollando la sumatoria en el último término,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^2 (\Delta N_m E_{1-m} + \Delta N_m^* E_{1+m}) &= \left(\cancel{\Delta N_1 E_0} + \Delta N_1^* E_2 \right) + \left(\cancel{\Delta N_2 E_{-1}} + \Delta N_2^* E_3 \right) \\ &= \Delta N_1^* E_2 + \Delta N_2^* E_3 \end{aligned} \quad (II.2.12)$$

Sustituyendo (II.1.11) en (II.2.12) queda:

$$\Delta N_1^* E_2 + \Delta N_2^* E_3 = -(N_0 - N_{tr}) \cdot \left[\left(\frac{E_2 E_1^* + E_3 E_2^*}{-iP_s \Omega \tau_e} \right)^* E_2 + \left(\frac{E_3 E_1^*}{-2iP_s \Omega \tau_e} \right)^* E_3 \right]$$

Ya que el complejo conjugado (c. c.) de un cociente es el cociente de los c. c., entonces

$$\begin{aligned} \Delta N_1^* E_2 + \Delta N_2^* E_3 &= -(N_0 - N_{tr}) \cdot \left[\frac{E_2^* E_1 + E_3^* E_2}{iP_s \Omega \tau_e} E_2 + \frac{E_3^* E_1}{2iP_s \Omega \tau_e} E_3 \right] \\ \Delta N_1^* E_2 + \Delta N_2^* E_3 &= \frac{i(N_0 - N_{tr})}{P_s \Omega \tau_e} \cdot \left[|E_2|^2 E_1 + E_3^* E_2^2 + \frac{1}{2} |E_3|^2 E_1 \right] \end{aligned} \quad (II.2.13)$$

Sustituyendo (II.2.13) en (II.2.11),

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} = & \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)(G-\gamma_1)E_1 - i(\omega_1^i - \omega_1)E_1 + \\ & + \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)v_g g_d \Gamma C \frac{i(N_0 - N_{tr})}{P_s \Omega \tau_e} \cdot \left[|E_2|^2 E_1 + E_3^* E_2^2 + \frac{1}{2} |E_3|^2 E_1 \right] \end{aligned} \quad (II.2.14)$$

Utilizando las definiciones:

$$G = v_g g_d \Gamma (N_0 - N_{tr}) \quad (II.2.15)$$

$$\mathcal{G}_{cdm} = C/\Omega \tau_e \quad (II.2.16)$$

Entonces, (II.2.14) queda:

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} = & \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)(G-\gamma_1)E_1 - i(\omega_1^i - \omega_1)E_1 + \\ & + \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)\frac{iG\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} \left[|E_2|^2 E_1 + E_3^* E_2^2 + \frac{1}{2}|E_3|^2 E_1 \right] \end{aligned} \quad (\text{II.2.17})$$

El siguiente paso consiste en sustituir $E_k = A_k e^{-i\phi_k}$ en (II.2.17) y luego separar la parte real y la imaginaria. La derivada al lado izquierdo de (II.2.17) tomará la siguiente forma:

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{d}{dt}(A_1 e^{-i\phi_1}) = \frac{dA_1}{dt} e^{-i\phi_1} - i \frac{d\phi_1}{dt} A_1 e^{-i\phi_1} \quad (\text{II.2.18})$$

Mientras que el término entre corchetes en (II.2.17)

$$\left[|E_2|^2 E_1 + E_3^* E_2^2 + \frac{1}{2}|E_3|^2 E_1 \right] = A_2^2 A_1 e^{-i\phi_1} + A_3 A_2^2 e^{i(\phi_3 - 2\phi_2)} + \frac{1}{2} A_3^2 A_1 e^{-i\phi_1} \quad (\text{II.2.19})$$

Entonces, (II.2.17) queda

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} e^{-i\phi_1} - i \frac{d\phi_1}{dt} A_1 e^{-i\phi_1} = & \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)(G-\gamma_1)A_1 e^{-i\phi_1} - i(\omega_1^i - \omega_1)A_1 e^{-i\phi_1} + \\ & + \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)\frac{iG\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} \left[A_2^2 + \frac{A_3 A_2^2}{A_1} e^{-i(2\phi_2 - \phi_3 - \phi_1)} + \frac{1}{2} A_3^2 \right] A_1 e^{-i\phi_1} \end{aligned}$$

Eliminando el factor común $e^{-i\phi_1}$ y definiendo la fase relativa:

$$\psi \equiv 2\phi_2 - \phi_3 - \phi_1 = (\phi_2 - \phi_1) - (\phi_3 - \phi_2) \quad (\text{II.2.20})$$

la ecuación queda

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} - i \frac{d\phi_1}{dt} A_1 = & \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)(G-\gamma_1)A_1 - i(\omega_1^i - \omega_1)A_1 + \\ & + \frac{1}{2}(i + \alpha_H)\frac{G\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} \left[\frac{1}{2} A_3^2 A_1 + A_2^2 A_1 + A_3 A_2^2 e^{-i\psi} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.2.21})$$

Abreviando el término entre corchetes,

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} A_3^2 A_1 + A_2^2 A_1 + A_3 A_2^2 e^{-i\psi} \right] = & \overbrace{\frac{1}{2} A_3^2 A_1 + A_2^2 A_1 + A_3 A_2^2 \cos\psi}^{\text{Re}} - i \overbrace{A_3 A_2^2 \sin\psi}^{\text{Im}} \\ = & \text{Re} - i \text{Im} \end{aligned} \quad (\text{II.2.22})$$

Al sustituir (II.2.22) en el último término de (II.2.21) nos queda

$$\frac{1}{2} \frac{G\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} (i + \alpha_H) [\text{Re} - i \text{Im}] = \frac{1}{2} \frac{G\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} [\alpha_H \text{Re} + \text{Im} + i(\text{Re} - \alpha_H \text{Im})] \quad (\text{II.2.23})$$

Sustituyendo (II.2.23) en (II.2.21),

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} - i \frac{d\phi_1}{dt} A_1 &= \frac{1}{2} (1 - i\alpha_H) (G - \gamma_1) A_1 - i (\omega_1^i - \omega_1) A_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{G\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} [\alpha_H \text{Re} + \text{Im} + i(\text{Re} - \alpha_H \text{Im})] \end{aligned}$$

Separando la parte real de la imaginaria obtenemos el siguiente par de ecuaciones:

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{1}{2} (G - \gamma_1) A_1 + \frac{1}{2} \frac{G\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} [\alpha_H \text{Re} + \text{Im}] \quad (\text{II.2.24})$$

$$-\frac{d\phi_1}{dt} A_1 = -(\omega_1^i - \omega_1) A_1 - \frac{1}{2} \alpha_H (G - \gamma_1) A_1 + \frac{1}{2} \frac{G\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} (\text{Re} - \alpha_H \text{Im}) \quad (\text{II.2.25})$$

Sustituyendo los valores de Re e Im de (II.2.22) en (II.2.24) y (II.2.25)

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{1}{2} (G - \gamma_1) A_1 + \frac{1}{2} \frac{G\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} \left[\alpha_H \left(\frac{1}{2} A_3^2 A_1 + A_2^2 A_1 + A_3 A_2^2 \cos \psi \right) + A_3 A_2^2 \text{sen} \psi \right] \quad (\text{II.2.26})$$

$$\begin{aligned} -\frac{d\phi_1}{dt} A_1 &= -(\omega_1^i - \omega_1) A_1 - \frac{1}{2} \alpha_H (G - \gamma_1) A_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{G\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} \left(\frac{1}{2} A_3^2 A_1 + A_2^2 A_1 + A_3 A_2^2 \cos \psi - \alpha_H A_3 A_2^2 \text{sen} \psi \right) \end{aligned} \quad (\text{II.2.27})$$

Utilizando las identidades de apéndice D,

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{1}{2} (G - \gamma_1) A_1 + \frac{1}{2} \frac{G\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} \left[\frac{\alpha_H}{2} A_3^2 A_1 + \alpha_H A_2^2 A_1 + A_3 A_2^2 \sqrt{1 + \alpha_H^2} \text{sen}(\psi + \arctan \alpha_H) \right] \quad (\text{II.2.28})$$

$$\begin{aligned} -\frac{d\phi_1}{dt} A_1 &= -(\omega_1^i - \omega_1) A_1 - \frac{1}{2} \alpha_H (G - \gamma_1) A_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{G\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} \left(\frac{1}{2} A_3^2 A_1 + A_2^2 A_1 + A_3 A_2^2 \sqrt{1 + \alpha_H^2} \cos(\psi + \arctan \alpha_H) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.2.29})$$

La ecuación (II.2.28) representa la evolución de la amplitud. Finalmente, acomodando,

$$\boxed{\frac{dA_1}{dt} = \frac{G}{2} \left[1 + \mathcal{G}_{cdm} \left(\frac{\alpha_H}{2} \frac{A_3^2}{P_s} + \alpha_H \frac{A_2^2}{P_s} + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \frac{A_2^2 A_3}{P_s A_1} \text{sen}(\psi + \arctan \alpha_H) \right) \right] A_1 - \frac{1}{2} \gamma_1 A_1} \quad (\text{II.2.30})$$

La ecuación (II.2.29) representa la evolución de la fase. Reacomodando,

$$\boxed{\frac{d\phi_1}{dt} = (\omega_1^i - \omega_1) + \frac{G}{2} \left[\alpha_H - \mathcal{G}_{cdm} \left(\frac{1}{2} \frac{A_3^2}{P_s} + \frac{A_2^2}{P_s} + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \frac{A_2^2 A_3}{P_s A_1} \cos(\psi + \arctan \alpha_H) \right) \right] - \frac{1}{2} \alpha_H \gamma_1} \quad (\text{II.2.31})$$

MODO 2 (k=2). Para este caso, la sumatoria en la ecuación(II.2.11)

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^2 (\Delta N_m E_{2-m} + \Delta N_m^* E_{2+m}) &= (\Delta N_1 E_{2-1} + \Delta N_1^* E_{2+1}) + (\cancel{\Delta N_2 E_{2-2}} + \cancel{\Delta N_2^* E_{2+2}}) \\ &= \Delta N_1 E_1 + \Delta N_1^* E_3 \end{aligned} \quad (\text{II.2.32})$$

De (II.1.11) se obtiene que

$$\Delta N_1 E_1 + \Delta N_1^* E_3 = \frac{i(N_0 - N_{tr})}{P_s \Omega_{sp} \tau_e} \left(-|E_1|^2 + |E_3|^2 \right) E_2 \quad (\text{II.2.33})$$

Sustituyendo en (II.2.11)

$$\begin{aligned} \frac{dE_2}{dt} &= \frac{1}{2} (1 - i\alpha_H) (G - \gamma_2) E_2 - i(\omega_2^i - \omega_2) E_2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} (1 - i\alpha_H) v_g g_d \Gamma C \frac{i(N_0 - N_{tr})}{P_s \Omega_{sp} \tau_e} \left(|E_1|^2 - |E_3|^2 \right) E_2 \end{aligned} \quad (\text{II.2.34})$$

Sustituyendo $E_k = A_k e^{-i\phi_k}$ y las definiciones (II.2.15) y (II.2.16) en (II.2.34),

$$\begin{aligned} \frac{dA_2}{dt} e^{-i\phi_2} - i \frac{d\phi_2}{dt} A_2 e^{-i\phi_2} &= \frac{1}{2} (1 - i\alpha_H) (G - \gamma_2) A_2 e^{-i\phi_2} - i(\omega_2^i - \omega_2) A_2 e^{-i\phi_2} \\ &\quad - \frac{1}{2} (i + \alpha_H) \frac{G \mathcal{G}_{cdm}}{P_s} (A_1^2 - A_3^2) A_2 e^{-i\phi_2} \end{aligned} \quad (\text{II.2.35})$$

Eliminando el término común $e^{-i\phi_2}$ y separando la parte real y la imaginaria,

$$\frac{dA_2}{dt} = \frac{1}{2} (G - \gamma_2) A_2 - \frac{1}{2} \alpha_H \frac{G \mathcal{G}_{cdm}}{P_s} (A_1^2 - A_3^2) A_2 \quad (\text{II.2.36})$$

$$-\frac{d\phi_2}{dt} A_2 = -\frac{1}{2} \alpha_H (G - \gamma_2) A_2 - (\omega_2^i - \omega_2) A_2 - \frac{1}{2} \frac{G \mathcal{G}_{cdm}}{P_s} (A_1^2 - A_3^2) A_2 \quad (\text{II.2.37})$$

Reescribiendo (II.2.36) obtenemos la forma final de la ecuación de la amplitud A_2

$$\boxed{\frac{dA_2}{dt} = \frac{G}{2} \left[1 - \alpha_H \frac{\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} (A_1^2 - A_3^2) \right] A_2 - \frac{1}{2} \gamma_2 A_2} \quad (\text{II.2.38})$$

Reescribiendo (II.2.37) obtenemos la forma final de la ecuación de la fase ϕ_2

$$\boxed{\frac{d\phi_2}{dt} = (\omega_2^i - \omega_2) + \frac{G}{2} \left[\alpha_H + \frac{\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} (A_1^2 - A_3^2) \right] - \frac{1}{2} \alpha_H \gamma_2} \quad (\text{II.2.39})$$

MODO 3 (k=3). La sumatoria en (II.2.11)

$$\sum_{m=1}^2 (\Delta N_m E_{3-m} + \Delta N_m^* E_{3+m}) = \left(\Delta N_1 E_2 + \cancel{\Delta N_1^* E_4} \right) + \left(\Delta N_2 E_1 + \cancel{\Delta N_2^* E_5} \right) \quad (\text{II.2.40})$$

$$= \Delta N_1 E_2 + \Delta N_2 E_1$$

Utilizando la definición de ΔN_m en (II.1.11),

$$\Delta N_1 E_2 + \Delta N_2 E_1 = -\frac{i(N_0 - N_{tr})}{P_s \Omega_{sp} \tau_e} \cdot \left[E_1^* E_2^2 + |E_2|^2 E_3 + \frac{|E_1|^2 E_3}{2} \right] \quad (\text{II.2.41})$$

Sustituyendo (II.2.41) en (II.2.11)

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2}(1 - i\alpha_H)(G - \gamma_k)E_k - i(\omega_k^i - \omega_k)E_k$$

$$- \frac{1}{2}(1 - i\alpha_H)v_g g_d \Gamma C \frac{i(N_0 - N_{tr})}{P_s \Omega_{sp} \tau_e} \left[E_1^* E_2^2 + |E_2|^2 E_3 + \frac{|E_1|^2 E_3}{2} \right] \quad (\text{II.2.42})$$

Sustituyendo $E_k = A_k e^{-i\phi_k}$ y las definiciones (II.2.15) y (II.2.16) en (II.2.34),

$$\frac{dA_3}{dt} - i \frac{d\phi_3}{dt} A_3 = \frac{1}{2}(1 - i\alpha_H)(G - \gamma_3)A_3 - i(\omega_3^i - \omega_3)A_3 -$$

$$- \frac{1}{2}(i + \alpha_H) \frac{G \mathcal{G}_{cdm}}{P_s} \left[\frac{A_1 A_2^2}{A_3} e^{-i\psi} + A_2^2 + \frac{1}{2} A_1^2 \right] A_3 \quad (\text{II.2.43})$$

Reescribiendo el término entre corchetes

$$\left[\frac{1}{2} A_1^2 + A_2^2 + \frac{A_1 A_2^2}{A_3} e^{-i\psi} \right] = \overbrace{\frac{1}{2} A_1^2 + A_2^2 + \frac{A_1 A_2^2}{A_3} \cos \psi}^{\text{Re}} - i \overbrace{\frac{A_1 A_2^2}{A_3} \sin \psi}^{\text{Im}} \quad (\text{II.2.44})$$

$$= \text{Re} - i \text{Im}$$

Separando la parte real y la imaginaria,

$$\frac{dA_3}{dt} = \frac{1}{2}(G - \gamma_3)A_3 - \frac{1}{2} \frac{G \mathcal{G}_{cdm}}{P_s} [\alpha_H \text{Re} + \text{Im}] A_3 \quad (\text{II.2.45})$$

$$- \frac{d\phi_3}{dt} A_3 = -\frac{1}{2} \alpha_H (G - \gamma_3) A_3 - (\omega_3^i - \omega_3) A_3 - \frac{1}{2} \frac{G \mathcal{G}_{cdm}}{P_s} (\text{Re} - \alpha_H \text{Im}) A_3 \quad (\text{II.2.46})$$

La ecuación (II.2.45) representa la evolución de la amplitud A_3 . Sustituyendo Re e Im de (II.2.44) en (II.2.45),

$$\frac{dA_3}{dt} = \frac{1}{2}(G - \gamma_3)A_3 - \frac{1}{2} \frac{G \mathcal{G}_{cdm}}{P_s} \left[\alpha_H \frac{1}{2} A_1^2 + \alpha_H A_2^2 + \alpha_H \frac{A_1 A_2^2}{A_3} \cos \psi + \frac{A_1 A_2^2}{A_3} \sin \psi \right] A_3 \quad (\text{II.2.47})$$

Usando el apéndice D y reacomodando,

$$\frac{dA_3}{dt} = \frac{G}{2} \left[1 - \mathcal{G}_{cdm} \left(\frac{\alpha_H}{2} \frac{A_1^2}{P_s} + \alpha_H \frac{A_2^2}{P_s} + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \frac{A_2^2 A_1}{P_s A_3} \operatorname{sen}(\psi + \arctan \alpha_H) \right) \right] A_3 - \frac{1}{2} \gamma_3 A_3 \quad (\text{II.2.48})$$

La ec. (II.2.46) representa la evolución de la fase ϕ_3 . Sustituyendo Re e Im de (II.2.44) en (II.2.46)

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_3}{dt} A_3 = & \frac{1}{2} \alpha_H (G - \gamma_3) A_3 + (\omega_3^i - \omega_3) A_3 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{G \mathcal{G}_{cdm}}{P_s} \left(\frac{1}{2} A_1^2 + A_2^2 + \frac{A_1 A_2^2}{A_3} \cos \psi - \alpha_H \frac{A_1 A_2^2}{A_3} \operatorname{sen} \psi \right) A_3 \end{aligned} \quad (\text{II.2.49})$$

Reacomodando y utilizando la identidad tal,

$$\frac{d\phi_3}{dt} = (\omega_3^i - \omega_3) + \frac{G}{2} \left[\alpha_H + \mathcal{G}_{cdm} \left(\frac{1}{2} \frac{A_1^2}{P_s} + \frac{A_2^2}{P_s} + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \frac{A_2^2 A_1}{P_s A_3} \cos(\psi + \arctan \alpha_H) \right) \right] - \frac{1}{2} \alpha_H \gamma_3 \quad (\text{II.2.50})$$

II.2.3 5 Modos

En esta sección se presentan las fases relativas y las ecuaciones finales de amplitud y fase para $M=5$ y $1 \leq k \leq M$. Estos resultados se obtienen mediante el uso del desarrollo general presentado en la sección 2.2.1. Para el caso del primer modo se realiza el desarrollo completo a continuación.

MODO 1. Partiendo de la sección de sumatorias en el apéndice E. $EE_{7,1}$ para el caso de $M=5$, $k=1$:

$$\sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{1-m} + \Delta N_m^* E_{1+m}) = \frac{i(N_0 - N_{tr})}{P_s \Omega_{sp} \tau_e} \overbrace{\left[\begin{aligned} & |E_2|^2 + \frac{1}{2} |E_3|^2 + \frac{1}{3} |E_4|^2 + \frac{1}{4} |E_5|^2 + \frac{E_3^* E_2^2}{E_1} + \\ & + \frac{3 E_4^* E_3 E_2}{E_1} + \frac{1 E_5^* E_3^2}{E_1} + \frac{4 E_5^* E_4 E_2}{E_1} \end{aligned} \right]}^{EE_{5,1}} E_1$$

Sustituyendo $E_k = A_k e^{-i\psi_k}$,

$$\begin{aligned} EE_{5,1} = & A_2^2 + \frac{1}{2} A_3^2 + \frac{1}{3} A_4^2 + \frac{1}{4} A_5^2 + \frac{A_3 A_2^2}{A_1} e^{i(\phi_3 - 2\phi_2 + \phi_1)} + \\ & + \frac{3 A_4 A_3 A_2}{2 A_1} e^{i(\phi_4 - \phi_3 - \phi_2 + \phi_1)} + \frac{1 A_5 A_3^2}{2 A_1} e^{i(\phi_5 - 2\phi_3 + \phi_1)} + \frac{4 A_5 A_4 A_2}{3 A_1} e^{i(\phi_5 - \phi_4 - \phi_2 + \phi_1)} \end{aligned}$$

Definiendo las fases relativas,

$$\phi_3 - 2\phi_2 + \phi_1 = (\phi_3 - \phi_2) - (\phi_2 - \phi_1) = \psi_{321}$$

$$\phi_4 - \phi_3 - \phi_2 + \phi_1 = (\phi_4 - \phi_3) - (\phi_2 - \phi_1) = \psi_{4321}$$

$$\phi_5 - 2\phi_3 + \phi_1 = (\phi_5 - \phi_3) - (\phi_3 - \phi_1) = \psi_{531}$$

$$\phi_5 - \phi_4 - \phi_2 + \phi_1 = (\phi_5 - \phi_4) - (\phi_2 - \phi_1) = \psi_{5421}$$

$$EE_{5,1} = \overbrace{A_2^2 + \frac{1}{2}A_3^2 + \frac{1}{3}A_4^2 + \frac{1}{4}A_5^2}^{a_{5,1}} + \frac{A_3A_2^2}{A_1} e^{i\psi_{321}} + \frac{3}{2} \frac{A_4A_3A_2}{A_1} e^{i\psi_{4321}} + \frac{1}{2} \frac{A_5A_3^2}{A_1} e^{i\psi_{531}} + \frac{4}{3} \frac{A_5A_4A_2}{A_1} e^{i\psi_{5421}} \quad (II.2.51)$$

Usando (II.2.51) en (II.2.4), la parte real

$$\alpha_H \text{Re} + \text{Im} = \alpha_H a_{5,1} + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \cdot \left(\begin{aligned} & \frac{A_3A_2^2}{A_1} \text{sen}(\psi_{321} - \arctan \alpha_H) + \frac{3}{2} \frac{A_4A_3A_2}{A_1} \text{sen}(\psi_{4321} - \arctan \alpha_H) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{A_5A_3^2}{A_1} \text{sen}(\psi_{531} - \arctan \alpha_H) + \frac{4}{3} \frac{A_5A_4A_2}{A_1} \text{sen}(\psi_{5421} - \arctan \alpha_H) \end{aligned} \right) \quad (II.2.52)$$

La parte imaginaria,

$$\text{Re} - \alpha_H \text{Im} = a_{5,1} + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \cdot \left(\begin{aligned} & \frac{A_3A_2^2}{A_1} \cos(\psi_{321} - \arctan \alpha_H) + \frac{3}{2} \frac{A_4A_3A_2}{A_1} \cos(\psi_{4321} - \arctan \alpha_H) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{A_5A_3^2}{A_1} \cos(\psi_{531} - \arctan \alpha_H) + \frac{4}{3} \frac{A_5A_4A_2}{A_1} \cos(\psi_{5421} - \arctan \alpha_H) \end{aligned} \right) \quad (II.2.53)$$

donde $a_{5,1} = A_2^2 + \frac{1}{2}A_3^2 + \frac{1}{3}A_4^2 + \frac{1}{4}A_5^2$. Sustituyendo (II.2.52) en (II.2.9),

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{G}{2} \left\{ 1 + \frac{g_{cdm}}{P_s} \left[\alpha_H a_{5,1} + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \cdot \left(\begin{aligned} & \frac{A_3A_2^2}{A_1} \text{sen}(\psi_{321} - \arctan \alpha_H) + \\ & + \frac{3}{2} \frac{A_4A_3A_2}{A_1} \text{sen}(\psi_{4321} - \arctan \alpha_H) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{A_5A_3^2}{A_1} \text{sen}(\psi_{531} - \arctan \alpha_H) + \\ & + \frac{4}{3} \frac{A_5A_4A_2}{A_1} \text{sen}(\psi_{5421} - \arctan \alpha_H) \end{aligned} \right) \right] \right\} A_1 - \frac{1}{2} \gamma_1 A_1$$

Sustituyendo (II.2.53) en (II.2.10),

$$\frac{d\phi_1}{dt} = (\omega_1^i - \omega_1) + \frac{G}{2} \left\{ \alpha_H - \frac{g_{cdm}}{P_s} \cdot \left[\begin{aligned} & a_{5,1} + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \cdot \\ & \left(\frac{A_3 A_2^2}{A_1} \cos(\psi_{321} - \arctan \alpha_H) + \right. \\ & \quad + \frac{3}{2} \frac{A_4 A_3 A_2}{A_1} \cos(\psi_{4321} - \arctan \alpha_H) + \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{A_5 A_3^2}{A_1} \cos(\psi_{531} - \arctan \alpha_H) + \\ & \quad \left. + \frac{4}{3} \frac{A_5 A_4 A_2}{A_1} \cos(\psi_{5421} - \arctan \alpha_H) \right) \right] \right\} - \frac{\alpha_H}{2} \gamma_1$$

MODO 2

$$\phi_3 - \phi_1 - \phi_4 + \phi_2 = (\phi_2 - \phi_1) - (\phi_4 - \phi_3) = -\psi_{4321}$$

$$\phi_4 - 2\phi_3 + \phi_2 = (\phi_4 - \phi_3) - (\phi_3 - \phi_2) = \psi_{432}$$

$$\phi_4 - \phi_1 - \phi_5 + \phi_2 = (\phi_2 - \phi_1) - (\phi_5 - \phi_4) = -\psi_{5421}$$

$$\phi_5 - \phi_3 - \phi_4 + \phi_2 = (\phi_5 - \phi_4) - (\phi_3 - \phi_2) = \psi_{5432}$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \frac{GA_2}{2} \left\{ 1 + \frac{g_{cdm}}{P_s} \cdot \left[\begin{aligned} & \alpha_H a_2 + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \cdot \\ & \left(- \frac{A_1 A_3 A_4}{2A_2} \text{sen}(\psi_{4321} + \arctan \alpha_H) + \right. \\ & \quad + \frac{A_3^2 A_4}{A_2} \text{sen}(\psi_{432} - \arctan \alpha_H) - \\ & \quad - \frac{2A_1 A_4 A_5}{3A_2} \text{sen}(\psi_{5421} + \arctan \alpha_H) + \\ & \quad \left. + \frac{3A_3 A_4 A_5}{2A_2} \text{sen}(\psi_{5432} - \arctan \alpha_H) \right) \right] \right\} - \frac{1}{2} \gamma_2 A_2$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = \frac{G}{2} \left\{ \alpha_H - \frac{g_{cdm}}{P_s} \cdot \left[\begin{array}{l} a_2 + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \cdot \\ \left(-\frac{A_1 A_3 A_4}{2 A_2} \cos(\psi_{4321} + \arctan \alpha_H) + \right. \\ \left. + \frac{A_3^2 A_4}{A_2} \cos(\psi_{432} - \arctan \alpha_H) - \right. \\ \left. - \frac{2 A_1 A_4 A_5}{3 A_2} \cos(\psi_{5421} + \arctan \alpha_H) + \right. \\ \left. + \frac{3 A_3 A_4 A_5}{2 A_2} \cos(\psi_{5432} - \arctan \alpha_H) \right) \right] \right\} + (\omega_2^i - \omega_2) - \frac{\alpha_H}{2} \gamma_2$$

MODO 3

$$\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3 = (\phi_3 - \phi_2) - (\phi_2 - \phi_1) = \psi_{321}$$

$$-\phi_1 - \phi_4 + \phi_2 + \phi_3 = (\phi_2 - \phi_1) - (\phi_4 - \phi_3) = -\psi_{4321}$$

$$\phi_4 - \phi_2 - \phi_5 + \phi_3 = (\phi_3 - \phi_2) - (\phi_5 - \phi_4) = -\psi_{5432}$$

$$\phi_5 - 2\phi_4 + \phi_3 = (\phi_5 - \phi_4) - (\phi_4 - \phi_3) = \psi_{543}$$

$$\frac{dA_3}{dt} = \frac{G}{2} \left\{ 1 + \frac{g_{cdm}}{P_s} \cdot \left[\begin{array}{l} \alpha_H a_{5,3} + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \cdot \\ \left(-\frac{A_1 A_2^2}{A_3} \text{sen}(\psi_{321} - \arctan \alpha_H) + \right. \\ \left. + \frac{A_1 A_2 A_4}{2 A_3} \text{sen}(\psi_{4321} + \arctan \alpha_H) + \right. \\ \left. + \frac{3 A_2 A_4 A_5}{2 A_3} \text{sen}(\psi_{5432} + \arctan \alpha_H) + \right. \\ \left. + \frac{A_4^2 A_5}{A_3} \text{sen}(\psi_{543} - \arctan \alpha_H) \right) \right] \right\} A_3 - \frac{1}{2} \gamma_3 A_3$$

$$\frac{d\phi_3}{dt} = (\omega_3^i - \omega_3) + \frac{G}{2} \left\{ \alpha_H - \frac{\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} \left[a_{5,3} + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \cdot \left(-\frac{A_1 A_2^2}{A_3} \cos(\psi_{321} - \arctan \alpha_H) + \frac{1}{2} \frac{A_1 A_2 A_4}{A_3} \cos(\psi_{4321} + \arctan \alpha_H) + \frac{3}{2} \frac{A_2 A_4 A_5}{A_3} \cos(\psi_{5432} + \arctan \alpha_H) + \frac{A_4^2 A_5}{A_3} \cos(\psi_{543} - \arctan \alpha_H) \right) \right] \right\} - \frac{\alpha_H}{2} \gamma_3$$

MODO 4

$$\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 + \phi_4 = (\phi_4 - \phi_3) - (\phi_2 - \phi_1) = \psi_{4321}$$

$$\phi_2 - 2\phi_3 + \phi_4 = (\phi_4 - \phi_3) - (\phi_3 - \phi_2) = \psi_{432}$$

$$\phi_3 - \phi_2 - \phi_5 + \phi_4 = (\phi_3 - \phi_2) - (\phi_5 - \phi_4) = -\psi_{5432}$$

$$\phi_2 - \phi_1 - \phi_5 + \phi_4 = (\phi_2 - \phi_1) - (\phi_5 - \phi_4) = -\psi_{5421}$$

$$\frac{dA_4}{dt} = \frac{G}{2} \left\{ 1 + \frac{\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} \left[\alpha_H a_{5,4} + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \cdot \left(-\frac{3}{2} \frac{A_1 A_2 A_3}{A_4} \text{sen}(\psi_{4321} - \arctan \alpha_H) - \frac{A_2 A_3^2}{A_4} \text{sen}(\psi_{432} - \arctan \alpha_H) + \frac{2}{3} \frac{A_1 A_2 A_5}{A_4} \text{sen}(\psi_{5421} + \arctan \alpha_H) + \frac{1}{2} \frac{A_2 A_3 A_5}{A_4} \text{sen}(\psi_{5432} + \arctan \alpha_H) \right) \right] \right\} A_4 - \frac{1}{2} \gamma_4 A_4$$

$$\frac{d\phi_4}{dt} = (\omega_4^i - \omega_4) + \frac{G}{2} \left\{ \alpha_H - \frac{\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} \left[a_{5,4} + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \cdot \left(-\frac{3}{2} \frac{A_1 A_2 A_3}{A_4} \cos(\psi_{4321} - \arctan \alpha_H) - \frac{A_2 A_3^2}{A_4} \cos(\psi_{432} - \arctan \alpha_H) + \frac{2}{3} \frac{A_1 A_2 A_5}{A_4} \cos(\psi_{5421} + \arctan \alpha_H) + \frac{1}{2} \frac{A_2 A_3 A_5}{A_4} \cos(\psi_{5432} + \arctan \alpha_H) \right) \right] \right\} - \frac{\alpha_H}{2} \gamma_4$$

MODO 5

$$\phi_1 - 2\phi_3 + \phi_5 = (\phi_5 - \phi_3) - (\phi_3 - \phi_1) = \psi_{531}$$

$$\phi_1 - \phi_2 - \phi_4 + \phi_5 = (\phi_5 - \phi_4) - (\phi_2 - \phi_1) = \psi_{5421}$$

$$\phi_2 - \phi_3 - \phi_4 + \phi_5 = (\phi_5 - \phi_4) - (\phi_3 - \phi_2) = \psi_{5432}$$

$$\phi_3 - 2\phi_4 + \phi_5 = (\phi_5 - \phi_4) - (\phi_4 - \phi_3) = \psi_{543}$$

$$\frac{dA_5}{dt} = \frac{G}{2} \left\{ 1 + \frac{g_{cdm}}{P_s} \left[\alpha_H a_{5,5} + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{A_1 A_3^2}{A_5} \text{sen}(\psi_{531} - \arctan \alpha_H) + \frac{4}{3} \frac{A_1 A_2 A_4}{A_5} \text{sen}(\psi_{5421} - \arctan \alpha_H) + \frac{3}{2} \frac{A_2 A_3 A_4}{A_5} \text{sen}(\psi_{5432} - \arctan \alpha_H) + \frac{A_3 A_4^2}{A_5} \text{sen}(\psi_{543} - \arctan \alpha_H) \right) \right] \right\} A_5 - \frac{1}{2} \gamma_5 A_5$$

$$\frac{d\phi_5}{dt} = (\omega_5^i - \omega_5) + \frac{G}{2} \left\{ a_{5,5} - \frac{g_{cdm}}{P_s} \left[a_5 + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{A_1 A_3^2}{A_5} \cos(\psi_{531} - \arctan \alpha_H) + \frac{4}{3} \frac{A_1 A_2 A_4}{A_5} \cos(\psi_{5421} - \arctan \alpha_H) + \frac{3}{2} \frac{A_2 A_3 A_4}{A_5} \cos(\psi_{5432} - \arctan \alpha_H) + \frac{A_3 A_4^2}{A_5} \cos(\psi_{543} - \arctan \alpha_H) \right) \right] \right\} - \frac{\alpha_H}{2} \gamma_5$$

II.2.4 7 Modos

En este caso, se presentan las fases relativas del primer modo junto con las ecuaciones de amplitud y fase obtenidas. Para el resto de los modos se expresan solamente las fases relativas, tomando en cuenta que las amplitudes contienen términos sinusoidales con las fases relativas como argumento principal, mientras que las ecuaciones de las fases contienen términos correspondientes pero con coseno.

MODO 1

$$\phi_6 - \phi_4 - \phi_3 + \phi_1 = (\phi_6 - \phi_4) - (\phi_3 - \phi_1) = \psi_{6431}$$

$$\phi_6 - \phi_5 - \phi_2 + \phi_1 = (\phi_6 - \phi_5) - (\phi_2 - \phi_1) = \psi_{6521}$$

$$\phi_7 - 2\phi_4 + \phi_1 = (\phi_7 - \phi_4) - (\phi_4 - \phi_1) = \psi_{741}$$

$$\phi_7 - \phi_5 - \phi_3 + \phi_1 = (\phi_7 - \phi_5) - (\phi_3 - \phi_1) = \psi_{7531}$$

$$\phi_7 + \phi_1 - \phi_6 - \phi_2 = (\phi_7 - \phi_6) - (\phi_2 - \phi_1) = \psi_{7621}$$

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{G}{2} \left(1 + \frac{g_{cdm}}{P_s} \right) \alpha_H a_7 + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \left(\begin{array}{l} \frac{A_3 A_2^2}{A_1} S_{321} + \frac{3 A_4 A_3 A_2}{2 A_1} S_{4321} + \frac{1 A_5 A_3^2}{2 A_1} S_{531} + \\ \frac{4 A_5 A_4 A_2}{3 A_1} S_{5421} + \frac{5 A_6 A_3 A_4}{6 A_1} S_{6431} + \frac{5 A_6 A_2 A_5}{4 A_1} S_{6521} + \\ \frac{1 A_4^2 A_7}{3 A_1} S_{741} + \frac{3 A_3 A_5 A_7}{4 A_1} S_{7531} + \frac{6 A_2 A_6 A_7}{5 A_1} S_{7531} \end{array} \right) A_1 - \frac{1}{2} \gamma_1 A_1$$

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \frac{G}{2} \left(\alpha_H - \frac{g_{cdm}}{P_s} \right) a_7 + \sqrt{1 + \alpha_H^2} \left(\begin{array}{l} \frac{A_3 A_2^2}{A_1} C_{321} + \frac{3 A_4 A_3 A_2}{2 A_1} C_{4321} + \frac{1 A_5 A_3^2}{2 A_1} C_{531} + \\ \frac{4 A_5 A_4 A_2}{3 A_1} C_{5421} + \frac{5 A_6 A_3 A_4}{6 A_1} C_{6431} + \frac{5 A_6 A_2 A_5}{4 A_1} C_{6521} + \\ \frac{1 A_4^2 A_7}{3 A_1} C_{741} + \frac{3 A_3 A_5 A_7}{4 A_1} C_{7531} + \frac{6 A_2 A_6 A_7}{5 A_1} C_{7621} \end{array} \right) + (\omega_1^i - \omega_1) - \frac{\alpha_H}{2} \gamma_1$$

MODO 2

$$\phi_3 - \phi_1 - \phi_6 + \phi_2 = (\phi_2 - \phi_1) - (\phi_6 - \phi_5) = -\psi_{6521}$$

$$\phi_6 + \phi_2 - \phi_1 - \phi_7 = (\phi_2 - \phi_1) - (\phi_7 - \phi_6) = -\psi_{7621}$$

$$\phi_6 + \phi_2 - 2\phi_4 = (\phi_6 - \phi_4) - (\phi_4 - \phi_2) = \psi_{642}$$

$$\phi_6 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_5 = (\phi_6 - \phi_5) - (\phi_3 - \phi_2) = \psi_{6532}$$

$$\phi_7 + \phi_2 - \phi_4 - \phi_5 = (\phi_7 - \phi_5) - (\phi_4 - \phi_2) = \psi_{7542}$$

$$\phi_7 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_6 = (\phi_7 - \phi_6) - (\phi_3 - \phi_2) = \psi_{7632}$$

MODO 3

$$\phi_4 - \phi_1 - \phi_6 + \phi_3 = (\phi_3 - \phi_1) - (\phi_6 - \phi_4) = -\psi_{6431}$$

$$\phi_5 + \phi_3 - \phi_1 - \phi_7 = (\phi_3 - \phi_1) - (\phi_7 - \phi_5) = -\psi_{7531}$$

$$\phi_5 + \phi_3 - \phi_2 - \phi_6 = (\phi_3 - \phi_2) - (\phi_6 - \phi_5) = -\psi_{6532}$$

$$\phi_6 + \phi_3 - \phi_4 - \phi_5 = (\phi_6 - \phi_5) - (\phi_4 - \phi_3) = \psi_{6543}$$

$$\phi_6 + \phi_3 - \phi_2 - \phi_7 = (\phi_3 - \phi_2) - (\phi_7 - \phi_6) = -\psi_{7632}$$

$$\phi_7 + \phi_3 - 2\phi_5 = (\phi_7 - \phi_5) - (\phi_5 - \phi_3) = \psi_{753}$$

MODO 4

$$\phi_3 - \phi_1 - \phi_6 + \phi_4 = (\phi_3 - \phi_1) - (\phi_6 - \phi_4) = -\psi_{6431}$$

$$\phi_5 + \phi_4 - \phi_2 - \phi_7 = (\phi_4 - \phi_2) - (\phi_7 - \phi_6) = -\psi_{7642}$$

$$\phi_5 + \phi_4 - \phi_3 - \phi_6 = (\phi_4 - \phi_3) - (\phi_6 - \phi_5) = -\psi_{6543}$$

$$\phi_6 + \phi_4 - 2\phi_5 = (\phi_6 - \phi_5) - (\phi_5 - \phi_4) = \psi_{654}$$

$$\phi_6 + \phi_4 - \phi_3 - \phi_7 = (\phi_4 - \phi_3) - (\phi_7 - \phi_6) = -\psi_{7643}$$

$$\phi_7 + \phi_4 - \phi_5 - \phi_6 = (\phi_7 - \phi_6) - (\phi_5 - \phi_4) = \psi_{7654}$$

MODO 5

$$\phi_2 - \phi_1 - \phi_6 + \phi_5 = (\phi_2 - \phi_1) - (\phi_6 - \phi_5) = -\psi_{6521}$$

$$\phi_3 + \phi_5 - \phi_2 - \phi_6 = (\phi_3 - \phi_2) - (\phi_6 - \phi_5) = -\psi_{6532}$$

$$\phi_3 + \phi_5 - \phi_1 - \phi_7 = (\phi_3 - \phi_1) - (\phi_7 - \phi_5) = -\psi_{7531}$$

$$\phi_4 + \phi_5 - \phi_3 - \phi_6 = (\phi_4 - \phi_3) - (\phi_6 - \phi_5) = -\psi_{6543}$$

$$\phi_4 + \phi_5 - \phi_2 - \phi_7 = (\phi_4 - \phi_2) - (\phi_7 - \phi_5) = -\psi_{7542}$$

$$\phi_6 - \phi_4 - \phi_7 + \phi_5 = (\phi_5 - \phi_4) - (\phi_7 - \phi_6) = -\psi_{7654}$$

$$\phi_7 - 2\phi_6 + \phi_5 = (\phi_7 - \phi_6) - (\phi_6 - \phi_5) = \psi_{765}$$

Modo 6.

$$\phi_1 + \phi_6 - \phi_3 - \phi_4 = (\phi_6 - \phi_4) - (\phi_3 - \phi_1) = \psi_{6431}$$

$$\phi_1 + \phi_6 - \phi_2 - \phi_5 = (\phi_6 - \phi_5) - (\phi_2 - \phi_1) = \psi_{6521}$$

$$\phi_2 + \phi_6 - 2\phi_4 = (\phi_6 - \phi_4) - (\phi_4 - \phi_2) = \psi_{642}$$

$$\phi_2 + \phi_6 - \phi_3 - \phi_5 = (\phi_6 - \phi_5) - (\phi_3 - \phi_2) = \psi_{6532}$$

$$\phi_2 + \phi_6 - \phi_1 - \phi_7 = (\phi_2 - \phi_1) - (\phi_7 - \phi_6) = -\psi_{7621}$$

$$\phi_3 + \phi_6 - \phi_4 - \phi_5 = (\phi_6 - \phi_5) - (\phi_4 - \phi_3) = \psi_{6543}$$

$$\phi_3 + \phi_6 - \phi_2 - \phi_7 = (\phi_3 - \phi_2) - (\phi_7 - \phi_6) = \psi_{7632}$$

$$\phi_4 + \phi_6 - 2\phi_5 = (\phi_6 - \phi_5) - (\phi_5 - \phi_4) = \psi_{654}$$

$$\phi_4 + \phi_6 - \phi_3 - \phi_7 = (\phi_4 - \phi_3) - (\phi_7 - \phi_6) = -\psi_{7643}$$

$$\phi_5 - \phi_4 - \phi_7 + \phi_6 = (\phi_5 - \phi_4) - (\phi_7 - \phi_6) = -\psi_{7654}$$

Modo 7.

$$\phi_1 + \phi_7 - 2\phi_4 = (\phi_7 - \phi_4) - (\phi_4 - \phi_1) = \psi_{741}$$

$$\phi_1 + \phi_7 - \phi_3 - \phi_5 = (\phi_7 - \phi_5) - (\phi_3 - \phi_1) = \psi_{7531}$$

$$\phi_1 + \phi_7 - \phi_2 - \phi_6 = (\phi_7 - \phi_6) - (\phi_2 - \phi_1) = \psi_{7621}$$

$$\phi_2 + \phi_7 - \phi_4 - \phi_5 = (\phi_7 - \phi_5) - (\phi_4 - \phi_2) = \psi_{7542}$$

$$\phi_2 + \phi_7 - \phi_3 - \phi_6 = (\phi_7 - \phi_6) - (\phi_3 - \phi_2) = \psi_{7632}$$

$$\phi_3 + \phi_7 - 2\phi_5 = (\phi_7 - \phi_5) - (\phi_5 - 2\phi_3) = \psi_{753}$$

$$\phi_3 + \phi_7 - \phi_4 - \phi_6 = (\phi_7 - \phi_6) - (\phi_4 - \phi_3) = \psi_{7642}$$

$$\phi_4 + \phi_7 - \phi_5 - \phi_6 = (\phi_7 - \phi_6) - (\phi_5 - \phi_4) = \psi_{7654}$$

$$\phi_5 + \phi_7 - 2\phi_6 = (\phi_7 - \phi_6) - (\phi_6 - \phi_5) = \psi_{765}$$

II.3 Simulación

Esta sección está dedicada a desarrollar las ecuaciones utilizadas en la programación y demostrar su correspondencia con las ecuaciones obtenidas a lo largo de este capítulo. Mediante este programa realizado en matlab, y que utiliza la función ode45 para resolver las ecuaciones acopladas para E_k y N , se obtiene la evolución de: 1) las amplitudes y fases de los modos (3, 5 o 7) y 2) del número de portadores.

En el modelo se considera el efecto del ruido causado por emisión espontánea a términos que están presentes tanto en las amplitudes y las fases como en el número de portadores. A través de una transformada de Fourier a la matriz de evolución se obtienen espectros de frecuencia que se muestran en el siguiente capítulo.

II.3.1 Ecuaciones

Las amplitudes complejas E_k se expresan en términos de las amplitudes A_k y las fases ϕ_k , y junto con el número de portadores se guardan sus valores temporales en una matriz en la que cada renglón representa un paso temporal:

$$x = \begin{bmatrix} A_1(t_1) & A_2(t_1)\dots & \phi_1(t_1) & \phi_2(t_1)\dots & N(t_1) \\ A_1(t_2) & A_2(t_2)\dots & \phi_1(t_2) & \phi_2(t_2)\dots & N(t_2) \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \end{bmatrix}$$

Esta matriz es utilizada para expresar las ecuaciones de la densidad de portadores (II.1.1) y de la amplitud compleja del campo eléctrico (II.2.3), respectivamente:

$$\overbrace{\text{derivada}(2M+1)}^{N(t+\Delta t)} = \frac{I}{e} - \frac{\overbrace{x(2M+1)}^{N(t)}}{\tau_e} - v_g g_d \left(\overbrace{x(2M+1)}^{N(t)} - N_{tr} \right) \cdot |E_T|^2 \quad (\text{II.2.54})$$

La variable derivada se utiliza como un vector de 7 columnas que definen los nuevos valores de x en cada iteración. Para k=1, 2, 3, la ecuación de la amplitud compleja es

$$dE(k) = \frac{1}{2} (1 - i\alpha_H) A(x(7) - Ntr - \gamma_k) x(k) e^{-ix(k+M)} - i(\omega_k^i - \omega_k) x(k) e^{-ix(k+M)} + \frac{1}{2} C (1 - i\alpha_H) A(x(7) - Ntr - \gamma_k) \delta_{cdm}(k) \quad (\text{II.2.55})$$

$$\text{derivada}(k) = \text{real}(dE(k))$$

$$\text{derivada}(k+M) = -\text{imag}(dE(k)) - \text{delta_omega}(k)$$

La ecuación (II.2.55) para las amplitudes complejas asociadas a los M modos se expresa en términos de dE(k), que es la variable que contiene la parte derecha de la ecuación del campo eléctrico, derivada(k) representa las amplitudes y derivada(k+M) las fases. Esta última contiene el término delta_omega(k) que representa el desfase de los modos $i(\omega_k^{(i)} - \omega_k)$.

Ambas expresiones se resuelven de manera conjunta, de manera que la variable de salida es la matriz derivada y en cada iteración la última fila agregada a derivada es el nuevo vector x de entrada (de manera que un paso temporal se forma a partir del anterior).

La ecuación (II.2.54) se expresa con N/τ_e en términos de los coeficientes A, B y C [11], que son: de Shockley-Read-Hall y de recombinación radiativa bimolecular (coeficiente de recombinación espontánea):

$$R(N) = A N + B N^2 + C N^3$$

y $C N^3$ representa la recombinación Auger. Además, la densidad de fotones, en el caso de 3 modos, se expresa de la siguiente manera:

$$|E_T|^2 = \left| A_1 e^{-i\phi_1 + i\Omega t} + A_2 e^{-i\phi_2} + A_3 e^{-i\phi_3 - i\Omega t} \right|^2$$

Esta expresión corresponde a (II.2.56). A continuación se demuestra partiendo de la densidad de fotones definida en [1]:

$$|E_T|^2 = \sum_{k=1}^M |E_k|^2 |U|^2 + \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{k=m+1}^M \left(E_k E_{k-m}^* |U|^2 e^{-im\Omega_{sp}t} + c.c \right)$$

Para 3 modos: $\frac{|E_T|^2}{|U|^2} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \sum_{m=1}^2 \sum_{k=m+1}^3 \left(E_k E_{k-m}^* e^{-im\Omega_{sp}t} + E_k^* E_{k-m} e^{im\Omega_{sp}t} \right)$

El modelo incluye en la ganancia el factor de confinamiento, que toma en cuenta los efectos transversales sobre las amplitudes de los modos, de manera que no es necesario considerar la distribución transversal U,

$$|E_T|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \sum_{k=2}^3 \left(E_k E_{k-1}^* e^{-i\Omega_{sp}t} + E_k^* E_{k-1} e^{i\Omega_{sp}t} \right) + \sum_{k=3}^3 \left(E_k E_{k-2}^* e^{-i2\Omega_{sp}t} + E_k^* E_{k-2} e^{i2\Omega_{sp}t} \right)$$

$$|E_T|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \sum_{k=2}^3 \left(E_k E_{k-1}^* e^{-i\Omega_{sp}t} + E_k^* E_{k-1} e^{i\Omega_{sp}t} \right) + E_3 E_{3-2}^* e^{-i2\Omega_{sp}t} + E_3^* E_{3-2} e^{i2\Omega_{sp}t}$$

$$|E_T|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + E_2 E_1^* e^{-i\Omega_{sp}t} + E_2^* E_1 e^{i\Omega_{sp}t} + E_3 E_2^* e^{-i\Omega_{sp}t} + E_3^* E_2 e^{i\Omega_{sp}t} + E_3 E_1^* e^{-i2\Omega_{sp}t} + E_3^* E_1 e^{i2\Omega_{sp}t}$$

Sustituyendo los campos en términos de amplitudes y fases

$$\begin{aligned} |E_T|^2 &= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_1 A_2 \left(e^{i(\phi_1 - \phi_2) - i\Omega_{sp}t} + e^{-i(\phi_1 - \phi_2) + i\Omega_{sp}t} \right) + \\ &+ A_2 A_3 \left(e^{i(\phi_2 - \phi_3) - i\Omega_{sp}t} + e^{-i(\phi_2 - \phi_3) + i\Omega_{sp}t} \right) + A_1 A_3 \left(e^{i(\phi_1 - \phi_3) - i\Omega_{sp}t} + e^{-i(\phi_1 - \phi_3) + i2\Omega_{sp}t} \right) \\ |E_T|^2 &= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_1 A_2 2 \cos(\phi_1 - \phi_2 - \Omega_{sp}t) + \\ &+ A_2 A_3 2 \cos(\phi_2 - \phi_3 - \Omega_{sp}t) + A_1 A_3 2 \cos(\phi_1 - \phi_3 - 2\Omega_{sp}t) \end{aligned}$$

El coseno es una función par ($\cos x = \cos -x$)

$$\boxed{|E_T|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_1 A_2 2 \cos(\phi_2 - \phi_1 + \Omega_{sp}t) + A_2 A_3 2 \cos(\phi_3 - \phi_2 + \Omega_{sp}t) + A_1 A_3 2 \cos(\phi_3 - \phi_1 + 2\Omega_{sp}t)}$$

Utilizando la expresión $|E_T|^2 = \left| A_1 e^{-i\phi_1 + i\Omega t} + A_2 e^{-i\phi_2} + A_3 e^{-i\phi_3 - i\Omega t} \right|^2$ se llega al resultado anterior:

$$|E_T|^2 = \left(A_1 e^{-i\phi_1 + i\Omega t} + A_2 e^{-i\phi_2} + A_3 e^{-i\phi_3 - i\Omega t} \right) \left(A_1 e^{i\phi_1 - i\Omega t} + A_2 e^{i\phi_2} + A_3 e^{i\phi_3 + i\Omega t} \right)$$

$$\begin{aligned} |E_T|^2 &= A_1^2 + A_1 A_2 e^{i(\phi_2 - \phi_1) + i\Omega t} + A_1 A_3 e^{i(\phi_3 - \phi_1) + i2\Omega t} + \\ &+ A_1 A_2 e^{-i(\phi_2 - \phi_1) - i\Omega t} + A_2^2 + A_2 A_3 e^{i(\phi_3 - \phi_2) + i\Omega t} + \\ &+ A_1 A_3 e^{-i(\phi_3 - \phi_1) - i2\Omega t} + A_2 A_3 e^{-i(\phi_3 - \phi_2) - i\Omega t} + A_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |E_T|^2 &= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_1 A_2 \left(e^{i(\phi_2 - \phi_1) + i\Omega t} + e^{-i(\phi_2 - \phi_1) - i\Omega t} \right) + \\ &+ A_2 A_3 \left(e^{i(\phi_3 - \phi_2) + i\Omega t} + e^{-i(\phi_3 - \phi_2) - i\Omega t} \right) + A_1 A_3 \left(e^{-i(\phi_3 - \phi_1) - i2\Omega t} + e^{i(\phi_3 - \phi_1) + i2\Omega t} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{|E_T|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1 + \Omega t) + 2A_2A_3 \cos(\phi_3 - \phi_2 + \Omega t) + 2A_1A_3 \cos(\phi_3 - \phi_1 + 2\Omega t)}$$

La ecuación (II.2.55) corresponde a la ecuación (II.2.3) y en esa misma sección toma las formas de las ecs. (II.2.17) y (2.2.21), expresadas a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} = & \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)(G-\gamma_1)E_1 - i(\omega_1^i - \omega_1)E_1 + \\ & + \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)\frac{iG\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} \left[|E_2|^2 E_1 + E_3^* E_2^2 + \frac{1}{2}|E_3|^2 E_1 \right] \end{aligned} \quad (II.2.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} - i\frac{d\phi_1}{dt}A_1 = & \frac{1}{2}(1-i\alpha_H)(G-\gamma_1)A_1 - i(\omega_1^i - \omega_1)A_1 + \\ & + \frac{1}{2}(i+\alpha_H)\frac{G\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} \left[\frac{1}{2}A_3^2 A_1 + A_2^2 A_1 + A_3 A_2^2 e^{-i\psi} \right] \end{aligned} \quad (II.2.58)$$

Por lo tanto, al implementar (II.2.57) para obtener la evolución de la amplitud dA_k/dt y la de la fase $d\phi_k/dt$ es necesario separar la parte real y multiplicarla por $e^{i\phi_k}$, y separar la parte imaginaria y multiplicarla por $e^{i\phi_k/A_k}$. de la manera realizada en la implementación para obtener derivada(k) y derivada(k+M). Solo resta demostrar que los coeficientes en el último término de (II.2.17) corresponden los utilizados en $dE(k)$. Utilizando las definiciones (II.2.15) y (II.2.16):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1+i\alpha_H)\frac{G\mathcal{G}_{cdm}}{P_s} &= \frac{1}{2}(1+i\alpha_H)i\frac{v_g g_d \Gamma(N-N_{tr})C/\Omega\tau_e}{P_s} \\ &= \frac{1}{2}C(1-i\alpha_H)v_g g_d \Gamma(N-N_{tr})\frac{i}{\underbrace{P_s \Omega \tau_e}_{i/\beta}} \end{aligned}$$

En base a esto, se define el término δ_{cdm} , que se muestra a continuación para el caso de 3 modos:

$$\begin{aligned} \delta_{cdm}(1) &= \frac{i}{\beta} \left((E_2^* E_2 + .5 E_3^* E_3) E_1 + E_3^* E_2^2 \right) \\ \delta_{cdm}(2) &= \frac{i}{\beta} \left(-E_1^* E_1 + E_3^* E_3 \right) E_2 \\ \delta_{cdm}(3) &= \frac{i}{\beta} \left((-.5 E_1^* E_1 - E_2^* E_2) E_3 - E_1^* E_2^2 \right) \end{aligned}$$

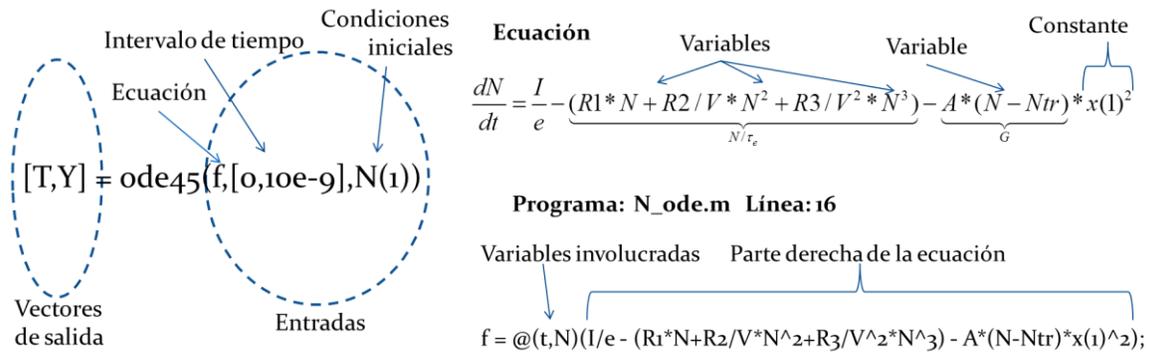
II.3.2 Implementación

En esta sección se muestra, la forma de resolver las ecuaciones para el caso de un solo modo y sin agregar términos no lineales ni de ruido. Como ya se comentó, las ecuaciones se resuelven utilizando la función **ode45**, sin embargo aquí se presentan algunos resultados al utilizar **diferencias finitas (DF)**.

Empezamos con la ecuación de evolución para la densidad de portadores (II.2.59), resuelta al mantener la intensidad óptica constante.

- Ecuación de evolución de N.

Se utiliza la función ode que genera al vector temporal T y a la matriz de evolución Y, al introducir como entradas la función f, el intervalo temporal y las condiciones iniciales. En la parte izquierda podemos ver la manera en que se define la ecuación, introduciendo solamente su parte derecha:



Por otra parte, al utilizar DF, el tiempo se discretiza ($t=n\Delta t$, con $n=0,1,2,\dots$) y se utiliza la siguiente definición de derivada: $\frac{dN}{dt} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}$. Por lo tanto, al implementarse, esta definición toma la forma:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(t+1) - N(t)}{\Delta t}$$

Por lo que la ecuación queda:

$$\frac{N(t+1) - N(t)}{\Delta t} = I/e - N/\tau_e - G * x(1)^2$$

Finalmente, se despeja $N(t+1)$, de manera que queda en términos de $N(t)$, esto quiere decir que si partimos de una condición inicial $N(0)$, podemos obtener el valor de N al siguiente paso temporal $N(1)$ y a partir de este $N(2)$ y así sucesivamente. Entonces al utilizar diferencias finitas se define la ecuación de la siguiente manera:

Ecuación

$$\frac{dN}{dt} = I / e - \underbrace{(R1 * N + R2 / V * N^2 + R3 / V^2 * N^3)}_{N/\tau_e} - \underbrace{A * (N - Ntr)}_G * x(1)^2$$

Programa: N_df.m Línea:22

$$N(t+1) = N(t) + \text{delta}_t * (I/e - (R1*N(t) + R2/V*N(t)^2 + R3/V^2*N(t)^3) - A*(N(t) - Ntr)*x(1)^2);$$

La graficas resultantes de ambas implementaciones se muestran a continuación:

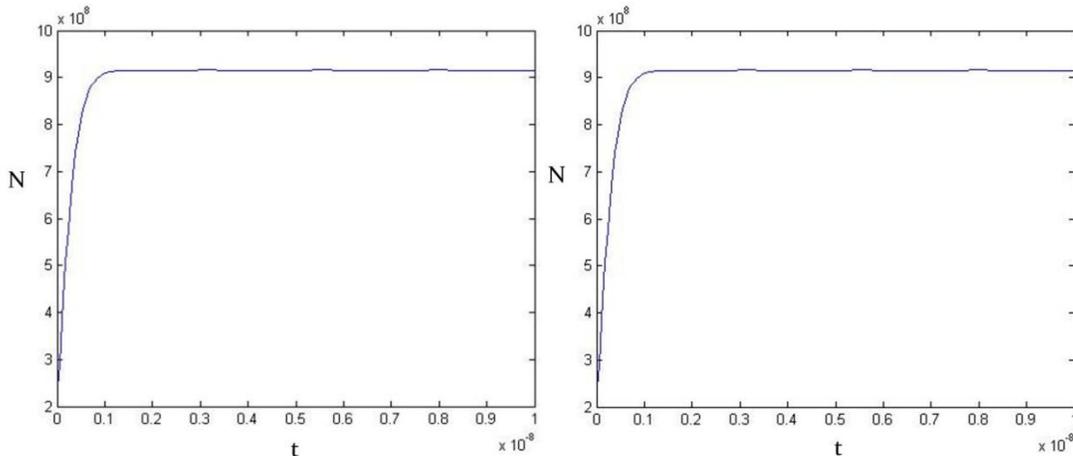
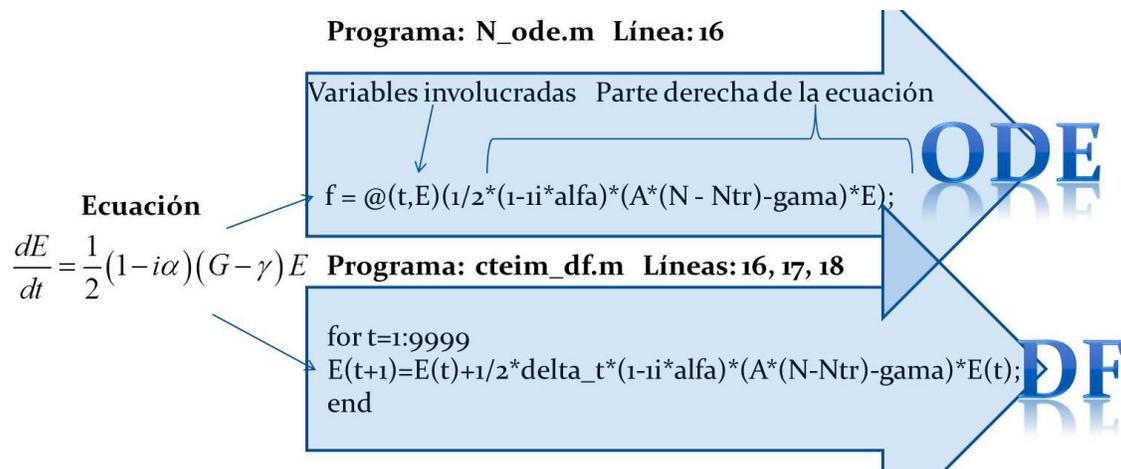


Fig. II.3.1 Evolución de N

Panel izquierdo: Gráfica obtenida con ode45. Panel derecho: Gráfica obtenida mediante df.

- Ecuación de evolución de E.

De manera similar a N, la solución de E a través de ode45 implica la definición de la parte derecha de su ecuación. Mientras que el uso de DF se hace dividiendo a t en 10.000 pasos temporales:



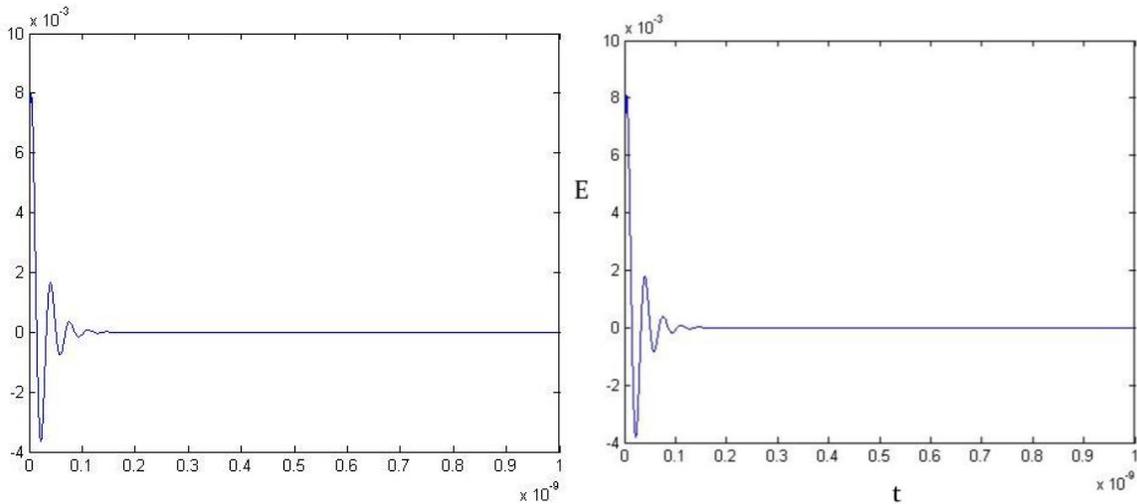


Fig. II.3.2 Evolución de E.

Panel izquierdo: Gráfica obtenida con ode45. Panel derecho: Gráfica obtenida mediante df.

- Ecuaciones acopladas de E y N.

Se resuelven ambas ecuaciones utilizando DF y definiendo ambos valores para cada paso temporal. Al final, a partir de la evolución de E se obtiene la evolución de la amplitud y la fase.

$$\frac{dN}{dt} = I / e - \underbrace{(R1 * N + R2 / V * N^2 + R3 / V^2 * N^3)}_{N/\tau_e} - \underbrace{A * (N - Ntr) * E(t) E^*(t)}_G$$

↑ Ecuaciones

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}(1 - i\alpha)(G - \gamma)E$$

```

for t=1:9999
E(t+1) = E(t) + 1/2*delta_t*((1-i*alfa)*(A*(N(t)-Ntr)-gama)*E(t));
N(t+1) = N(t) + delta_t*( I/e - R1*N(t)+R2/V*N(t)^2+R3/V^2*N(t)^3...
                        - A*(N(t)-Ntr)*(E(t)*conj(E(t))) );
end

Ampl = E.*conj(E);
Fase = ii*log(E./Ampl);
    
```

La amplitud y fase se obtienen de la definición de la amplitud compleja:

$$E_k = A_k e^{-i\phi_k}$$

$$\begin{aligned} \text{Fase} &= \text{ii} * \log(E ./ \text{Ampl}); \\ \text{Ampl} &= \text{sqrt}(E .* \text{conj}(E)); \end{aligned}$$

$$\ln\left(\frac{E_k}{A_k}\right) = -i\phi_k \quad E_k E_k^* = A_k e^{-i\phi_k} A_k e^{i\phi_k} = A_k^2$$

A continuación, se muestran los resultados de la implementación de las ecuaciones acopladas.

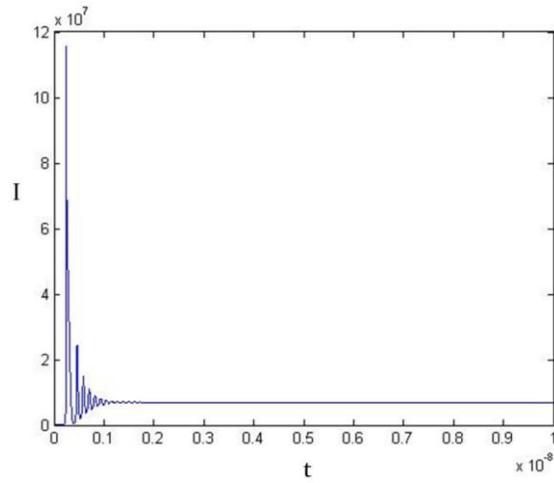


Fig. II.3.3 Evolución de la intensidad ($I=AA^*$) al resolver las ecs. acopladas.

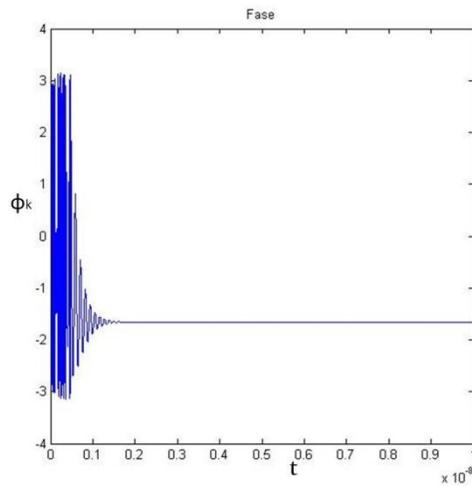


Fig. II.3.4 Evolución de fase al resolver las ecs. acopladas.

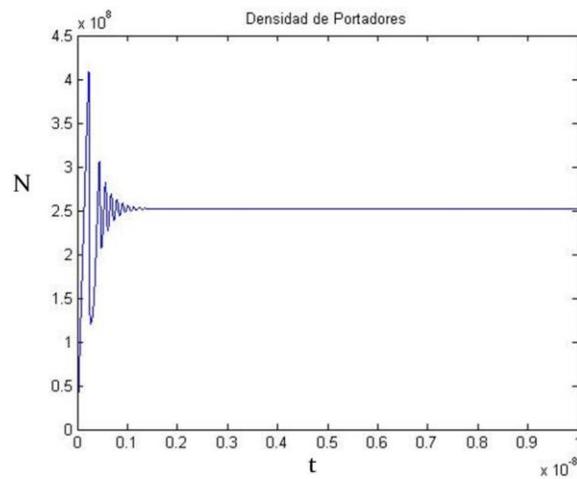


Fig. II.3.5 Evolución de N al resolver las ecs. acopladas.

CAPÍTULO

III

RESULTADOS

Este capítulo está dedicado a la presentación de los resultados obtenidos mediante la implementación numérica, en matlab, del modelo analítico desarrollado en el capítulo II. Las ecuaciones diferenciales acopladas se resuelven mediante la función ode45 y se utiliza un tiempo de paso de 5 ps (y un intervalo temporal de 8×10^{-8} s).

En las tres primeras secciones se muestra, para 3, 5 y 7 modos longitudinales, la evolución temporal del número de portadores y la **densidad espectral de potencia (DEP)** asociada a la potencia total. Los resultados se muestran en dos pares de gráficas. Las dos primeras se obtienen sin incluir los términos no lineales asociados a la MDP, mientras que el par siguiente corresponde



a la implementación con términos MDP. Además, las gráficas de la izquierda se obtuvieron sin incluir los términos de ruido, mientras que las de la derecha si lo incluyen. En algunos casos se utilizan unidades dBm para las DEP, ya que permiten apreciar un rango más amplio. En la sección III.4 se presenta un análisis de las señales de 40 GHz generadas en la potencia total.

III.1 3 Modos

En primer lugar, se muestra la evolución del número de portadores N y posteriormente los espectros de la potencia.

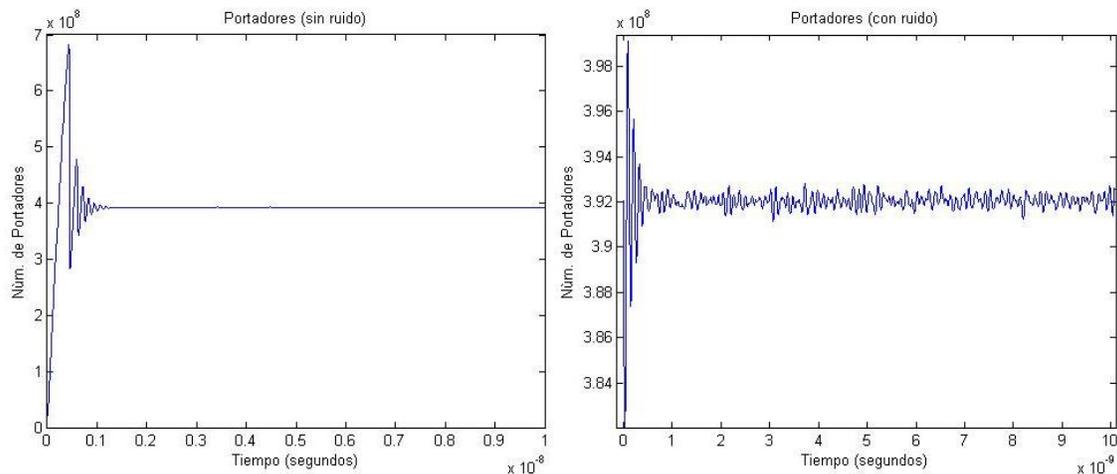
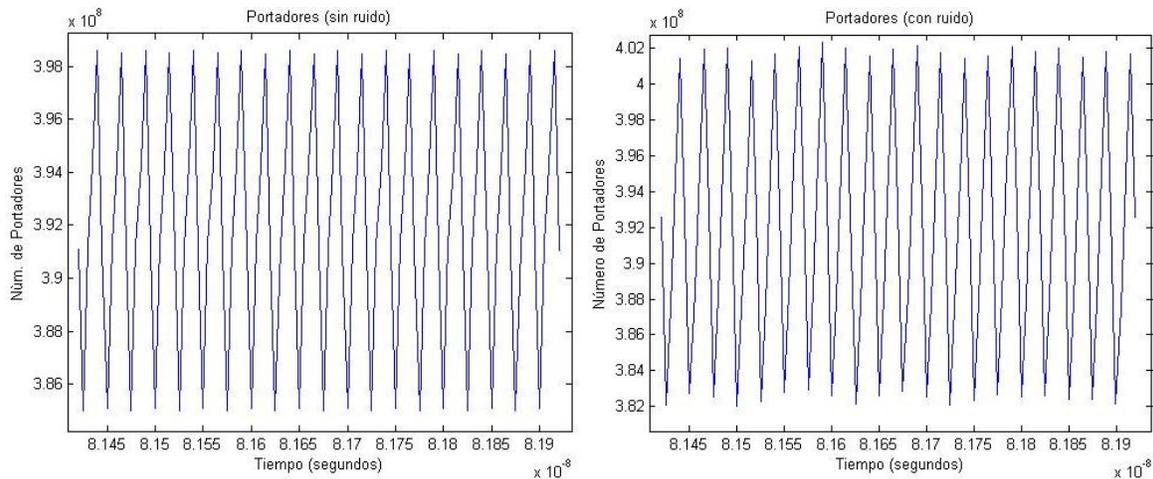


Fig. III.1.1 Evolución del número de portadores (ecuación de E_k sin término MDP)
Panel izquierdo: sin ruido. Panel derecho: con ruido.



**Fig. III.1.2 Evolución del número de portadores para los últimos 100 pasos temporales (ecs. con el término MDP).
Panel izquierdo: sin ruido. Panel derecho: con ruido.**

En la figura III.1.1 podemos ver el número de portadores en función del tiempo para la implementación sin términos MDP. En ambos paneles se ha reducido el intervalo temporal presentado a 1×10^{-8} ya que desde los primeros instantes el número de portadores llega a una situación de equilibrio y mantiene un comportamiento constante (o mejor dicho, estable) a lo largo del resto del tiempo. En ambas figuras, el número de portadores oscila alrededor de un valor aproximado a 3.92×10^8 . Además, podemos apreciar que al introducir el ruido (panel derecho), el efecto más notorio es hacer la oscilación más amplia (en el régimen en el que el número de portadores se ha estabilizado).

En la fig. III.1.2 se presentan solamente los últimos 100 pasos temporales debido a que la oscilación se vuelve más rápida y no se alcanza a apreciar si se muestra el intervalo temporal completo. Además de este efecto, podemos ver que la oscilación se hace más amplia al incluir el ruido y que el número de portadores oscila alrededor del mismo valor que en la fig. III.1.1.

Por otra parte, la DEP asociada a la implementación sin el término MDP es mostrada en la fig. III.1.3. En el caso sin ruido (panel izquierdo) podemos ver un pico de densidad bien definido que se sitúa a una frecuencia menor a 1×10^{10} . Al introducir el ruido, la densidad máxima disminuye y aumentan las densidades alrededor de este pico.

La DEP de la potencia total, al implementar las ecuaciones con el término MDP, es presentada en la fig. III.1.4. En este caso se muestra el resultado en dBm normalizados, por lo que el pico de la fig. III.1.3 (que está a -30 dBm aprox.) aparece más ancho y bajo. Se puede observar un par de señales a 40 y 80 GHz con una potencia aproximada de 30 y 10 dBm por encima del pico en la frecuencia cercana a 10 GHz, respectivamente.

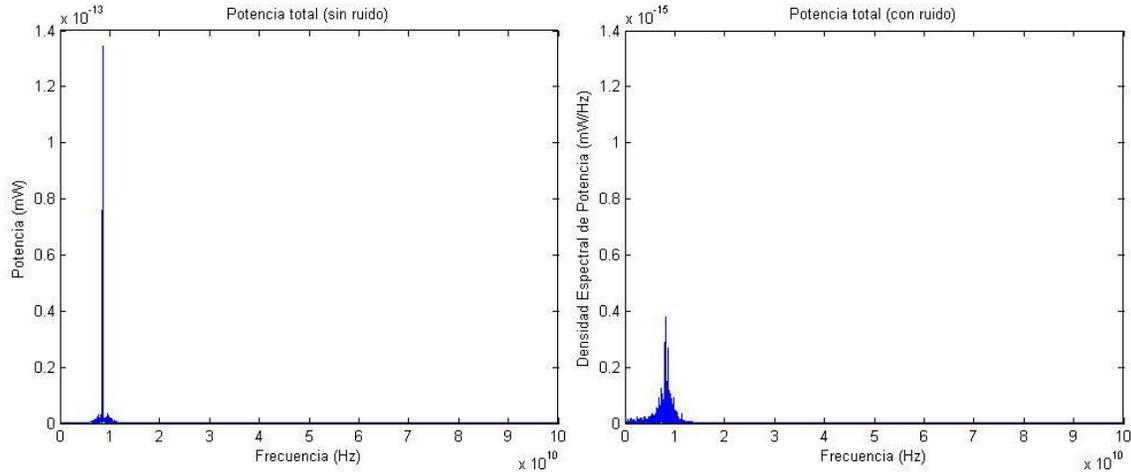


Fig. III.1.3 DEP de la potencia total (ecuación de E_k sin término MDP).
Panel izquierdo: sin ruido. Panel derecho: con ruido.

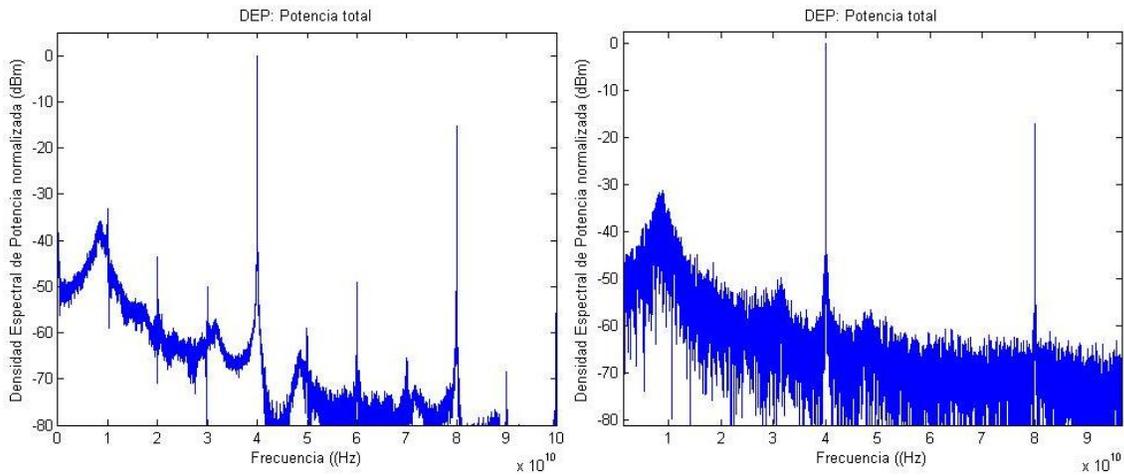


Fig. III.1.4 DEP de la potencia total normalizada en dBm (ecs. con el término MDP).
Panel izquierdo: sin ruido. Panel derecho: con ruido.

En general, podemos decir que los picos a 40 y 80 GHz que aparecen en la potencia total al introducir el término MDP, es una clara evidencia de que la potencia total está oscilando o pulsando a tales frecuencias. Por otra parte, en las gráficas referentes al número de portadores podemos ver que está oscilando.

III.2 5 Modos

En esta sección se presentan las gráficas referentes a la implementación con 5 modos longitudinales. En la gráfica III.2.1 observamos la evolución temporal de la densidad de portadores para la implementación sin términos MDP. En ambas gráficas se ha reducido el intervalo temporal mostrado, ya que el comportamiento constante se mantiene a lo largo del resto del tiempo. De manera similar a la sección anterior, observamos que después de un intervalo de tiempo el número de portadores llega a un valor estable (3.92×10^8) y el efecto del ruido es hacer que el número de portadores oscile con una amplitud mayor.

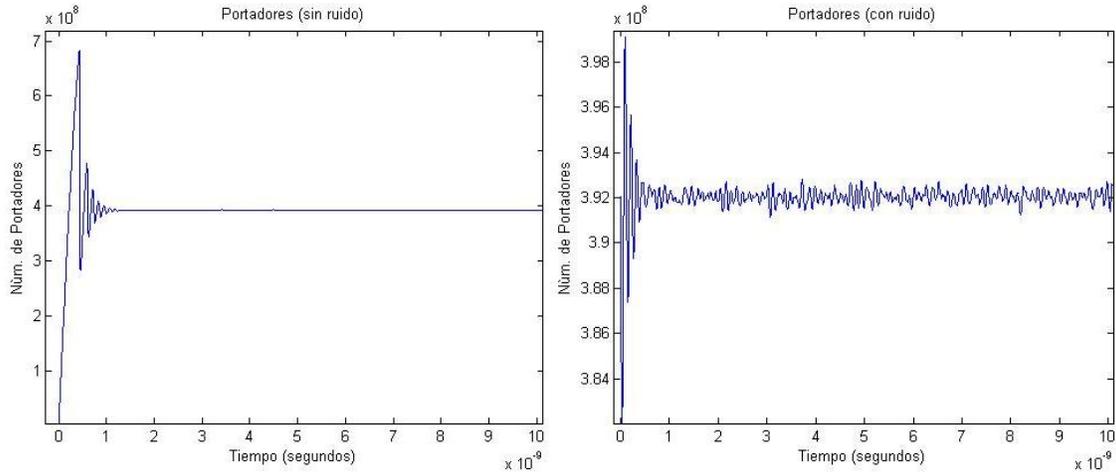


Fig. III.2.1 Evolución del número de portadores (ecuación de E_k sin término MDP)
Panel izquierdo: sin ruido. Panel derecho: con ruido.

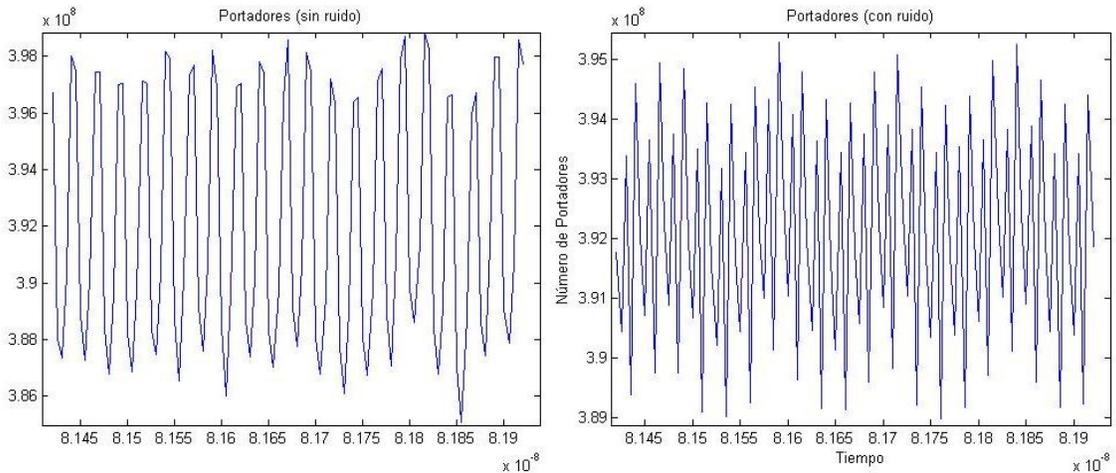


Fig. III.2.2 Evolución del número de portadores (ecuación de E_k con término MDP)
Panel izquierdo: sin ruido. Panel derecho: con ruido.

La evolución del número de portadores al incluir el término MDP se muestra en la fig. III.2.2. Nuevamente observamos la oscilación alrededor de 3.92×10^8 (este número tiene una densidad de portadores asociada del orden de $\sim 10^{24}$, ya que el volumen de la región activa es del orden de $(\mu\text{m})^3 = 10^{-16} \text{ cm}^3$). Por otra parte, la oscilación al incluir el ruido disminuye, a diferencia de lo observado en las figuras anteriores.

Por otra parte, los espectros de la potencia total se muestran en las figuras III.1.3 y III.1.4. La DEP para el caso sin ruido (panel izquierdo de la Fig. III.2.3) presenta un pico para una frecuencia ligeramente menor a 10 GHz. Al incorporar el ruido se genera una nueva señal alrededor de un valor muy cercano a 0 Hz y de mayor densidad que la señal próxima a 10 GHz.

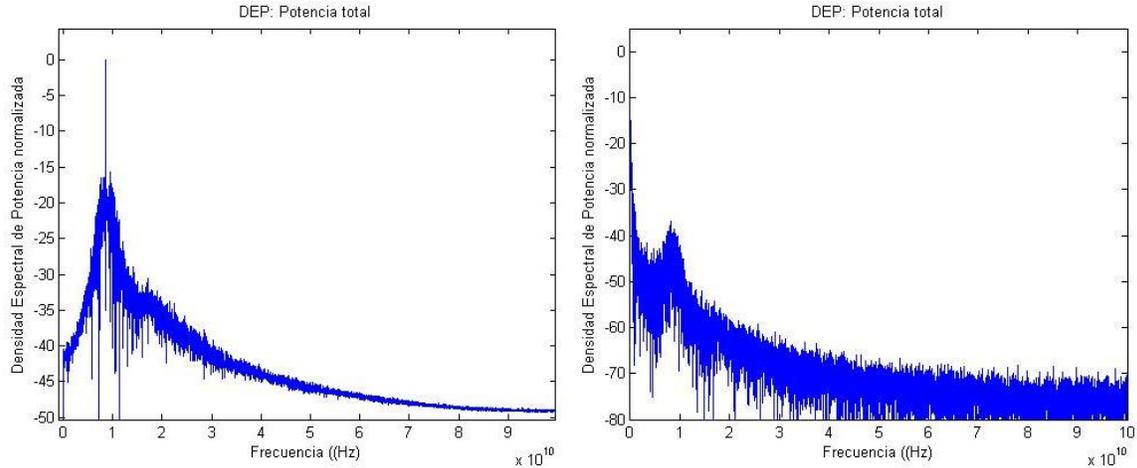


Fig. III.2.3 DEP de la potencia total en dBm normalizada. Panel izquierdo: sin ruido. Panel derecho: con ruido.

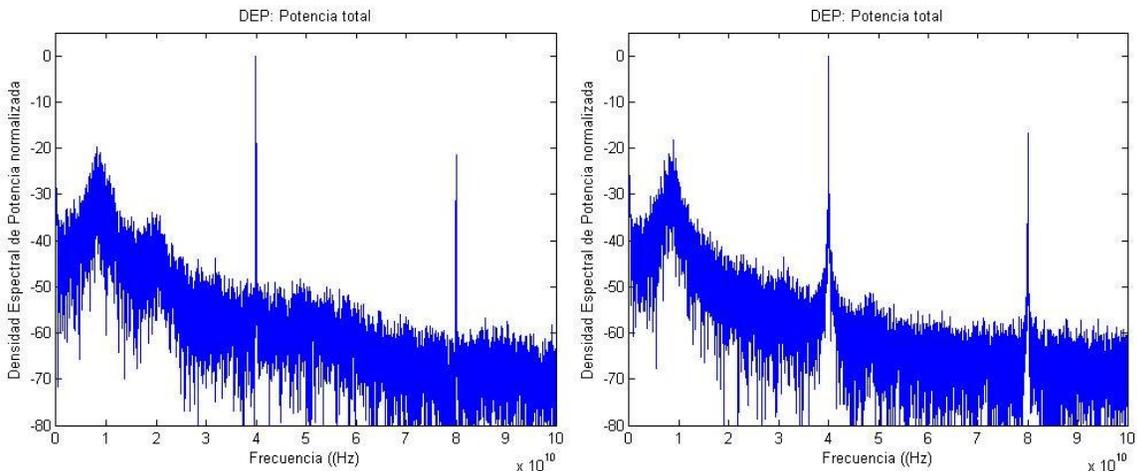


Fig. III.2.4 DEP de la potencia total (ecuación de E_k con término MDP). Panel izquierdo: sin ruido. Panel derecho: con ruido.

En lo referente a la implementación con términos MDP (fig. III.2.4), podemos ver en el panel izquierdo una DEP con dos frecuencias de oscilación bien definidas a 40 y 80 GHz. El efecto más notable al incorporar el ruido (panel derecho) a las ecuaciones es el ensanchamiento de las dos señales mencionadas. A pesar de que al introducir el ruido el nivel de las densidades del “fondo” aumenta, también las intensidades de los picos aumenta y en la fig. III.2.4 podemos ver la proporción entre la máxima densidad y el “fondo” es muy similar, además, el máximo a 0 dBm localizado a 40 GHz también mantiene 20 dBm por debajo de los otros dos picos.

III.3 7 Modos

A continuación, se muestran las gráficas obtenidas utilizando el modelo para 7 modos. Se han utilizado las ecuaciones sin el término MDP para obtener la evolución temporal del número de portadores en la figura III.3.1. Se observan características cualitativamente equivalentes a las descritas en las figuras III.1.1 y III.2.1.

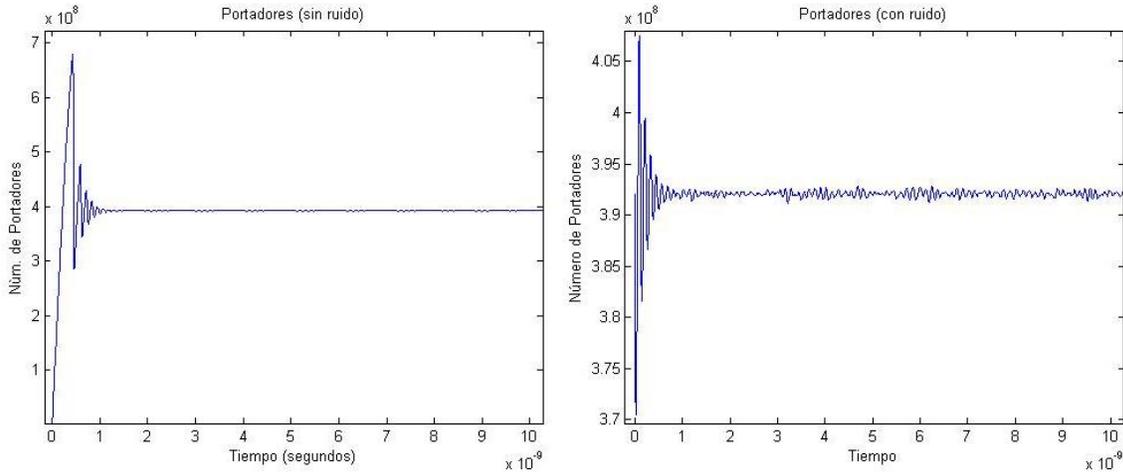


Fig. III.3.1 Evolución del número de portadores (ecuación de E_k sin término MDP)
Panel izquierdo: sin ruido. Panel derecho: con ruido.

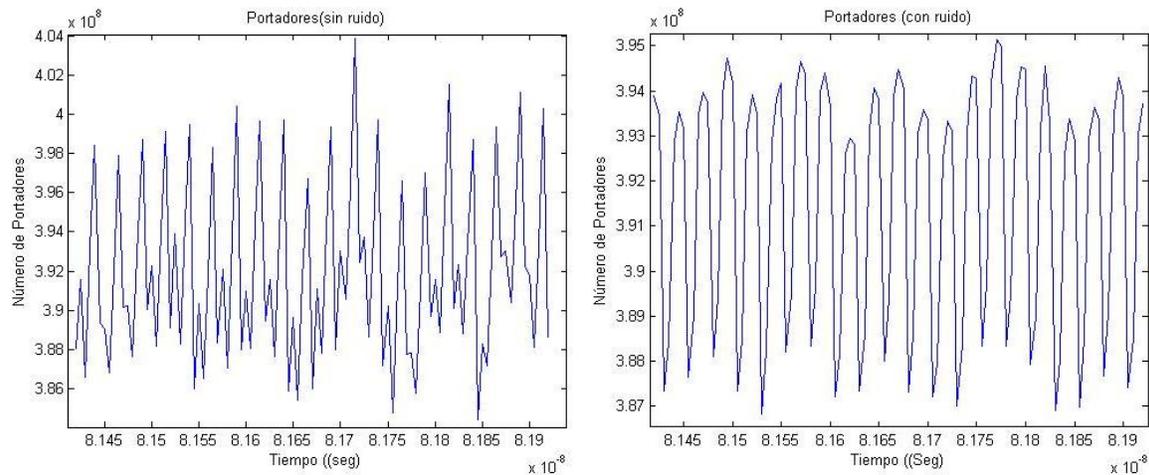


Fig. III.3.2 Evolución del número de portadores (ecuación de E_k con término MDP).
Panel izquierdo: sin ruido. Panel derecho: con ruido.

Al introducir los términos no lineales asociados a MDP, el número de portadores (fig. III.3.2) muestra un comportamiento oscilatorio alrededor de 3.93×10^8 sin ruido y 3.90×10^8 con ruido. Además, la amplitud de la oscilación decrece con el ruido, a diferencia de lo observado en la implementación sin MDP.

Referente a la potencia total, en la fig. III.3.3 se observa la implementación sin términos MDP. Podemos ver que la DEP obtenida sin incluir ruido muestra picos de intensidad a lo largo de todo el espectro observado. Mientras que para el caso con ruido observamos 3 picos, de los cuales el mayor tiene una frecuencia cercana a cero y los otros menores a 10 y 20 GHz, respectivamente.

Al introducir los términos de MDP en las ecuaciones, obtenemos nuevamente un par de picos bien definidos a 40 y 80 GHz (aparte del pico de menor potencia de frecuencia menor a 10 GHz), que aumentan su ancho al considerar el ruido en las simulaciones.

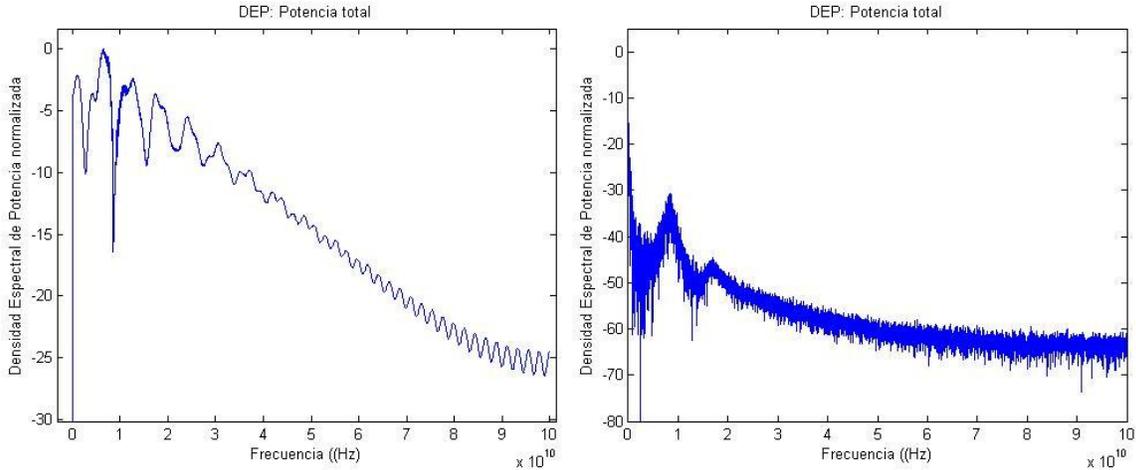


Fig. III.3.3 DEP de la potencia total. Panel izquierdo: sin ruido. Panel derecho: con ruido.

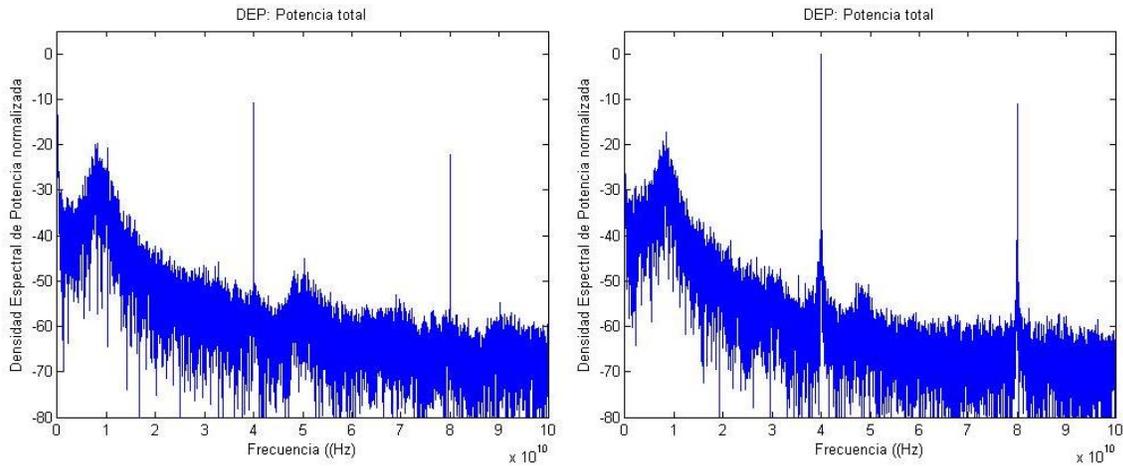


Fig. III.3.4 DEP de la potencia total (ecuación de E_k con término MDP). Panel izquierdo: sin ruido. Panel derecho: con ruido.

En general, hemos observado la evolución temporal del número de portadores y el espectro de frecuencias de la potencia total para 3, 5 y 7 modos longitudinales; generados a través de un modelo basado en ecuaciones de evolución. Esto nos ha permitido corroborar que el modelo genera en el intervalo temporal observado un par de señales que corresponden a múltiplos de la frecuencia de separación ($\Omega = 40$ GHz) entre los modos longitudinales. Además en todos los casos, la señal a 40 GHz tiene una DEP mayor que la de 80GHz.

III.4 Señales Generadas a 40GHz

A continuación se presentan las señales generadas a 40 GHz, a través del programa de simulación. En las figuras III.4.1, III.4.2 y III.4.3 se muestra la señal obtenida mediante la implementación del modelo para el caso de 3, 5 y 7 modos, respectivamente. El ancho de una señal es comúnmente descrito a través del ancho completo a medio máximo (FWHM, full width at half maximum). Este ancho puede ser apreciado con más detalle en los paneles derechos (en los que se presenta la

curva normalizada sin utilizar las unidades dBm), pues está determinado por la separación entre los dos puntos situados a la altura de 0.5.

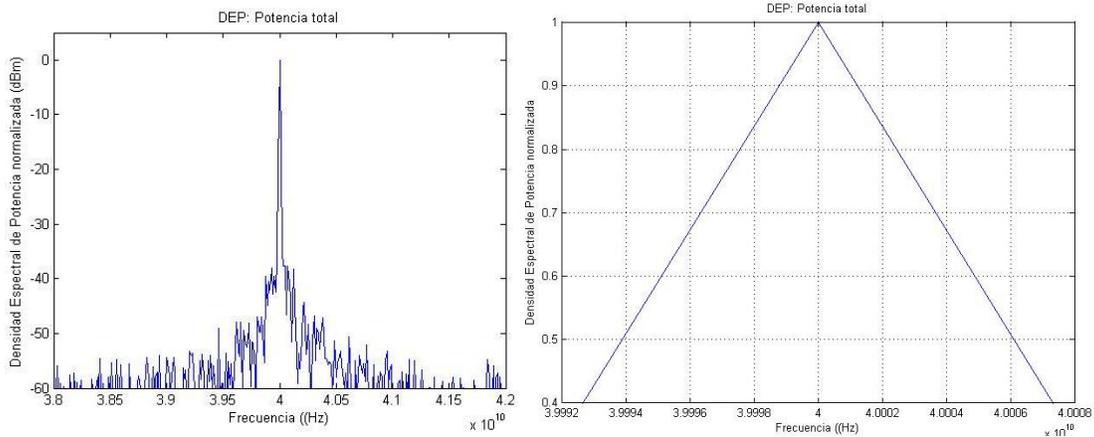


Fig. III.4.1 Señal generada a 40 GHz con 3 modos.

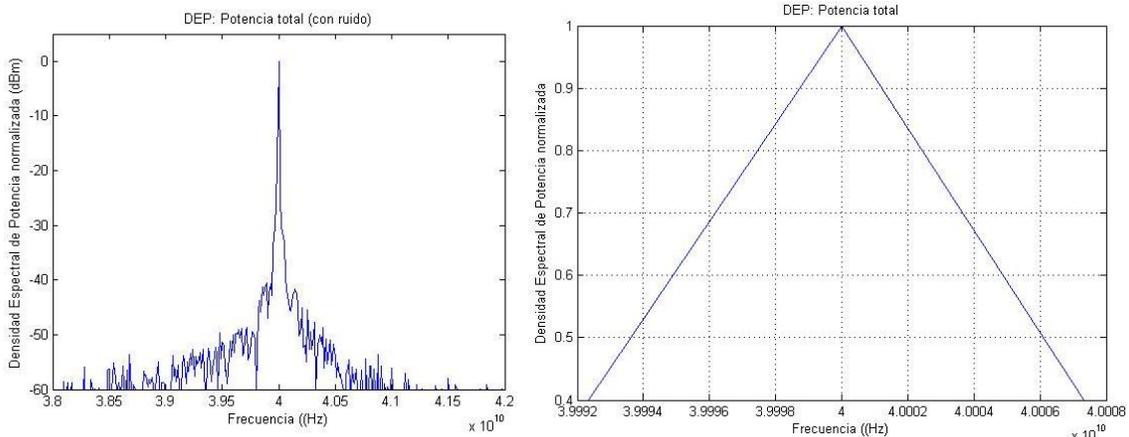


Fig. III.4.2 Señal generada a 40 GHz con 5 modos.

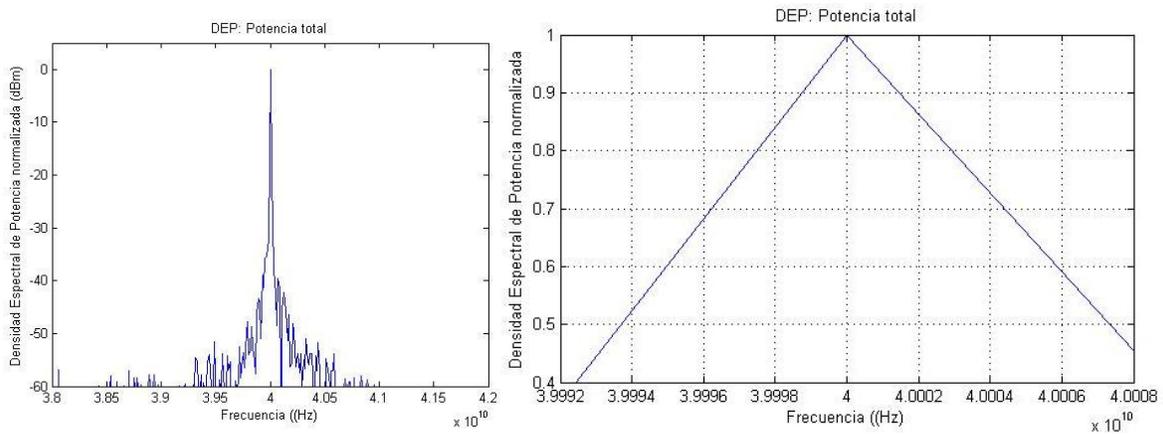


Fig. III.4.3 Señal generada a 40 GHz con 7 modos.

En todas ellas se puede ver una señal centrada en 40 GHz. El ancho de línea aumenta al pasar de 3 a de 5 modos. Esto se observa en los paneles derechos, en donde podemos ver en la parte izquierda se ensancha. Mientras que al pasar de 5 a 7 modos se ensancha la parte derecha.

CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se han tratado los conceptos básicos necesarios para entender el funcionamiento de los **Láser de semiconductor (LS)** tipo **Fabry-Pérot (F-P)**. Como parte de esto, se han estudiado modelos para describir distintos fenómenos como: la propagación de un haz en una cavidad óptica tipo F-P y la interacción de un haz al propagarse por un sistema atómico. Además, se ha descrito de manera concisa el marco conceptual referente a la **mezcla de cuatro ondas (MCO)** en LS y los tres fenómenos asociados a este: hoyo espectral, calentamiento de portadores y **modulación de la densidad de portadores (MDP)**, así como las características del acoplamiento de modos y la relación entre la MCO y el acoplamiento pasivo en los LS.

Por otra parte, el desarrollo analítico realizado en el capítulo II reproduce las ecuaciones de amplitud y de fase presentadas en [1] para el caso de 3 modos, y lo amplía para 5 y 7 modos. Este desarrollo permite entender características importantes de las ecuaciones y da un claro panorama de las tendencias en la ecuación al aumentar el número de modos M .

La implementación del modelo analítico a través de un programa de simulación computacional se llevó a cabo. Los resultados del programa muestran que el modelo describe de manera satisfactoria la oscilación o pulsación del número de portadores y la generación de señales a través de la modulación de la potencia total. Estas señales están localizadas en una frecuencia igual a la frecuencia de separación entre los modos (40 GHz) y un múltiplo de esta (80 GHz).

Los resultados respecto al ancho de línea de las señales generadas a 40 GHz no muestran el comportamiento buscado. Al parecer, el modelo no reproduce la tendencia decreciente del ancho de línea al aumentar el número de modos.

Del estudio realizado se desprenden elementos suficientes para pasar, como trabajo futuro, a la implementación de M modos y así tener más claro el efecto sobre el ancho de la señal al variar el número de modos.

APÉNDICE A

Radiación Atómica [39]

A.1 Ideas Preliminares

Los conceptos básicos que llevan a un sistema atómico a la ganancia (y por lo tanto, con una apropiada cavidad, a un láser) son muy sencillos:

1. Niveles discretos de energía
2. Emisión de un fotón al pasar de una energía mayor a una inferior y absorción en el proceso inverso.

El entendimiento, gracias a Planck del punto 1, fue crucial para el desarrollo de la descripción de Einstein de las interacciones entre radiación y materia.

A.2 Radiación del Cuerpo Negro

El cuerpo negro ideal absorbe toda la radiación que incide sobre él y, en equilibrio termodinámico, emite también al 100%. Un agujero pequeño en una caja puede considerarse un cuerpo negro.

Antes de la resolución de Planck a este problema se conocían tres hechos experimentales:

1. El hoyo se comportaba muy cercano al cuerpo negro ideal con un coeficiente de emisión igual a uno.
2. Entonces la intensidad emitida por este hoyo es directamente proporcional a la densidad de la radiación electromagnética dentro de la cavidad.
3. Esta densidad de energía, en un intervalo de frecuencia fijo (determinado por la técnica de medición), tenía el siguiente valor experimental:

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3 d\nu}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Estos hechos eran conocidos, mas no entendidos. Todos los fenómenos electromagnéticos hasta esa fecha eran explicados por la teoría de Maxwell. Entonces era natural empezar desde ahí y preguntarse como la energía electromagnética se distribuía dentro de la cavidad (o caja). Solo los modos (tanto TE y TM) que estén en resonancia tendrán una energía apreciable. Estos modos están determinados por la fórmula: $RTPS = q \cdot 2\pi = \beta_{m,p} \cdot 2d$ donde $\beta_{m,p}$ es la constante de fase del modo:

$$\beta_{m,p} = \left[\left(\frac{wn}{c} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{p\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Entonces, las frecuencias de resonancia del modo (m, p, q) están determinados por la condición:

$$k^2 = \left(\frac{wn}{c}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{d}\right)^2$$

La resonancia implica que cada componente de k debe ser un múltiplo de media longitud de onda. Entonces las frecuencias de resonancia están dadas por:

$$\left(\frac{2\pi\nu n}{c}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{d}\right)^2$$

Escogiendo la caja cubica a=b=d,

$$\nu = \frac{c}{2\pi n a} \left[(m)^2 + (p)^2 + (q)^2 \right]^{1/2}$$

Debido a que el volumen de una esfera es $V = 4\pi R^3 / 3$ y contando los estados en la parte positiva de la esfera en el espacio m,p,q con $R = 2an\nu / c$

$$N = 2 \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2nan\nu}{c} \right)^3 = \frac{8\pi n^3 \nu^3}{3c^3} a^3$$

Es normal preguntarse por el número de estados en un intervalo pequeño $d\nu$ alrededor de ν y preferir el resultado en una base por unidad de volumen para eliminar la geometría.

$$p(\nu)d\nu = \frac{1}{V} \frac{dN}{d\nu} d\nu = \frac{8\pi n^2 \bar{n}_g}{c^3} \nu^2 d\nu \cong \frac{8\pi n^3}{c^3} \nu^2 d\nu$$

donde $\bar{n}_g = n + \nu \frac{dn}{d\nu}$. Aplicando equipartición de la energía, cada modo tiene energía kT .

Esto se debe a que se propaga en una dimensión y puede almacenar energía en TE y TM.

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi n^3 \nu^2 d\nu}{c^3} kT \quad (\text{Distribución de Rayleigh – Jeans})$$

Esta distribución funciona solamente para frecuencias cortas. Planck supuso que la energía estaba cuantizada $E = 1h\nu, 2h\nu, 3h\nu...$ y utilizó la estadística clásica de Boltzman para calcular la energía promedio.

$$\varepsilon_n = nh\nu, \quad \langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \overbrace{e^{-nh\nu/kT}}^{\text{Factor de Boltzman}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}} = \frac{h\nu}{e^{-h\nu/kT} - 1}$$

Finalmente,

$$\rho(\nu)d\nu = \left(\frac{8\pi n^3 \nu^2 d\nu}{c^3} \right) (h\nu) \left(\frac{1}{e^{-h\nu/kT} - 1} \right)$$

El último término es el número de cuantos en el modo de la cavidad.

A.3 La Aproximación de Einstein: los Coeficientes A y B

Utilizando el enfoque de Einstein podemos llegar a un razonamiento que no solo es válido en situación de equilibrio termodinámico.

DEFINICIÓN DE LOS PROCESOS DE RADIACIÓN

Aceptando la hipótesis de cuantización de la energía $E = h\nu$ y asociando las transiciones a dos niveles atómicos de energía, Einstein identificó tres procesos radiativos que afectan la concentración de átomos en los estados 1 y 2.

- a) Emisión espontánea (A_{21})

Un átomo en el estado 2 decae espontáneamente al estado 1, emitiendo un fotón en el proceso.

$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{\substack{\text{emisión} \\ \text{espontánea}}} = -A_{21}N_2$$

- b) Absorción estimulada (B_{12})

Un átomo en el estado 1 absorbe un fotón un campo incidente y pasa al estado 2.

$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{\text{absorción}} = B_{12}N_1\rho(\nu) = -\left. \frac{dN_1}{dt} \right|_{\text{absorción}}$$

- c) Emisión estimulada (B_{21})

El átomo emite un fotón coherente al fotón del campo que lo estimula (misma dirección, frecuencia, fase y polarización).

$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{\substack{\text{emisión} \\ \text{estimulada}}} = -B_{21}N_2\rho(\nu) = -\left. \frac{dN_1}{dt} \right|_{\substack{\text{emisión} \\ \text{estimulada}}}$$

RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES

Al definir estos procesos, Einstein podía reproducir la fórmula de la radiación del cuerpo negro. Se parte del equilibrio termodinámico, donde las poblaciones de los dos niveles son constantes.

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} = -\frac{dN_1}{dt} &= -A_{21}N_2 + B_{12}N_1\rho(\nu) - B_{21}N_2\rho(\nu) = 0 \\ \frac{N_2}{N_1} &= \frac{B_{12}\rho(\nu)}{A_{21} + B_{21}\rho(\nu)} \end{aligned}$$

Usando la estadística de Boltzmann

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu}{kT}} = \frac{B_{12}\rho(\nu)}{A_{21} + B_{21}\rho(\nu)}$$

Donde $g_{2(1)}$ es el número de formas en que un átomo puede tener energía $E_{2(1)}$, que para un átomo simple está asociado al número cuántico de momento angular $J_{2(1)}$ mediante

$$g_{2(1)} = 2J_{2(1)} + 1.$$

$$\rho(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{\frac{B_{12}g_1}{B_{21}g_2} e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Forzando los coeficientes para obtener la fórmula de Planck

$$\frac{B_{12}g_1}{B_{21}g_2} = 1, \quad \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi n^2 n_g h\nu^3}{c^3}$$

Estas ecuaciones muestran la conexión entre distintos procesos de radiación: emisión espontánea, absorción y emisión estimulada. Son características del átomo, independientemente de si está en un ambiente de equilibrio termodinámico o en la presencia de un campo electromagnético.

A.4 Función Forma de Línea

En el caso de que las poblaciones N_1 y N_2 sean dependientes del tiempo (fuera del equilibrio) y suponemos que el sistema emite en una banda angosta de frecuencias (cuyo ancho $\Delta\nu$ es mucho menor que la frecuencia central ν), $E_2 - E_1 = h\nu$ tiene que verse con algo de escepticismo. Al considerar más de un solo átomo se vuelve imperativo reconocer que las energías no están perfectamente definidas. E_2 y E_1 son las energías centrales de los estados 2 y 1, cuya distribución energética es una banda angosta. Entonces el espectro de emisión es también una distribución llamada función de ancho de línea $g(\nu)$, con $g(\nu)d\nu$ la fracción de emisión espontánea siendo emitida dentro del intervalo $d\nu$.

Definición 1 de $g(\nu)$

$g(\nu')d\nu'$ = probabilidad de que un fotón espontáneamente emitido tenga una frecuencia entre ν' y $\nu' + d\nu'$.

Obviamente: $\int_0^{\infty} g(\nu')d\nu' = 1$. Las dimensiones de $g(\nu)$ son segundos (inverso de frecuencia). El

pico de la distribución $g(\nu_0) \sim 1/\Delta\nu$. Con $\nu_0 = (E_2 - E_1)/h = \nu_{21}$ y $\Delta\nu$ es la anchura a media altura (FWHM, por sus siglas en inglés). La tasa de emisión espontánea de cada $d\nu'$ sigue siendo A_{21} y la distribución espectral de la potencia espontáneamente emitida (en todas las direcciones) es

$$\{I(\nu)d\nu\} \{\text{area de superficie}\} = \{h\nu \cdot A_{21}N_2g(\nu)d\nu\} \{\text{vol. de superficie}\}$$

Definición 2 de $g(\nu)$

$g(\nu')d\nu'$ es la magnitud relativa de la absorción de radiación, en el intervalo ν' y $\nu' + d\nu'$, de los átomos en el estado 1.

Definición 3 de $g(\nu)$

$g(\nu')d\nu'$ es la magnitud relativa de la estimulación debido a la radiación (en el intervalo ν' y $\nu' + d\nu'$) para inducir a los átomos en el estado 2 a ceder su energía interna y pasar al estado 1. La densidad de energía electromagnética en el intervalo $(\nu', \nu' + d\nu')$ es $\rho(\nu)d\nu$.

La misma $g(\nu)$ se aplica a los 3 procesos. La anchura espectral de la densidad de energía radiante $\rho(\nu)$ puede ser más ancha que $g(\nu)$, como en el caso del cuerpo negro, o más pequeña que $\Delta\nu$. Esto se considera en la ecuación de evolución de población:

$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{\text{radiativo}} = -A_{21}N_2 \int_0^\infty g(\nu') d\nu' + B_{12}N_1 \int_0^\infty \rho(\nu') g(\nu') d\nu' - B_{21}N_2 \int_0^\infty \rho(\nu') g(\nu') d\nu'$$

Si $\rho(\nu')$ es muy ancha comparada con $g(\nu')$ se puede evaluar $\nu' = \nu$ y sacar $\rho(\nu)$ (como constante en la región en que $g(\nu') \neq 0$) de la integral, obteniéndose la fórmula de Planck. Resulta más interesante el caso contrario, en el que la anchura espectral $\rho(\nu)$ es muy pequeña comparada con $g(\nu)$. En este caso se aproxima $\rho(\nu') \approx \rho_\nu \delta(\nu - \nu')$

$$\Rightarrow \left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{\text{radiativo}} = -A_{21}N_2 + B_{12}N_1 \rho_\nu g(\nu) - B_{21}N_2 \rho_\nu g(\nu)$$

Usando las relaciones entre los coeficientes

$$B_{12} = \frac{g_2}{g_1} B_{21}$$

$$B_{21} = \frac{c^2}{8\pi n^2 \nu^2} \frac{c}{n_g} \frac{1}{h\nu} A_{21} = \frac{c}{n_g} \frac{\lambda_0}{8\pi n^2} \frac{A_{21}}{h\nu}$$

Y además

$$\rho_\nu \left(\frac{\text{joule}}{\text{volumen}} \right) = \frac{I_\nu \left(\text{watt} / \text{area} = \text{joule} \cdot \text{tiempo}^{-1} \cdot L^{-2} \right)}{\text{velocidad foton} = L/T}$$

$$\rho_\nu = \frac{I_\nu}{c/n_g}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{\text{radiativo}} = -A_{21}N_2 - \frac{\sigma(\nu)I_\nu}{h\nu} \left[N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right]$$

Con $\sigma(\nu)$ como la sección transversal de emisión estimulada:

$$\sigma(\nu) = A_{21} \frac{\lambda^2}{8\pi n^2} g(\nu)$$

La sección transversal σ puede ser interpretada como el área de sección transversal del átomo para el flujo de fotones $I_\nu / h\nu$.

APÉNDICE B

Láser De Semiconductor [39]

B.1 Introducción

La estructura de un **láser de semiconductor (LS)** consta de una fuente de voltaje conectada a una unión n-p (donde reside la mayor parte de la física) con espejos de cavidad formados al pulir el cristal. La densidad de corriente inyectada a través de la fuente de voltaje es la que provee la ganancia óptica a una onda cuya extensión espacial debe ser mucho mayor que la longitud de la región activa. Si se desea que la ganancia de una ida y vuelta (round trip) exceda 1, el coeficiente de ganancia debe ser muy grande.

El momento total del electrón se debe conservar en la recombinación (ya que el momento del fotón emitido es muy pequeño y se desprecia),

$$\Delta \vec{k} = \vec{k}_i - \vec{k}_f \approx 0$$

En materiales de bandgap indirecto, esta condición limita la tasa de recombinación y la magnitud de transición (S) para la radiación es mucho más débil que en los materiales directos.

B.2 Revisión de la Teoría Elemental de Semiconductores

La densidad de estados para la función de onda $\psi(\vec{r}) = u(r)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$\rho_{c,v}(E)dE = \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \right\} \left\{ \frac{2m^*}{\hbar^2} \right\}^{3/2} \left\{ E^{1/2} dE \right\}$$

donde E es medida desde el límite de la banda respectiva. La densidad de electrones con energía en ΔE :

$$N_e = \int_0^{\Delta E} \rho_e(E)dE = \frac{1}{3\pi^2} \left[\frac{2m^* \Delta E}{\hbar^2} \right]^{3/2}$$

PROBABILIDAD DE OCUPACIÓN: NIVELES CUASI-FERMI

Las densidades anteriores son válidas cuando $T = 0^\circ K$. Si estamos arriba el cero absoluto, debemos tomar en cuenta la probabilidad de que el estado este ocupado:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - E_f}{kT}} + 1}$$

Entonces, la densidad de electrones en la banda de conducción es

$$n_c(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{2m_e^*}{\hbar^2} \right]^{3/2} \frac{(\varepsilon - E_c)^{1/2} d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - E_c}{kT}} + 1} \quad \varepsilon > E_c$$

Mientras que la densidad de huecos en la banda de valencia

$$p_v(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{2m_h^*}{\hbar^2} \right]^{3/2} \frac{(E_v - \varepsilon)^{1/2} d\varepsilon}{e^{\frac{E_v - \varepsilon}{kT}} + 1} \quad \varepsilon < E_v$$

B.3 Absorción Óptica y Ganancia en un Semiconductor

Las situaciones que llevan a tener una ganancia en un semiconductor, son justamente las contrarias de las que llevan a la absorción. Imaginamos un semiconductor sobre el que incide una fuente con una pequeña señal de frecuencia variable. Por sencillez, se considera $T=0K$ y al material un material intrínseco con $F_n=F_p=E_f$ a la mitad del gap. Si $h\nu_s < E_g$, todos los estados en la banda de valencia están ocupados mientras que en la banda de conducción no hay electrones, por lo tanto no hay absorción. Cuando $h\nu_s > E_g$ la absorción comienza, ya que hay suficiente energía para excitar a un electrón en la banda de valencia hacia la banda de conducción. Es de suponerse que el coeficiente de absorción sea proporcional al número de estados disponibles para la absorción. Obviamente, a medida que $h\nu$ aumenta, también lo hace el coeficiente de absorción.

La situación de absorción cambia a ganancia si invertimos la población mediante una fuente de bombeo que proporcione la energía necesaria a los electrones para poblar la banda de conducción. Suponemos que este bombeo es lo suficientemente fuerte como para mantener un número considerable de electrones en la banda de conducción. Ya que la relajación intrabanda en los extremos de cada banda es muy rápido, los estados desde E_c a F_n están llenos y los estados desde E_v a F_p vacíos.

COEFICIENTE DE GANANCIA EN UN SEMICONDUCTOR

¿Puede haber cualquier combinación de posiciones tal que $E_2 - E_1 = h\nu$? No, la conservación de momento se debe de tomar en cuenta. Dado $h\nu$, ¿cuáles son E_2 y E_1 respecto a E_c y E_v ?

$$E_2 - E_c = \frac{m_h^*}{m_e^* + m_h^*} (h\nu - E_g)$$

$$E_v - E_1 = \frac{m_e^*}{m_e^* + m_h^*} (h\nu - E_g)$$

Ya que la energía del fotón $h\nu = E_2 - E_1$, los valores permitidos para los momentos de un electrón son:

$$\hbar k_c = \left[2m_e^* (E_2 - E_c) \right]^{1/2}$$

$$\hbar k_v = \left[2m_h^* (E_v - E_1) \right]^{1/2}$$

La densidad de estados entre k y $k + dk$, tomando en cuenta el spin, es:

$$\rho_{c,v}(k)dk = \frac{1}{2\pi^2} k^2 dk$$

La densidad reducida de estados está definida para reflejar el número de estados en E_2 y E_1 , dentro de dE_2 y dE_1 , que pueden participar en la transición de $h\nu$, conservando spin y momento.

$$\rho_{jnt}(h\nu)dE = \rho(k)dk = \frac{1}{2\pi^2} k^2 dk$$

Entonces,

$$\rho_{jnt}(h\nu) = \frac{1}{2\pi^2} k^2 \frac{dk}{dE} \quad (\text{evaluada en } h\nu = E_2 - E_1)$$

es la densidad de estados por intervalo de energía entre $h\nu$ y $h\nu+d(h\nu)$ que participan en el proceso conservando el momento. Finalmente

$$\rho_{jnt}(h\nu) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m_r}{\hbar^2} \right)^{3/2} (h\nu - E_g)^{1/2}$$

con la masa reducida $m_r = \frac{m_e^* m_v^*}{m_e^* + m_v^*}$. Una vez definidos los estados involucrados en la interacción, ahora podemos preguntarnos cuantas transiciones por unidad de volumen y por unidad de tiempo ocurren. El número de transiciones $R_{1 \rightarrow 2}$ y $R_{2 \rightarrow 1}$ están en términos de:

1. El coeficiente B de Einstein.
2. La densidad de energía de los fotones entre ν y $\nu+d\nu$ que provoca las transiciones ópticas.
3. La densidad reducida de estados expresada como densidad por unidad de frecuencia.
4. La probabilidad de que el estado en el que la transición se origina este ocupado multiplicada por la probabilidad de que el estado final este vacío.

$$R_{1 \rightarrow 2} = [B_{12}] \cdot [\rho(\nu)d\nu] \cdot [\rho_{jnt}(\nu)] \cdot [f_v(E_1)(1 - f_c(E_2))]$$

$$R_{2 \rightarrow 1} = [B_{21}] \cdot [\rho(\nu)d\nu] \cdot [\rho_{jnt}(\nu)] \cdot [f_c(E_2)(1 - f_v(E_1))]$$

La tasa total de descenso:

$$R_{2 \rightarrow 1} - R_{1 \rightarrow 2} = [B_{21}] \cdot [\rho(\nu)d\nu] \cdot [\rho_{jnt}(\nu)] \cdot \begin{bmatrix} f_2(1 - f_1) - f_1(1 - f_2) \\ 0 \\ f_2 - f_1 \end{bmatrix}$$

El coeficiente de ganancia

$$\gamma(\nu) \triangleq \frac{dI(\nu)/dz}{I(\nu)} = \frac{\text{potencia total emitida por unidad de vol.}}{\text{potencia por unidad de area}}$$

La potencia emitida es la energía de transición $h\nu$. La potencia óptica por unidad de área

$$I(\nu) = [\rho(\nu)d\nu] \cdot [\nu_g = c/n_g]$$

Entonces:

$$\gamma(\nu) = \frac{h\nu \cdot [R_{2 \rightarrow 1} - R_{1 \rightarrow 2}]}{[\rho(\nu)d\nu] \cdot c/n_g}$$

Usando la relación $A_{21}/B_{21} = 8\pi h\nu^3 n_g^2 / c^3$ y las funciones de Fermi apropiadas

$$\gamma(\nu) = A_{21} [f_2(1-f_1)] \frac{\lambda_0^2}{8\pi n_g^2} \rho_{jnt}(\nu) \left\{ 1 - e^{-\frac{h\nu - (F_n - F_p)}{kT}} \right\}$$

Si $F_n = F_p$ (situación de equilibrio) $\Leftrightarrow e^{\frac{h\nu}{kT}} > 1$ y el coeficiente de ganancia es negativo. Otra forma de expresar el coeficiente de ganancia es la siguiente:

$$\gamma(\nu) = A_{21} \frac{\lambda_0^2}{8\pi n_g^2} \rho_{jnt}(\nu) [f_c(E_2) - f_v(E_1)]$$

De esta última ecuación, se observa que hay dos límites: cuando $f_c(E_2) = 0$ y además $f_v(E_1) = 1$, y cuando $f_c(E_2) = 1$ y $f_v(E_1) = 0$, con $\gamma(\nu) = -\alpha(\nu)$ y $\gamma(\nu) = \alpha(\nu)$, respectivamente. Saltándose las complicaciones cuánticas e introduciendo una constante K siempre presente que se puede determinar de forma experimental, se presenta la siguiente expresión para la ganancia:

$$\gamma(\nu) = K(h\nu - E_g)^{1/2} [f_c(E_2) - f_v(E_1)]$$

donde E_2 y E_1 son:

$$E_2 = E_c + \frac{m_h^*}{m_e^* + m_h^*} (h\nu - E_g)$$

$$E_1 = E_v - \frac{m_e^*}{m_e^* + m_h^*} (h\nu - E_g)$$

APÉNDICE C

Calculo de la Diferencia de Camino Óptico (DCO) de Dos Haces Reflejados en un Resonador Fabry-Pérot

En una cavidad F-P los haces reflejados son paralelos. Al momento de incidir un haz sobre un espejo de la cavidad (ver fig. C.1), una parte de este se transmite (recorriendo una distancia $2d$ para volver al mismo espejo) y la otra se refleja (recorriendo una distancia d' para llegar al plano transversal a la trayectoria del primer haz reflejado). La diferencia de camino óptico es $DCO=n(2d)-n'd$, donde n y n' son los índices de refracción dentro y fuera de la cavidad, respectivamente. Esta DCO es la misma para todos los haces reflejados.

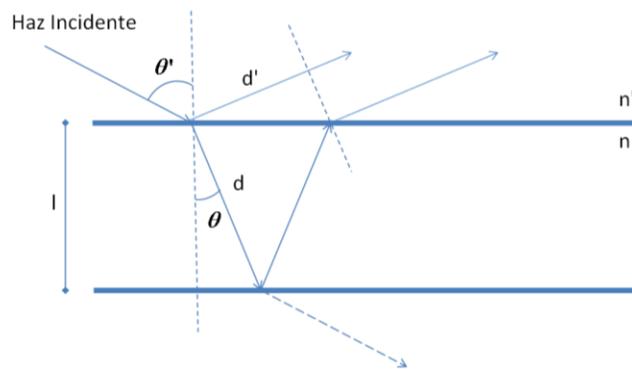


Fig. C.1 Trayectoria de un haz incidiendo en una cavidad F-P. d' es la distancia del primer haz reflejado al plano transversal que pasa por el punto donde empieza el segundo haz reflejado. $2d$ es la distancia que recorre el segundo haz reflejado en el interior de la cavidad.

Es evidente que $d \cos \theta = l$. Para obtener d' nos centraremos en el triángulo superior de la fig. C.1, mostrado en la fig. C.2:

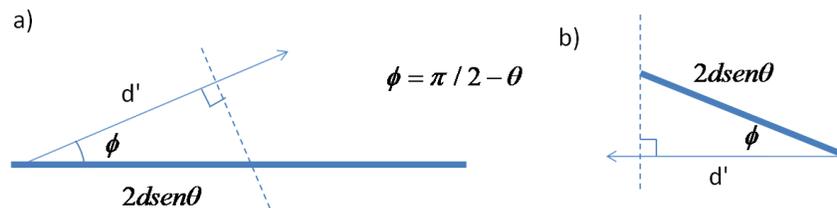


Fig. C.2 Triángulo rectángulo de la parte superior de la fig. C.1 a) sin rotar b) rotado.

También resulta evidente de la fig. C.2 b) que $d' = (2dsen\theta) \cos(\pi/2 - \theta') = 2dsen\theta sen\theta'$

Usando la ley de Snell ($n sen\theta = n' sen\theta'$), obtenemos: $d' = 2dsen\theta \left(\frac{n}{n'} sen\theta\right)$. Por lo que la diferencia de camino óptico es

$$DCO = n \left(\frac{2l}{\cos\theta} \right) - n' \left(\frac{2n}{n'} \frac{l}{\cos\theta} sen^2\theta \right)$$

$$\boxed{DCO = 2nl \cos\theta}$$

APÉNDICE D

Identidades

$$b \cos(x) + a \operatorname{sen}(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}\left(x + \arctan \frac{b}{a}\right) \quad (11)$$

$$\operatorname{sen}\left(\psi + \arctan \frac{1}{\alpha_H}\right) = \cos\left(\psi + \arctan \alpha_H\right) \quad (12)$$

$$\operatorname{sen}\left(\psi + \arctan(-\alpha_H)\right) = \operatorname{sen}\left(\psi - \arctan \alpha_H\right) \quad (13)$$

$$\operatorname{sen}\left(\psi + \arctan \frac{1}{\alpha_H}\right) = \cos\left(\psi - \arctan \alpha_H\right) \quad (14)$$

A continuación se demuestran (12), (13) y (14), a partir de (11) y de las siguientes identidades trigonométricas:

| | | |
|--|--|--------------------------------|
| $\operatorname{ctg}(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$ | $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$ | $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ |
| $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan(\theta)$ | $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$ | |

Demostración de (12).

| | | |
|---|---|---|
| $\arctan \frac{1}{\alpha_H} = x$ $\frac{1}{\alpha_H} = \tan x$ | $\alpha_H = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ | $\operatorname{sen}\left(\psi + \arctan \alpha_H + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\psi - \arctan \alpha_H\right)$ |
| $\frac{1}{\alpha_H} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ | $x = \arctan(\alpha_H) + \frac{\pi}{2}$ | $\cos\left(-\psi - \arctan \alpha_H\right) = \cos\left(\psi + \arctan \alpha_H\right)$ |
| $\alpha_H = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ | $\Rightarrow \arctan \frac{1}{\alpha_H} =$ $= \arctan(\alpha_H) + \frac{\pi}{2}$ | $\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\psi + \arctan \frac{1}{\alpha_H}\right) = \cos\left(\psi + \arctan \alpha_H\right)$ |

Demostración de (13).

| | |
|--------------------------|---|
| $\arctan(-\alpha_H) = x$ | $\arctan \alpha_H = -x$ |
| $-\alpha_H = \tan x$ | $\Rightarrow \arctan(-\alpha_H) = -\arctan \alpha_H$ |
| $\alpha_H = \tan(-x)$ | $\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\psi + \arctan(-\alpha_H)\right) = \operatorname{sen}\left(\psi - \arctan \alpha_H\right)$ |

Demostración de (14).

| | | |
|----------------------------------|---|--|
| $\arctan \frac{1}{\alpha_H} = x$ | $\frac{1}{\alpha_H} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ | $\operatorname{sen}\left(\psi + \arctan \frac{1}{\alpha_H}\right) = \cos\left(-\psi + \arctan \alpha_H\right)$ |
| $\frac{1}{\alpha_H} = \tan x$ | $\arctan \frac{1}{\alpha_H} = \frac{\pi}{2} - \arctan \alpha_H$ | $\operatorname{sen}\left(\psi + \arctan \frac{1}{\alpha_H}\right) = \cos\left(\psi - \arctan \alpha_H\right)$ |

APÉNDICE E

Desarrollo de ΔN_m y $\Sigma(\Delta N_m E_{k-m} + \Delta N_m^* E_{k+m})$ Para $M=7$

La sumatoria en el último término de la expresión (II.2.3) es

$$\sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{k-m} + \Delta N_m^* E_{k+m})$$

ΔN_m es el coeficiente del término oscilatorio en la solución de la densidad de portadores está definido por la expresión (II.1.11):

$$\Delta N_m = -(N_0 - N_{tr}) \sum_{k=m+1}^M \frac{E_k E_{k-m}^* / P_s}{1 + P_1 / P_s - im\Omega_{sp} \tau_e} = -iK \sum_{k=m+1}^M \frac{E_k E_{k-m}^*}{m}$$

donde $K = (N_0 - N_{tr}) / P_s \Omega_{sp} \tau_e$ y se ha considerado que $1 + P_1 / P_s \ll im\Omega_{sp} \tau_e$. Desarrollando la sumatoria hasta $M = 7$ y para m de 1 a 6. Además se expresan los términos que corresponden a los casos de $M=3, 5$.

$$\begin{aligned} \Delta N_1 &= -iK \left(\underbrace{E_2 E_1^* + E_3 E_2^* + E_4 E_3^* + E_5 E_4^*}_{M=5} + E_6 E_5^* + E_7 E_6^* \right) \\ \Delta N_1^* &= iK \left(\underbrace{E_2^* E_1 + E_3^* E_2 + E_4^* E_3 + E_5^* E_4}_{M=5} + E_6^* E_5 + E_7^* E_6 \right) \\ \Delta N_2 &= -\frac{iK}{2} \left(\underbrace{E_3 E_1^* + E_4 E_2^* + E_5 E_3^*}_{M=5} + E_6 E_4^* + E_7 E_5^* \right) \\ \Delta N_2^* &= \frac{iK}{2} \left(\underbrace{E_3^* E_1 + E_4^* E_2 + E_5^* E_3}_{M=5} + E_6^* E_4 + E_7^* E_5 \right) \\ \Delta N_3 &= \frac{-iK}{3} \left(\underbrace{E_4 E_1^* + E_5 E_2^*}_{M=5} + E_6 E_3^* + E_7 E_4^* \right) \\ \Delta N_3^* &= \frac{iK}{3} \left(\underbrace{E_4^* E_1 + E_5^* E_2}_{M=5} + E_6^* E_3 + E_7^* E_4 \right) \\ \Delta N_4 &= \frac{-iK}{4} \left(\underbrace{E_5 E_1^* + E_6 E_2^*}_{M=5} + E_7 E_3^* \right) \\ \Delta N_4^* &= \frac{iK}{4} \left(\underbrace{E_5^* E_1 + E_6^* E_2}_{M=5} + E_7^* E_3 \right) \\ \Delta N_5 &= \frac{-i(N_0 - N_{tr})}{5P_s \Omega_{sp} \tau_e} (E_6 E_1^* + E_7 E_2^*) \\ \Delta N_5^* &= \frac{i(N_0 - N_{tr})}{5P_s \Omega_{sp} \tau_e} (E_6^* E_1 + E_7^* E_2) \\ \Delta N_6 &= \frac{-i(N_0 - N_{tr})}{6P_s \Omega_{sp} \tau_e} (E_7 E_1^*) \\ \Delta N_6^* &= \frac{i(N_0 - N_{tr})}{6P_s \Omega_{sp} \tau_e} (E_7^* E_1) \end{aligned}$$

Ahora se calcula el término $\sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{k-m} + \Delta N_m^* E_{k+m})$ para $M=7$ y k de 1 a 7.

$$(k=1) \rightarrow \sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{1-m} + \Delta N_m^* E_{1+m}) = \underbrace{\overbrace{\Delta N_1^* E_2 + \Delta N_2^* E_3 + \Delta N_3^* E_4 + \Delta N_4^* E_5}^{M=3}}_{M=5} + \Delta N_5^* E_6 + \Delta N_6^* E_7$$

$$(k=2) \rightarrow \sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{2-m} + \Delta N_m^* E_{2+m}) = \underbrace{\overbrace{(\Delta N_1 E_1 + \Delta N_1^* E_3)}^{M=3}}_{M=5} + \Delta N_2^* E_4 + \Delta N_3^* E_5 + \Delta N_4^* E_6 + \Delta N_5^* E_7$$

$$(k=3) \rightarrow \sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{3-m} + \Delta N_m^* E_{3+m}) = \underbrace{\left(\overbrace{\Delta N_1 E_2 + \Delta N_1^* E_4}^{M=3} \right)}_{M=5} + \underbrace{\left(\overbrace{\Delta N_2 E_1 + \Delta N_2^* E_5}^{M=3} \right)}_{M=5} + \Delta N_3^* E_6 + \Delta N_4^* E_7$$

$$(k=4) \rightarrow \sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{4-m} + \Delta N_m^* E_{4+m}) = \underbrace{\left(\overbrace{\Delta N_1 E_3 + \Delta N_1^* E_5}^{M=5} \right)}_{M=5} + \underbrace{\left(\overbrace{\Delta N_2 E_2 + \Delta N_2^* E_6}^{M=5} \right)}_{M=5} + \underbrace{\left(\overbrace{\Delta N_3 E_1 + \Delta N_3^* E_7}^{M=5} \right)}_{M=5}$$

$$(k=5) \rightarrow \sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{5-m} + \Delta N_m^* E_{5+m}) = \underbrace{\left(\overbrace{\Delta N_1 E_4 + \Delta N_1^* E_6}^{M=5} \right)}_{M=5} + \underbrace{\left(\overbrace{\Delta N_2 E_3 + \Delta N_2^* E_7}^{M=5} \right)}_{M=5} + \underbrace{\Delta N_3 E_2 + \Delta N_4 E_1}_{M=5}$$

$$(k=6) \rightarrow \sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{6-m} + \Delta N_m^* E_{6+m}) = (\Delta N_1 E_5 + \Delta N_1^* E_7) + \Delta N_2 E_4 + \Delta N_3 E_3 + \Delta N_4 E_2 + \Delta N_5 E_1$$

$$(k=7) \rightarrow \sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{7-m} + \Delta N_m^* E_{7+m}) = \Delta N_1 E_6 + \Delta N_2 E_5 + \Delta N_3 E_4 + \Delta N_4 E_3 + \Delta N_5 E_2 + \Delta N_6 E_1$$

A continuación se sustituyen los valores de ΔN_m en estas expresiones de arriba.

SUMATORIAS

Utilizando los resultados de la sección anterior, la sumatoria para el caso de $k=1$,

$$\sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{1-m} + \Delta N_m^* E_{1+m}) = \frac{i(N_0 - N_{tr})}{P_s \Omega_{sp} \tau_e} \overbrace{\left(\begin{aligned} & (E_2^* E_1 + E_3^* E_2 + E_4^* E_3 + E_5^* E_4 + E_6^* E_5 + E_7^* E_6) E_2 + \\ & \frac{1}{2} (E_3^* E_1 + E_4^* E_2 + E_5^* E_3 + E_6^* E_4 + E_7^* E_5) E_3 + \\ & \frac{1}{3} (E_4^* E_1 + E_5^* E_2 + E_6^* E_3 + E_7^* E_4) E_4 + \\ & \frac{1}{4} (E_5^* E_1 + E_6^* E_2 + E_7^* E_3) E_5 + \\ & \frac{1}{5} (E_6^* E_1 + E_7^* E_2) E_6 + \\ & \frac{1}{6} (E_7^* E_1) E_7 \end{aligned} \right)}^{EE_{7,1}}$$

Trabajando con $EE_{7,1}$,

$$EE_{7,1} = \left(\begin{aligned} & |E_2|^2 E_1 + E_2^2 E_3^* + E_2 E_3 E_4^* + E_2 E_4 E_5^* + E_2 E_5 E_6^* + E_2 E_6 E_7^* + \\ & \frac{1}{2} |E_3|^2 E_1 + \frac{1}{2} E_2 E_3 E_4^* + \frac{1}{2} E_3^2 E_5^* + \frac{1}{2} E_3 E_4 E_6^* + \frac{1}{2} E_3 E_5 E_7^* + \\ & \frac{1}{3} |E_4|^2 E_1 + \frac{1}{3} E_2 E_4 E_5^* + \frac{1}{3} E_3 E_4 E_6^* + \frac{1}{3} E_4^2 E_7^* + \\ & \frac{1}{4} |E_5|^2 E_1 + \frac{1}{4} E_2 E_5 E_6^* + \frac{1}{4} E_3 E_5 E_7^* + \\ & \frac{1}{5} |E_6|^2 E_1 + \frac{1}{5} E_2 E_6 E_7^* + \\ & \frac{1}{6} |E_7|^2 E_1 \end{aligned} \right)$$

$$EE_{7,1} = \left(\begin{aligned} & E_1 \left[|E_2|^2 + \frac{1}{2} |E_3|^2 + \frac{1}{3} |E_4|^2 + \frac{1}{4} |E_5|^2 + \frac{1}{5} |E_6|^2 + \frac{1}{6} |E_7|^2 \right] + E_3^* [E_2^2] + E_4^* \left[\frac{3}{2} E_3 E_2 \right] \\ & + E_5^* \left[\frac{1}{2} E_3^2 + \frac{4}{3} E_4 E_2 \right] + E_6^* \left[\frac{5}{6} E_3 E_4 + \frac{5}{4} E_2 E_5 \right] + E_7^* \left[\frac{1}{3} E_4^2 + \frac{3}{4} E_3 E_5 + \frac{6}{5} E_2 E_6 \right] \end{aligned} \right)$$

$$EE_{7,1} = \left(\begin{aligned} & |E_2|^2 + \frac{1}{2} |E_3|^2 + \frac{1}{3} |E_4|^2 + \frac{1}{4} |E_5|^2 + \frac{1}{5} |E_6|^2 + \frac{1}{6} |E_7|^2 + \frac{E_3^*}{E_1} E_2^2 + \frac{3 E_4^*}{2 E_1} E_2 E_3 \\ & + \frac{E_5^*}{E_1} \left[\frac{1}{2} E_3^2 + \frac{4}{3} E_4 E_2 \right] + \frac{E_6^*}{E_1} \left[\frac{5}{6} E_3 E_4 + \frac{5}{4} E_2 E_5 \right] + \frac{E_7^*}{E_1} \left[\frac{1}{3} E_4^2 + \frac{3}{4} E_3 E_5 + \frac{6}{5} E_2 E_6 \right] \end{aligned} \right) E_1$$

La sumatoria para el caso de k=2,

$$\sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{2-m} + \Delta N_m^* E_{2+m}) = \frac{i(N_0 - N_{tr})}{P_s \Omega_{sp} \tau_e} \overbrace{\left(\begin{array}{l} - (E_2 E_1^* + E_3 E_2^* + E_4 E_3^* + E_5 E_4^* + E_6 E_5^* + E_7 E_6^*) E_1 \\ + (E_2^* E_1 + E_3^* E_2 + E_4^* E_3 + E_5^* E_4 + E_6^* E_5 + E_7^* E_6) E_3 \\ \frac{1}{2} (E_3^* E_1 + E_4^* E_2 + E_5^* E_3 + E_6^* E_4 + E_7^* E_5) E_4 \\ \frac{1}{3} (E_4^* E_1 + E_5^* E_2 + E_6^* E_3 + E_7^* E_4) E_5 \\ \frac{1}{4} (E_5^* E_1 + E_6^* E_2 + E_7^* E_3) E_6 \\ \frac{1}{5} (E_6^* E_1 + E_7^* E_2) E_7 \end{array} \right)}^{EE_{7,2}}$$

Desarrollando el término entre corchetes,

$$EE_{7,2} = \left(\begin{array}{l} -|E_1|^2 E_2 - \cancel{E_1 E_2^* E_3} - E_1 E_3^* E_4 - E_1 E_4^* E_5 - E_1 E_5^* E_6 - E_1 E_6^* E_7 + \\ \cancel{E_1 E_2^* E_3} + |E_3|^2 E_2 + E_3^2 E_4^* + E_3 E_4 E_5^* + E_3 E_5 E_6^* + E_3 E_6 E_7^* + \\ \frac{1}{2} E_1 E_3^* E_4 + \frac{1}{2} |E_4|^2 E_2 + \frac{1}{2} E_3 E_4 E_5^* + \frac{1}{2} E_4^2 E_6^* + \frac{1}{2} E_4 E_5 E_7^* + \\ \frac{1}{3} E_1 E_4^* E_5 + \frac{1}{3} |E_5|^2 E_2 + \frac{1}{3} E_3 E_5 E_6^* + \frac{1}{3} E_4 E_5 E_7^* + \\ \frac{1}{4} E_1 E_5^* E_6 + \frac{1}{4} |E_6|^2 E_2 + \frac{1}{4} E_3 E_6 E_7^* + \\ \frac{1}{5} E_1 E_6^* E_7 + \frac{1}{5} |E_7|^2 E_2 \end{array} \right)$$

$$EE_{7,2} = \left(\begin{array}{l} E_2 \left[-|E_1|^2 + |E_3|^2 + \frac{1}{2} |E_4|^2 + \frac{1}{3} |E_5|^2 + \frac{1}{4} |E_6|^2 + \frac{1}{5} |E_7|^2 \right] + E_3^* \left[-E_1 E_4 + \frac{1}{2} E_1 E_4 \right] + \\ E_4^* \left[-E_1 E_5 + E_3^2 + \frac{1}{3} E_1 E_5 \right] + E_5^* \left[-E_1 E_6 + E_3 E_4 + \frac{1}{2} E_3 E_4 + \frac{1}{4} E_1 E_6 \right] + \\ E_6^* \left[-E_1 E_7 + E_3 E_5 + \frac{1}{2} E_4^2 + \frac{1}{3} E_3 E_5 + \frac{1}{5} E_1 E_7 \right] + E_7^* \left[E_3 E_6 + \frac{1}{2} E_4 E_5 + \frac{1}{3} E_4 E_5 + \frac{1}{4} E_3 E_6 \right] \end{array} \right)$$

$$EE_{7,2} = \left(\begin{array}{l} -|E_1|^2 + |E_3|^2 + \frac{1}{2} |E_4|^2 + \frac{1}{3} |E_5|^2 + \frac{1}{4} |E_6|^2 + \frac{1}{5} |E_7|^2 - \frac{1}{2} \frac{E_3^*}{E_2} E_1 E_4 + \frac{E_4^*}{E_2} \left[E_3^2 - \frac{2}{3} E_1 E_5 \right] \\ + \frac{E_5^*}{E_2} \left[\frac{3}{2} E_3 E_4 - \frac{3}{4} E_1 E_6 \right] + \frac{E_6^*}{E_2} \left[\frac{1}{2} E_4^2 + \frac{4}{3} E_3 E_5 - \frac{4}{5} E_1 E_7 \right] + \frac{E_7^*}{E_2} \left[\frac{5}{3} E_4 E_5 + \frac{5}{4} E_3 E_6 \right] \end{array} \right) E_2$$

La sumatoria para el caso de k=3,

$$\sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{3-m} + \Delta N_m^* E_{3+m}) = \frac{i(N_0 - N_{tr})}{P_s \Omega_{sp} \tau_e} \overbrace{\left(\begin{aligned} & - (E_2 E_1^* + E_3 E_2^* + E_4 E_3^* + E_5 E_4^* + E_6 E_5^* + E_7 E_6^*) E_2 \\ & (E_2^* E_1 + E_3^* E_2 + E_4^* E_3 + E_5^* E_4 + E_6^* E_5 + E_7^* E_6) E_4 \\ & - \frac{1}{2} (E_3 E_1^* + E_4 E_2^* + E_5 E_3^* + E_6 E_4^* + E_7 E_5^*) E_1 \\ & \frac{1}{2} (E_3^* E_1 + E_4^* E_2 + E_5^* E_3 + E_6^* E_4 + E_7^* E_5) E_5 \\ & \frac{1}{3} (E_4^* E_1 + E_5^* E_2 + E_6^* E_3 + E_7^* E_4) E_6 \\ & \frac{1}{4} (E_5^* E_1 + E_6^* E_2 + E_7^* E_3) E_7 \end{aligned} \right)}^{EE_{7,3}}$$

Desarrollando el término entre corchetes,

$$EE_{7,3} = \left(\begin{aligned} & -E_2^2 E_1^* - |E_2|^2 E_3 - \cancel{E_2 E_3^* E_4} - E_2 E_4^* E_5 - E_2 E_5^* E_6 - E_2 E_6^* E_7 + \\ & E_1 E_2^* E_4 + \cancel{E_2 E_3^* E_4} + |E_4|^2 E_3 + E_4^2 E_5^* + E_4 E_5 E_6^* + E_4 E_6 E_7^* - \\ & - \frac{1}{2} |E_1|^2 E_3 - \frac{1}{2} E_1 E_2^* E_4 - \cancel{\frac{1}{2} E_1 E_3^* E_5} - \frac{1}{2} E_1 E_4^* E_6 - \frac{1}{2} E_1 E_5^* E_7 \\ & \frac{1}{2} \cancel{E_1 E_3^* E_5} + \frac{1}{2} E_2 E_4^* E_5 + \frac{1}{2} |E_5|^2 E_3 + \frac{1}{2} E_4 E_5 E_6^* + \frac{1}{2} E_5^2 E_7^* \\ & \frac{1}{3} E_1 E_4^* E_6 + \frac{1}{3} E_2 E_5^* E_6 + \frac{1}{3} |E_6|^2 E_3 + \frac{1}{3} E_4 E_6 E_7^* \\ & \frac{1}{4} E_1 E_5^* E_7 + \frac{1}{4} E_2 E_6^* E_7 + \frac{1}{4} |E_7|^2 E_3 \end{aligned} \right)$$

$$EE_{7,3} = \left(\begin{aligned} & E_3 \left(-\frac{1}{2} |E_1|^2 - |E_2|^2 + |E_4|^2 + \frac{1}{2} |E_5|^2 + \frac{1}{3} |E_6|^2 + \frac{1}{4} |E_7|^2 \right) - E_1^* E_2^2 + E_2^* \left(E_1 E_4 - \frac{1}{2} E_1 E_4 \right) + \\ & E_4^* \left(E_2 E_5 - \frac{1}{2} E_1 E_6 + \frac{1}{2} E_2 E_5 + \frac{1}{3} E_1 E_6 \right) + E_5^* \left(-E_2 E_6 + E_4^2 - \frac{1}{2} E_1 E_7 + \frac{1}{3} E_2 E_6 + \frac{1}{4} E_1 E_7 \right) + \\ & E_6^* \left(-E_2 E_7 + E_4 E_5 + \frac{1}{2} E_4 E_5 + \frac{1}{4} E_2 E_7 \right) + E_7^* \left(E_4 E_6 + \frac{1}{2} E_5^2 + \frac{1}{3} E_4 E_6 \right) \end{aligned} \right)$$

$$EE_{7,3} = \left(\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2} |E_1|^2 - |E_2|^2 + |E_4|^2 + \frac{1}{2} |E_5|^2 + \frac{1}{3} |E_6|^2 + \frac{1}{4} |E_7|^2 - \frac{E_1^*}{E_3} E_2^2 + \frac{1}{2} \frac{E_2^*}{E_3} E_1 E_4 + \right. \\ & \left. + \frac{E_4^*}{E_3} \left(\frac{3}{2} E_2 E_5 - \frac{1}{6} E_1 E_6 \right) + \frac{E_5^*}{E_3} \left(E_4^2 - \frac{2}{3} E_2 E_6 - \frac{1}{4} E_1 E_7 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{E_6^*}{E_3} \left(\frac{3}{2} E_4 E_5 - \frac{3}{4} E_2 E_7 \right) + \frac{E_7^*}{E_3} \left(\frac{1}{2} E_5^2 + \frac{4}{3} E_4 E_6 \right) \right) E_3 \end{aligned} \right)$$

La sumatoria para el caso de k=4,

$$\sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{4-m} + \Delta N_m^* E_{4+m}) = \frac{i(N_0 - N_{tr})}{P_s \Omega_{sp} \tau_e} \overbrace{\left(\begin{aligned} & - (E_2 E_1^* + E_3 E_2^* + E_4 E_3^* + E_5 E_4^* + E_6 E_5^* + E_7 E_6^*) E_3 + \\ & + (E_2^* E_1 + E_3^* E_2 + E_4^* E_3 + E_5^* E_4 + E_6^* E_5 + E_7^* E_6) E_5 - \\ & - \frac{1}{2} (E_3 E_1^* + E_4 E_2^* + E_5 E_3^* + E_6 E_4^* + E_7 E_5^*) E_2 + \\ & + \frac{1}{2} (E_3^* E_1 + E_4^* E_2 + E_5^* E_3 + E_6^* E_4 + E_7^* E_5) E_6 - \\ & - \frac{1}{3} (E_4 E_1^* + E_5 E_2^* + E_6 E_3^* + E_7 E_4^*) E_1 + \\ & + \frac{1}{3} (E_4^* E_1 + E_5^* E_2 + E_6^* E_3 + E_7^* E_4) E_7 \end{aligned} \right)}^{EE_{7,4}}$$

Los términos entre paréntesis,

$$EE_{7,4} = \left(\begin{aligned} & -E_1^* E_2 E_3 - E_3^2 E_2^* - |E_3|^2 E_4 - \cancel{E_3 E_4^* E_5} - E_3 E_5^* E_6 - E_3 E_6^* E_7 + \\ & + E_1 E_2^* E_5 + E_2 E_3^* E_5 + \cancel{E_3 E_4^* E_5} + |E_5|^2 E_4 + E_5^2 E_6^* + E_5 E_6 E_7^* - \\ & - \frac{1}{2} E_1^* E_2 E_3 - \frac{1}{2} |E_2|^2 E_4 - \frac{1}{2} E_2 E_3^* E_5 - \frac{1}{2} \cancel{E_2 E_4^* E_6} - \frac{1}{2} E_2 E_5^* E_7 + \\ & + \frac{1}{2} E_1 E_3^* E_6 + \frac{1}{2} \cancel{E_2 E_4^* E_6} + \frac{1}{2} E_3 E_5^* E_6 + \frac{1}{2} |E_6|^2 E_4 + \frac{1}{2} E_5 E_6 E_7^* - \\ & - \frac{1}{3} |E_1|^2 E_4 - \frac{1}{3} E_1 E_2^* E_5 - \frac{1}{3} E_1 E_3^* E_6 - \frac{1}{3} \cancel{E_1 E_4^* E_7} + \\ & + \frac{1}{3} \cancel{E_1 E_4^* E_7} + \frac{1}{3} E_2 E_5^* E_7 + \frac{1}{3} E_3 E_6^* E_7 + \frac{1}{3} |E_7|^2 E_4 \end{aligned} \right)$$

$$EE_{7,4} = \left(\begin{aligned} & E_4 \left(-|E_3|^2 + |E_5|^2 - \frac{1}{2} |E_2|^2 + \frac{1}{2} |E_6|^2 - \frac{1}{3} |E_1|^2 + \frac{1}{3} |E_7|^2 \right) + E_1^* \left(-E_2 E_3 - \frac{1}{2} E_2 E_3 \right) + \\ & E_2^* \left(-E_3^2 + E_1 E_5 - \frac{1}{3} E_1 E_5 \right) + E_3^* \left(E_2 E_5 - \frac{1}{2} E_2 E_5 + \frac{1}{2} E_1 E_6 - \frac{1}{3} E_1 E_6 \right) + \\ & E_5^* \left(-E_3 E_6 - \frac{1}{2} E_2 E_7 + \frac{1}{2} E_3 E_6 + \frac{1}{3} E_2 E_7 \right) + E_6^* \left(-E_3 E_7 + E_5^2 + \frac{1}{3} E_3 E_7 \right) + E_7^* \left(E_5 E_6 + \frac{1}{2} E_5 E_6 \right) \end{aligned} \right)$$

$$EE_{7,4} = \left(\begin{aligned} & -\frac{1}{3} |E_1|^2 - \frac{1}{2} |E_2|^2 - |E_3|^2 + |E_5|^2 + \frac{1}{2} |E_6|^2 + \frac{1}{3} |E_7|^2 + \\ & -\frac{3 E_1^*}{2 E_4} E_2 E_3 + \frac{E_2^*}{E_4} \left(-E_3^2 + \frac{2}{3} E_1 E_5 \right) + \frac{E_3^*}{E_4} \left(\frac{1}{2} E_2 E_5 + \frac{1}{6} E_1 E_6 \right) - E_4 \\ & -\frac{E_5^*}{E_4} \left(\frac{1}{2} E_3 E_6 + \frac{1}{6} E_2 E_7 \right) + \frac{E_6^*}{E_4} \left(E_5^2 - \frac{2}{3} E_3 E_7 \right) + \frac{3 E_7^*}{2 E_4} E_5 E_6 \end{aligned} \right)$$

La sumatoria para el caso de k=5,

$$\sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{5-m} + \Delta N_m^* E_{5+m}) = \frac{(N_0 - N_{tr})}{iP_s \Omega_{sp} \tau_e} \overbrace{\left(\begin{aligned} & - (E_2 E_1^* + E_3 E_2^* + E_4 E_3^* + E_5 E_4^* + E_6 E_5^* + E_7 E_6^*) E_4 + \\ & + (E_2^* E_1 + E_3^* E_2 + E_4^* E_3 + E_5^* E_4 + E_6^* E_5 + E_7^* E_6) E_6 - \\ & - \frac{1}{2} (E_3 E_1^* + E_4 E_2^* + E_5 E_3^* + E_6 E_4^* + E_7 E_5^*) E_3 + \\ & + \frac{1}{2} (E_3^* E_1 + E_4^* E_2 + E_5^* E_3 + E_6^* E_4 + E_7^* E_5) E_7 - \\ & - \frac{1}{3} (E_4 E_1^* + E_5 E_2^* + E_6 E_3^* + E_7 E_4^*) E_2 - \\ & - \frac{1}{4} (E_5 E_1^* + E_6 E_2^* + E_7 E_3^*) E_1 \end{aligned} \right)}^{EE_{7,5}}$$

Desarrollando los términos entre corchetes,

$$EE_{7,5} = \left(\begin{aligned} & -E_1^* E_2 E_4 - E_2^* E_3 E_4 - E_4^2 E_3 - |E_4|^2 E_5 - \cancel{E_4 E_5^* E_6} - E_4 E_6^* E_7 + \\ & + E_1 E_2^* E_6 + E_2 E_3^* E_6 + E_3 E_4^* E_6 + \cancel{E_4 E_5^* E_6} + |E_6|^2 E_5 + E_6^2 E_7 - \\ & - \frac{1}{2} E_3^2 E_1^* - \frac{1}{2} E_2^* E_3 E_4 - \frac{1}{2} |E_3|^2 E_5 - \frac{1}{2} E_3 E_4^* E_6 - \frac{1}{2} \cancel{E_3 E_5^* E_7} + \\ & + \frac{1}{2} E_1 E_3^* E_7 + \frac{1}{2} E_2 E_4^* E_7 + \frac{1}{2} \cancel{E_3 E_5^* E_7} + \frac{1}{2} E_4 E_6^* E_7 + \frac{1}{2} |E_7|^2 E_5 - \\ & - \frac{1}{3} E_1^* E_2 E_4 - \frac{1}{3} |E_2|^2 E_5 - \frac{1}{3} E_2 E_3^* E_6 - \frac{1}{3} E_2 E_4^* E_7 - \\ & - \frac{1}{4} |E_1|^2 E_5 - \frac{1}{4} E_1 E_2^* E_6 - \frac{1}{4} E_1 E_3^* E_7 \end{aligned} \right)$$

$$EE_{7,5} = \left(\begin{aligned} & E_1^* \left(-E_2 E_4 - \frac{1}{2} E_3^2 - \frac{1}{3} E_2 E_4 \right) + E_2^* \left(-E_3 E_4 + E_1 E_6 - \frac{1}{2} E_3 E_4 - \frac{1}{4} E_1 E_6 \right) + \\ & + E_3^* \left(-E_4^2 + E_2 E_6 + \frac{1}{2} E_1 E_7 - \frac{1}{3} E_2 E_6 - \frac{1}{4} E_1 E_7 \right) + E_4^* \left(E_3 E_6 - \frac{1}{2} E_3 E_6 + \frac{1}{2} E_2 E_7 - \frac{1}{3} E_2 E_7 \right) \\ & + E_6^* \left(-E_4 E_7 + \frac{1}{2} E_4 E_7 \right) + E_7^* E_6^2 + E_5 \left(-|E_4|^2 + |E_6|^2 - \frac{1}{2} |E_3|^2 + \frac{1}{2} |E_7|^2 - \frac{1}{3} |E_2|^2 - \frac{1}{4} |E_1|^2 \right) \end{aligned} \right)$$

$$EE_{7,5} = \left(\begin{aligned} & -\frac{1}{4} |E_1|^2 - \frac{1}{3} |E_2|^2 - \frac{1}{2} |E_3|^2 - |E_4|^2 + |E_6|^2 + \frac{1}{2} |E_7|^2 - \frac{E_1^*}{E_5} \left(\frac{4}{3} E_2 E_4 + \frac{1}{2} E_3^2 \right) + \\ & + \frac{E_2^*}{E_5} \left(-\frac{3}{2} E_3 E_4 + \frac{3}{4} E_1 E_6 \right) + \frac{E_3^*}{E_5} \left(-E_4^2 + \frac{2}{3} E_2 E_6 + \frac{1}{4} E_1 E_7 \right) + \frac{E_4^*}{E_5} \left(\frac{1}{2} E_3 E_6 + \frac{1}{6} E_2 E_7 \right) + E_5 \\ & - \frac{1}{2} \frac{E_6^*}{E_5} E_4 E_7 + \frac{E_7^*}{E_5} E_6^2 \end{aligned} \right)$$

La sumatoria para el caso de k=6,

$$\sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{6-m} + \Delta N_m^* E_{6+m}) = \frac{(N_0 - N_{lr})}{iP_s \Omega_{sp} \tau_e} \overbrace{\left(\begin{array}{l} -\left(E_2 E_1^* + E_3 E_2^* + E_4 E_3^* + E_5 E_4^* + E_6 E_5^* + E_7 E_6^* \right) E_5 \\ \left(E_2^* E_1 + E_3^* E_2 + E_4^* E_3 + E_5^* E_4 + E_6^* E_5 + E_7^* E_6 \right) E_7 \\ -\frac{1}{2} \left(E_3 E_1^* + E_4 E_2^* + E_5 E_3^* + E_6 E_4^* + E_7 E_5^* \right) E_4 \\ -\frac{1}{3} \left(E_4 E_1^* + E_5 E_2^* + E_6 E_3^* + E_7 E_4^* \right) E_3 \\ -\frac{1}{4} \left(E_5 E_1^* + E_6 E_2^* + E_7 E_3^* \right) E_2 \\ -\frac{1}{5} \left(E_6 E_1^* + E_7 E_2^* \right) E_1 \end{array} \right)}^{EE_{7,6}}$$

Desarrollando el término entre corchetes,

$$EE_{7,6} = \left(\begin{array}{l} -E_1^* E_2 E_5 - E_2^* E_3 E_5 - E_3^* E_4 E_5 - E_4^* E_5^2 - |E_5|^2 E_6 - E_5 E_6^* E_7 \\ + E_1 E_2^* E_7 + E_2 E_3^* E_7 + E_3 E_4^* E_7 + E_4 E_5^* E_7 + E_5 E_6^* E_7 + |E_7|^2 E_6 \\ -\frac{1}{2} E_1^* E_3 E_4 - \frac{1}{2} E_4^2 E_2^* - \frac{1}{2} E_3^* E_4 E_5 - \frac{1}{2} |E_4|^2 E_6 - \frac{1}{2} E_4 E_5^* E_7 \\ -\frac{1}{3} E_1^* E_3 E_4 - \frac{1}{3} E_2^* E_3 E_5 - \frac{1}{3} |E_3|^2 E_6 - \frac{1}{3} E_3 E_4^* E_7 \\ -\frac{1}{4} E_1^* E_2 E_5 - \frac{1}{4} |E_2|^2 E_6 - \frac{1}{4} E_2 E_3^* E_7 \\ -\frac{1}{5} |E_1|^2 E_6 - \frac{1}{5} E_1 E_2^* E_7 \end{array} \right)$$

$$EE_{7,6} = \left(\begin{array}{l} E_1^* \left(-E_2 E_5 - \frac{1}{2} E_3 E_4 - \frac{1}{3} E_3 E_4 - \frac{1}{4} E_2 E_5 \right) + E_2^* \left(-E_3 E_5 + E_1 E_7 - \frac{1}{2} E_4^2 - \frac{1}{3} E_3 E_5 - \frac{1}{5} E_1 E_7 \right) + \\ E_3^* \left(-E_4 E_5 + E_2 E_7 - \frac{1}{2} E_4 E_5 - \frac{1}{4} E_2 E_7 \right) + E_4^* \left(-E_5^2 + E_3 E_7 - \frac{1}{3} E_3 E_7 \right) + E_5^* \left(E_4 E_7 - \frac{1}{2} E_4 E_7 \right) + \\ E_6 \left(-|E_5|^2 + |E_7|^2 - \frac{1}{2} |E_4|^2 - \frac{1}{3} |E_3|^2 - \frac{1}{4} |E_2|^2 - \frac{1}{5} |E_1|^2 \right) \end{array} \right)$$

$$EE_{7,6} = \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{5} |E_1|^2 - \frac{1}{4} |E_2|^2 - \frac{1}{3} |E_3|^2 - \frac{1}{2} |E_4|^2 - |E_5|^2 + |E_7|^2 + \\ \frac{E_1^*}{E_6} \left(-\frac{5}{6} E_3 E_4 - \frac{5}{4} E_2 E_5 \right) + \frac{E_2^*}{E_6} \left(-\frac{1}{2} E_4^2 - \frac{4}{3} E_3 E_5 + \frac{4}{5} E_1 E_7 \right) + E_6 \\ \frac{E_3^*}{E_6} \left(-\frac{3}{2} E_4 E_5 + \frac{3}{4} E_2 E_7 \right) + \frac{E_4^*}{E_6} \left(-E_5^2 + \frac{2}{3} E_3 E_7 \right) + \frac{1}{2} \frac{E_5^*}{E_6} E_4 E_7 \end{array} \right)$$

La sumatoria para el caso de $k=7$,

$$\sum_{m=1}^{M-1} (\Delta N_m E_{6-m} + \Delta N_m^* E_{6+m}) = \frac{(N_0 - N_{tr})}{iP_s \Omega_{sp} \tau_e} \overbrace{\left(\begin{array}{l} -\left(E_2 E_1^* + E_3 E_2^* + E_4 E_3^* + E_5 E_4^* + E_6 E_5^* + E_7 E_6^*\right) E_6 \\ -\frac{1}{2}\left(E_3 E_1^* + E_4 E_2^* + E_5 E_3^* + E_6 E_4^* + E_7 E_5^*\right) E_5 \\ -\frac{1}{3}\left(E_4 E_1^* + E_5 E_2^* + E_6 E_3^* + E_7 E_4^*\right) E_4 \\ -\frac{1}{4}\left(E_5 E_1^* + E_6 E_2^* + E_7 E_3^*\right) E_3 \\ -\frac{1}{5}\left(E_6 E_1^* + E_7 E_2^*\right) E_2 \\ -\frac{1}{6}\left(E_7 E_1^*\right) E_1 \end{array} \right)}^{EE_{7,7}}$$

Desarrollando el término entre corchetes,

$$EE_{7,7} = \left(\begin{array}{l} -E_1^* E_2 E_6 - E_2^* E_3 E_6 - E_3^* E_4 E_6 - E_4^* E_5 E_6 - E_5^* E_6^2 - |E_6|^2 E_7 \\ -\frac{1}{2} E_1^* E_3 E_5 - \frac{1}{2} E_2^* E_4 E_5 - \frac{1}{2} E_3^* E_5^2 - \frac{1}{2} E_4^* E_5 E_6 - \frac{1}{2} |E_5|^2 E_7 \\ -\frac{1}{3} E_1^* E_4^2 - \frac{1}{3} E_2^* E_4 E_5 - \frac{1}{3} E_3^* E_4 E_6 - \frac{1}{3} |E_4|^2 E_7 \\ -\frac{1}{4} E_1^* E_3 E_5 - \frac{1}{4} E_2^* E_3 E_6 - \frac{1}{4} |E_3|^2 E_7 \\ -\frac{1}{5} E_1^* E_2 E_6 - \frac{1}{5} |E_2|^2 E_7 - \frac{1}{6} |E_1|^2 E_7 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} E_1^* \left(-E_2 E_6 - \frac{1}{2} E_3 E_5 - \frac{1}{3} E_4^2 - \frac{1}{4} E_3 E_5 - \frac{1}{5} E_2 E_6 \right) + E_2^* \left(-E_3 E_6 - \frac{1}{2} E_4 E_5 - \frac{1}{3} E_4 E_5 - \frac{1}{4} E_3 E_6 \right) + \\ + E_3^* \left(-E_4 E_6 - \frac{1}{2} E_5^2 - \frac{1}{3} E_4 E_6 \right) + E_4^* \left(-E_5 E_6 - \frac{1}{2} E_5 E_6 \right) - E_5^* E_6^2 + \\ + E_7 \left(-|E_6|^2 - \frac{1}{2} |E_5|^2 - \frac{1}{3} |E_4|^2 - \frac{1}{4} |E_3|^2 - \frac{1}{5} |E_2|^2 - \frac{1}{6} |E_1|^2 \right) \end{array} \right)$$

$$EE_{7,7} = \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{6} |E_1|^2 - \frac{1}{5} |E_2|^2 - \frac{1}{4} |E_3|^2 - \frac{1}{3} |E_4|^2 - \frac{1}{2} |E_5|^2 - |E_6|^2 - \\ -\frac{E_1^*}{E_7} \left(\frac{1}{3} E_4^2 + \frac{3}{4} E_3 E_5 + \frac{6}{5} E_2 E_6 \right) - \frac{E_2^*}{E_7} \left(\frac{5}{6} E_4 E_5 + \frac{5}{4} E_3 E_6 \right) - E_7 \\ -\frac{E_3^*}{E_7} \left(\frac{1}{2} E_5^2 + \frac{4}{3} E_4 E_6 \right) - \frac{E_4^*}{E_7} \left(\frac{3}{2} E_5 E_6 \right) - \frac{E_5^*}{E_7} E_6^2 \end{array} \right)$$

REFERENCIAS

- [1] Jeremie Renaudier, "Phase Correlation and Linewidth reduction of 40 GHz in Self-Pulsation in Distributed Bragg Reflector Semiconductor Lasers", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, V43 (N2), P 147-152, 2007.
- [2] G. Gray, "Importance of Self-Induced Carrier-Density Modulation in Semiconductor Laser", *Photonics Technology Letters*, V4 (N11), P 1216-1219, 1992.
- [3] R. Maldonado-Basilio, Anteproyecto de tesis: "Estudio de la generación de señales ópticas a 40 GHz utilizando la dinámica de los láseres de semiconductor".
- [4] J. Hetch, "City of Light: The Story of Fiber Optics", Oxford University Press, P 114, 2004.
- [5] M. S. Borella, "Optical Components for WDM Lightwave Networks", *Proceeding of the IEEE*, V85 (N8), P 1274-1307, 1997.
- [6] L. G. Kazovsky, "Future Telecommunication Networks: Major Trend Projections", *IEEE Communication Magazine*, P 122-127, 1998.
- [7] M. Acosta, "Estudio del efecto de la modulación cruzada de la polarización sobre la mezcla de cuatro ondas dentro de un amplificador óptico de semiconductor", Tesis de doctorado en ciencias CICESE, 2006.
- [8] M. Bello-Jiménez, "Caracterización de un amplificador de fibra dopada con erbio a partir de sus parámetros experimentales", *Revista Mexicana de Física*, V53 (N4), P 289-295, 2007
- [9] G. Agrawal, "Fiber -optic communications Systems", Wiley 3th Ed, P 15, P 372-373, 2002.
- [10] R. Scollo, "Mode-locked InP-Based Laser Diode With a Monolithic Integrated UTC Absorber for Subpicosecond Pulse Generation", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, V45 (N4), P 322-335, 2009.
- [11] R. Maldonado-Basilio, "Modelado de la modulación cruzada de la polarización en amplificadores ópticos de semiconductor: aplicaciones a las comunicaciones ópticas", Tesis de doctorado en ciencias, CICESE, P 78, 2009.
- [12] S. Latkowski, "Investigation of the origin of terahertz waves generated by dc-biased multimode semiconductor lasers at room temperature", *Applied Physics Letters*, V93, 241110, 2008.
- [13] C. R. Mirsasso, "Self-Pulsating Semiconductor Lasers: Theory and Experiment", *Journal of Quantum Electronics*, V35 (N5), P 764, 1999.
- [14] R. Maldonado-Basilio, "Timing-jitter, optical, and mode-beating linewidths analysis on subpicosecond optical pulses generated by a quantum-dash passively mode-locked semiconductor laser", *Optical Letters*, V35 (N8), P 1184, 2010.
- [15] R. Maldonado-Basilio, "Linewidth analysis of 40-GHz passively mode-locked multi-mode semiconductor lasers", *Optics Communications*, V283, P 299, 2010.
- [16] Möhrle, "Detuned grating multisection-RW-DFB lasers for high speed optical signal processing" *Selected Topics of Quantum Electronics*, V7 (N2), P 217-223, 2001.
- [17] W. Mao, "All-optical clock recovery from RZ-format data by using a two-section gain-coupled DFB laser", *Journal of Lightwave Technology*, V20 (N9), P 1705-1714, 2002.

- [18] S. Latkowski, "Sub-picosecond pulse generation by 40-GHz passively mode-locked quantum-dash 1-mm-long Fabry-Pérot laser diode", *Optic Express*, V17 (N21), P 19166-19172, 2009.
- [19] R. Salathé, "Rate equation approach for diode lasers part 1 steady state solutions for a single diode", *Opto-electronics* V6, P 451-456, 1974.
- [20] K. J. Ebeling, "Single-mode operation of coupled-cavity GaInAsP/InP semiconductor lasers", *American Institute of Physics*, N42 (V1), P 6, 1983.
- [21] K. J. Ebeling, "Analysis of multielement semiconductor lasers", *American Institute of Physics*, N54 (V6), P 2962, 1983.
- [22] M. J. Adams, "Analysis of semiconductor laser amplifiers", *IEEE Proceeding*, V132 (N1), P 58-63 1985.
- [23] G. P. Agrawal, "Gain Nonlinearities in Semiconductor Lasers: Theory and Application to Distributed Feedback: Láseres", *Journal of Quantum Electronics*, V23, N6, 1987.
- [24] G. Gray, "Importance of Self-Induced Carrier-Density Modulation in Semiconductor Laser", *Photonics Technology Letters*, V4 (N11), P 1216-1219, 1992.
- [25] Uskov, "Wave Mixing in Semiconductor Laser Amplifiers Due to Carrier Heating and Spectral-Hole Burning", *Journal of Quantum Electronics*, V30 (N8), P 1769-1781, 1994.
- [26] M. Cervantes, Notas de clase del curso de física de láseres del Departamento de Investigación en Física de la Universidad de Sonora, basadas en el libro [A. Yariv, *Optical Electrones* 4th Ed, Saunders, 1991].
- [27] B. Saleh, "Fundamental of Photonics", Wiley, P 874, 2007.
- [28] R. Boyd, "Nonlinear Optics", Academic Press, P xi, 1992.
- [29] S. Kasap, "Principles of Electronic Materials and Devices", McGrawHill 3th Ed, Cap. 5, 2006.
- [30] L. de la Peña, "Introducción a la Mecánica Cuántica", Ediciones Científicas Universtarias, P 503, 1991.
- [31] Numai, "Fundamental of Semiconductor Lasers", Springer, P 84, 2004
- [32] Shibata, "Phase-mismatch dependence of efficiency of wave generation through four-wave mixing in a single-mode optical fiber", *Journal of Quantum Electronics*, V23 (N7), P 1205-1210, 1997
- [33] Inoue, "Four-wave mixing in an optical fiber in the zero-dispersion wavelength region", *Journal of Laser Technology* V10 (N11), P 1553-1561, 1992.
- [34] G. Agrawal, "Nonlinear Fiber Optics", Academic Press 4th Ed, P 368-370, 2006
- [35] G. Agrawal, "Population pulsation and nondegenerate four-wave mixing in semiconductor lasers and amplifiers", *Journal of Optics Society America B*, V5(N1), P 147 1988.
- [36] H. Bachert, "Multimode operation and mode-locking effect in injection lasers", *Journal of Quantum Electronics*, V11, P 507-510, 1975.
- [37] L. Tiemeijer, "Pasive FM locking in InGaAsP semiconductor lasers", *Journal of Quantum Electronics*, V25 (N6), P 1385-1392, 1989
- [38] K. Sato, "Optical Pulse Generation Using Fabry-Perot Lasers Under Continuous-Wave Operation", *Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, V9 (N5), P 1288-1293, 2003
- [39] J. Verdeyen, "Laser Electronics", Prentice Hall 3th Ed, 1995.