

CENTRO DE INVESTIGACION EN FISICA
DE LA
UNIVERSIDAD DE SONORA

BREVE REVISION ESPINORIAL EN LA TEORIA DE LA RELATIVIDAD
GENERAL COMPLEXIFICADA EN RELACION CON LOS VECTORES DE KILLING
Y PERSPECTIVAS DE APLICACION EVIDENTES

TRABAJO DE TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)
PRESENTA

SANTOS JESUS CASTILLO

HERMOSILLO, SONORA

1991

Julio

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Humberto Salazar Ibargüen por darme la oportunidad de trabajar bajo su dirección en esta investigación, así como a Mérida (mi esposa), a nuestras familias, a mis amigos y al binomio STAUS-UNISON, por haberme apoyado en todo durante el tiempo en que realicé este trabajo.

Desde hace algún tiempo, incluso ahora, me encuentro con la intención y el compromiso de contribuir en la construcción de una sociedad de individuos con una mejor conciencia, libres y de procedimientos científicos.

RESUMEN

En este trabajo se presenta un breve compendio de datos y desarrollos de importancia para el manejo de la Teoría de la Relatividad General (TRG) Complexificada, con una orientación hacia el uso de espinores que corresponden a vectores de Killing; originalmente se pretendía (en adición) aplicar este estructuramiento matemático a las electrodinámicas no-lineales del tipo Born-Infeld que admiten vectores de Killing no-nulos, lo quedó en perspectivas.

También, el trabajo representa un útil manual para aquellos interesados en incursiones en complexificar la Teoría de la Relatividad General o alguna otra teoría.

LISTA DE SIMBOLOS Y DE CONVENIOS

i.e. = es decir

Convenio de suma = Se sobreentenderá una sumatoria sobre cada par de índices variables que aparezcan repetidos, uno como subíndice (covariantes) y otro como superíndice (contravariante), en cualquier tipo de letra. Salvo que se indique lo contrario mediante las siglas "scs" que significa sin convenio de suma.

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (índices griegos) = Toman valores de 1, 2, 3 y 4 y se usan para las expresiones en coordenadas.

$a, b, c, d, \dots$ (índices latinos minúsculos) = Toman valores de 1, 2, 3 y 4 y se usan para las expresiones tetradiales. En el caso de tratarse del conjunto espacio $\mathbb{R}^3$ tomarán los valores de 1, 2 y 3.

$A, B, C, D, \dots$ (índices latinos mayúsculos) = Toman los valores de 1 y 2 y se usan para las expresiones espinoriales, también se hace necesario diferenciarles mediante una puntuación encima del índice o mediante comas (ejemplo, $\dot{A}, B, C, D, \dots$; $A', B', C', D', \dots$).

$T(V_4)$ o $T(M)$ = Representa el espacio tangente.

Λ^0 = Es el espacio de las funciones cuyo dominio es una variedad y su rango es un campo escalar ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ en nuestro caso).

$\Lambda^1, \Lambda^1(V_4), \Lambda^1(M), T^*(V_4)$ o $T^*(M)$ = Representa el espacio cotangente.

$\eta_{\alpha\beta}$ = Tensor métrico de la relatividad especial o de Minkowski, en este trabajo $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$ y $\eta_{44} = -1$ y todos los demás son cero.

$g_{\alpha\beta}$ = Tensor métrico en general (considerado simétrico $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$).

$\in$ = Pertenece a, o es elemento de.

$\ni$ = Tal(es) que.

$\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ o $\{e^a\}_{a=1}^4$ = Tetrada cotangente real ortonormal.

$\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ o $\{e^a\}_{a=1}^4$ = Tetrada cotangente compleja nula.

$\otimes, \otimes_s$ = Producto tensorial (la "s" significa simétrico).

$\equiv$ = Es idénticamente igual, o está definido como.

$:=$ = Igual por definición (se puede usar en dos direcciones).

$\wedge$ = Producto exterior de formas diferenciales, producto cufia (wedge).

$-$ en la parte superior o $*$ como superíndice indica = Conjugación compleja (cuando "*" antecede a una p-forma diferencial indica la operación de dualidad estrella de Hodge).

$;$ = Significa "donde" en expresiones conjuntistas, derivación covariante antepuesta a subíndices o a superíndices en los tensores.

$:$ = Está definida de.

$\rightarrow$ = $\rightarrow^A$, o en .

$\Rightarrow$ = Entonces, esto implica (que).

$\Leftarrow$ = Es implicado por, o se implica de.

$\langle \rangle$ = Conjunto vacío.

i , o i = Unidad imaginaria tal que su cuadrado es -1 .

$\det$ = Determinante de una matriz cuadrada.

$()^{-1}$ = Objeto inverso.

$()$ = Símbolo de agrupación, indicador de los elementos de las matrices, aplicado sobre índices indica la operación de simetrización (los índices que se excluyan de la simetrización se encerrarán entre barras).

$[]$ = Símbolo de agrupación, también representará conmutadores, aplicado sobre índices indica la operación de antisimetrización (los índices que se excluyan de la antisimetrización se encerrarán entre barras).

INDICE

AGRADECIMIENTOS

RESUMEN

LISTA DE SIMBOLOS Y DE CONVENIOS

INTRODUCCION

CAPITULO I

- 1.- Relación entre los tensores y los espinores.
- 2.- Principales tensores en términos espinoriales
 - A) En Electromagnetismo
 - B) Diferenciación de espinores
- 3.- Vectores de Killing, sus propiedades y su formulación espinorial.

CAPITULO II

Presentación de los desarrollos espinoriales en relación con vectores de Killing de V_4 .

CAPITULO III

- 1.- Electrodinámica no-lineal
 - Definiciones fundamentales que elucidan investigaciones ulteriores.

APENDICE

REFERENCIAS

INTRODUCCION

Desde hace algunos años se ha venido trabajando arduamente en la matematización de distintas teorías físicas, ahora se hace en este trabajo la presentación más que nada en forma difusiva, de ciertos desarrollos que aparecen en [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8] y [9], es claro que se está siendo impreciso o injusto con cierta bibliografía que no se menciona.

En el capítulo I se presentan las ecuaciones de la Relatividad General en forma espinorial, en el capítulo II se presenta un análisis con relación a los espinores de Killing asociados con vectores de Killing de V_4 (la variedad Riemanniana de representación para la Relatividad General) y en el capítulo III se presentan perspectivas de investigación en este contexto; cada capítulo consta de preámbulo y desarrollos para llegar a lo cometido.

CAPITULO I

1.-Relación entre los tensores y los espinores.

Con un tensor de rango 1 asociamos un espinor de segundo orden mixto en la forma

$$K^{\mu} = -\frac{1}{2} g^{\mu}_{AB} K^{AB} \quad (I.1.1)$$

tal que exista la relación inversa

$$K^{AB} = g^{\frac{AB}{\mu}} K^{\mu} \quad (I.1.2)$$

(I.1.1) y (I.1.2) implican que los coeficientes g^{μ}_{AB} , $g^{\frac{CD}{\nu}}$ (functores espin-tensor) han de satisfacer

$$-\frac{1}{2} g^{\frac{AB}{\mu}} g^{\mu}_{CD} = \delta^A_C \delta^B_D \quad (I.1.3.a)$$

$$-\frac{1}{2} g^{\mu}_{AB} g^{\frac{AB}{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu} \quad (I.1.3.b)$$

De (I.1.1) es de esperarse que un tensor de mayor rango

$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}$ se transformará en la forma

$$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} = \left(-\frac{1}{2}\right)^r g^{\mu_1}_{A_1 B_1} g^{\mu_2}_{A_2 B_2} \dots g^{\mu_r}_{A_r B_r} g^{A_1 B_1} \otimes g^{A_2 B_2} \otimes \dots \otimes g^{A_r B_r} \quad (I.1.4)$$

donde g^{AB} es un espinor (fundamental) mixto de segundo orden, y donde se puede hacer

$$g^{A_1 B_1} \otimes g^{A_2 B_2} \otimes \dots \otimes g^{A_r B_r} = g^{A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_r B_r} = g^{A_1 A_2 \dots A_r B_1 B_2 \dots B_r}$$

así

$$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r} \longleftrightarrow T^{\frac{A_1}{B_1} \frac{C_1}{D_1} \frac{A_2}{B_2} \frac{C_2}{D_2} \dots \frac{A_r}{B_r} \frac{C_r}{D_r}} = T^{\frac{A_1}{B_1} \dots \frac{A_r}{B_r} \frac{C_1}{D_1} \dots \frac{C_r}{D_r}}$$

Definición de un espinor en término de su ley de transformación.

Se dice que un conjunto de cantidades de la forma

$$\begin{matrix} A_1 A_2 \dots A_p & \dot{C}_1 \dot{C}_2 \dots \dot{C}_q \\ B_1 B_2 \dots B_r & \dot{D}_1 \dot{D}_2 \dots \dot{D}_s \end{matrix}, \text{ donde } A_i, B_j, C_k, D_l = 1, 2$$

son los componentes o representan a un espinor si se transforman de la siguiente manera:

Para transformaciones antilineales

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} A_1 \dots \dot{C}_1 \dots \\ B_1 \dots \dot{D}_1 \dots \end{matrix} \quad \tilde{t}_{A_1}^{A'_1} \dots \tilde{t}_{B_1}^{B'_1} \dots \tilde{t}_{\dot{C}_1}^{\dot{C}'_1} \dots \tilde{t}_{\dot{D}_1}^{\dot{D}'_1} S \dots (\tilde{t})^v (\tilde{t})^{\dot{v}} = \\ & = S \begin{matrix} A'_1 \dots \dot{C}'_1 \dots \\ B'_1 \dots \dot{D}'_1 \dots \end{matrix} \end{aligned}$$

Para transformaciones lineales

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} A_1 \dots \dot{C}_1 \dots \\ B_1 \dots \dot{D}_1 \dots \end{matrix} \quad t_{A_1}^{A'_1} \dots t_{B_1}^{B'_1} \dots t_{\dot{C}_1}^{\dot{C}'_1} \dots t_{\dot{D}_1}^{\dot{D}'_1} S \dots (t)^v (t)^{\dot{v}} = \\ & = S \begin{matrix} A'_1 \dots \dot{C}'_1 \dots \\ B'_1 \dots \dot{D}'_1 \dots \end{matrix} \end{aligned}$$

con

$$\left[\begin{matrix} A_1 \dots A_p \dot{C}_1 \dots \dot{C}_q \\ B_1 \dots B_r \dot{D}_1 \dots \dot{D}_s \end{matrix} \right]^* = \begin{matrix} A'_1 \dots A'_p \dot{C}'_1 \dots \dot{C}'_q \\ B'_1 \dots B'_r \dot{D}'_1 \dots \dot{D}'_s \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \det \left(\tilde{t}_A^{A'} \right) \neq 0, \quad \tilde{t} = (\tilde{t})^* \quad , \quad \tilde{t}_A^{A'} = \left(\tilde{t}_A^{A'} \right)^* = \tilde{t}_A^{A'} \quad , \quad \tilde{t}_A^{A'} = \\ &= \left(\tilde{t}_A^{A'} \right)^* = \tilde{t}_A^{A'} \quad , \quad \tilde{t}_S^{A'} \tilde{t}_{B'}^S = \delta_{A'}^{B'} \quad , \quad \tilde{t}_B^{S'} \tilde{t}_{S'}^A = \delta_B^A \end{aligned}$$

$$t = \det \left(t_A^{A'} \right) \neq 0 \quad , \quad t = (t)^* \quad , \quad t_A^{A'} = \left(t_A^{A'} \right)^* = t_A^{A'} \quad , \quad t_A^{A'} = \left(t_A^{A'} \right)^* =$$

$$= t_A^{A'} \quad , \quad t_B^{A'} t_{B'}^S = \delta_{B'}^{A'} \quad , \quad t_B^{S'} t_{S'}^A = \delta_B^A$$

donde $v, \dot{v} \in \mathbb{R}$ se denominan el peso y el antipeso del espinor y en

la primera parte agrupada tienen las simetrías (AC) y [BD], la segunda parte agrupada tienen las simetrías [AC] y (BD), de aquí se propone término a término

$$\left. \begin{aligned} S^{AC} \epsilon^{BD} &:= \frac{1}{2} (g^{AB} \wedge g^{CD} - g^{AD} \wedge g^{CB}) \\ \epsilon^{AC} S^{BD} &:= \frac{1}{2} (g^{AB} \wedge g^{CD} - g^{CB} \wedge g^{AD}) \end{aligned} \right\} \quad (I.2.6)$$

$$\text{con } S^{AB} = S^{BA}, \quad S^{\dot{A}\dot{B}} = S^{\dot{B}\dot{A}} \quad \text{y} \quad S^{\dot{A}\dot{B}} = (S^{AB})^* \quad (I.2.7)$$

(I.2.6) implica

$$\left. \begin{aligned} S^{AB} &= \frac{1}{2} \epsilon_{\dot{R}\dot{S}} g^{\dot{A}\dot{R}} \wedge g^{\dot{B}\dot{S}} \\ S^{\dot{A}\dot{B}} &= \frac{1}{2} \epsilon_{RS} g^{R\dot{A}} \wedge g^{S\dot{B}} \end{aligned} \right\} \quad (I.2.8)$$

S^{AB} y $S^{\dot{A}\dot{B}}$ son autodual y antiautodual respecto a la operación de dualidad (*) de Hodge.

A).- En el electromagnetismo $\exists \quad f_{\mu\nu} = -\check{f}_{\nu\mu}$ tal que

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} f^{\alpha\beta} &:= \check{f}_{\mu\nu} \quad , \quad \frac{1}{2} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} =: F \quad , \quad \frac{1}{4} f_{\mu\nu} \check{f}^{\mu\nu} =: \check{G} \quad , \end{aligned} \right\} \quad (I.2.9)$$

$$F + \check{G} =: F$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (f_{\mu\nu} + \check{f}_{\mu\nu}) dx^\mu \wedge dx^\nu &=: \omega \quad \text{es autodual} \\ \frac{1}{2} (f_{\mu\nu} - \check{f}_{\mu\nu}) dx^\mu \wedge dx^\nu &=: \Omega \quad \text{es antiautodual} \end{aligned} \right\} \quad (I.2.10)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \omega &= 2f_{AB} S^{AB} \quad (\text{ver nota de pie de pag. 270 [4]}) \\ \Omega &= 2f_{\dot{A}\dot{B}} S^{\dot{A}\dot{B}} \end{aligned} \right.$$

Considerando $S^{AB} = \frac{1}{2} S_{\mu\nu}^{AB} dx^\mu \wedge dx^\nu$ y $S^{\dot{A}\dot{B}} = \frac{1}{2} S_{\mu\nu}^{\dot{A}\dot{B}} dx^\mu \wedge dx^\nu$

(I.2.11)

Se tiene

$$\left. \begin{aligned} f_{\mu\nu} + \check{f}_{\mu\nu} &= 2f_{AB} S_{\mu\nu}^{AB} \\ f_{\mu\nu} - \check{f}_{\mu\nu} &= 2f_{\dot{A}\dot{B}} S_{\mu\nu}^{\dot{A}\dot{B}} \end{aligned} \right\} \quad (I.2.12)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} f_{\mu\nu} &= f_{AB} S_{\mu\nu}^{AB} + f_{\dot{A}\dot{B}} S_{\mu\nu}^{\dot{A}\dot{B}} \\ f_{\mu\nu} &= f_{AB} S_{\mu\nu}^{AB} - f_{\dot{A}\dot{B}} S_{\mu\nu}^{\dot{A}\dot{B}} \end{aligned} \right\} \quad (I.2.13)$$

$g^{\dot{A}\dot{B}} = g_{\mu}^{\dot{A}\dot{B}} dx^\mu \Rightarrow dx^\mu = -\frac{1}{2} g_{\dot{A}\dot{B}}^{\mu} g^{\dot{A}\dot{B}}$ y con (I.2.8) y (I.2.11) se obtiene

$$\left. \begin{aligned} S_{\mu\nu}^{AB} &= \epsilon_{RS}^{\dot{A}\dot{B}} g_{\mu}^{\dot{A}\dot{R}} g_{\nu}^{\dot{B}\dot{S}} \\ S_{\mu\nu}^{\dot{A}\dot{B}} &= \epsilon_{RS} g_{\mu}^{\dot{A}\dot{R}} g_{\nu}^{\dot{B}\dot{S}} \end{aligned} \right\} \quad (I.2.14a)$$

y si

$$\left. \begin{aligned} S_{AB}^{\mu\nu} &= \epsilon^{\dot{R}\dot{S}} g_{\dot{A}\dot{R}}^{\mu} g_{\dot{B}\dot{S}}^{\nu} \\ S_{\dot{A}\dot{B}}^{\mu\nu} &= \epsilon^{\dot{R}\dot{S}} g_{\dot{R}\dot{A}}^{\mu} g_{\dot{S}\dot{B}}^{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (I.2.14b)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{24} S_{\mu\nu}^{AB} S_{CD}^{\mu\nu} = \delta_c^A \delta_D^B \quad (I.2.15)$$

y consecuentemente

$$\left. \begin{aligned} f_{AB} &= \frac{1}{24} (f_{\mu\nu} + \check{f}_{\mu\nu}) S_{AB}^{\mu\nu} \\ f_{\dot{A}\dot{B}} &= \frac{1}{24} (f_{\mu\nu} - \check{f}_{\mu\nu}) S_{\dot{A}\dot{B}}^{\mu\nu} \end{aligned} \right\} \quad (I.2.16)$$

B). - Consideremos la diferenciación de espinores, tal que

$$Dg^{A\dot{B}} = dg^{A\dot{B}} + \Gamma^A_s \wedge g^{S\dot{B}} + \Gamma^{\dot{B}}_{\dot{s}} \wedge g^{AS} \quad (I.2.17)$$

donde $\Gamma^A_s, \Gamma^{\dot{B}}_{\dot{s}} \in \Lambda^1$ y $\Gamma_{AB} = \Gamma_{BA}$, $\Gamma_{\dot{A}\dot{B}} = \Gamma_{\dot{B}\dot{A}}$

$$D^2 g^{A\dot{B}} = D(Dg^{A\dot{B}}) = d(Dg^{A\dot{B}}) + \Gamma^A_s \wedge Dg^{S\dot{B}} + \Gamma^{\dot{B}}_{\dot{s}} \wedge Dg^{AS}$$

desarrollando se llega a

$$\begin{aligned} D^2 g^{A\dot{B}} &= (d\Gamma^A_s + \Gamma^A_P \wedge \Gamma^P_s) g^{S\dot{B}} + \\ &\quad (d\Gamma^{\dot{B}}_{\dot{s}} + \Gamma^{\dot{B}}_{\dot{P}} \wedge \Gamma^{\dot{P}}_{\dot{s}}) g^{AS} \end{aligned} \quad (I.2.18)$$

definiendo

$$\left. \begin{aligned} R^A_s &:= d\Gamma^A_s + \Gamma^A_P \wedge \Gamma^P_s \\ R^{\dot{B}}_{\dot{s}} &:= d\Gamma^{\dot{B}}_{\dot{s}} + \Gamma^{\dot{B}}_{\dot{P}} \wedge \Gamma^{\dot{P}}_{\dot{s}} \end{aligned} \right\} \quad (I.2.19)$$

$$R_{AB}, R_{\dot{A}\dot{B}} \in \Lambda^2 \text{ y } R_{AB} = R_{BA}, \quad R_{\dot{A}\dot{B}} = R_{\dot{B}\dot{A}}$$

$$\Rightarrow D^2 g^{A\dot{B}} = R^A_s \wedge g^{S\dot{B}} + R^{\dot{B}}_{\dot{s}} \wedge g^{AS} \quad (I.2.20)$$

Por otro lado de (I.2.17) se tiene

$$D^2 g^{A\dot{B}} = D(dg^{A\dot{B}} + \Gamma^A_s \wedge g^{S\dot{B}} + \Gamma^{\dot{B}}_{\dot{s}} \wedge g^{AS})$$

$$\begin{aligned} D^2 g^{A\dot{B}} &= D(dg^{A\dot{B}}) + [D\Gamma^A_s \wedge g^{S\dot{B}} - \Gamma^A_s \wedge D(g^{S\dot{B}})] + \\ &\quad [D\Gamma^{\dot{B}}_{\dot{s}} \wedge g^{AS} - \Gamma^{\dot{B}}_{\dot{s}} \wedge D(g^{AS})] \end{aligned}$$

$$D^2 g^{AB} = D(\Gamma^A_s) \wedge g^{SB} + D(\Gamma^B_s) \wedge g^{AS} + D(dg^{AB}) +$$

$$D(g^{SB}) \wedge \Gamma^A_s + D(g^{AS}) \wedge \Gamma^B_s \quad (I.2.21)$$

de (I.2.20) y (I.2.21) se tiene

$$\begin{aligned} [D(\Gamma^A_s) - R^A_s] \wedge g^{SB} + [D(\Gamma^B_s) - R^B_s] \wedge g^{AS} &= \Gamma^A_s \wedge D(g^{SB}) + \\ \Gamma^B_s \wedge D(g^{AS}) - D(dg^{AB}) \end{aligned} \quad (I.2.22)$$

$$\text{de (I.2.17) considerar } Dg^{AB} = 0 \quad (I.2.23)$$

implica

$$dg^{AB} = -\Gamma^A_s \wedge g^{SB} - \Gamma^B_s \wedge g^{AS} = g^{SB} \wedge \Gamma^A_s + g^{AS} \wedge \Gamma^B_s$$

$$\Rightarrow D(dg^{AB}) = -D(\Gamma^A_s) \wedge g^{SB} - D(\Gamma^B_s) \wedge g^{AS} = -g^{SB} \wedge D(\Gamma^A_s) -$$

$$g^{AS} \wedge D(\Gamma^B_s)$$

$$\Rightarrow D(dg^{AB}) = 0$$

y en (I.2.22) se llega a

$$[D(\Gamma^A_s) - R^A_s] \wedge g^{SB} + [D(\Gamma^B_s) - R^B_s] \wedge g^{AS} = 0$$

de aquí que

$$\left. \begin{aligned} D\Gamma^A_S &= R^A_S := d\Gamma^A_S + \Gamma^A_P \wedge \Gamma^P_S \\ D\Gamma^B_S &= R^B_S := d\Gamma^B_S + \Gamma^B_P \wedge \Gamma^P_S \end{aligned} \right\} \quad (I.2.24)$$

(I.2.23) y (I.2.24) determinan el sistema completo de ecuaciones de estructura de Cartan en su forma espinorial cotangente

$$\left. \begin{aligned} S_I: Dg^{AB} &:= dg^{AB} + \Gamma^A_S \wedge g^{SB} + \Gamma^B_S \wedge g^{AS} = 0 \\ S_{II}: D\Gamma^A_{AB} &:= d\Gamma^A_{AB} + \Gamma^A_S \wedge \Gamma^S_B = \\ &\quad -\frac{1}{2} C_{ABCD} S^{CD} + \frac{R}{24} S_{AB} + \frac{1}{2} C_{ABCD} S^{CD} = R_{AB} \\ S_{III}: D\Gamma^A_{AB} &:= d\Gamma^A_{AB} + \Gamma^A_S \wedge \Gamma^S_B = \\ &\quad -\frac{1}{2} C_{ABCD} S^{CD} + \frac{R}{24} S_{AB} + \frac{1}{2} C_{CDAB} S^{CD} = R_{AB} \end{aligned} \right\} \quad (I.2.25)$$

donde las dos igualaciones finales nos indican la expansión de las 2-formas diferenciales R_{AB} y R_{AB} en términos de la base (S_{AB}, S_{AB})

Definiendo $D\Gamma_{AB}$ y $D\Gamma_{AB}$ como en (I.2.25) adquieren carácter tensorial y de aquí, aplicando la definición ordinaria de diferenciación convariante para espinores Tensores se tiene

$$D^2\Gamma_{AB} = 0 = D^2\Gamma_{AB} \quad (I.2.26)$$

estas ecuaciones son conocidas como identidades de Bianchi. de la expansión de R_{AB} y R_{AB} en términos de (S_{AB}, S_{AB}) en (I.2.25) y el hecho que $DS_{AB} = DS_{AB} = 0$ las identidades de Bianchi toman la forma

$$- DC_{ABCD} \wedge S^{CD} + \frac{1}{12} dR \wedge S_{AB} + DC_{AB\dot{C}\dot{D}} \wedge S^{\dot{C}\dot{D}} = 0$$

$$- DC_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} \wedge S^{\dot{C}\dot{D}} + \frac{1}{12} dR \wedge S_{\dot{A}\dot{B}} + DC_{CD\dot{A}\dot{B}} \wedge S^{CD} = 0$$

lo que implica

$$\nabla_B^S C_{ABCS} + \nabla_{(A}^S C_{BC)BS} = 0$$

$$\nabla_B^S C_{ABCS} + \nabla_{(A}^S C_{BS)BC} = 0$$

$$\nabla^{RS} C_{ARBS} + \frac{1}{8} \nabla_{AB} R = 0$$

3.- Vectores de Killing, sus propiedades y su formulación espinorial.

El tensor métrico $g_{\rho\sigma}(x)$ se transforma bajo un cambio de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$ de la forma (ver [10])

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) \quad (I.3.1)$$

y la transformación inversa

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma}(x') \quad (I.3.2)$$

si se constriñe la forma de $g'_{\mu\nu}(x')$ a la forma de $g_{\mu\nu}(x)$ (isomería) (o isometría), como se indica

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x') \quad (I.3.3)$$

esto implica en (I.3.2)

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x') \quad (I.3.4)$$

Consideremos la transformación (infinitesimal)

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon \xi^{\mu}(x^{\nu}) \quad ; \quad [\epsilon] \ll 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} = \delta_{\mu}^{\rho} + \epsilon \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}} & , \quad \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\sigma} + \epsilon \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \\ g_{\rho\sigma}(x'^{\mu}) \approx g_{\rho\sigma}(x^{\mu}) + \frac{\partial g_{\rho\sigma}(x^{\mu})}{\partial x^{\delta}} (\epsilon \xi^{\delta}) \end{cases}$$

sustituyendo estas últimas relaciones en (I.3.4) se tiene

$$g_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu}^{\rho} \delta_{\nu}^{\sigma} + \epsilon \delta_{\mu}^{\rho} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \epsilon \delta_{\nu}^{\sigma} \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}} + \epsilon^2 \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \right) \left(g_{\rho\sigma} + \epsilon \xi^{\delta} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\delta}} \right)$$

de esto

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \epsilon \xi^{\delta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\delta}} + \epsilon g_{\mu\sigma} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \epsilon g_{\rho\nu} \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}} + O(\epsilon^2) \nearrow 0$$

$$\Rightarrow g_{\mu\sigma} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + g_{\rho\nu} \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}} + \xi^{\delta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\delta}} = 0$$

Pasando a las componentes covariantes de ξ^{μ} , con $\xi_{\sigma} = g_{\mu\sigma} \xi^{\mu}$

$$\frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial \xi_{\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \xi^{\mu} \left[\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\sigma}} \right] = \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial \xi_{\rho}}{\partial x^{\sigma}} - 2\xi^{\mu} \Gamma_{\mu\rho\sigma}^{\mu} = 0$$

lo cual más compactamente se escribe

$$\xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma} = \xi_{(\sigma;\rho)} = 0 \quad (I.3.5)$$

donde ";" indica la derivación covariante.

A esta última ecuación se le denomina ecuación de Killing y al vector ξ^{μ} que la satisface se le denomina vector de Killing; como se observó, un vector de Killing sujeto a (I.3.5) implica un cambio

$\{x^{\mu}\} \longrightarrow \{x'^{\mu}\}$ tal que $g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x)$.

Si se procede más en general, con el operador diferencial de Lie sobre un campo x ($\mathcal{L}_x$) [6], [7].

considerando $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ y $x = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

la ecuación $\mathcal{L}_x g = \chi g$ (I.3.6)

implica

$$\mathcal{L}_x g = \mathcal{L}_x (g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu)$$

$$\mathcal{L}_x g = (\mathcal{L}_x g_{\mu\nu}) dx^\mu \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu} (\mathcal{L}_x dx^\mu) \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes (\mathcal{L}_x dx^\nu)$$

considerando $\mathcal{L}_x d = d\mathcal{L}_x$

$$\mathcal{L}_x g = \xi^\alpha \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} dx^\mu \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu} d(\mathcal{L}_x x^\mu) \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes d(\mathcal{L}_x x^\nu)$$

$$\mathcal{L}_x g = \xi^\alpha g_{\mu\nu,\alpha} dx^\mu \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu} d(\xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha}) \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes d(\xi^\alpha \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\alpha})$$

$$\mathcal{L}_x g = \xi^\alpha g_{\mu\nu,\alpha} dx^\mu \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu} d\xi^\mu \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes d\xi^\nu$$

$$\mathcal{L}_x g = \xi^\alpha g_{\mu\nu,\alpha} dx^\mu \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

$$\mathcal{L}_x g = (\xi^\alpha g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\alpha\nu} \xi^\alpha_{,\mu} + g_{\mu\alpha} \xi^\alpha_{,\nu}) dx^\mu \otimes dx^\nu$$

esto implica en (I.3.6)

$$\xi^\alpha g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\mu\alpha} \xi^\alpha_{,\nu} + g_{\alpha\nu} \xi^\alpha_{,\mu} = \chi g_{\mu\nu}$$

o bien en componentes covariantes y forma compacta

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = \chi g_{\mu\nu}$$

Forma espinorial

$$K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu} + \nabla_{\nu} K_{\mu} + \nabla_{\mu} K_{\nu} = \chi g_{\mu\nu}$$

$$\frac{1}{4}(\nabla_{AB} K_{CD} + \nabla_{CD} K_{AB}) g_{\mu}^{CD} g_{\nu}^{AB} = \chi \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_{AC} \varepsilon_{BD} g_{\nu}^{AB} g_{\mu}^{CD}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla_A^{(B} K_C^{D)} + \nabla_C^{(B} K_A^{D)} = -2\chi \varepsilon_{AC} \varepsilon^{BD}$$

$$\Rightarrow \nabla_{(A}^{(B} K_{C)}^{D)} = 0$$

CAPITULO II

A continuación se reconstruye la estructura espinorial del potencial de Ernest [4], [8], [5].

A un campo vectorial arbitrario

$$K = - K^\mu \partial_\mu = - \frac{1}{2} K^{AB} \partial_{AB} \quad (II.1)$$

Se le puede expresar su derivada covariante en forma espinorial de la siguiente forma irreducible (en función de su descomposición por simetrías).

$$\nabla_R^A K_S^B = E_{RS}^{AB} + L_{RS}^{AB} + \epsilon_{RS} L^{AB} - 2 \chi \epsilon_{RS} \epsilon^{AB} \quad (II.2)$$

donde los objetos E_{RS}^{AB} , L_{RS}^{AB} y L^{AB} son objetos simétricos en sus pares de índices con puntos y sin puntos.

Si este campo vectorial es un campo de Killing (satisface)

$$\left. \begin{aligned} K_{(\mu;\nu)} &= \chi g_{\mu\nu} \\ K_{(a;b)} &= \chi g_{ab} \end{aligned} \right\} \iff \left. \begin{aligned} \nabla_{(\nu} K_{\mu)} &= \chi g_{\mu\nu} \\ \nabla_{(a} K_{b)} &= \chi g_{ab} \end{aligned} \right\} \quad (II.3)$$

o en forma espinorial

$$\nabla_{(A}^A K_{B)}^B = 0 \quad (II.4)$$

$$\Rightarrow E_{RS}^{AB} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_A^A K_B^B = \epsilon_{AB} L^{AB} - \epsilon^{AB} L_{AB} - 2 \chi \epsilon_{AB} \epsilon^{AB} \quad (II.5)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \ell^{AB} &= \frac{1}{2} \nabla^N (A K_N^B) \\ \ell_{AB} &= \frac{1}{2} \nabla_{(A} N_{B)} K_N^N \\ \lambda &= \frac{1}{8} \nabla_N^N K_N^N \end{aligned} \right\} \quad (II.6)$$

Por otro lado las segundas derivadas de un espinor totalmente simétrico $\psi_{A_1 \dots A_{2p}}^{B_1 \dots B_{2q}}$ satisfacen las formulas de Ricci

$$\begin{aligned} \nabla_{(C}^N \nabla_{D)N} \psi_{A_1 \dots A_{2p}}^{B_1 \dots B_{2q}} &= 4q C_{CDN} (B_1 \psi_{A_1 \dots A_{2p}}^{B_1 \dots B_{2q}N}) + \\ &4p C_{CD}^N \psi_{A_1 \dots A_{2p}N}^{B_1 \dots B_{2q}} + \\ &P \frac{R}{3} \delta_{(C}^N \epsilon_{D)} (A_1 \psi_{A_2 \dots A_{2p}N}^{B_1 \dots B_{2q}}) \end{aligned} \quad (II.7a)$$

$$\begin{aligned} \nabla_N^N (C^D \nabla_N^D) \psi_{A_1 \dots A_{2p}}^{B_1 \dots B_{2q}} &= -4q C^{CD} (B_1 \psi_{A_1 \dots A_{2p}}^{B_1 \dots B_{2q}N}) - \\ &4p C_{(A_1}^N C_{A_2 \dots A_{2p}N)}^{CD} \psi_{A_2 \dots A_{2p}N}^{B_1 \dots B_{2q}} + \\ &Q \frac{R}{3} \delta_N^{(C} \epsilon^{D)} (B_1 \psi_{A_2 \dots A_{2p}}^{B_1 \dots B_{2q}N}) \end{aligned} \quad (II.7b)$$

Para $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $\psi = K$ y $A_1 = A$, $B_1 = B$

$$\nabla_{(C}^N \nabla_{D)N} K_A^B = 2C_{CDN}^B K_A^N + 2C_{CDA}^N K_N^B + \frac{R}{6} \delta_{(C}^N \epsilon_{D)A} K_N^B \quad (II.8a)$$

$$\nabla^N \langle \dot{C} \nabla_N^D \rangle K_A^B = -2C_{N \quad \quad}^{CDB} K_A^N - 2C_A^N \dot{C}^D K_N^B + \frac{R}{6} \delta_N^{\langle \dot{C} \epsilon^D \rangle B} K_A^N \quad (II.8b)$$

de (II.5) y (II.8.a y b) se obtiene (ver [5] y [4])

$$\nabla_A^A \ell^{BC} = 2C_N^{ABC} K_A^N + 2K_N^A C_A^{BCN} + \frac{R}{6} \epsilon^{A(B} K_A^{C)} - 2\epsilon^{A(B} \nabla_A^{C)} \chi \quad (II.9)$$

$$\nabla_A^A \ell_{BC} = -2C_{ABC}^N K_N^A - 2K_A^N C_{BCN}^A + \frac{R}{6} \epsilon_{A(B} K_{C)}^A - 2\epsilon_{A(B} \nabla_{C)}^A \chi \quad (II.10)$$

$$a \nabla_A^A \chi =: \Xi_A^A$$

y además se obtiene

$$\nabla_A^A \Xi_B^B = 2 \left\{ \frac{1}{2} K_S^S \nabla_S^S C_{AB}^{AB} - C_{(A}^{NAB} \ell_{B)N}^S + C_{ABS}^{(A} \ell^{B)S} - 2\chi C_{AB}^{AB} \right\} - \frac{1}{12} \epsilon_{AB} \epsilon^{AB} \left\{ \frac{1}{2} K_S^S \nabla_S^S R + 2\chi R \right\} \quad (II.12)$$

Al analizar los productos de las estructuras K_A^A , ℓ_{BC} , ℓ^{BC} , χ y Ξ_D^D se encontró que G_A^A y $\bar{G}_A^A$ definidas por

$$G_A^A := 2K^{BA} \ell_{AB} \quad (II.13)$$

$$\bar{G}_A^A := -2K_{AB} \ell^{AB} \quad (II.14)$$

tienen propiedades importantes como

$$G_A^A K_A^A = 0 \quad (II.15)$$

$$\bar{G}_A^A K_A^A = 0 \quad (II.16)$$

$$\text{si } f := -K^\mu K_\mu = -\frac{1}{2} K^A_A K^A_A \quad (\text{II.17})$$

entonces

$$\nabla_A^A f = \frac{1}{2} (G_A^A + \bar{G}_A^A) - 2\chi K_A^A \quad (\text{II.18})$$

$$\begin{aligned} \nabla_A^A G_B^B &= -2\ell_{AB} \ell^{AB} - \epsilon_{AB} \epsilon^{AB} \ell_M^N \ell_N^M + 4\epsilon^{AB} \chi \ell_{AB} + \\ &4K_{(N}^{(A} K_{M)}^{B)} C_{AB}^{NM} + 4K_{(A}^{(B} K_{N)}^{C)} C_{BN}^{CA} + 2f C_{AB}^{AB} - \\ &\frac{R}{4} f \epsilon_{AB} \epsilon^{AB} + \frac{R}{6} K_{(A}^{(A} K_{B)}^{B)} 2K_{(A}^{(A} \Xi_{B)}^{B)} - \\ &3\epsilon_{AB} K^{S(A} \Xi_{S}^{B)} + \epsilon^{AB} K_{(A}^{S} \Xi_{B)S} - \\ &\frac{3}{2} \epsilon_{AB} \epsilon^{AB} K_N^N \Xi_N^N \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

se utiliza definir

$$K_{(A}^{(A} K_{B)}^{B)} =: K_{AB}^{AB} \quad (\text{II.20})$$

de (II.19) se pueden obtener las relaciones siguientes, mismas que implican las definiciones que se indican

$$\begin{aligned} Z_{AB}^{AB} &:= \nabla_{(A}^{(A} G_{B)}^{B)} - 2\ell_{AB} \ell^{AB} + 2K_{(A}^{(A} \Xi_{B)}^{B)} - \\ &4K_{NM}^{AB} C_{AB}^{NM} - 4K_{N(A}^{N(A} C_{B)N}^{B)N} - \\ &2f C_{AB}^{AB} - \frac{R}{6} K_{AB}^{AB} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

$$Z_{AB} := \nabla_{(A}^S G_{B)S} - 8\chi \ell_{AB} - 2K_{(A}^S \Xi_{B)S} + 4K_{S(A}^{NM} C_{B)NM}^S = 0 \quad (\text{II.22})$$

$$Z^{\dot{A}\dot{B}} := \nabla^S(\dot{A} G_{\dot{S}}^{\dot{B}}) + 6K^S(\dot{A} E_{\dot{S}}^{\dot{B}}) + 4K_{NM}^S(\dot{A} C_{\dot{S}}^{\dot{B}})^{NM} = 0 \quad (\text{II.23})$$

$$Z := \frac{1}{2} \nabla_N^N G_N^N - 2\ell_M^N \ell_N^M - 3K_N^N E_N^N + 2K_{AB}^{\dot{A}\dot{B}} C_{\dot{A}\dot{B}}^{\dot{A}\dot{B}} - \frac{1}{2} Rf = 0 \quad (\text{II.24})$$

Para observar la aplicabilidad de estos desarrollos matemáticos, considérese $C_{AB}^{\dot{A}\dot{B}} = 0$ (espacio vacío) y

$$\chi = 0 \quad (K_A^{\dot{B}} \text{ es un vector de Killing ordinario})$$

con esto (II.22) y (II.23) implican

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{(\dot{A}} \dot{S} G_{\dot{B})\dot{S}} &= 0 \\ \nabla^S(\dot{A} G_{\dot{S}}^{\dot{B}}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.25})$$

lo que a su vez significa que $G_A^{\dot{A}}$ es derivable de una función potencial compleja $\mathcal{E}$, de la manera

$$G_A^{\dot{A}} = \nabla_A^{\dot{A}} \mathcal{E} \quad (\text{II.26})$$

este tipo de potenciales son denominados potenciales de Ernst.

$$(\text{II.15}) \Rightarrow K_A^{\dot{A}} \nabla_A^{\dot{A}} \mathcal{E} = 0 \quad (\text{II.27})$$

$$\text{y } (\text{II.24}) \Rightarrow \frac{1}{2} (\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) \left(\frac{1}{2} \nabla_N^N \nabla_N^N \mathcal{E} \right) = \frac{1}{2} (\nabla_N^N \mathcal{E}) (\nabla_N^N \bar{\mathcal{E}}) \quad (\text{II.28})$$

Este tipo de desarrollos presentados pueden mostrar aplicabilidades distintas, no obstante a nosotros nos interesa como una continuación de este "background" (este trabajo en sí), su

aplicación al caso concreto de las electrodinámicas no-lineales,
del tipo Born-Infeld que admiten vectores de Killing no-nulos.

CAPITULO III

1.-Existe una electrodinámica no-lineal, tal que su Lagrangiana es de la forma (ver [1])

$$L = F + O(F^2 + G^2) \quad (III.1)$$

a la cual se le denomina electrodinámica no-lineal del tipo Born-Infeld (BI), donde

$$F := \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs}, \quad G := \frac{1}{4} F_{rs} \tilde{F}^{rs}, \quad \tilde{F}^{rs} := \frac{1}{2} \epsilon^{rspq} F_{pq} \quad (III.2)$$

se definen

$$L_F := \partial L / \partial F, \quad L_G := \partial L / \partial G, \quad P_{rs} := 2 \partial L / \partial F^{rs} = L_F F_{rs} + L_G \tilde{F}_{rs} \quad (III.3)$$

L satisface

$$L_G \leq 0, \quad L - F L_F + G L_G \leq 0 \quad (III.4)$$

Un espacio provisto de este tipo campo, se modela mediante el siguiente conjunto de ecuaciones

(a) Ecuaciones de Einstein

$$R_{rs} - \frac{1}{2} R g_{rs} = \kappa T_{rs} \quad (III.5)$$

donde

$$T = L_F (F_{rp} F_s^p - g_{rs} F) + (F L_F + G L_G - L) g_{rs} \quad (III.6)$$

(b) Ecuaciones de Faraday

$$\tilde{F}_{rs}{}^{;s} = 0 \Leftrightarrow F_{rs} = A_{r,s} - A_{s,r} \quad (III.7)$$

(c) "Ecuaciones materiales" de Maxwell

$$P_{rs}{}^{;s} = 0 \quad (III.8)$$

La electrodinámica no-lineal BI también puede ser descrita equivalentemente por una función estructural que dependa de los invariantes P y Q del campo tensorial P_{rs} , definidos como

$$P := \frac{1}{4} P_{rs} P^{rs}, Q := \frac{1}{4} P_{rs} \check{P}^{rs}, \check{P}^{rs} := -\frac{1}{2} \epsilon^{rspq} P_{pq} \quad (\text{III.9})$$

La nueva función estructural se obtuvo (Plebanski 1968) por medio de una transformación de Legendre

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} P_{rs} F^{rs} - L \quad (\text{III.10})$$

con esto $\mathcal{H} = \mathcal{H}(P, Q)$ y las "ecuaciones materiales" son

$$F_{rs} := 2 \partial L / \partial P^{rs} \quad (\text{III.11})$$

Es a este tipo de contexto físico al cual se le aplicará lo que se presentó en los capítulos I y II.

APENDICE

Algunos desarrollos importantes

A). -

$$e^A (e_B) = \delta_B^A \quad (A.1)$$

$$\nabla_X \delta_B^A = 0 \quad (A.2)$$

$$X[e^A (e_B)] = 0$$

$$(\nabla_X e^A)(e_B) + e^A (\nabla_X e_B) = 0$$

$$(\nabla_X e^A)(e_B) + e^A (\Gamma_B^C (X) e_C) = 0$$

$$(\nabla_X e^A)(e_B) + \Gamma_B^C (X) e^A (e_C) = 0$$

$$(\nabla_X e^A)(e_B) = - \Gamma_B^C (X) \delta_B^A$$

$$(\nabla_X e^A)(e_B) = - \Gamma_B^A (X) \quad (A.3)$$

$$\Rightarrow \nabla_X e^A = - \Gamma_B^A (X) e^B$$

Pues se satisfacería (A.3)

Similarmente se encuentra $\nabla_X e^A = - \Gamma_C^A (X) e^C$

B). -

$$e'_A = M_A^C e_C$$

$$\Rightarrow \nabla_X e'_A = M_A^C \nabla_X e_C + e_C \nabla_X M_A^C$$

$$\nabla_X e'_A = M_A^C \Gamma_C^D (X) e_D + e_C \nabla_X M_A^C$$

$$\Gamma'^E_A(x) e'_E = M^C_A \Gamma^D_C(x) \left(-M^E_D e'_E \right) + \left(-M^E_C e'_E \right) dM^C_A$$

$$\Gamma'^E_A(x) = -M^C_A M^E_D \Gamma^D_C(x) - M^E_C dM^C_A \quad (B.1)$$

similarmente

$$\Gamma'^E_A(x) = -M^C_A M^E_D \Gamma^D_C(x) - M^E_C dM^C_A$$

C). -

$$\text{Usando } \nabla_{\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{AB}} = \Gamma^C_A(x) \partial_{\mathbf{CB}} + \Gamma^C_B(x) \partial_{\mathbf{AC}}$$

$$\text{y (1.34) para } \mathbf{x} = \partial_{\mathbf{AB}}, \mathbf{y} = \partial_{\mathbf{CD}}, \text{ y } \mathbf{z} = \partial_{\mathbf{PQ}}$$

$$[\partial_{\mathbf{AB}}, \partial_{\mathbf{CD}}] = \nabla_{\mathbf{CD}} \partial_{\mathbf{AB}} - \nabla_{\mathbf{AB}} \partial_{\mathbf{CD}} =$$

$$\left[\Gamma^E_A (\partial_{\mathbf{CD}}) \partial_{\mathbf{EB}} + \Gamma^E_B (\partial_{\mathbf{CD}}) \partial_{\mathbf{AE}} \right] - \left[\Gamma^E_C (\partial_{\mathbf{AB}}) \partial_{\mathbf{ED}} + \Gamma^E_D (\partial_{\mathbf{AB}}) \partial_{\mathbf{CE}} \right]$$

así

$$\nabla [\partial_{\mathbf{AB}}, \partial_{\mathbf{CD}}] = \Gamma^E_A (\partial_{\mathbf{CD}}) \nabla_{\mathbf{EB}} + \Gamma^E_B (\partial_{\mathbf{CD}}) \nabla_{\mathbf{AE}} -$$

$$\Gamma^E_C (\partial_{\mathbf{AB}}) \nabla_{\mathbf{ED}} + \Gamma^E_D (\partial_{\mathbf{AB}}) \nabla_{\mathbf{CE}}$$

y

$$\nabla [\partial_{\mathbf{AB}}, \partial_{\mathbf{CD}}] \partial_{\mathbf{PQ}} = \Gamma^E_A (\partial_{\mathbf{CD}}) \left[\Gamma^R_P (\partial_{\mathbf{EB}}) \partial_{\mathbf{RQ}} + \Gamma^R_Q (\partial_{\mathbf{EB}}) \partial_{\mathbf{PR}} \right] +$$

$$\Gamma^E_B (\partial_{\mathbf{CD}}) \left[\Gamma^R_P (\partial_{\mathbf{AE}}) \partial_{\mathbf{RQ}} + \Gamma^R_Q (\partial_{\mathbf{AE}}) \partial_{\mathbf{PR}} \right] -$$

$$\Gamma^E_C (\partial_{AB}) \left[\Gamma^R_P (\partial_{ED}) \partial_{RQ} + \Gamma^R_Q (\partial_{ED}) \partial_{PR} \right] -$$

$$\Gamma^E_D (\partial_{AB}) \left[\Gamma^R_P (\partial_{CE}) \partial_{RQ} + \Gamma^R_Q (\partial_{CE}) \partial_{PR} \right]$$

$$\nabla_{AB} , \nabla_{PQ} = \Gamma^E_P (\partial_{AB}) \partial_{EQ} + \Gamma^E_Q (\partial_{AB}) \partial_{PE}$$

$$\nabla_{CD} , \nabla_{PQ} = \Gamma^E_P (\partial_{CD}) \partial_{EQ} + \Gamma^E_Q (\partial_{CD}) \partial_{PE}$$

$$\nabla_{AB} \nabla_{CD} \partial_{PQ} = \Gamma^E_P (\partial_{CD}) \left[\Gamma^R_E (\partial_{AB}) \partial_{RQ} + \Gamma^R_Q (\partial_{AB}) \partial_{ER} \right] +$$

$$\Gamma^E_Q (\partial_{CD}) \left[\Gamma^R_P (\partial_{AB}) \partial_{RE} + \Gamma^R_E (\partial_{AB}) \partial_{PR} \right]$$

$$\nabla_{CD} \nabla_{AB} \partial_{PQ} = \Gamma^E_P (\partial_{AB}) \left[\Gamma^R_E (\partial_{CD}) \partial_{RQ} + \Gamma^R_Q (\partial_{CD}) \partial_{ER} \right] +$$

$$\Gamma^E_Q (\partial_{AB}) \left[\Gamma^R_P (\partial_{CD}) \partial_{RE} + \Gamma^R_E (\partial_{CD}) \partial_{PR} \right]$$

así

$$\nabla_{AB} \nabla_{CD} \partial_{PQ} - \nabla_{CD} \nabla_{AB} \partial_{PQ} - \nabla [\partial_{AB} , \partial_{CD}] \partial_{PQ} =$$

$$\left[\Gamma^E_P (\partial_{CD}) \Gamma^R_E (\partial_{AB}) - \Gamma^E_P (\partial_{AB}) \Gamma^R_E (\partial_{CD}) \right] \partial_{RQ} +$$

$$\left[\Gamma^E_Q (\partial_{CD}) \Gamma^R_E (\partial_{AB}) - \Gamma^E_Q (\partial_{AB}) \Gamma^R_E (\partial_{CD}) \right] \partial_{PR} +$$

$$\left[\Gamma^E_P (\partial_{CD}) \Gamma^R_Q (\partial_{AB}) - \Gamma^E_P (\partial_{AB}) \Gamma^R_Q (\partial_{CD}) \right] \partial_{ER} +$$

$$\left[\Gamma^E_Q (\partial_{CD}) \Gamma^R_P (\partial_{AB}) - \Gamma^E_Q (\partial_{AB}) \Gamma^R_P (\partial_{CD}) \right] \partial_{RE} +$$

$$\begin{aligned} & \left[\Gamma^E_C (\partial_{AB}) \Gamma^R_P (\partial_{ED}) + \Gamma^E_D (\partial_{AB}) \Gamma^R_P (\partial_{CE}) - \right. \\ & \left. \Gamma^E_A (\partial_{CD}) \Gamma^R_P (\partial_{EB}) - \Gamma^E_B (\partial_{CD}) \Gamma^R_P (\partial_{AE}) \right] \partial_{RQ} + \\ & \left[\Gamma^E_C (\partial_{AB}) \Gamma^R_Q (\partial_{ED}) + \Gamma^E_D (\partial_{AB}) \Gamma^R_Q (\partial_{CE}) - \right. \\ & \left. \Gamma^E_A (\partial_{CD}) \Gamma^R_Q (\partial_{EB}) - \Gamma^E_B (\partial_{CD}) \Gamma^R_Q (\partial_{AE}) \right] \partial_{RQ} \end{aligned}$$

DD. -

$$dg^{AB} = g^{CB} \wedge \Gamma^A_C + g^{AC} \wedge \Gamma^B_{\dot{C}}$$
$$ddg^{AB} = 0 = dg^{CB} \wedge \Gamma^A_C - g^{CB} \wedge d\Gamma^A_C + dg^{AC} \wedge \Gamma^B_{\dot{C}} - g^{AC} \wedge d\Gamma^B_{\dot{C}}$$
$$\left(g^{DB} \wedge \Gamma^C_D + g^{CD} \wedge \Gamma^B_{\dot{D}} \right) \wedge \Gamma^A_C + \left(g^{DC} \wedge \Gamma^A_D + g^{AD} \wedge \Gamma^{\dot{C}}_{\dot{D}} \right) \wedge \Gamma^B_{\dot{C}} -$$
$$\sim \sim \sim \sim \sim \sim \quad \sim \sim \sim \sim \sim \sim ,$$
$$g^{CB} \wedge d\Gamma^A_C - g^{AC} \wedge d\Gamma^B_{\dot{C}} = 0$$

$$\left[-g^{DB} \wedge \Gamma_C^A \wedge \Gamma_D^C - g^{CB} \wedge d\Gamma_C^A \right] +$$

$$\Rightarrow R^A_C \wedge g^{CB} + R^B_C g^{AC} = 0 \quad (D.1)$$

$$\left. \begin{aligned} R^A_B &= d\Gamma^A_B + \Gamma^A_C \wedge \Gamma^C_B \\ R^{\dot{A}}_{\dot{B}} &= d\Gamma^{\dot{A}}_{\dot{B}} + \Gamma^{\dot{A}}_{\dot{C}} \wedge \Gamma^{\dot{C}}_{\dot{B}} \end{aligned} \right\} \quad (D.2)$$

$$\Rightarrow d\Gamma^A_B = R^A_B - \Gamma^A_D \wedge \Gamma^D_B \quad (D.3)$$

$$dR^A_B = d\Gamma^A_C + \Gamma^C_B - \Gamma^A_C \wedge d\Gamma^C_B \quad (D.4)$$

utilizando (D.1) en (D.2)

$$\begin{aligned} dR^A_B &= \left(R^A_C - \Gamma^A_D \wedge \Gamma^D_C \right) \wedge \Gamma^C_B - \Gamma^A_C \wedge \left(R^C_B - \Gamma^C_D \wedge \Gamma^D_B \right) \\ &= R^A_C \wedge \Gamma^C_B - \Gamma^A_C \wedge R^C_B \end{aligned} \quad (D.5)$$

similarmente

$$dR^{\dot{A}}_{\dot{B}} = R^{\dot{A}}_{\dot{C}} \wedge \Gamma^{\dot{C}}_{\dot{B}} - \Gamma^{\dot{A}}_{\dot{C}} \wedge R^{\dot{C}}_{\dot{B}} \quad (D.6)$$

(D.3) y (D.4) se conocen como las identidades de Bianchi.

Definiendo $R_{AB} + \varepsilon_{AC} R^C_B$ y $R_{\dot{A}\dot{B}} + \varepsilon_{\dot{A}\dot{C}} R^{\dot{C}}_{\dot{B}}$, de (D.1) se obtiene

que $R_{AB} = R_{BA}$ y $R_{\dot{A}\dot{B}} = R_{\dot{B}\dot{A}}$.

La base de $\Lambda^2(V_4)$ $\{S^{AB}, S^{\dot{A}\dot{B}}\}$

$$\left. \begin{aligned} S^{AB} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{CD} g^{AC} \wedge g^{BD} \\ S^{\dot{A}\dot{B}} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} g^{\dot{C}\dot{A}} \wedge g^{\dot{D}\dot{B}} \end{aligned} \right\} \quad (D.7)$$

y (D.1) implican

$$R_{AB} = -\frac{1}{2} C_{ABCD} S^{CD} + \frac{R}{24} S_{AB} + C_{AB\dot{C}\dot{D}} S^{\dot{C}\dot{D}} \quad (D.8)$$

$$\text{Si } S_{AB} = \frac{1}{2} (\epsilon_{AC} \epsilon_{BD} + \epsilon_{AD} \epsilon_{BC}) S^{CD}$$

entonces

$$R_{AB} = \left[-\frac{1}{2} C_{ABCD} + \frac{R}{48} (\epsilon_{AC} \epsilon_{BD} + \epsilon_{AD} \epsilon_{BC}) \right] S^{CD} + \frac{1}{2} C_{AB\dot{C}\dot{D}} S^{\dot{C}\dot{D}}$$

$$\text{y si } R_{AB} + R_{ABCD} S^{CD} + \frac{1}{2} C_{AB\dot{C}\dot{D}} S^{\dot{C}\dot{D}}$$

$$R_{ABCD} = -\frac{1}{2} C_{ABCD} + \frac{R}{48} (\epsilon_{AC} \epsilon_{BD} + \epsilon_{AD} \epsilon_{BC}) \quad (D.1)$$

ED.-

Descomponiendo en espinores principales de un espinor totalmente simétrico.

Si $\psi_{A_1 A_2 \dots A_k}$ es un espinor totalmente simétrico y $\{\zeta^1, \zeta^2\}$

es un sistema coordenado en V_2 , la expresión

$\frac{1}{(\zeta^1)^k} \psi_{A_1 A_2 \dots A_k} \zeta^{A_1} \zeta^{A_2} \dots \zeta^{A_k}$ es un polinomio de orden k en la

variable $\left[\frac{\zeta^2}{\zeta^1} \right]$.

$$P\left[\frac{\zeta^2}{\zeta^1} \right] + \frac{1}{(\zeta^1)^k} \psi_{A_1 A_2 \dots A_k} \zeta^{A_1} \zeta^{A_2} \dots \zeta^{A_k} \quad (E.1)$$

Por el teorema fundamental del Algebra $\exists n \text{ } Z_1, Z_2, \dots, Z_k \in \mathbb{C}, k$

escalares raíces del polinomio $P\left[\frac{\zeta^2}{\zeta^1} \right]$ tales que

$$P\left[\frac{\zeta^2}{\zeta^1}\right] = a\left[\frac{\zeta^2}{\zeta^1} - Z_1\right]\left[\frac{\zeta^2}{\zeta^1} - Z_2\right]\dots\left[\frac{\zeta^2}{\zeta^1} - Z_k\right]$$

$$P\left[\frac{\zeta^2}{\zeta^1}\right] = \frac{a}{(\zeta^1)^k} (\zeta^2 - Z_1\zeta^1)(\zeta^2 - Z_2\zeta^1)\dots(\zeta^2 - Z_k\zeta^1) \quad (E.2)$$

y esto nos permite concluir que

$$\psi_{A_1 A_2 \dots A_k} \zeta^{A_1} \zeta^{A_2} \dots \zeta^{A_k} = (\zeta^2 - Z_1\zeta^1)(\zeta^2 - Z_2\zeta^1)\dots(\zeta^2 - Z_k\zeta^1)$$

y esta última expresión nos lleva a pensar en una descomposición de la forma

$$\psi_{A_1 A_2 \dots A_k} \zeta^{A_1} \zeta^{A_2} \dots \zeta^{A_k} = \left[\alpha_{A_1} \zeta^{A_1}\right] \left[\beta_{A_2} \zeta^{A_2}\right] \dots \left[\gamma_{A_k} \zeta^{A_k}\right]$$

donde $\alpha_{A_1}, \beta_{A_2}, \dots, \gamma_{A_k}$ es la descomposición de $\psi_{A_1 A_2 \dots A_k}$ en

espinores conocidos como principales. Como $\psi_{A_1 A_2 \dots A_k}$ es simétrico

$$\psi_{A_1 A_2 \dots A_k} = \alpha_{(A_1} \beta_{A_2} \dots \gamma_{A_k)}$$

F).- Del tensor de Riemann

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = -\left\{\begin{matrix}\alpha \\ \beta \gamma\end{matrix}\right\}_{,\delta} + \left\{\begin{matrix}\alpha \\ \beta \delta\end{matrix}\right\}_{,\gamma} + \left\{\begin{matrix}\alpha \\ \rho \gamma\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\rho \\ \beta \delta\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\alpha \\ \rho \delta\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\rho \\ \beta \gamma\end{matrix}\right\}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta(\gamma\delta)} = R_{(\alpha\beta)\gamma\delta}$$

$$R^\alpha_{(\beta\gamma\delta)} = 0$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

$$R^\alpha_{\beta(\gamma\delta;\epsilon)} = 0$$

$$R^{\rho}_{\alpha\rho\beta} = :R_{\alpha\beta}$$

$$g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = :R$$

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta} = R^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta\rho}_{\gamma\delta\sigma} (R^{\sigma}_{\rho} - \frac{1}{4} \delta^{\sigma}_{\rho} R) - \frac{1}{12} \delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} R \quad (\text{Tensor de Weyl})$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta[\gamma\delta]} = C_{[\alpha\beta]\gamma\delta}$$

$$C^{\alpha}_{[\beta\gamma\delta]} = 0$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

$$C^{\rho}_{\alpha\rho\beta} = 0 \quad \text{todas sus trazas se anulan}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{4} \delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} R_{\mu\nu\rho\sigma} \delta^{\rho\sigma}_{\gamma\delta} \quad (\text{F.1})$$

$$\delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(S^{\mu\nu}_{\text{AB}} S^{\text{AB}}_{\alpha\beta} + S^{\mu\nu}_{\dot{\text{A}}\dot{\text{B}}} S^{\dot{\text{A}}\dot{\text{B}}}_{\alpha\beta} \right) \quad (\text{F.2})$$

$$\delta^{\rho\sigma}_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left(S^{\rho\sigma}_{\text{CD}} S^{\text{CD}}_{\gamma\delta} + S^{\rho\sigma}_{\dot{\text{C}}\dot{\text{D}}} S^{\dot{\text{C}}\dot{\text{D}}}_{\gamma\delta} \right)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{64} \left\{ S^{\text{AB}}_{\alpha\beta} \left[S^{\mu\nu}_{\text{AB}} R_{\mu\nu\rho\sigma} S^{\rho\sigma}_{\text{CD}} \right] S^{\text{CD}}_{\gamma\delta} + \right.$$

$$S^{\text{AB}}_{\alpha\beta} \left[S^{\mu\nu}_{\text{AB}} R_{\mu\nu\rho\sigma} S^{\rho\sigma}_{\text{CD}} \right] S^{\dot{\text{C}}\dot{\text{D}}}_{\gamma\delta} + S^{\dot{\text{A}}\dot{\text{B}}}_{\alpha\beta} \left[S^{\mu\nu}_{\dot{\text{A}}\dot{\text{B}}} R_{\mu\nu\rho\sigma} S^{\rho\sigma}_{\dot{\text{C}}\dot{\text{D}}} \right] S^{\text{CD}}_{\gamma\delta} +$$

$$\left. S^{\dot{\text{A}}\dot{\text{B}}}_{\alpha\beta} \left[S^{\mu\nu}_{\dot{\text{A}}\dot{\text{B}}} R_{\mu\nu\rho\sigma} S^{\rho\sigma}_{\dot{\text{C}}\dot{\text{D}}} \right] S^{\text{CD}}_{\gamma\delta} \right\} \quad (\text{F.3})$$

definiendo en (F.3)

$$\left. \begin{aligned} R_{ABCD} &= \frac{1}{64} S_{AB}^{\mu\nu} R_{\mu\nu\rho\sigma} S_{CD}^{\rho\sigma} \\ R_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} &= \frac{1}{64} S_{\dot{A}\dot{B}}^{\mu\nu} R_{\mu\nu\rho\sigma} S_{\dot{C}\dot{D}}^{\rho\sigma} \\ R_{\dot{A}\dot{B}CD} &= \frac{1}{64} S_{\dot{A}\dot{B}}^{\mu\nu} R_{\mu\nu\rho\sigma} S_{CD}^{\rho\sigma} \\ R_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} &= \frac{1}{64} S_{\dot{A}\dot{B}}^{\mu\nu} R_{\mu\nu\rho\sigma} S_{\dot{C}\dot{D}}^{\rho\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (F.4)$$

se tiene

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= S_{\alpha\beta}^{AB} R_{ABCD} S_{\gamma\delta}^{CD} + S_{\alpha\beta}^{AB} R_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} S_{\gamma\delta}^{\dot{C}\dot{D}} + \\ &\quad S_{\alpha\beta}^{\dot{A}\dot{B}} R_{\dot{A}\dot{B}CD} S_{\gamma\delta}^{CD} + S_{\alpha\beta}^{\dot{A}\dot{B}} R_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} S_{\gamma\delta}^{\dot{C}\dot{D}} \end{aligned} \quad (F.5)$$

G). -

$$1. - \quad G_A^{\dot{A}} := 2K_{AB}^{BA} \ell_{AB}$$

$$\bar{G}_A^{\dot{A}} := -2K_{AB}^{\dot{A}\dot{B}} \ell_{AB}^{\dot{A}\dot{B}}$$

$$K_A^{\dot{A}} G_A^{\dot{A}} = K_A^{\dot{A}} (2K_{AC}^{CA} \ell_{AC}) = 2K_A^{\dot{A}} K_{AC}^{CA} \ell_{AC}$$

$$K_A^{\dot{A}} \bar{G}_A^{\dot{A}} = K_A^{\dot{A}} (-2K_{AC}^{\dot{A}\dot{C}} \ell_{AC}^{\dot{A}\dot{C}}) = -2K_A^{\dot{A}} K_{AC}^{\dot{A}\dot{C}} \ell_{AC}^{\dot{A}\dot{C}}$$

$$\text{como } K_A^{\dot{A}} K_{AC}^{CA} = K_A^{[A} K_{AC]}^{C]\dot{A}} \quad \text{y} \quad \ell_{AC} = \ell_{(CA)} \Rightarrow K_A^{\dot{A}} G_A^{\dot{A}} = 0$$

$$\text{similarmente se tendrá } K_A^{\dot{A}} \bar{G}_A^{\dot{A}} = 0.$$

$$\text{Si } f := -\frac{1}{2} K_A^{\dot{A}} K_A^{\dot{A}} = -K_{\dot{A}}^{\dot{A}} K_{\dot{A}}^{\dot{A}} = -\frac{1}{2}$$

$$\nabla_A^{\dot{A}} f = -\frac{1}{2} \nabla_A^{\dot{A}} (K_B^{\dot{B}} K_B^{\dot{B}}) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\dot{B}\dot{C}}^{\dot{A}} \varepsilon^{CB} \nabla_A^{\dot{A}} (K_C^{\dot{C}} K_B^{\dot{B}})$$

$$\nabla_A^{\dot{A}} f = \frac{1}{2} \varepsilon_{\dot{B}\dot{C}}^{\dot{A}} \varepsilon^{CB} \left[(\nabla_A^{\dot{A}} K_C^{\dot{C}}) K_B^{\dot{B}} - K_C^{\dot{C}} (\nabla_A^{\dot{A}} K_B^{\dot{B}}) \right]$$

$$\nabla_A^A f = \frac{1}{2} \epsilon_{BC}^A \epsilon^{CB} \left[(\epsilon_{AC}^B \ell_{AC}^B - \epsilon_{AC}^B \ell_{AC}^B - 2\epsilon_{AC}^B \epsilon^{AC} \chi) K_B^B - K_C^C (\epsilon_{AB}^C \ell_{AB}^C - \epsilon_{AB}^C \ell_{AB}^C - 2\epsilon_{AB}^C \epsilon^{AB} \chi) \right]$$

$$\nabla_A^A f = -\frac{1}{2} (\epsilon_{BC}^A \epsilon^{CB} \epsilon_{AC}^B K_B^B - \epsilon_{BC}^A \epsilon^{CB} \epsilon_{AB}^C K_C^C) + \frac{1}{2} \dots$$

$$\nabla_A^A f = \frac{1}{2} (G_A^A + \bar{G}_A^A) - 2\chi K_A^A$$

HD. -

Aquí se presenta un esquema básico y fundamental en algunos aspectos aislados que se pudieran necesitar para una mejor comprensión de este trabajo.

Es de pensar sin lugar a dudas que la teoría de conjuntos es uno de los pilares más fundamentales de tantas y tantas disciplinas del saber humano, así como de las matemáticas mismas. Los conjuntos están << formados >> de elementos arbitrarios (con excepción del vacío), que por ejemplo pudieran ser conjuntos también, o características y/o propiedades de una entidad real (en el sentido de existente) o de alguna entidad imaginaria (en el sentido de abstracto). Por esto, es de vital importancia asumir algunas definiciones básicas de matemáticas conjuntistas como:

- Conjunto vacío
- Producto cartesiano entre conjuntos

- Operaciones (unitarias, binarias,...,múltiples); o relaciones bien definidas entre conjuntos
 - Propiedades de las operaciones en base a sus definiciones (por ejemplo: cerradura, commutatividad, reflexividad, asociatividad, linealidad, antilinealidad, etc.)
 - Estructuras matemáticas fundamentales (por ejemplo: monoide, semigrupo, grupo, grupo Abelian, anillo, anillo con unitario, módulo, campo, campo Arquimedianamente ordenado, espacio vectorial, variedad, variedad diferenciable, variedad Riemmaniana, etc.)
- entre otras.

Para el contexto matemático de la teoría de la relatividad generalizada se requiere definir una variedad diferenciable Riemmaniana de dimensión n , como sigue: Un conjunto M al que se le puede mapear local y compatiblemente con subconjuntos U abiertos de $\mathbb{R}^n$ (mediante $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ biunívocas), al cual la composición de las aplicaciones lineales que en él se definen ($f: M \rightarrow M$ o $\mathbb{R}^n$) con los mapeos, conforman aplicaciones C^k -diferenciables para $k \geq 1$ y que está provisto de dos espacios bien definidos puntualmente (el tangente $T_p(M)$ y el cotangente $T_p^*(M)$ o $\Lambda_p^1(M)$) entre los cuales hay una aplicación binaria y bilineal definida del producto cartesiano de estos espacios a un campo escalar ($\langle \cdot, \cdot \rangle: T_p(M) \times T_p^*(M) \rightarrow \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$).

En la teoría de la relatividad especial se trabaja con el invariante intervalo espaciotemporal

$$ds^2 \equiv g = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (H.1)$$

con $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$; $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = ct$; V_4 = espacio-tiempo (considerado una variedad diferencial Riemmaniana de dimensión

cuatro) y el tensor métrico de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ considerado simétrico.

$$\Rightarrow \left[\eta_{\alpha\beta} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{H.2})$$

El conjunto $\{dx^1, dx^2, dx^3, dx^4\} = \{dx^\alpha\}_{\alpha=1}^4$ es una base del espacio $\Lambda^1(V_4)$ y si denotamos $dx^1 = e^1$, $dx^2 = e^2$, $dx^3 = e^3$ y $dx^4 = e^4$, i.e., $dx^\alpha \equiv e^\alpha$

$$\Rightarrow g = e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3 - e^4 \otimes e^4 = g_{a,b} e^a e^b \quad (\text{H.3})$$

$$\text{con } \left[g_{a,b} \right] \equiv \left[g_{b,a} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{H.4})$$

dícese que la signatura de este espacio-tiempo es $(+++ -)$ y a $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ se le denomina tetrada cotangente real ortonormal.

Definiendo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^1 + ie^2}{\sqrt{2}} &= e^1 \\ \frac{e^1 - ie^2}{\sqrt{2}} &= e^2 \\ \frac{e^3 + e^4}{\sqrt{2}} &= e^3 \\ \frac{e^3 - e^4}{\sqrt{2}} &= e^4 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Tetrada cotangente} \\ \text{compleja nula de} \\ \Lambda^1(V_4). \end{array} \quad (\text{H.5})$$

$$\Leftrightarrow g = 2 e^1 \otimes e^2 + 2 e^3 \otimes e^4 = g_{ab} e^a e^b \quad (\text{H.6})$$

$$\text{con } \left[g_{ab} \right] \equiv \left[g_{ba} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{H.7})$$

nótese que $e^2 = \overline{e^1}$ y e^3, e^4 son reales.

Es posible generar la idea de construir variantes al formalismo matemático de la teoría de la relatividad general (TRG), si se impone a manera de constricción a alguna métrica específica en el contexto de la TRG que adopte la forma presentada en las ecuaciones (H.3), (H.4) y/o en las ecuaciones (H.6), (H.7).

Supóngase que se parte de un intervalo específico de la forma:

$$ds^2 \equiv g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (H.8)$$

con $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3, x^4) = g_{\beta\alpha}$ donde se encuentra contenida la información geométrica del espacio-tiempo. Al cambiarse el intervalo a las formas de interés (tetradas) la información geométrica pasa a las bases quedando así tensores métricos de componentes constantes como ya se indicaron; así:

$$\begin{aligned} g &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{ab} e^a e^b \\ \Rightarrow e^a &= e^a_\alpha dx^\alpha \in \Lambda^1 \\ \Rightarrow de^a &= de^a_\alpha \wedge dx^\alpha \in \Lambda^2 \end{aligned}$$

relaciones similares se satisfacen entre $\{e^a\}$ y $\{dx^\alpha\}$. Por otro lado:

$$\left\{ \langle e^a \rangle_{a=1}^4, \langle e^a \rangle_{a=1}^4 \right\} \Rightarrow \left\{ \langle \partial_a \rangle_{a=1}^4, \langle \partial_a \rangle_{a=1}^4 \right\} \quad \text{mediante}$$

$$e^a(\partial_b) = \delta^a_b, \quad \text{y} \quad e^a(\partial_b) = \delta^a_b \quad \text{las cuales son las tetradas inversas a las cotangentes y son conocidas como tetradas tangentes, la real ortonormal y la compleja nula, respectivamente.}$$

Por otro lado, de (H.5) se puede encontrar las matrices L^a_α , y $L^{a'}_\alpha \ni e^a = L^a_\alpha e^{a'}$ y $e^{a'} = L^{a'}_\alpha e^a$ (H.9)

Siendo:

$$\left(L^a_{a'} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \left(L^{a'}_\alpha \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (H.10)$$

$$\Rightarrow \det \left(L^a_{a'} \right) = i, \quad \det \left(L^{a'}_\alpha \right) = -i \quad (H.11)$$

De $e^a = e^a_{\alpha} dx^{\alpha}$ y $e^{a'} = e^{a'}_{\alpha} dx^{\alpha}$, sustituyéndose en (H.9)

se tiene :

$$\left. \begin{aligned} e^a_{\alpha} &= L^a_{\alpha} e^{a'}_{\alpha} \\ e^{a'}_{\alpha} &= L^{a'}_{\alpha} e^a_{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (H.12)$$

tomando determinantes y utilizando el resultado de (H.11) tenemos:

$$\det(e^a_{\alpha}) = i \det(e^{a'}_{\alpha}) \neq 0$$

$$e^a = e^a_{\alpha} dx^{\alpha} \Rightarrow dx^{\alpha} = e^{\alpha}_b e^b \Rightarrow e^a = e^a_{\alpha} e^{\alpha}_b e^b \Rightarrow e^a_{\alpha} e^{\alpha}_b = \delta^a_b$$

similarmente se obtiene $e^{a'}_{\alpha} e^{\alpha}_b = \delta^{a'}_b$.

$$dT = (\partial_{\alpha} T) dx^{\alpha} = (\partial_{\alpha} T) e^{\alpha}_b e^b = (e^{\alpha}_b \partial_{\alpha}) T e^b$$

$$\Rightarrow e^{\alpha}_b \partial_{\alpha} =: \partial_b \Rightarrow dT = (\partial_b T) e^b \quad (\text{similarmente con } e^{a'} \text{ y } \partial_{\alpha}).$$

Aquí suponemos que $T \in \Lambda^0$.

Se definen las 1-formas de conexión Γ^a_b a partir de las primeras ecuaciones de estructura de Cartan

$$de^a = e^b \wedge \Gamma^a_b \quad (H.13)$$

y el tensor de curvatura R^a_{bcd} en base a las segundas ecuaciones de estructura de Cartan

$$d\Gamma^a_b + \Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} e^c \wedge e^d \quad (H.14)$$

Véase [3] y [7] Como $\Gamma^a_b \in \Lambda^1 \Rightarrow \Gamma^a_b = \Gamma^a_{bc} e^c$, definiendo así los coeficientes de rotación de Ricci Γ^a_{bc} , por otro lado, del R^a_{bcd} se definen $R_{ab} := R^c_{abc} \equiv R_{ba}$ y la curvatura escalar $R := R^a_a$.

Definamos los objetos $\partial_{AB} \in T$ y $g^{AB} \in T^* = \Lambda^1$ de la siguiente manera:

$$\left(g^{AB} \right) := \begin{pmatrix} e^4 & e^2 \\ e^1 & -e^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3'} - e^{4'} & e^{1'} - ie^{2'} \\ e^{1'} + ie^{2'} & -e^{3'} - e^{4'} \end{pmatrix} \quad (H.15)$$

tal que $g^{AB} \in \Lambda^1 \forall A = 1, 2$ y $B = 1, 2$.

Nótese que $ds^2 = g = -\det(g^{AB})$

Y definimos ∂_{AB} , mediante $g_{CD} = 2 \delta_C^A \delta_D^B$.

En coordenadas tenemos las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} g^{AB} &= g_{\mu}^{AB} dx^{\mu} \\ \partial_{AB} &= g_{AB}^{\mu} \partial_{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (H.16)$$

10.-

Forma alternativa de introducir el formalismo espinorial a la TRG.

Si definimos los siguientes campos vectoriales sobre el espacio tangente

$$\left. \begin{aligned} \partial_{11} &:= \partial_4 - \partial_3, \\ \partial_{12} &:= i\partial_2 - \partial_1, \\ \partial_{21} &:= -i\partial_2 - \partial_1, \\ \partial_{22} &:= \partial_4 + \partial_3, \end{aligned} \right\} \quad (I.1)$$

donde $\{ \partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4 \}$ es una base ortonormal, de esto se tiene que

$$g(\partial_{AB}, \partial_{CD}) = -2 \epsilon_{AC} \epsilon_{BD} \quad (I.2)$$

donde

$$\left[\epsilon_{AB} \right] = \left[\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \right] = \left[\epsilon^{AB} \right] = \left[\epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (I.3)$$

y

$$\left[\partial_{AB} \right]^* = \partial_{BA} \quad (I.4)$$

la transformada (I.1) se puede invertir. $\{ \partial_{11}, \partial_{12}, \partial_{21}, \partial_{22} \}$

es una tetrada nula en el espacio tangente.

Si consideramos que $\partial_{CD} \rightarrow \partial'_{AB}$ bajo la transformación

$$\partial'_{AB} = M_A^C M_B^D \partial_{CD} \quad (1.5)$$

$$g(\partial'_{AB}, \partial'_{CD}) = -2 \det \left(M_R^S \right) \det \left(M_R^S \right) \varepsilon_{AC} \varepsilon_{BD} \quad (1.6)$$

(1.6) corresponde a (1.2) si $\left[\det \left(M_R^S \right) \det \left(M_R^S \right) \right] = 1$

o bien si

$$M_A^C \longrightarrow \tilde{M}_A^C = M_A^C \left[\det \left(M_R^S \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$M_B^D \longrightarrow \tilde{M}_B^D = M_B^D \left[\det \left(M_R^S \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

donde las matrices $\tilde{M}_A^C$ y $\tilde{M}_B^D \in SL(2, \mathbb{C})$ y por lo tanto el grupo de norma métrico es isomorfo con $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$.

Para preservar (1.4), en el tetrado transformado se requerirá que

$$\left(M_A^C \right)^* = M_A^C.$$

Un vector tangente en un campo vectorial K sobre una variedad en término de una tetrada nula tiene la forma

$$K = -\frac{1}{2} K^{AB} \partial_{AB} \quad (1.7)$$

$$\text{y } \left(K^{\dot{A}\dot{B}} \right)^* = K^{\dot{A}\dot{B}} \quad \rightarrow \quad K \in \mathbb{R} \quad (I.8)$$

La observación anterior respecto al grupo de norma métrico nos habilita (o motiva) para pensar en que nuestra variedad Riemanniana V_4 de la Relatividad general es tal que

$$V_4 = V_2 \otimes \dot{V}_2$$

de modo que

$$\partial_{\dot{A}\dot{B}} = e_{\dot{A}} \otimes e_{\dot{B}} \quad (I.9)$$

así

$$g(\partial_{\dot{A}\dot{B}}, \partial_{\dot{C}\dot{D}}) = g(e_{\dot{A}} \otimes e_{\dot{B}}, e_{\dot{C}} \otimes e_{\dot{D}}) = -2 \langle e_{\dot{A}}, e_{\dot{C}} \rangle \langle e_{\dot{B}}, e_{\dot{D}} \rangle \quad (I.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V_2 \times V_2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ \langle \cdot, \cdot \rangle : \dot{V}_2 \times \dot{V}_2 &\rightarrow \mathbb{C} \end{aligned} \right\} \text{ bilineales, antisimétricos y tal que}$$

$$\left. \begin{aligned} \langle e_{\dot{A}}, e_{\dot{C}} \rangle &= \varepsilon_{\dot{A}\dot{C}} \\ \langle e_{\dot{B}}, e_{\dot{D}} \rangle &= \varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} \end{aligned} \right\} \quad (I.11)$$

V_2 recibe el nombre de espacio izquierdo de V_4 y $\dot{V}_2$ espacio derecho; así mismo los objetos en ellos definidos.

Sus espacios duales (de V_2 y $\dot{V}_2$) son V_2^* y $\dot{V}_2^*$. Si $\psi, \phi \in V_2$ (se puede considerar lo similar para $\dot{V}_2^*$), $\langle \psi, \phi \rangle = \tilde{\phi}(\psi)$ genera una aplicación $\tilde{\phi}$ lineal y de valores escalares $\ni \tilde{\phi} \in V_2^*$.

Sea $\{e^1, e^2\}$ la base dual de $\{e_1, e_2\}$ tal que

$$e^A(e_B) = \delta_B^A \text{ entonces } \phi = \phi^A e_A \quad \Rightarrow \quad \tilde{\phi} = \phi_A e^A.$$

$$\tilde{\phi}(e_A) = \langle e_A, \phi \rangle = \langle e_A, \phi^B e_B \rangle = \phi^B \langle e_A, e_B \rangle = \epsilon_{AB} \phi^B \quad (I.12)$$

por otra parte

$$\tilde{\phi}(e_A) = \phi_B e^B(e_A) = \phi_B \delta^B_A = \phi_A \quad (I.13)$$

$$(I.12) \text{ y } (I.13) \Rightarrow \phi_A = \epsilon_{AB} \phi^B \quad (I.14)$$

multiplicando (I.14) por ϵ^{AC} y usando la relación

$$\epsilon_{AB} \epsilon^{AC} = \delta^C_B \text{ tenemos}$$

$$\phi^C = \phi_A \epsilon^{AC} \quad (I.15)$$

análogamente para el espacio V_2 .

Un espinor es un elemento de $\mathcal{V}$, pero, una o varias copias de V_2 , V_2^ , $V_2^{\otimes k}$ y $V_2^{\otimes k}$, por lo tanto un espinor puede expresarse de la forma

$$\psi = \psi_{C \dots D \dots}^{A \dots B \dots} e_A \otimes \dots \otimes e_B \otimes \dots \otimes e^C \otimes \dots \otimes e^D \otimes \dots \quad (I.16)$$

en general se consideran p índices no punteados contravariantes, q índices punteados contravariantes, r índices no punteados covariantes y s índices punteados covariantes, donde

$\psi_{C \dots D \dots}^{A \dots B \dots}$ son funciones escalares.

La transformación de las bases en V_2 y V_2^*

$$e_C M_A^C = e'_A, \quad e_D M_B^D = e'_B \quad (I.17)$$

con $\det(M_A^C) = 1 = \det(M_B^D)$ implica

$$\langle e'_A, e'_B \rangle = \langle e_A, e_B \rangle$$

$$\langle e'_A, e'_B \rangle = \langle e_A, e_B \rangle$$

$$(e^A)' = e'^A = -M^A_C e^C, \quad (e^B)' = e'^B = -M^B_D e^D \quad (I.18)$$

$$\left(\begin{matrix} \mathbf{A} \dots \mathbf{B} \dots \\ \psi_{\mathbf{C} \dots \mathbf{D} \dots} \end{matrix} \right), M_{\mathbf{A}}^{\mathbf{R}} \dots M_{\mathbf{B}}^{\mathbf{S}} \dots \left(-M_{\mathbf{T}}^{\mathbf{C}} \right) \dots \left(-M_{\mathbf{U}}^{\mathbf{D}} \right) \dots = \psi_{\mathbf{T} \dots \mathbf{U} \dots}^{\mathbf{R} \dots \mathbf{S} \dots}$$

(I.19)

para simplificar denotaremos a $\left(\begin{matrix} \mathbf{A} \dots \mathbf{B} \dots \\ \psi_{\mathbf{C} \dots \mathbf{D} \dots} \end{matrix} \right)$ por $\psi_{\mathbf{C} \dots \mathbf{D} \dots}^{\mathbf{A} \dots \mathbf{B} \dots}$.

Expresamos ahora que debido a (I.1) es posible relacionar los espinores aquí definidos con los espacios de formas diferenciales o con los espacios tensoriales. Comparando (I.1) con

$$\partial_{\mathbf{AB}} = -\frac{1}{2} g_{\mathbf{AB}}^{a'} \partial_{a'} \quad (I.20)$$

podemos obtener los coeficientes $g_{\mathbf{AB}}^{a'}$. El conjunto $\{e^{\mathbf{A}} \otimes e^{\mathbf{B}}\}$ es tal que $g^{\mathbf{AB}} = e^{\mathbf{A}} \otimes e^{\mathbf{B}} \in \Lambda^1(V_4)$

$$g^{\mathbf{AB}}(\partial_{\mathbf{CD}}) = (e^{\mathbf{A}} \otimes e^{\mathbf{B}})(e_{\mathbf{C}} \otimes e_{\mathbf{D}}) = e^{\mathbf{A}}(e_{\mathbf{C}}) e^{\mathbf{B}}(e_{\mathbf{D}}) = \delta_{\mathbf{C}}^{\mathbf{A}} \delta_{\mathbf{D}}^{\mathbf{B}} \quad (I.21)$$

$$\text{si } g^{\mathbf{AB}} = g_{a'}^{\mathbf{AB}} e^{a'} \in \Lambda^1(V_4) \quad (I.22)$$

(I.20), (I.21) y (I.22) implican

$$-\frac{1}{2} g_{a'}^{\mathbf{AB}} g_{\mathbf{CD}}^{b'} e^{a'}(\partial_{b'}) = \delta_{\mathbf{C}}^{\mathbf{A}} \delta_{\mathbf{D}}^{\mathbf{B}}$$

$$\text{como } e^{a'}(\partial_{b'}) = \delta_{b'}^{a'}$$

$$-\frac{1}{2} g_{a'}^{\mathbf{AB}} g_{\mathbf{CD}}^{b'} = \delta_{\mathbf{C}}^{\mathbf{A}} \delta_{\mathbf{D}}^{\mathbf{B}} \quad (I.23)$$

Con lo anterior podemos establecer que la relación entre las componentes tensoriales y espinoriales de un objeto matemático definido sobre nuestra variedad Riemanniana sigue el esquema

$$\left. \begin{aligned} K^\mu &= -\frac{1}{2} g_{AB}^\mu K^{AB} \\ K^{AB} &= g_{\mu}^{AB} K^\mu \end{aligned} \right\} \quad (I.24)$$

Y para un tensor de mayor rango $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$, tomando producto tensorial de estructuras de la forma (I.24) se tiene

$$T^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r} = \left[-\frac{1}{2} \right]^r g_{A_1 B_1}^{\mu_1} g_{A_2 B_2}^{\mu_2} \dots g_{A_r B_r}^{\mu_r} g^{A_1 B_1} \otimes g^{A_2 B_2} \otimes \dots \otimes g^{A_r B_r} \quad (I.25)$$

donde podemos denotar

$$g^{A_1 B_1} \otimes g^{A_2 B_2} \otimes \dots \otimes g^{A_r B_r} = : g^{A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_r B_r} + g^{A_1 A_2 \dots A_r B_1 B_2 \dots B_r}$$

así

$$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r} \sim T^{A_1 C_1 A_2 C_2 \dots A_r C_r}_{B_1 D_1 B_2 D_2 \dots B_r D_r} = T^{A_1 \dots A_r C_1 \dots C_r}_{B_1 \dots B_r D_1 \dots D_r} \quad (I.26)$$

Ecuaciones estructurales en forma espinorial:

Sea ∇_x la derivada covariante sobre un campo vectorial x de nuestra variedad Riemanniana. Al actuar sobre $\{e_A^{\mu}, e_B^{\nu}\}$ y $\{e^A, e^B\}$ tenemos (vease [8] y [7])

$$\left. \begin{aligned} \nabla_x e_A &= \Gamma^C_A(x) e_C \\ \nabla_x e_B &= \Gamma^C_B(x) e_C \\ \nabla_x e^A &= -\Gamma^A_C(x) e^C \\ \nabla_x e^B &= -\Gamma^B_C(x) e^C \end{aligned} \right\} \quad (I.27)$$

con lo que se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_x \partial_{AB} &= \nabla_x (e_A \otimes e_B) = (\nabla_x e_A) \otimes e_B + e_A \otimes (\nabla_x e_B) \\ \nabla_x \partial_{AB} &= \Gamma^C_A(x) \partial_{CB} + \Gamma^C_B(x) \partial_{AC} \end{aligned} \quad (I.28)$$

(I.27) y la propiedad $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$ implican que Γ^C_A y Γ^C_B son 1-formas.

$\nabla_x \langle e_A, e_B \rangle = 0$ implica

$$\begin{aligned} \nabla_x \tilde{e}_B(e_A) &= (\nabla_x \tilde{e}_B) e_A + \tilde{e}_B(\nabla_x e_A) = \langle e_A, \nabla_x e_B \rangle + \langle \nabla_x e_A, e_B \rangle = 0 \\ \langle e_A, \Gamma^C_B(x) e_C \rangle + \langle \Gamma^C_A(x) e_C, e_B \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\Gamma^C_B(x) e_{AC} + \Gamma^C_A(x) e_{CB} = 0 \quad (I.29)$$

definimos $\Gamma_{AB} = e_{AC} \Gamma^C_B$ (I.28) lleva a que

$$\Gamma_{AB} = \Gamma_{BA} \quad (I.30)$$

idénticamente se procede para $\Gamma_{AB} = \Gamma_{BA}$.

Para el espinor general del tipo (I.16) $\nabla_x \psi$ será (aplicando la regla de Leibnitz)

$$\nabla_x \psi = \left\{ x \left[\psi_{C \dots D \dots}^{A \dots B \dots} \right] \Gamma_R^A(x) \psi_{C \dots D \dots}^{A \dots B \dots} + \Gamma_S^B(x) \psi_{C \dots D \dots}^{A \dots S \dots} + \dots \right. \\ \left. - \Gamma_C^T(x) \psi_{T \dots D \dots}^{A \dots B \dots} - \dots - \Gamma_D^U(x) \psi_{C \dots U \dots}^{A \dots B \dots} - \dots \right\}$$

$$e_A \otimes \dots \otimes e_B \otimes \dots \otimes e^C \otimes \dots \otimes e^D \otimes \dots =$$

$$\left(\nabla_x \psi_{C \dots D \dots}^{A \dots B \dots} \right) e_A \otimes \dots \otimes e_B \otimes \dots \otimes e^C \otimes \dots \otimes e^D \otimes \dots \quad (I.31)$$

* En este contexto la diferencial exterior de los objetos

$f \in \Lambda^0(V_4)$ y $g^{AB} \in \Lambda^1(V_4)$ satisfacen

$$df = - \frac{1}{2} \left(\partial_{AB} f \right) g^{AB} \quad (I.32)$$

$$\left(dg^{AB} \right) \left(\partial_{CD}, \partial_{RS} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \partial_{CD} \left(g^{AB} \left(\partial_{RS} \right) \right) - \partial_{RS} \left(g^{AB} \left(\partial_{CD} \right) \right) - \right. \\ \left. g^{AB} \left[\left[\partial_{CD}, \partial_{RS} \right] \right] \right\} \quad (I.33)$$

$$\text{de (I.21) y de } T(x,y) := \nabla_x y - \nabla_y x - [x,y] = 0 \quad (I.34)$$

(Torsión de la conexión $\nabla \ni T : V_4 \times V_4 \longrightarrow V_4$)

$$\left(dg^{AB} \right) \left(\partial_{CD}, \partial_{RS} \right) = - \frac{1}{2} g^{AB} \left[\left[\partial_{CD}, \partial_{RS} \right] \right] = \\ = - \frac{1}{2} g^{AB} \left(\nabla_{\partial_{CD}} \partial_{RS} - \nabla_{\partial_{RS}} \partial_{CD} \right) \quad (I.35)$$

donde $\nabla_{\partial_{CD}}$ se denotará por ∇_{CD} y representa la derivada covariante

en la dirección ∂_{CD} . Usando (I.21) y (I.28) se tiene

$$\begin{aligned} \left[dg^{AB} \right] \left(\partial_{CD}, \partial_{RS} \right) &= \delta_S^R \Gamma_R^A \left(\partial_{CD} \right) + \delta_R^A \Gamma_S^B \left(\partial_{CD} \right) - \delta_D^B \Gamma_C^A \left(\partial_{RS} \right) - \\ &\quad \delta_C^A \Gamma_D^B \left(\partial_{RS} \right) \end{aligned} \quad (I.36)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} dg^{AB} &= \left[\left(dg^{AB} \right) \left(\partial_{CD}, \partial_{RS} \right) \right] \left(-\frac{1}{2} g^{CD} \right) \wedge \left(-\frac{1}{2} g^{RS} \right) = \\ &\quad \boxed{dg^{AB} = g^{CB} \wedge \Gamma_C^A + g^{AC} \wedge \Gamma_C^B} \end{aligned} \quad (I.37)$$

las que se denominan las primeras ecuaciones de estructura de Cartan, en forma espinorial.

El operador de curvatura $R(x,y)$ de la conexión ∇ definido mediante

$$R(x,y)z = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x,y]} z \quad (I.38)$$

Para $x = \partial_{AB}$, $y = \partial_{CD}$, y $z = \partial_{PQ}$ y usando (I.34) se llega a

expresar a $R(\partial_{AB}, \partial_{CD})\partial_{PQ}$ en la forma

$$R(\partial_{AB}, \partial_{CD}) = 2 \left[R_P^R(\partial_{AB}, \partial_{CD}) \right] \partial_{RQ} + 2 \left[R_P^R(\partial_{AB}, \partial_{CD}) \right] \partial_{RQ} \quad (I.39)$$

donde R_B^A y R_B^A son 2-formas, que satisfacen

$$\begin{aligned}
 R^A_B &= d\Gamma^A_B + \Gamma^A_C \wedge \Gamma^C_B \\
 R^{\dot{A}}_{\dot{B}} &= d\Gamma^{\dot{A}}_{\dot{B}} + \Gamma^{\dot{A}}_{\dot{C}} \wedge \Gamma^{\dot{C}}_{\dot{B}}
 \end{aligned}
 \tag{I.40}$$

a las que se denominan segundas ecuaciones de estructura de Cartan, en forma espinorial.

Si diferenciamos exteriormente (I.37) y utilizamos (I.40) obtenemos

$$R^A_C \wedge g^{CB} + R^B_C \wedge g^{AC} = 0 \tag{I.41}$$

y diferenciando exteriormente (I.40) se obtienen las identidades de Bianchi

$$\left. \begin{aligned}
 dR^A_B &= R^A_C \wedge \Gamma^C_B - \Gamma^A_C \wedge R^C_B \\
 dR^{\dot{A}}_{\dot{B}} &= R^{\dot{A}}_{\dot{C}} \wedge \Gamma^{\dot{C}}_{\dot{B}} - \Gamma^{\dot{A}}_{\dot{C}} \wedge R^{\dot{C}}_{\dot{B}}
 \end{aligned} \right\} \tag{I.42}$$

En $\Lambda^2(V_4)$ existe la base $\{S^{AB}, S^{\dot{A}\dot{B}}\}$ tal que $S^{AB} = S^{BA}$,

$S^{\dot{A}\dot{B}} = S^{\dot{B}\dot{A}}$ y relacionadas con g^{AB} de la manera siguiente

$$\left. \begin{aligned}
 S^{AB} &= \frac{1}{2} \epsilon_{\dot{C}\dot{D}} g^{A\dot{C}} \wedge g^{B\dot{D}} \\
 S^{\dot{A}\dot{B}} &= \frac{1}{2} \epsilon_{CD} g^{C\dot{A}} \wedge g^{D\dot{B}}
 \end{aligned} \right\} \tag{I.43}$$

R_{AB} y $R_{\dot{A}\dot{B}}$ pueden expandirse en términos de esta base como sigue

$$\left. \begin{aligned}
 R_{AB} &= -\frac{1}{2} C_{ABCD} S^{CD} + \frac{R}{24} S_{AB} + C_{AB\dot{C}\dot{D}} S^{\dot{C}\dot{D}} \\
 R_{\dot{A}\dot{B}} &= -\frac{1}{2} C_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} S^{\dot{C}\dot{D}} + \frac{R}{24} S_{\dot{A}\dot{B}} + C_{\dot{A}\dot{B}CD} S^{CD}
 \end{aligned} \right\} \tag{I.44}$$

Los objetos C_{ABCD} , $C_{A\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$, $C_{A\dot{B}C\dot{D}}$ son las imágenes espinoriales de las partes autodual y antiautodual del tensor de curvatura conforme $(C_{\alpha\beta\gamma\delta} \pm \frac{i}{2} \sqrt{g} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\mu\nu}_{\gamma\delta})$ y del tensor de Ricci sin traza respectivamente; R es el escalar de curvatura y tienen las siguientes simetrías

$$C_{ABCD} = C_{(ABCD)}, \quad C_{A\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = C_{(\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D})}, \quad C_{A\dot{B}C\dot{D}} = C_{(A\dot{B})(C\dot{D})}$$

REFERENCIAS

- 1.- Humberto Salazar I.; "Born-Infeld type electrodynamics admitting non-null Killing vector".; Class. Quantum Grav. 4 (1987) 465-472, printed in U. K.
- 2.- Jerzy F. Plebanski; "The spinorial and helicity formalisms of Riemannian structures in complex or real four dimensions"; curso impartido en el CINVESTAV (Feb.-Jun. 1990).
- 3.- Jerzy F. Plebanski; "Spinors, tetrads and forms"; Notas internas del CINVESTAV de un curso impartido en el segundo semestre del ciclo 1973/1974 (Mayo de 1974).
- 4.- Frederick J. Ernst and Jerzy F. Plebanski; "Killing structures and complex δ -potentials", Annals of Physics 107, 266-282 (1977).
- 5.- Shahan Hacyan and Jerzy F. Plebanski; "Some basic properties of Killing spinors", Journal of Mathematical Physics, Vol. 17, No. 12 (December 1976).
- 6.- Humberto Salazar I.; Tesis de Maestría, CINVESTAV, (1981).
- 7.- Gerardo F. Torres del Castillo; Notas sobre variedades diferenciales, CINVESTAV, (1981).
- 8.- Gerardo F. Torres del Castillo; Tesis Doctoral, CINVESTAV, Julio-1982.
- 9.- I. Beju, E. Soós y P. P. Teodorescu; "Spinor and non-euclidean tensor calculus with applications (Cap. I); Editura tehnica Bucuresti România, Abacus Press Tunbridge Wells, Kent England (1983).
- 10.-S. Weinberg; General Relativity with applications to Gravitation and Cosmology; Ed. Pergamon Press.

Riz T. 154