



Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Investigación en Física

*Estudio perturbativo del vértice de quark-gluón
como guía para la Física Hadrónica*

una tesis presentada a la Universidad de Sonora

para la obtención del título de

Doctora en Ciencias (Física)

por

Rocío Angélica Bermúdez Ramos

Bajo la dirección de

María Elena Tejeda Yeomans

Hermosillo, Sonora

2017

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Como parte de este trabajo de tesis se realizaron las siguientes acciones:

- Presentación del poster **Perturbative and non-perturbative complementary aspects of QCD** en el *XIV Mexican Workshop of Particles and Fields*, realizado en Oaxaca, México, del 25 al 29 de Noviembre, 2013, así como sus respectivos proceedings [1].
- Presentación de las charlas **El vértice y así y Los mesones ligeros en los tiempos de la interacción de contacto**, en el mini-taller \overline{MS} , evento como parte del trabajo de la colaboración Morelia-Sonora. Dichos talleres se realizaron en 2014 en Morelia, México, del 5 al 7 de Marzo, y en Hermosillo, México, del 5 al 7 de Noviembre, respectivamente.
- Estancia de investigación con asignación de beca mixta 2014 - MZO2015 para movilidad nacional en el Instituto de Física y Matemáticas, en Morelia, México del 30 de Junio al 8 Agosto de 2014, bajo la supervisión del Dr. Adnan Bashir.
- Presentación del poster **Parton distribution amplitudes of light mesons in a contact interaction** en el *8th. CERN Latin-American School on High Energy Physics*, realizado en Ibarra, Ecuador, del 4 al 17 de Marzo, 2015, así como sus respectivos proceedings [2].
- Presentación del poster **The quark-gluon vertex: an ansatz for phenomenological analysis** en la *School on QCD and LHC Physics*, realizada en Sao Paulo, Brasil, del 22 al 31 de Julio, 2015.
- Presentación del poster **Construyendo un vértice de quark-gluón no perturbativo desde uno perturbativo** en la *XXX Reunión Anual de la División de Partículas y Campos*, realizada en Puebla, México, del 23 al 25 de Mayo, 2016, así como sus respectivos proceedings [3].
- Presentación de la charla **Aspectos no perturbativos del vértice de quark-gluón** en la *Reunión General de la Red-FAE 2016*, realizada en Pachuca, México, del 10 al 12 de Noviembre, 2016.

-
- Presentación de la charla **Remarks on the quark-gluon vertex** en el *VI International Workshop on Non-Perturbative Aspects of Field Theory*, realizado en el Mesoamerican Centre for Theoretical Physics (MCTP), Tuxtla Gutiérrez, México, del 24 al 28 de Abril, 2017.
 - Finalmente, la publicación del artículo **Quark-Gluon Vertex: A Perturbation Theory Primer and Beyond** en colaboración de L. Albino, L.X. Gutierrez-Guerrero, M.E. Tejeda-Yeomans y A. Bashir, y publicado en la revista *Physical Review D* **95**, página 034041, 2017 [4].

Agradecimientos

A CONACyT.

A mi Alma Mater, la Universidad de Sonora, así como la gente que labora aquí y me apoyó de alguna manera durante este tiempo.

Al Cuerpo Académico de Partículas y Cosmología y todos aquellos asociados a las actividades que organizamos para divulgar la Ciencia.

A Maria Elena, mi asesora, colega y amiga.

A mis otros amigos y colegas: Calcáneo, Galaviz, Alfredo, Képani, Cobos, Pati, Tere, Elisa y a mis demás amigos.

A mis padres y mis hermanos.

A mi German.

A mis alumnos.

Resumen

El vértice de quark-gluón juega un importante papel en fenómenos no perturbativos en QCD, como el rompimiento dinámico de la simetría quiral, necesario para entender el espectro observado de los hadrones, así como sus propiedades. En este trabajo, hacemos un análisis sobre el comportamiento de la amplitud de distribución de los partones de los mesones ligeros en el contexto de la interacción de contacto, calculando las respectivas constantes de decaimiento. Además, hacemos un análisis numérico de los resultados a un lazo de los factores de forma del vértice de quark-gluón. Las comunidades de lattice y de Schwinger-Dyson están calculando estos factores de forma en varias configuraciones cinemáticas de los momentos involucrados. Calculamos y graficamos nuestros resultados para todos los factores de forma en la configuración simétrica y comparamos algunos factores con los resultados de lattice. Cualitativamente observamos que los resultados a un lazo tienen un crecimiento en el infrarrojo, como se esperaba de sus contrapartes no perturbativas. Obtenemos los factores de forma transversos en la configuración asintótica; estos resultados tienen implicaciones en la renormalizabilidad multiplicativa del propagador del quark. Finalmente, presentamos algunos requerimientos para los factores de forma del vértice, como una guía para un *ansatz* no perturbativo.

Abstract

The full quark-gluon vertex plays an important role in non perturbative phenomena in QCD, like dynamical chiral symmetry breaking, leading to the observed spectrum and properties of hadrons. In this work, we analyze the behaviour of the parton distribution amplitude of light mesons in a contact interaction in order to calculate their decay constants. Also, we carry out a numerical analysis of the one-loop result for all the form factors of the quark-gluon vertex. Both the lattice and the Schwinger-Dyson communities are computing these form factors in various kinematical regimes of momenta involved. We calculate and plot our results for all the form factors in the symmetric configuration, and we compare some of these factors to lattice results. We observe that the one-loop results qualitatively encode most of the infrared enhancement features expected of their non-perturbative counter parts. We obtain the transverse form factors in the asymptotic configuration, these results have implications for the multiplicative renormalizability of the quark propagator. Finally, we list some requirements for the form factors of the vertex, as a guide for a non perturbative ansatz.

Contenido

Introducción	1
Capítulo I: ¿Qué es un vértice?	3
1.1 La QCD y sus escalas de energía	4
1.2 Lagrangiana de QCD	6
1.2.1 La lagrangiana clásica	7
1.2.2 Los términos covariantes	7
1.2.3 La lagrangiana completa	9
1.3 Las reglas de Feynman y el vértice de quark-gluón	10
1.4 Ecuaciones de Schwinger-Dyson	13
1.4.1 La ecuación de gap	14
1.4.2 Sobre el vértice de quark-gluón	17
Capítulo II: Estudio de mesones ligeros	20
2.1 Mesones	21
2.2 La ecuación de Bethe-Salpeter	23
2.3 Amplitud de distribución de partones	25
2.4 Resultados numéricos	27
2.5 Más allá de RL	31
Capítulo III: Consideraciones generales sobre el vértice de quark-gluón	33
3.1 Reglas de transformación del vértice desnudo	33
3.2 Invariancia de norma	34
3.2.1 Invariancia de norma en QED	34
3.2.2 Invariancia de norma en QCD	37

3.3	Renormalizabilidad multiplicativa	39
3.4	Singularidades cinemáticas	43
Capítulo IV: Estructura del vértice		45
4.1	Límite totalmente simétrico $k^2 = p^2 = q^2$	45
4.1.1	Vértice longitudinal	46
4.1.2	Vértice transverso	53
4.1.3	Comparación con lattice	56
4.2	Límite asintótico $k^2 \gg p^2 \gg m^2$	59
4.3	Condiciones para una construcción no perturbativa	64
Conclusiones		67
Apéndice A: Integrales		70
A.1	Integrales de uno, dos y tres puntos	70
A.1.1	Integrales de un punto	70
A.1.2	Integrales de dos puntos	71
A.1.3	Integrales de tres puntos	71
A.2	Integrales de la forma $I_{\alpha\beta}$	72
A.2.1	I_{02}	72
A.2.2	I_{12}	73
Apéndice B: τ's y t's de Davydychev		75
B.1	Parte abeliana	75
B.2	Parte no-abeliana	76
Referencias		79

Lista de Figuras

1.1	Partículas que forman el Modelo Estándar de la Física.	3
1.2	Resumen de las mediciones del α_S como función de la escala de energía Q . . .	5
1.3	Representaciones como diagramas de Feynman de (a) un propagador completo, (b) un propagador desnudo y (c) el propagador desnudo del fotón.	14
1.4	Términos en la serie perturbativa del propagador del quark.	15
1.5	Correcciones.	15
1.6	$\Sigma(p)$	16
1.7	Ecuación de Schwinger-Dyson para un quark en QED.	17
1.8	Ecuación de Schwinger-Dyson para un quark en QCD.	17
1.9	Corrección del vértice fermión-fotón a un lazo.	18
1.10	La contribución a un lazo del vértice de quark-gluón.	18
2.1	La contribución a un lazo del vértice de quark-gluón.	24
2.2	Los momentos de la PDA para mesones pseudoescalares.	28
2.3	Los momentos longitudinales de la PDA para mesones vectoriales.	29
2.4	Los momentos transversos de la PDA para mesones vectoriales.	30
3.1	Corrección del vértice quark-gluón hasta orden α_S	33
3.2	Contribuciones abeliana y no abeliana de la corrección a un lazo del vértice de quark-gluón.	38
4.1	Contribuciones abeliana y no abeliana de la corrección a un lazo del vértice de quark-gluón.	46
4.2	Factores de forma $\lambda_{1R}^{a,b}$ a un lazo, en la norma de Feynman y $m = 0.115\text{GeV}$. . .	50
4.3	Factor de forma $1 + \lambda_{1R}$ a un lazo, en la norma de Landau y $m = 0.115\text{GeV}$. . .	51
4.4	Saturación de los factores de forma λ_{1R} , λ_2 y λ_3 a un lazo en el infrarrojo, en la norma de Landau y $m = 0.115\text{GeV}$	52

4.5	Factores de forma abelianos $\tau_i^a(p^2)$ a un lazo en el infrarrojo, en la norma de Landau y $m = 0.115\text{GeV}$	56
4.6	Factores de forma no abelianos τ_i^a , pesados por p^2 , a un lazo en el infrarrojo, en la norma de Landau y $m = 0.115\text{GeV}$	57
4.7	Factor de forma $1 + \lambda_{1R}$ a un lazo, en la norma de Landau y $m = 0.06\text{GeV}$. . .	58
4.8	Factor de forma τ_5 reportados por lattice (puntos negros), utilizando el modelo de Curci-Ferrari (curva azul) y nuestros resultados a un lazo, en la norma de Landau y $m = 0.44\text{GeV}$ (curva roja).	59
4.9	Factores de forma que contribuyen al comportamiento asintótico del vértice. La línea sólida (azul) es la evaluación numérica del resultado a un lazo, mientras que la línea punteada (roja) corresponde al resultado de las ecs. (4.19) y (4.20), válido para $x \rightarrow 0$. Podemos observar que estas curvas convergen para $x \rightarrow 0$. .	63

Lista de Tablas

2.1	Clasificación de los mesones según su momento angular total \mathbf{J} y su paridad P .	22
2.2	Masas computadas para los mesones π , K , ρ , ϕ y K^* , así como sus respectivas amplitudes de Bethe-Salpeter, donde todas las dimensiones están dadas en GeV.	28
2.3	Valor de las constantes de decaimiento comparados con experimentos y con resultados de lattice [6, 27, 28].	30
2.4	Valor de las constantes de decaimiento comparados con [17], donde se satisface explícitamente la identidad axial-vectorial de Ward-Takahashi.	31

Introducción

El Modelo Estándar (SM) es la teoría que contiene todo nuestro conocimiento sobre las interacciones electrodébiles y fuertes, entendidas como interacciones fundamentales, así como de todas las partículas elementales que conocemos. En este modelo se describen las propiedades e interacciones entre los fermiones (quarks y leptones), que son los constituyentes fundamentales de la materia, mediadas por bosones de norma responsables de las fuerzas electromagnética (fotón), débil (bosones W^+ , W^- y Z) y fuerte (gluones); además se postula una partícula de spin cero, el bosón de Higgs, necesario para proveer de masas a las demás partículas mediante el mecanismo de Higgs [5].

Durante la última década se han obtenido grandes avances en el desarrollo de cálculos perturbativos de alta precisión en la Cromodinámica Cuántica (QCD), que es la teoría que describe a las interacciones fuertes. Asimismo, estos resultados coinciden con los datos experimentales obtenidos de colisiones de hadrones [6]. Esto es sumamente relevante ya que la QCD es la componente principal para el cómputo de cualquiera de los procesos necesarios tanto para comprender nuevas señales en los experimentos, así como tener mejores análisis del fondo.

El vértice de quark-gluón juega un rol importante en el entendimiento de las propiedades de la QCD en el infrarrojo, así como en el análisis del origen del rompimiento dinámico de la simetría quiral (DCSB) en el contexto de las ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD). Por ejemplo, la espectroscopía de los mesones se estudia insertando estos vértices en la ecuación de Bethe-Salpeter (EBS), que es la herramienta en el formalismo de las ESD para estudiar los estados ligados de dos partículas.

Sin embargo, dado a que estos cómputos se hacen mediante softwares matemáticos, los resultados que se pueden calcular dependen de la estructura de los elementos involucrados en la QCD. Si bien se estudian técnicas de integración numérica, truncamientos, regularización y renormalización, muchos grupos de ESD prefieren utilizar formas sencillas para caracterizar a los propagadores y a los vértices, perdiendo así información de lo que se está describiendo.

En este trabajo analizamos diversos aspectos de la interacción entre quarks y gluones, estudiando la estructura fundamental perturbativa con el fin de establecer una guía sobre los elementos y las condiciones necesarias para tener herramientas no perturbativas.

A un lazo, las contribuciones son debidas a la interacción entre dos quarks y un gluón, similar a lo que ocurre en la Electrodinámica Cuántica (QED) entre dos fermiones y el fotón, y a la interacción entre los gluones. El entendimiento de estas contribuciones son necesarios para los cálculos de observables en la Física Hadrónica, área de la ciencia que estudia a las partículas compuestas por quarks. Por ejemplo, a los protones y a los neutrones.

En este trabajo hacemos una revisión sobre los elementos básicos de la QCD y las ESD en el primer capítulo. Después, en el segundo capítulo incorporamos estas ideas en el cálculo de amplitudes de distribución de partones para mesones ligeros, en el contexto de la QCD no perturbativa. En el capítulo III hacemos un análisis de las propiedades fundamentales que intervienen en la dinámica del vértice de quark-gluón. Finalmente, en el capítulo IV estudiamos la estructura del vértice en distintos límites cinemáticos, con el fin de encontrar herramientas hacia la construcción de un ansatz que pueda ser útil en los cálculos no perturbativos de la QCD.

Capítulo 1

¿Qué es un vértice?

Cualquier proceso donde dos partículas fundamentales participen, el tipo de interacción que tengan depende de la naturaleza de cada partícula. El Modelo Estándar (SM) es la teoría que describe tres de las cuatro interacciones fundamentales de la Naturaleza: electromagnética, fuerte y débil.¹ Ver figura 1.1². En el SM las partículas se dividen en *fermiones* y *bosones*.

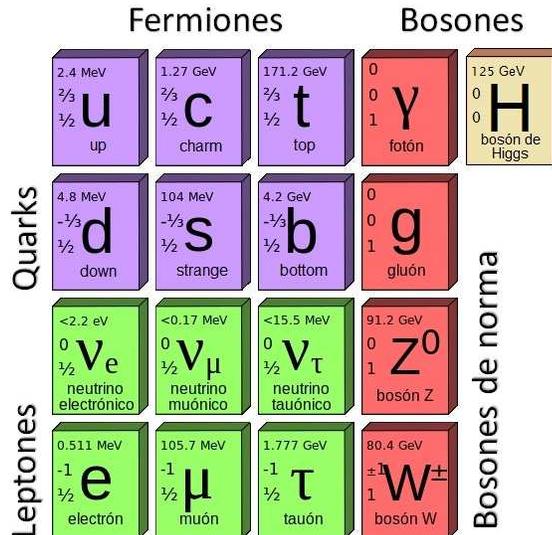


Fig. 1.1: Partículas que forman el Modelo Estándar de la Física.

Los fermiones, que se distinguen porque su spin es semientero, son las partículas que constituyen a la materia. Estos a su vez se dividen en *quarks* y *leptones*. La diferencia entre esta clase de partículas radica en sus propiedades y en cómo se acoplan con otras partículas fundamentales. Por ejemplo, la propiedad de algunos fermiones que les permite interactuar de forma electromagnética es la carga eléctrica y esta interacción se describe mediante la Electrodinámica Cuántica (QED). Por otro lado, los quarks tienen carga de color que es la propiedad de estas

¹El SM no proporciona una explicación para la gravedad y se considera incompatible con la teoría de la relatividad general.

²https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_Model

partículas para interactuar fuertemente y es lo que los diferencia de los leptones. La teoría que describe el comportamiento relacionado con esta fuerza es la Cromodinámica Cuántica (QCD).

Los bosones, por otro lado, tienen spin entero. Existen bosones que resultan de la composición de pares de quarks y bosones que son fundamentales, también denominados bosones de norma. Estos últimos son los encargados de llevar la información de la interacción a la cual pertenecen. Por ejemplo, el fotón es el bosón de norma de la interacción electromagnética aunque no tiene carga eléctrica. Por su parte, los gluones son los encargados de la interacción fuerte y sí poseen carga de color.

Así, podemos definir a la QCD como la teoría cuántica de campos que estudia la interacción fuerte y describe y explica los comportamientos que involucran a los quarks y a los gluones, así como las posibles interacciones entre ellos. En las siguientes secciones veremos los aspectos que definen esta teoría.

1.1 La QCD y sus escalas de energía

A diferencia de otro tipo de partículas fundamentales, los quarks nunca se han observado libres. Esto es una consecuencia de una propiedad a largas distancias: todos los quarks *hadronizan*³. Esto debe entenderse como que los quarks solo se observan como parte de hadrones.

Para poder obtener información experimental sobre la dinámica de los quarks es necesario estudiar el interior de los hadrones de la forma en la que Rutherford estudió el interior de los átomos. Pero ahora, para el caso de hadrones, se necesitan mayores energías y mayor transferencia de momento para lograr mayor resolución. A estas energías los quarks parecen libres.

La evidencia experimental nos dice que la dinámica de la interacción fuerte está muy relacionada con la escala de la distancia a la cual observamos los procesos. Por ejemplo, hemos observado que la interacción entre *partones*, i.e. quarks y gluones, se vuelve más débil a cortas

³Del orden del radio de un hadrón. En una escala de tiempo, la hadronización se lleva a cabo $1/\Lambda$, excepto por el quark top, que decae antes de este tiempo.

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



“El saber de mis hijos
hará mi grandeza”



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

distancias, esto es a distancias mucho menores que un hadrón. Así, los quarks se comportan casi libres a altas energías o a distancias pequeñas. Lo contrario ocurre para distancias largas, los quarks se observan dentro de hadrones, o bien, a escalas de energía que consideramos como bajas.

A estos fenómenos dependientes de la escala de resolución se conocen como *confinamiento* y *libertad asintótica*. Es decir, a bajas energías (o largas distancias) los quarks se encuentran confinados en hadrones. Por otro lado, a altas energías (o cortas distancias) los partones gozan de libertad asintótica o, bien, se vuelven esencialmente libres.

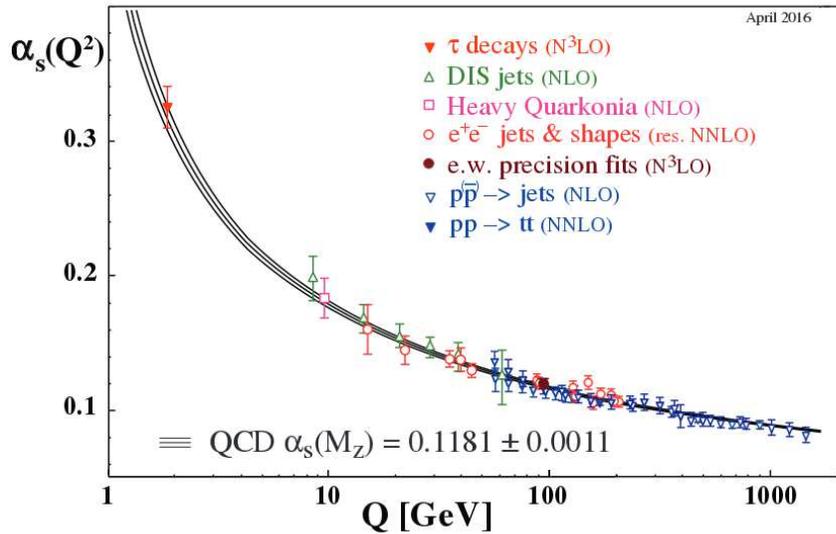


Fig. 1.2: Resumen de las mediciones del α_s como función de la escala de energía Q .

Estos fenómenos son consecuencia de la variación del acoplamiento de la interacción fuerte $\alpha_s(Q^2)$ con la energía Q . Podemos ver en la figura 1.2 que a bajas energías, $\alpha_s \sim 1$, [6]. Sin embargo, a energías altas tenemos que $\alpha_s(M_Z) \sim 0.118$, donde M_Z es la masa del bosón Z.

Esto constituye una herramienta fenomenológica muy importante ya que a altas energías el acoplamiento es pequeño, por lo que es posible hacer teoría de perturbaciones. Así, podemos estudiar a la QCD según el régimen de energía en el que estemos trabajando: QCD perturbativa (pQCD) y QCD no perturbativa.

La pQCD está relacionada con el fenómeno de la libertad asintótica y es efectiva hasta energías del orden de las masas de los hadrones, donde la constante de acoplamiento es suficientemente grande e invalida los desarrollos perturbativos. Por ello, los procesos que involucran partículas elementales a escalas de confinamiento no pueden ser calculados directamente con pQCD.

Para el regimen no perturbativo es necesario desarrollar técnicas para poder estudiar a los quarks en sus estados confinados. Gracias al Teorema de Factorización [8] podemos separar las secciones transversales de dispersión de los procesos en dos partes: los calculables a cortas distancias (que dependen de la pQCD) y las funciones universales a largas distancias. Algunos ejemplos de estas funciones son las funciones de distribución de partones (PDF), funciones de fragmentación, funciones de correlación, distribuciones de partones generalizadas (GPD), amplitudes de distribución de partones (PDA) y factores de forma (FF). Además, estas funciones se pueden extraer haciendo ajustes con los experimentos.

1.2 Lagrangiana de QCD

En esta sección haremos una breve descripción de la QCD en su regimen perturbativo, con la idea de introducir notación y analizar los componentes básicos de esta teoría. Para ello consideramos que los cálculos perturbativos de cualquier proceso que involucre partículas elementales requieren de las reglas de Feynman para describir la dinámica entre dichas partículas. Estas reglas se pueden derivar de la densidad lagrangiana de la interacción.

La lagrangiana que describe la QCD está dada por los siguientes elementos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{clas} + \mathcal{L}_{g-f} + \mathcal{L}_{ghost} \quad (1.1)$$

En esta expresión, \mathcal{L}_{clas} es la densidad lagrangiana clásica que describe la interacción de quarks de masa m_0 con gluones sin masa. El siguiente término \mathcal{L}_{g-f} es el que fija la norma, parámetro que es necesario para definir al propagador del gluón. Además, agregar este término tiene como consecuencia la necesidad de introducir el tercero, \mathcal{L}_{ghost} . Cada término se describe a continuación.

1.2.1 La lagrangiana clásica

Siguiendo la notación de [7], la densidad lagrangiana clásica tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_{clas} = \sum_{k=1}^{N_f} \bar{\psi}^k (i\gamma^\mu D_\mu - m_0^k) \psi^k - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (1.2)$$

En el primer término, que corresponde al de Dirac, ψ^k y A_μ^a son los campos correspondientes a los quarks y a los gluones, respectivamente. Además, $D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a$ es la derivada covariante, con g la constante de acoplamiento de la interacción fuerte y T^a son los generadores del grupo, SU(3) en este caso. El segundo término corresponde a un término cinético solo para los campos de norma. Aquí $F_{\mu\nu}^a$ es el tensor de esfuerzos para un campo gluónico definido como:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.3)$$

donde f^{abc} es la constante de estructura del grupo⁴, que está relacionada con la autointeracción de los gluones y con la libertad asintótica.

En cuanto a los índices usados en la ec. (1.2), k distingue a los tipos o sabores de quarks, siendo N_f el número total de estos. Los índices a, b y c corren para los 8 grados de libertad de color para el campo del gluón. Finalmente, los índices griegos son los habituales para indicar las componentes del espaciotiempo, con la métrica $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

El acoplamiento para la interacción fuerte, definido como $\alpha_S = g^2/4\pi$ es un parámetro fundamental en la teoría, similar a la constante de estructura fina en QED. Esta constante corre con la energía, ver figura 1.2, de forma que es suficientemente pequeña para energías altas y esto nos permite hacer teoría de perturbaciones en este regimen. (Ver sección 1.1). Esto es una evidencia de la libertad asintótica.

1.2.2 Los términos covariantes

La lagrangiana clásica presentada en la ec. (1.2) falla cuando se estudia la cuantización canónica. Es por ello que se requiere imponer constricciones a los campos A_μ^a , suprimiendo la libertad de

⁴Además, f^{abc} es un factor no abeliano y es lo que distingue a la QCD de la QED. Recordemos que en QED el tensor de esfuerzos se define como $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$.

la transformación de norma. Esta elección se conoce como *fixar la norma*.

Existen una gran variedad de condiciones para fijar la norma. Por ejemplo, la constricción $\partial^\mu A_\mu^a = 0$, llamada norma de Lorentz o norma covariante debido a su estructura covariante. También existen otro tipo de normas no covariantes, como la norma de Coulomb o norma transversa $\partial_i A_i^a = 0$, la norma temporal $A_0^a = 0$ o alguna norma axial, como $A_3^a = 0$.

Entonces podemos ver que un término de la forma $\partial^\mu A_\mu^a$ nos permite que la teoría sea explícitamente covariante, así que imponemos esta constricción en la lagrangiana de QCD. De la Mecánica Analítica sabemos que una manera de lidiar con sistemas constreñidos es mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Esto significa agregar a la lagrangiana el término $\lambda(\partial^\mu A_\mu^a)^2$, donde λ es un multiplicador de Lagrange.⁵ De esta forma se evita imponer constricciones sobre las ecuaciones para los campos. Así, debemos agregar a la lagrangiana clásica el término \mathcal{L}_{g-f} , mencionado en la ec. (1.1), definido como:

$$\mathcal{L}_{g-f} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 \quad (1.4)$$

donde ξ es el parámetro de norma.

Debido a que fijamos la norma, la lagrangiana deja de ser invariante de norma. Sin embargo, los observables físicos son independientes e invariantes de norma en la Naturaleza, por lo que la elección de ξ no afecta a los resultados. Por ello es común trabajar en ciertas normas para hacer los cálculos más simples. Por ejemplo, $\xi = 1$ es la norma de Feynman, mientras que $\xi \rightarrow 0$ es la norma de Landau.

La consecuencia directa de imponer este término para fijar la norma es la introducción de los fantasmas de Faddeev-Popov. Los gluones tienen spin 1, por lo que físicamente tienen dos estados de polarización (transversos). Sin embargo, elegir normas covariantes da la libertad al campo gluónico de poder propagarse en estados de polarización no físicos. Para cancelar estos efectos es necesario introducir campos escalares (spin 0), aunque anticonmutan como los fermiones. Estos son los fantasmas de Faddeev-Popov.

⁵Esto se elige considerando los términos cinéticos permitidos y siendo consistentes con las dimensiones

Estos campos de fantasmas no corresponden a partículas reales, es decir, aparecen como partículas virtuales en los diagramas de Feynman, pero son necesarios para los cálculos en normas covariantes arbitrarias. La forma exacta de estos fantasmas depende de la norma elegida, pero el término que se agrega a la lagrangiana de QCD es \mathcal{L}_{ghost} definido como:

$$\mathcal{L}_{ghost} = (\partial^\mu \chi^{a*}) D_\mu^{ab} \chi^b \quad (1.5)$$

donde χ^a es el campo del fantasma.

Cabe mencionar que la libertad del gluón para acceder a estados no físicos de polarización esta relacionado con las autointeracciones de estos campos. Dado que los fotones no pueden autointeractuar, en QED no hay necesidad de introducir a los campos de fantasmas.

Se puede elegir trabajar con una norma axial, que corresponde a estados de polarización físicos. Estas normas son del tipo $n \cdot A^a$, con n^μ un vector fijo que usualmente se toma como la luz, es decir, $n^2 = 0$. Esto define la norma del cono de luz. En este caso el término en la lagrangiana que fija la norma es

$$\mathcal{L}_{g-f} = -\frac{\lambda}{2} (n^\mu A_\mu^a)^2 \quad (1.6)$$

donde $\lambda \rightarrow \infty$ elimina la necesidad de utilizar campos de fantasmas.

1.2.3 La lagrangiana completa

Así, la lagrangiana de QCD corresponde a la expresión (1.1), con los términos de las ecuaciones (1.2), (1.4) y (1.5). Esto es

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{N_f} \bar{\psi}^k (i\gamma^\mu D_\mu - m_0^k) \psi^k - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + (\partial^\mu \chi^{a*}) D_\mu^{ab} \chi^b \quad (1.7)$$

Como en cualquier teoría cuántica de campos, las reglas de Feynman para la QCD se pueden obtener del formalismo de la integral de camino. En la siguiente sección hablaremos de estas reglas para la QCD.

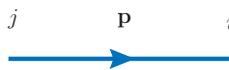
1.3 Las reglas de Feynman y el vértice de quark-gluón

En la Física de Partículas es común hacer cálculos de procesos de dispersión entre partículas que no son calculables exactamente, por lo que es necesario usar teoría de perturbaciones. Estos cálculos se hacen mediante el uso de las reglas de Feynman que nos permiten asociar amplitudes de dispersión a diagramas que representan el proceso a estudiar, de forma que las observables corresponden a la amplitud total de todos los posibles diagramas.

Las reglas de Feynman se usan en las teorías cuánticas de campos y se pueden obtener del formalismo de la integral de camino. Por otro lado, los diagramas de Feynman son líneas de distintos estilos que representan campos de partículas propagándose. Si dos o más líneas se unen en un punto común, a este le llamamos vértice y representa a esas partículas encontrándose en un punto del espacio de momentos.

Por ejemplo, una partícula que se desplaza entre dos puntos del espaciotiempo es lo que llamamos *propagador*. De hecho, un propagador es una función de Green de 2-puntos que representa la amplitud de probabilidad de propagación de una partícula entre dos puntos. Las funciones de Green, que son soluciones a ecuaciones diferenciales lineales e inhomogéneas, pueden ser expresadas como valores de expectación de productos de los operadores de campo en varios estados; por ejemplo, valores de expectación del vacío.

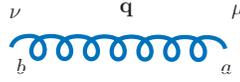
En la QCD necesitamos de tres tipos de propagadores: quarks, gluones y fantasmas. El propagador del quark se representa como una línea sólida:



$$i\delta_{ij} \frac{1}{\not{p} - m} \quad (1.8)$$

Aquí podemos interpretar la dirección de las flechas como representaciones de los operadores de creación y aniquilación, desde j a i y desde i a j , respectivamente.

El propagador del gluón es



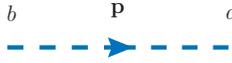
$$-i\delta^{ab}\frac{d_{\mu\nu}}{q^2} \quad (1.9)$$

donde $d_{\mu\nu}$ es

$$d_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - (1 - \xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}, \quad \text{en norma covariante} \quad (1.10)$$

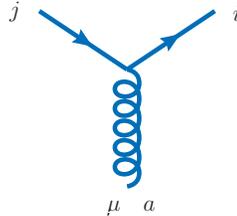
$$d_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu n_\nu + q_\nu n_\mu}{q \cdot n} + n^2 \frac{q_\mu q_\nu}{(q \cdot n)^2}, \quad \text{en norma axial} \quad (1.11)$$

Por último, el propagador del fantasma es



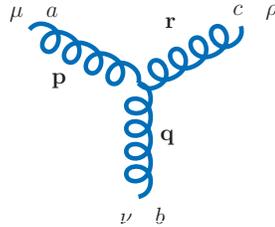
$$i\delta^{ab}\frac{1}{q^2} \quad (1.12)$$

Ahora, observando la expresión para la lagrangiana de QCD, expresada en la ec. (1.7), identificamos el término correspondiente a la interacción entre quarks y gluones, $\bar{\Psi}^k (g\gamma^\mu T^a A_\mu^a) \Psi^k$. Este término está relacionado al vértice de quark-gluón, que es cuando los quarks se afectan en algún punto del espacio de momentos mediante un gluón.



$$-ig\gamma^\mu T_{ij}^a \quad (1.13)$$

Sin embargo, la lagrangiana nos admite otro tipo de vértices, por ejemplo, el vértice de triple gluón:



$$gf^{abc} [(p-r)_\mu g_{\nu\rho} + (r-p)_\nu g_{\rho\mu} + (p-q)_\rho g_{\mu\nu}] \quad (1.14)$$

Todos los procesos a calcular se conciben como correcciones a la propagación libre (o interacción libre) y se realizan utilizando teoría de perturbaciones, donde el parámetro pequeño es el acoplamiento fuerte $\alpha_s = g^2/4\pi$ que, como ya mencionamos en secciones anteriores, depende de la escala de energía involucrada. Pero la propagación libre solo corresponde a uno de los posibles escenarios.

En general, la propagación de un quark de un punto a otro puede implicar procesos internos más complicados, como la creación y aniquilación de partículas virtuales. Esto significa agregar diagramas que involucren vértices o funciones 3-, 4- y hasta n-puntos. Así, la propagación completa se escribe como:



Para indicar al propagador completo usamos funciones de vestimiento en las expresiones de las reglas de Feynman. En este caso:

$$i\delta_{ij} \frac{F(p^2)}{\not{p} - M(p^2)} \quad (1.15)$$

donde $F(p^2)$ es la renormalización de la función de onda del quark y $M(p^2)$ es una función de masa.

Esto mismo ocurre para todos los propagadores y todos los vértices. Por ejemplo, el propagador del gluón es



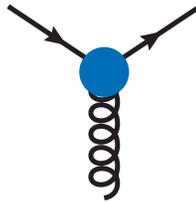
Que corresponde a

$$-i\delta^{ab} \frac{1}{q^2} \left[\mathcal{G}(q^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \quad (1.16)$$

con $\mathcal{G}(q^2)$ es la función de vestimiento para la parte transversa del propagador del gluón. Es común tomar la aproximación *quenched*, donde el propagador completo se toma como el desnudo, es decir, $\mathcal{G}(q^2) = 1$.



Para el vértice de quark-gluón completo se representa como:



1.4 Ecuaciones de Schwinger-Dyson

Una herramienta útil en la teoría cuántica de campos es el formalismo de las ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD). En este formalismo tenemos un conjunto completo de ecuaciones integrales acopladas para las funciones de Green como consecuencia de la estructura de la lagrangiana.

Las ESD se usan para estudiar fenómenos no perturbativos. Su formulación se hace a través de integrales de caminos que no requiere la aproximación de acoplamiento pequeño [10]. Sin embargo, su derivación puede hacerse a través de una expansión perturbativa de un propagador, haciéndolas también perturbativas [9].

Las ESD son infinitas en número y su estructura es tal que la función de n -puntos está relacionada con la función de $n + 1$ -puntos; la función de $n + 1$ -puntos está relacionada con la de $n + 2$ -puntos y así sucesivamente. Como las ecuaciones son infinitas, tenemos que truncarlas de alguna manera para poder reducir este número de ecuaciones a uno que sea solucionable. Un truncamiento consiste en tomar los primeros términos de la serie perturbativa cuando nuestro acoplamiento $\alpha_S \ll 1$. Sin embargo, cuando $\alpha_S \sim 1$ se utilizan otro tipo de técnicas.

Las ESD no se limitan a la dinámica de una partícula. Dentro de este formalismo tenemos las ecuaciones de Bethe-Salpeter, que describen la dispersión relativista de dos partículas y sus estados ligados. Similarmente, los estados ligados de tres partículas se pueden estudiar a través de las ecuaciones de Faddeev.

1.4.1 La ecuación de gap

Denotamos como $S(p)$ al propagador completo del quark, mientras que podemos llamar propagador desnudo a $S^0(p)$. Consideremos la interacción en QED, donde el bosón de norma es el fotón, ver referencia [11]. La representación como diagrama de Feynman de estos elementos está dada en la figura 1.3.

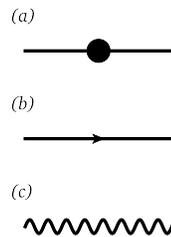


Fig. 1.3: Representaciones como diagramas de Feynman de (a) un propagador completo, (b) un propagador desnudo y (c) el propagador desnudo del fotón.

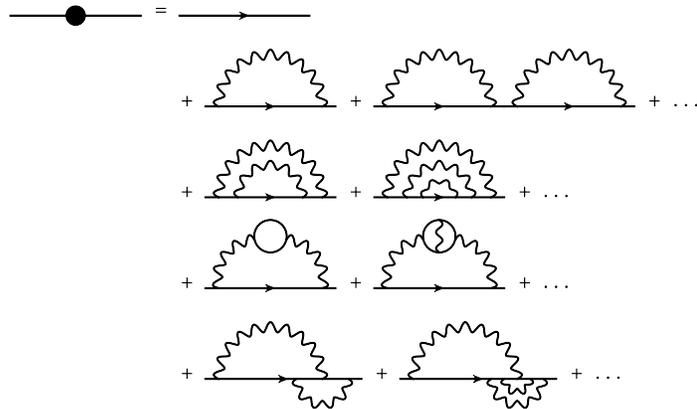


Fig. 1.4: Términos en la serie perturbativa del propagador del quark.

Aunque la derivación de las ESD es independiente del valor del acoplamiento α , es más intuitivo deducirlas por argumentos perturbativos. Así, el propagador del quark se puede escribir como una serie de correcciones al propagador desnudo, como en la figura 1.4, donde la interacción está mediada por el fotón.

En 1949, Freeman Dyson [9], al darse cuenta de que existía una cierta regularidad en las correcciones del propagador desnudo, las agrupó de la siguiente forma:

- a) correcciones de arcoíris que solo corrigen al propagador interno,
- b) correcciones solo para el fotón,
- c) correcciones para el vértice,
- d) re-correcciones, que son repeticiones y combinaciones de todas las posibles correcciones.

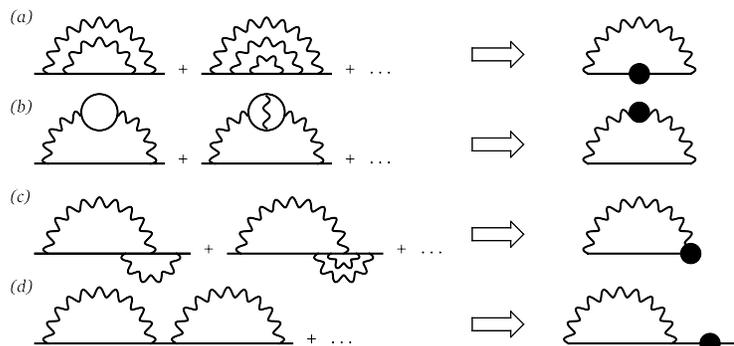
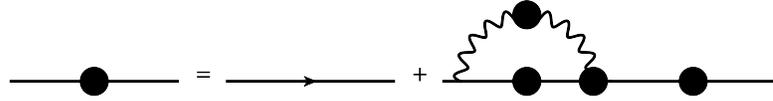


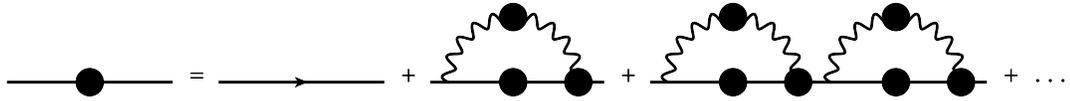
Fig. 1.5: Correcciones.

Haciendo uso de esto, podemos simplificar los diagramas en la ecuación de la figura 1.4 de la forma siguiente



donde la extensión al final del término de correcciones corresponde a las re-correcciones. Esto significa que podemos tener todas las posibilidades que para el caso del mismo propagador completo.

Expandiendo este último término, tenemos una ecuación como sigue:



Sea $\Sigma(p)$ el término de correcciones.

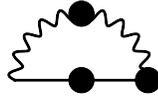


Fig. 1.6: $\Sigma(p)$

Entonces, podemos escribir la ecuación diagramática anterior como

$$\begin{aligned}
 S(p) &= S^0(p) + S^0(p)\Sigma(p)S^0(p) + S^0(p)\Sigma(p)S^0(p)\Sigma(p)S^0(p) + \dots \\
 &= S^0(p) + S^0(p)\Sigma(p)\underbrace{[S^0(p) + S^0(p)\Sigma(p)S^0(p) + \dots]}_{S(p)} \\
 &= S^0(p) + S^0(p)\Sigma(p)S(p)
 \end{aligned}$$

Multiplicando por $S^{0^{-1}}(p)$ y luego por $S^{-1}(p)$, tenemos que

$$S^{-1}(p) = S^{0^{-1}}(p) - \Sigma(p) \tag{1.17}$$

Esta misma ecuación puede ser escrita de forma diagramática como en la figura siguiente, que es la ESD para el quark en QED.

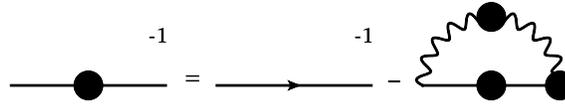


Fig. 1.7: Ecuación de Schwinger-Dyson para un quark en QED.



Fig. 1.8: Ecuación de Schwinger-Dyson para un quark en QCD.

Sin embargo, podemos extender esta idea a QCD. Así, la ESD para un quark en QCD es Esta ecuación se escribe de la siguiente forma [12]

$$[S(p)]^{-1} = [S^0(p)]^{-1} - g^2 Z_{1F} C_F \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu D_{\mu\nu}(p-k) S(k) \Gamma^\nu(k, p) \quad (1.18)$$

donde Z_{1F} es la constante de renormalización del vértice de quark-gluón, C_F es un factor de color, $D_{\mu\nu}(p-k)$ es el propagador del gluón y $\Gamma^\nu(k, p)$ es el vértice de quark-gluón. Esta expresión corresponde a la ecuación de gap para el quark.

1.4.2 Sobre el vértice de quark-gluón

En la ecuación de gap dada por (1.18), la forma para los propagadores desnudo y completo del quark, así como el del gluón están dadas en las ecuaciones (1.8), (1.15) y (1.16), respectivamente. Sin embargo, no tenemos una expresión única para el vértice de quark-gluón.

En el vértice de quark-gluón está contenida la información concerniente a todos los momentos de las partículas que intervienen en la interacción. Las estructuras matemáticas necesarias para esta descripción no tienen una forma fija y pueden llegar a ser muy complejas. Es por ello que existen propuestas o *ansätze* para realizar cálculos específicos.

Por ejemplo, el vértice que describe la interacción electromagnética es la combinación de dos fermiones que interactúan por medio de un fotón. La QED es una teoría con un acoplamiento pequeño (típicamente $\alpha^{QED} = 1/137$), por lo que podemos estudiarla usando teoría de pertur-

baciones. En general, hacer teoría de perturbaciones significa empezar con procesos simples y hacer correcciones según la necesidad o el poder computacional disponible. Cada proceso tiene una cantidad muy grande de correcciones.

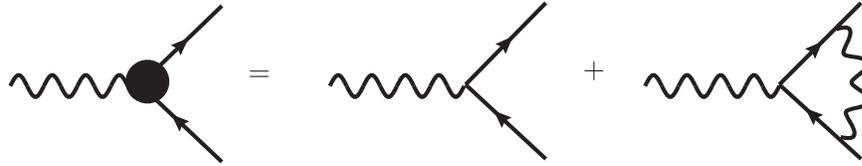


Fig. 1.9: Corrección del vértice fermión-fotón a un lazo.

En la Fig. 1.9 el diagrama de la izquierda corresponde al vértice o a la interacción completa. Del lado derecho de la figura, el primer diagrama corresponde al orden árbol (orden cero en α), es decir, la forma más simple de interacción. El segundo diagrama corresponde a correcciones a un lazo (orden α), esto es cuando se produce un fotón virtual entre los fermiones.

Para QCD, la interacción entre quarks y gluones se describe mediante un vértice con la combinación de dos quarks que interactúan mediante un gluón. Las correcciones al vértice en este sentido se dan en el régimen de pQCD, donde $\alpha_S \sim 0.118$. El diagrama a un lazo es muy similar al de la Fig. 1.9, pero es necesario agregar el caso para cuando los gluones interactúan entre sí. De este modo el diagrama de corrección a un lazo es

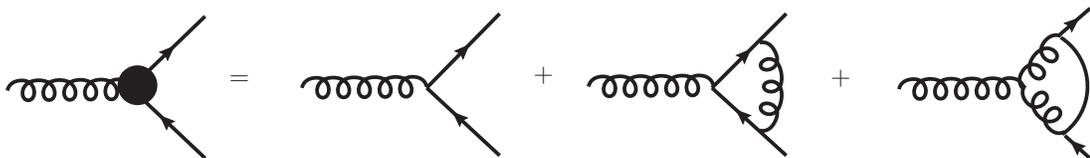


Fig. 1.10: La contribución a un lazo del vértice de quark-gluón.

El primer diagrama de la derecha corresponde al vértice desnudo. El segundo diagrama representa la contribución abeliana que es similar al vértice de QED salvo factores de color, mientras que el tercero representa la contribución no abeliana que es puramente QCD.

En este capítulo presentamos aspectos básicos de la QCD e introducimos el formalismo de las ESD. Aquí, el vértice de quark-gluón contiene la información de la interacción entre estas partículas. El estudio de este elemento nos ayuda a entender los fenómenos no perturbativos. En el siguiente capítulo nos enfocaremos a estudiar un aspecto de la Física Hadrónica, donde es muy común utilizar la aproximación *rainbow*, la cual se refiere a tomar el vértice desnudo en la ecuación de gap. Esto es

$$\Gamma_v(p, k) = \gamma_v \quad (1.19)$$

La ventaja de usar esta aproximación es que, cuando se combina con la aproximación quenched, la ESD se desacopla. La gran desventaja es que perdemos la covarianza de norma del formalismo.

Capítulo 2

Estudio de mesones ligeros

Los hadrones son estados ligados de quarks, por lo que su comportamiento es distinto a un colectivo de partículas independientes. Debido al confinamiento, los quarks no se encuentran libres en la naturaleza. En cambio se han detectado como mesones, que son combinaciones de pares quark-antiquark, como bariones que son estados ligados de tres quarks y como estructuras exóticas, como tetraquarks [13] y pentaquarks [14].

El confinamiento es un proceso dinámico que tiene naturaleza no perturbativa y está conectado íntimamente con el rompimiento dinámico de la simetría quiral (DCSB) [15], fenómeno que permite que las masas corrientes de los quarks se incremente hasta dos órdenes de magnitud para escalas de momento en el infrarrojo.

Por ejemplo, el protón es un barión constituido por dos quarks *up* y uno *down*, cuyas masas suman aproximadamente 10 – 15 MeV. Sin embargo, la masa medida de un protón es de 938 MeV. Esta diferencia entre las masas se debe a las interacciones fuertes entre estas partículas elementales mediante el mecanismo de DCSB. Por esto la QCD no perturbativa es la herramienta natural para estudiar el comportamiento de los hadrones.

Además, el confinamiento puede relacionarse con las propiedades analíticas de las funciones de Schwinger en QCD, [15]. Es por ello que podemos utilizar las ESDs, el formalismo de Bethe-Salpeter y el de Faddeev, las cuales admiten DCSB, así como el uso de esquemas de truncamiento que preservan simetrías.

En este capítulo abordaremos el estudio de los mesones ligeros mediante el formalismo de Bethe-Salpeter y la amplitud de distribución de partones, que nos proporcionan información sobre la estructura partónica del hadrón. Los resultados de este trabajo se presentaron como poster

en el *XIV Mexican Workshop on Particles and Fields* [1] y en el *8th. CERN-Latin-American School of High Energy Physics* [2], así como en charla en el mini-taller *\overline{MS} Sonora 2014*.

2.1 Mesones

La estructura más sencilla conformada de quarks es un mesón, que está constituido por un par quark-antiquark. El mesón, como todas las partículas subatómicas, tiene diversas propiedades que los caracterizan, entre ellas el momento angular total, el spin, la paridad, entre otras.

El spin es una forma intrínseca de momento angular. Los fermiones tienen spin semientero ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$), mientras que los bosones tienen spin entero (0, 1, 2, ...). Dado a que los quarks tienen spin $\pm\frac{1}{2}$, la combinación de dos de ellos es una partícula de spin entero; entonces los mesones son bosones. Sin embargo, es el momento angular total $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$ el que define las propiedades del mesón, con \mathbf{L} el momento angular orbital y \mathbf{S} el spin.

El momento angular total nos sirve para clasificar a los mesones. En general, los mesones con $\mathbf{J}=0$ presentan propiedades escalares, mientras que $\mathbf{J}=1$ define mesones con propiedades vectoriales. Para poder caracterizar de una manera más completa es necesario agregar la paridad a la descripción de estos estados ligados.

La paridad se refiere a la transformación de simetría donde se cambia el signo algebraico de una de las coordenadas espaciales de la función de onda asociada a la partícula. Otra forma de entender esto es considerar esta transformación como el comportamiento de las leyes de la Física en un universo "reflejado" en un espejo. Cuando el Universo se comporta igual sin importar el lado del espejo, esto es lo que consideramos como paridad positiva o, simplemente, par. Sin embargo, puede ser que el reflejo no tenga el "sentido correcto" y por ello sea necesario invertirlo para ser consistentes con las leyes de la Física. Esto es una paridad negativa o impar.

En la tabla 2.1 podemos ver la clasificación de los mesones según su momento angular total y su paridad.

L	J^P	Tipo	L	J^P	Tipo
0	0 ⁻	Pseudoescalar	1	0 ⁺	Escalar
	1 ⁻	Vectorial		1 ⁺	Vector axial

Tabla 2.1: Clasificación de los mesones según su momento angular total **J** y su paridad *P*.

Por otro lado, el sabor de cada uno de los quarks que forman al mesón influye en sus propiedades. Los mesones ligeros, es decir, aquellos constituidos por los quarks más ligeros $\{u, d, s\}$ son más estables que los mesones constituidos por quarks más pesados.

Los mesones compuestos por los quarks u y d son de la forma

$$u\bar{d}, \quad \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}, \quad \bar{u}d \quad (2.1)$$

dependiendo de la carga eléctrica neta del mesón. De este tipo tenemos a los mesones π o pión, σ , ρ y a_1 , que son mesones pseudoescalar, escalar, vectorial y vectorial axial, respectivamente.

De forma similar, podemos tener combinaciones de los quarks ligeros u , d y s , como sigue:

$$u\bar{s}, \quad d\bar{s}, \quad \bar{u}s \quad (2.2)$$

De este tipo son los mesones K o kaones y los K^* , que son pseudoescalares y vectoriales, respectivamente. De nuevo, la combinación entre los quarks y antiquarks depende de la carga eléctrica del mesón compuesto.

Finalmente podemos tener combinaciones de quarks s , es decir, $s\bar{s}$. De este tipo podemos encontrar al mesón vectorial ϕ .

2.2 La ecuación de Bethe-Salpeter

Dentro de los mesones ligeros, los quarks y los antiquarks son intrínsecamente relativistas debido a que sus energías de enlace son mucho mayores que sus masas corrientes. Además sus propiedades están fuertemente influenciadas por el DCSB [15]. Así que la descripción de los mesones ligeros se puede hacer mediante las ESD.

Como mencionamos anteriormente, la ESD para estados ligados de dos partículas es la ecuación de Bethe-Salpeter (EBS). Aquí un mesón está descrito por una función de onda covariante que depende del cuadrimomento de sus quarks-antiquarks constituyentes.

Para hacer la descripción de la dinámica de los mesones ligeros, partimos de la ecuación (1.18) que corresponde a la ecuación de gap en el espacio de Minkowski. Sin embargo, típicamente la solución numérica de las ESD, así como los estudios de lattice, se hacen en el espacio euclidiano. En este espacio, la ecuación de gap es:

$$S^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m + Z_{1F}C_F \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q) \gamma_\mu S(q) \Gamma_\nu(q,p) \quad (2.3)$$

donde m es la masa del quark corriente, $D_{\mu\nu}$ es el propagador del gluón y Γ_ν es el vértice de quark-gluón, donde estará contenida la información no perturbativa.

Para el propagador del gluón usaremos el modelo de la interacción de contacto que es una propuesta efectiva.

$$g^2 D_{\mu\nu}(p-q) = \frac{1}{m_G^2} \delta_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

Aquí m_G es una escala dinámica de masa para el gluón. Esta interacción representa un proceso donde no hay transferencia de momento. Además este modelo es una interacción limpia ya que nos permite restringir al quark sobre lo que puede radiar, es simple de implementar y es capaz de describir las propiedades estáticas de los hadrones, como su masa, constantes de decaimiento, entre otros. Por último, nos da un punto de partida para calcular el comportamiento de los factores de forma electromagnéticos y puede ser usado para comparar con aspectos de la QCD completa.[16, 17]

Dada la aproximación no perturbativa, es común usar la aproximación rainbow-ladder para el vértice de quark-gluón, presentada en la ecuación (1.19). Esto es

$$\Gamma_V(q, p) = \gamma_V \quad (2.5)$$

Usando esto en la ecuación de gap, tenemos que

$$S^{-1}(p) = i\not{p} + m + \frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu \quad (2.6)$$

donde hemos hecho $Z_{1F} = 1$ y $C_F = 4/3$. La integral no depende del momento p , por lo que podemos reescribir el propagador del quark como

$$S^{-1}(p) = i\not{p} + M \quad (2.7)$$

con M una masa dinámica con la siguiente forma:

$$M = m + \frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu \quad (2.8)$$

Como la integral anterior diverge, es necesario regularizar. Esto lo hacemos utilizando regularización con el tiempo propio [30] como sigue:

$$\frac{1}{s + M^2} = \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(s + M^2)} \rightarrow \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} d\tau e^{-\tau(s + M^2)} \quad (2.9)$$

donde $\tau_{ir,uv}$ son reguladores infrarrojo y ultravioleta, respectivamente, y los definimos distintos de cero. Tomamos $\tau_{ir} = 1/\Lambda_{ir}$, asegurando la ausencia de umbral de producción de quarks e implementando el confinamiento. Por su parte, $\tau_{uv} = 1/\Lambda_{uv}$ es un regulador dinámico y establece la escala de todas las cantidades con dimensiones.

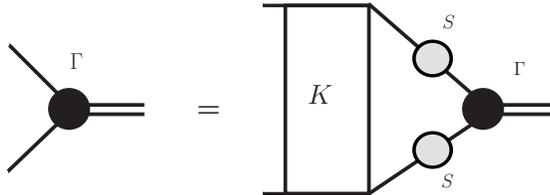


Fig. 2.1: La contribución a un lazo del vértice de quark-gluón.

Los mesones quedan descritos por la EBS, ver figura 2.1. Esta es:

$$\Gamma_{f\bar{g}}(P, q) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K[P, q] \chi_{f\bar{g}}(q_+, q_-) \quad (2.10)$$

donde $\chi_{f\bar{g}}(q_+, q_-) = S_f(q_+) \Gamma_{f\bar{g}}(q, P) S_{\bar{g}}(q_-)$ es la función de onda de Bethe-Salpeter y $\Gamma_{f\bar{g}}(q, P)$ la amplitud Bethe-Salpeter para un meson constituido por un quark f y un antiquark g . Definimos el momento relativo entre los quarks como $q_+ = q + \eta P$ y $q_- = q - (1 - \eta)P$, con $\eta = 1$ para la interacción de contacto.

La función de onda de Bethe-Salpeter, $\chi_{f\bar{g}}(q_+, q_-)$, es lo más cercano que tenemos a una función de onda en la teoría cuántica de campos. Además se reduce a la función de onda de Schrödinger en un límite no relativista.

Así, la EBS para un mesón en la interacción de contacto y usando la aproximación rainbow-ladder es

$$\Gamma_{f\bar{g}}(P) = -\frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \chi_{f\bar{g}}(q_+, q_-) \gamma_\mu \quad (2.11)$$

2.3 Amplitud de distribución de partones

Como mencionamos en secciones anteriores, las escalas de energías no son suficientemente altas en procesos donde los quarks y los gluones se presentan como hadrones, no es posible hacer teoría de perturbaciones. Una forma de poder describir a los mesones es usando funciones universales a largas distancias. En esta sección presentamos la amplitud de distribución de partones.

La amplitud de distribución de partones (PDA) nos da la amplitud de probabilidad de que un mesón esté compuesto de un par quark-antiquark en particular. Se utiliza en la descripción de proceso exclusivos duros en la QCD, en donde aparecen factores de forma con gran transferencia de momento, en el límite asintótico $Q^2 \rightarrow \infty$. Además, estas amplitudes se pueden calcular en lattice usando los momentos de la distribución.

La PDA de los mesones ligeros han sido discutidos desde finales de los 70's [19]. Estas funciones son compatibles con el formalismo de las ESD ya que la PDA de un quark de valencia corresponde a la proyección del frente de luz de un mesón de una función de onda de Bethe-Salpeter.

En general, la PDA $\phi_{f\bar{g}}(x)$ se puede escribir como

$$f_{f\bar{g}}\phi_{f\bar{g}}(x) \propto \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \delta(n \cdot q_+ - x n \cdot P) \text{tr}_D[\Sigma(\gamma, \sigma, n, P)\chi_{f\bar{g}}(q_+, q_-)] \quad (2.12)$$

con $f_{f\bar{g}}$ es la constante de decaimiento del mesón y $\Sigma(\gamma, \sigma, n, P)$ es una estructura de Dirac donde está metida la información sobre la naturaleza del mesón.

Una sencilla propuesta de resolución a la ecuación anterior es calcular los momentos de la distribución y con ellos reconstruir la PDA. Los momentos de la distribución son

$$\langle x^m \rangle = \int_0^1 dx x^m \phi_{f\bar{g}}(x) \quad (2.13)$$

Así, el problema se reduce a resolver la expresión resultante para los momentos de la PDA.

Para mesones pseudoescalares ligeros, la amplitud de Bethe-Salpeter en la interacción de contacto es[17]

$$\Gamma^{(Ps)}(P) = \gamma_5 \left[iE^{(Ps)}(P) + \frac{1}{2M} \gamma \cdot P F^{(Ps)}(P) \right] \quad (2.14)$$

En esta expresión, $E^{(Ps)}$ y $F^{(Ps)}$ son funciones de vestimiento que, para este modelo, son constantes y dependen del tipo de mesón. Asimismo, la masa efectiva M depende del sabor de los quarks constituyentes y se calcula de la siguiente forma:

$$M = \frac{M_f M_{\bar{g}}}{M_f + M_{\bar{g}}} \quad (2.15)$$

Así, la PDA para mesones pseudoescalares [20]

$$f^{(Ps)}\phi^{(Ps)}(x) = Z_2 N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \delta(n \cdot q_+ - x n \cdot P) \text{tr}_D[\gamma_5 \not{n} S_f(q_+) \Gamma^{(Ps)}(q; P) S_{\bar{g}}(q_-)] \quad (2.16)$$

y los momentos de la PDA están dados por

$$f^{(Ps)}\langle x^m \rangle = Z_2 N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(n \cdot q_+)^m}{(n \cdot P)^{m+1}} \text{tr}_D[\gamma_5 \not{n} S_f(q_+) \Gamma^{(Ps)}(q; P) S_{\bar{g}}(q_-)] \quad (2.17)$$

Aquí definimos la constante de decaimiento $f^{(Ps)}$ como el momento cero de la PDA.

Siguiendo con el mismo esquema de truncamiento pero ahora en el canal vectorial, la amplitud de Bethe-Salpeter es [17]

$$\Gamma_{\mu}^{(V)}(P) = \gamma_{\mu}^T E^{(V)}(P) \quad (2.18)$$

donde $P_\mu \gamma_\mu^T = 0$, $\gamma_\mu^T + \gamma_\mu^L = \gamma_\mu$, y $E^{(V)}$ la función de vestimiento que, como en el caso anterior, también es constante.

Dada la naturaleza vectorial de este tipo de mesones, podemos obtener dos tipos de PDA: longitudinal $\varphi_{\parallel}(x)$ y transversal $\varphi_{\perp}(x)$ (ver Ref. [24, 18]). Estas las definimos como sigue:

$$f^{(V)} n \cdot P \varphi_{\parallel}(x) = N_c m_{(V)} \text{tr}_D \left[Z_2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \delta(n \cdot q_+ - x n \cdot P) [\gamma \cdot n n_\nu S_f(q_+) \Gamma_v^{(V)}(q; P) S_{\bar{g}}(q_-)] \right] \quad (2.19)$$

$$f_{\perp}^{(V)} m_{(V)}^2 \varphi_{\perp}(x) = n \cdot P \text{tr}_D \left[Z_T \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \delta(n \cdot q_+ - x n \cdot P) [\sigma_{\mu\nu} P_\mu S_f(q_+) \Gamma_v^{(V)}(q; P) S_{\bar{g}}(q_-)] \right] \quad (2.20)$$

Los momentos de las PDAs están dados por

$$\langle x^m \rangle_{\parallel} = N_c \frac{m_{(V)}}{f^{(V)}} \text{tr}_D \left[Z_2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(n \cdot q_+)^m}{(n \cdot P)^{m+2}} [\gamma \cdot n n_\nu S_f(q_+) \Gamma_v^{(V)}(q; P) S_{\bar{g}}(q_-)] \right] \quad (2.21)$$

$$\langle x^m \rangle_{\perp} = \frac{1}{m_{(V)}^2 f_{\perp}^{(V)}} \text{tr}_D \left[Z_T \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(n \cdot q_+)^m}{(n \cdot P)^m} [\sigma_{\mu\nu} P_\mu S_f(q_+) \Gamma_v^{(V)}(q; P) S_{\bar{g}}(q_-)] \right] \quad (2.22)$$

Aquí, $f^{(V)}$ y $f_{\perp}^{(V)}$ son las constantes de decaimiento longitudinal y transversa, respectivamente.

Cabe mencionar que este formalismo es válido para mesones constituidos por quarks ligeros. Para el caso de estados ligados de quarks más pesados se encuentran discrepancia con los resultados experimentales, sin embargo esto es un trabajo en curso [21, 22].

2.4 Resultados numéricos

Para calcular los momentos de la PDA para los mesones pseudoescalares π y K , y para los mesones vectoriales ρ , ϕ y K^* , es necesario contar con las propiedades de los quarks vestidos ya que son el input para la EBS. Las masas de los quarks constituyentes las tomamos como $M_u = M_d = 0.368 \text{ GeV}$ y $M_s = 0.53 \text{ GeV}$ ¹. Las masas de los mesones y las estructuras de la amplitud Bethe-Salpeter están dadas en la siguiente tabla (ver Ref. [23]).

¹Estas masas dinámicas se obtienen a partir de un cálculo numérico donde se introduce las masas corrientes de los quarks, con $m_G = 0.132 \text{ GeV}^2$

	$m_{f\bar{g}}$	$E_{f\bar{g}}$	$F_{f\bar{g}}$
π	0.14	3.60	0.48
K	0.50	3.86	0.60
ρ	0.93	1.53	
ϕ	1.13	1.74	
K^*	1.03	1.62	

Tabla 2.2: Masas computadas para los mesones π , K , ρ , ϕ y K^* , así como sus respectivas amplitudes de

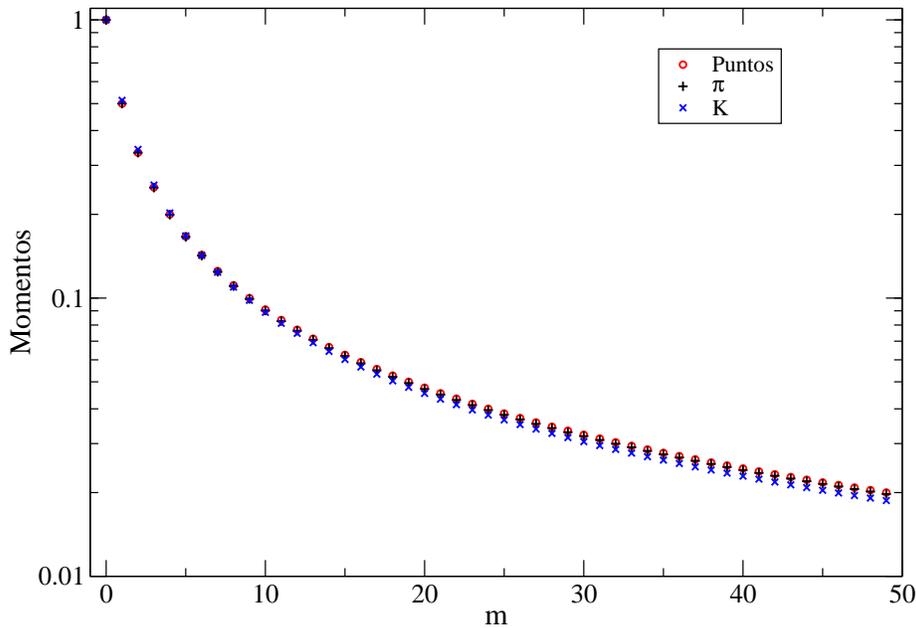


Fig. 2.2: Los momentos de la PDA para mesones pseudoescalares.

En la Fig. 2.2 se muestran los momentos de la PDA para los mesones π y K . Podemos observar que los momentos para ambos mesones se traslapan entre sí y con el comportamiento esperado para una partícula puntual. Esto quiere decir que en la interacción de contacto, estos mesones son puntuales.

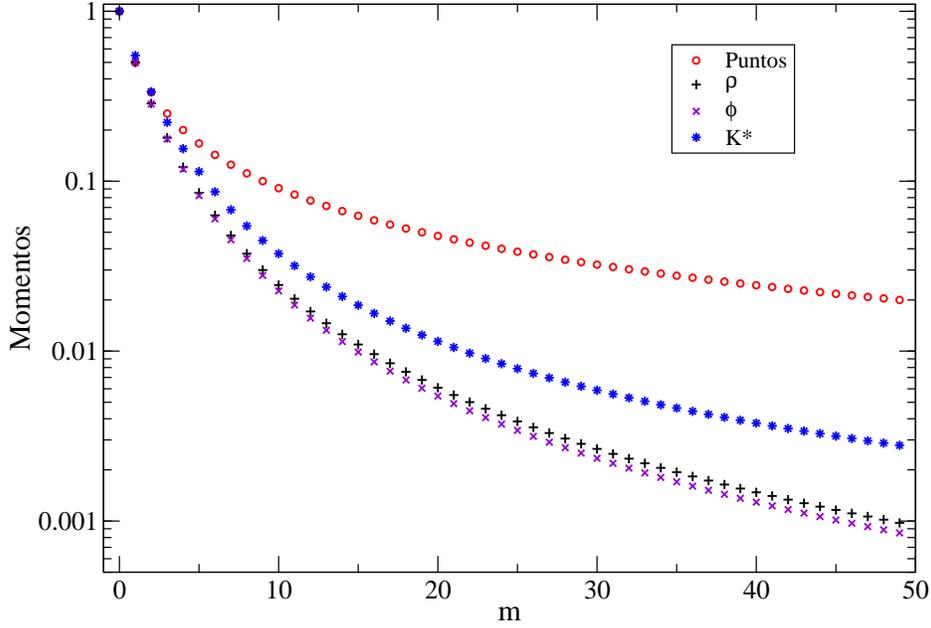


Fig. 2.3: Los momentos longitudinales de la PDA para mesones vectoriales.

Para el caso de los momentos para la amplitud de distribución de los mesones ρ , ϕ y K^* , calculados para $\langle x^m \rangle_{\parallel}$ y $\langle x^m \rangle_{\perp}$, estos se encuentran ploteados en las figuras (2.3) y (2.4). Podemos observar en la Fig. (2.3) que los momentos para los mesones ρ y ϕ son similares entre sí y diferentes al comportamiento para K^* .

Recordemos que en la composición del mesón K^* tenemos la combinación de un quark s y un antiquark u, d . Mientras que los quarks u y d son indiscutiblemente ligeros, el quark s es más pesado que los ligeros pero no lo suficiente como para ser considerado como pesado. Esta diferencia entre las masas corrientes es la responsable en el comportamiento de la PDA de este mesón, donde el quark s carga mayor momento en el estado ligado [26].

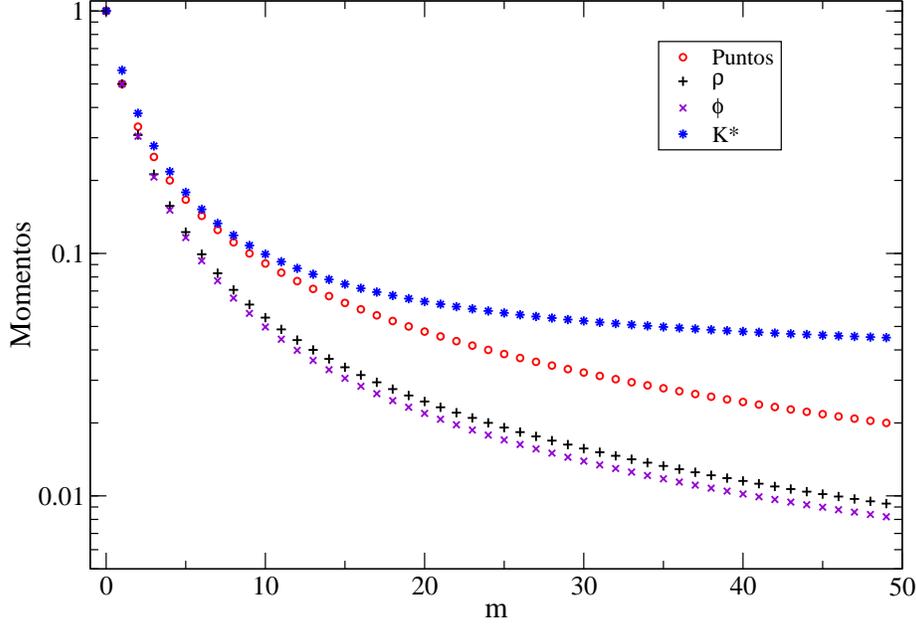


Fig. 2.4: Los momentos transversos de la PDA para mesones vectoriales.

	f_π	f_K	f_ρ	f_ρ^\perp	f_ϕ	f_ϕ^\perp	f_{K^*}	$f_{K^*}^\perp$
teor	0.169	0.177	0.220	0.134	0.209	0.149	0.210	0.141
exp	0.13	0.156	0.208		0.233		0.217	

Tabla 2.3: Valor de las constantes de decaimiento comparados con experimentos y con resultados de lattice [6, 27, 28].

Definimos las constantes de decaimiento como el valor del momento cero de las ecuaciones (2.17), (2.21) y (2.22). Los resultados de estas constantes para cada tipo de mesón se listan en las tablas 2.3 y 2.4. En la primera tabla se comparan nuestros resultados con datos experimentales, mientras que en la segunda la comparación es con [17], donde se satisface explícitamente la identidad axial-vectorial de Ward-Takahashi.

Para mesones pseudoescalares, el valor de la razón entre las constantes de decaimiento leptónico es $f_K/f_\pi = 1.1928$ [6]. Nosotros encontramos esta razón con un valor de 1.04. Por otro lado, los resultados para lattice QCD [27, 28] para mesones vectoriales predice las razones $f_\rho^\perp/f_\rho = 0.72$, $f_\phi^\perp/f_\phi = 0.74$ y $f_{K^*}^\perp/f_{K^*} = 0.76$, para el esquema \overline{MS} a $\mu = 2GeV$. Nosotros obtenemos $f_\rho^\perp/f_\rho = 0.61$, $f_\phi^\perp/f_\phi = 0.71$ y $f_{K^*}^\perp/f_{K^*} = 0.67$.

	f_π	f_K	f_ρ	f_ρ^\perp	f_ϕ	f_ϕ^\perp	f_{K^*}	$f_{K^*}^\perp$
aquí	0.101	0.107	0.129	0.134	0.125	0.149	0.124	0.141
[17]	0.101		0.129					

Tabla 2.4: Valor de las constantes de decaimiento comparados con [17], donde se satisface explícitamente la identidad axial-vectorial de Ward-Takahashi.

2.5 Más allá de RL

La dinámica de la interacción entre las partículas que conforman un mesón determina los fenómenos no perturbativos que se estudian en la Física Hadrónica, como el DCSB y la generación dinámica de masas.

De hecho, en la literatura se hace uso indiscriminado de la aproximación RL para el vértice, dado a que la estructura de la interacción quark-gluón es muy parecida a la de fermión-fotón. A pesar de lo sencillo que puede ser esta aproximación, se obtienen resultados considerablemente buenos [15].

En los grupos de ESD se estudian propuestas sobre otro tipo de vértices con más estructura, de forma fenomenológica. Por ejemplo, con factores efectivos para calcular PDAs y factores de forma electromagnéticos [20, 52] y para espectroscopía de mesones [57, 58], o agregando términos transversos [54, 55], en especial aquellos relacionados con el momento magnético anómalo [35]. Otra forma de mejorar los resultados consiste en modificar la estructura del propagador del gluón.

Aun así, la combinación de estas dos estrategias dependen de la capacidad computacional ya que, en el formalismo de Bethe-Salpeter, el vértice se especifica en cómo se trunca la ecuación de gap. Una vez hecho esto, se utilizan las identidades axial-vectorial de Ward-Takahashi [59] y, finalmente, se construye el kernel de Bethe-Salpeter. En el caso de la interacción de contacto, el ansatz para el vértice debe ser independiente del momento, es por ello que solo se puede mejorar con funciones de vestimiento.

En este capítulo estudiamos la descripción de los mesones ligeros mediante la amplitud de distribución de partones, con la que calculamos las constantes de decaimiento. Esto se hizo con el input de la aproximación RL, que es la que comúnmente se utiliza en la Física Hadrónica. Una estrategia para mejorar estos resultados es con la implementación de ansatz que incorporen más estructuras fenomenológicas. En los siguientes capítulos nos dedicaremos a analizar la estructura del vértice, así como los requisitos para la descripción de esta interacción con la finalidad de establecer condiciones para una construcción no perturbativa.

Capítulo 3

Consideraciones generales sobre el vértice de quark-gluón

En la QCD, el vértice de quark-gluón contiene toda la información sobre la interacción entre los quarks y los gluón. Para energías altas, del orden de la masa del bosón Z, la constante de acoplamiento es suficientemente pequeña como para hacer una descripción de esta interacción utilizando teoría de perturbaciones. Esto significa que el vértice se puede escribir como una serie de diagramas pesados por términos de orden α_S .

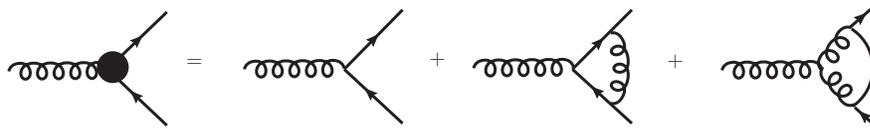


Fig. 3.1: Corrección del vértice quark-gluón hasta orden α_S .

En este capítulo el objeto de estudio es el vértice de quark-gluón a un lazo, analizando los elementos necesarios para describir esta interacción hasta orden α_S , ver figura 3.1, de forma que el vértice sea congruente con los elementos clave de la QCD, independientemente de la escala de energías. Por ello es necesario cumplir con ciertos requerimientos: tener las mismas reglas de transformación que el vértice desnudo, garantizar la invariancia de norma, asegurar que el propagador del quark sea multiplicativamente renormalizable y ser libre de singularidades cinemáticas. Estas propiedades se explican a continuación.

3.1 Reglas de transformación del vértice desnudo

El vértice completo debe tener las mismas propiedades de transformación que el vértice desnudo γ^μ bajo las operaciones de conjugación de carga (C), paridad (P) e inversión temporal (T), debido a que este es el término a nivel árbol del desarrollo perturbativo de la función completa

del vértice (ver Fig. 3.1). En particular, para el operador de conjugación de la carga [36] tenemos que:

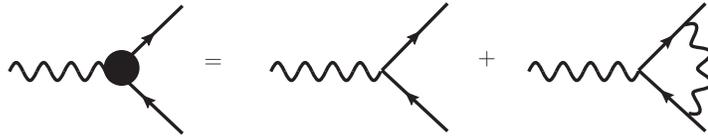
$$C \gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T \quad (3.1)$$

Siguiendo con esta idea, el vértice debe reducirse a la expansión perturbativa para acoplamiento pequeño. Tomando en cuenta que una truncamiento del conjunto completo de ESDs es teoría de perturbaciones, entonces una solución físicamente coherente a las ESDs tiene que ser consistente con los resultados perturbativos en el régimen de acoplamiento pequeño del vértice de quark-gluón.

3.2 Invariancia de norma

En una teoría de norma, los observables deben ser invariantes de norma. En el caso del vértice completo de quark-gluón, éste debe satisfacer las identidades de Ward-Slavnov-Taylor (IWST) para la QCD [41, 42]. Las IWST son relaciones no perturbativas que existen entre diferentes funciones de Green y son consecuencia de la invariancia de norma. Además, son una generalización (a teorías no-abelianas) de las identidades de Ward-Takahashi (IWT) [39, 40].

3.2.1 Invariancia de norma en QED



En la QED, las IWT relacionan al vértice con una función simple, el inverso del propagador del fermión. Una de estas identidades establece lo siguiente:

$$q_\mu \Gamma^\mu(p, k) = S^{-1}(k) - S^{-1}(p) \quad (3.2)$$

donde $q = k - p$ es el momento del fotón y $S^{-1}(p)$ es el inverso del propagador del fermión. Definimos el propagador de un quark, en términos de las funciones $F(p^2)$ y $M(p^2)$, como:

$$S(p) = \frac{F(p^2)}{\not{p} - M(p^2)} \quad (3.3)$$

Así, el propagador desnudo $S^{(0)}(p)$ simplemente es

$$S^{(0)}(p) = \frac{1}{\not{p} - m} \quad (3.4)$$

A nivel árbol, la IWT satisface

$$\begin{aligned} (k-p)_\mu \gamma^\mu &= [S^{-1}(k)]^{(0)} - [S^{-1}(p)]^{(0)} \\ &= (\not{k} - m) - (\not{p} - m) \\ &= \not{k} - \not{p} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Por otro lado, en la ecuación (3.2) la relación que establece la IWT es solo con la parte del vértice que es paralela al momento del fotón. Esto nos permite separar al vértice completo Γ^μ en una parte longitudinal Γ_L^μ y en una parte transversa Γ_T^μ , relativas al momento del fotón. Esto es:

$$\Gamma^\mu(p, k) = \Gamma_L^\mu(p, k) + \Gamma_T^\mu(p, k) \quad (3.6)$$

Además, la IWT nos dice que la parte longitudinal queda determinada solamente por el propagador del fermión, mientras que la parte transversa no contribuye a la misma.

En esta dinámica, las posibles contribuciones de cuadvectores (γ^μ , k^μ y p^μ) y de escalares (\mathbb{I} , \not{k} , \not{p} y $\not{k}\not{p}$), pueden combinarse en 12 componentes independientes. En 1980, Ball y Chiu [31] tomaron en cuenta estas contribuciones y las combinaron para crear una base tensorial conveniente, en donde solo 4 tensores contribuyen a la IWT. Esto constituye el vértice longitudinal y lo definimos de la siguiente forma:

$$\Gamma_L^\mu(p, k) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i(p^2, k^2) L_i^\mu(p, k) \quad (3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} L_1^\mu(p, k) &= \gamma^\mu \\ L_2^\mu(p, k) &= (k+p)^\mu (\not{k} + \not{p}) \\ L_3^\mu(p, k) &= -(k+p)^\mu \\ L_4^\mu(p, k) &= -\sigma^{\mu\nu} (k+p)_\nu \end{aligned} \quad (3.8)$$

y $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Los elementos $\lambda_i(p^2, k^2)$ son funciones escalares que deben determinarse por la teoría. Además, Ball y Chiu proponen una estructura sencilla para la parte longitudinal. Eligen que las funciones λ_i solo dependan de la forma del propagador del fermión. Esto es

$$\begin{aligned}\lambda_1(p^2, k^2) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(k^2)} + \frac{1}{F(p^2)} \right] \\ \lambda_2(p^2, k^2) &= \frac{1}{2} \frac{1}{k^2 - p^2} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \\ \lambda_3(p^2, k^2) &= -\frac{1}{k^2 - p^2} \left[\frac{M(k^2)}{F(k^2)} - \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right] \\ \lambda_4(p^2, k^2) &= 0\end{aligned}\tag{3.9}$$

Esta elección para el vértice longitudinal se conoce como el vértice de Ball y Chiu. Notemos que $\lambda_4 = 0$, esto se debe a que el escalar $\not{k}\not{p}$ no aparece en el propagador del fermión. Así, el vértice de Ball y Chiu es

$$\begin{aligned}\Gamma_{BC}^\mu(p, k) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(k^2)} + \frac{1}{F(p^2)} \right] \gamma^\mu + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \frac{(k+p)^\mu (\not{k} + \not{p})}{k^2 - p^2} \\ &\quad - \left[\frac{M(k^2)}{F(k^2)} + \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \right] \frac{(k+p)^\mu}{k^2 - p^2}\end{aligned}\tag{3.10}$$

Por otro lado, la estructura tensorial restante no tiene contribución a la IWT, en la ec. (3.2), y es transversa al momento del fotón. Esto es:

$$q_\mu T_i^\mu = 0, \text{ con } i = 1, 2, \dots, 8\tag{3.11}$$

Esta estructura, compuesta por 8 tensores, constituye lo que se conoce como la base del vértice transverso y la definimos como sigue:

$$\begin{aligned}
T_1^\mu(p, k) &= p^\mu(k \cdot q) - k^\mu(p \cdot q) \\
T_2^\mu(p, k) &= [p^\mu(k \cdot q) - k^\mu(p \cdot q)](\not{k} + \not{p}) \\
T_3^\mu(p, k) &= q^2 \gamma^\mu - q^\mu \not{q} \\
T_4^\mu(p, k) &= [p^\mu(k \cdot q) - k^\mu(p \cdot q)] \sigma_{\nu\lambda} p^\nu k^\lambda \\
T_5^\mu(p, k) &= -\sigma^{\nu\mu} q_\nu \\
T_6^\mu(p, k) &= \gamma^\mu(p^2 - k^2) + (p+k)^\mu \not{q} \\
T_7^\mu(p, k) &= \frac{1}{2}(p^2 - k^2)[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k}) - p^\mu - k^\mu] - (k+p)^\mu \sigma_{\nu\lambda} p^\nu k^\lambda \\
T_8^\mu(p, k) &= \gamma^\mu \sigma_{\nu\lambda} p^\nu k^\lambda + k^\mu \not{p} - p^\mu \not{k}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Usando esta base, definimos al vértice transverso como:

$$\Gamma_T^\mu(p, k) = \sum_{i=1}^8 \tau_i(p^2, k^2, q^2) T_i^\mu(p, k) \tag{3.13}$$

donde los coeficientes $\tau_i(p^2, k^2)$ son escalares de Lorentz a determinar por la teoría y son funciones de k^2 y p^2 . Así, es fácil ver que el vértice transverso no contribuye a la IWT. Esto es:

$$q_\mu \Gamma_T^\mu(p, k) = 0 \tag{3.14}$$

3.2.2 Invariancia de norma en QCD

Ahora, en el contexto de QCD, la contribución a un lazo cambia dado que los gluones interactúan entre ellos, a diferencia de los fotones.

Para el vértice completo de quark-gluón, las IWST relacionan al vértice con una función que, a diferencia de las IWT, no es tan simple. Se trata de una combinación del inverso del propagador del fermión con el vértice completo de cuatro puntos quark-quark-fantasma-fantasma, pesado por una función asociada al propagador del fantasma. Explícitamente esto es:

$$q^\mu \Gamma_\mu(p, k, q) = G(q^2) [\overline{H}(k, p, q) S^{-1}(k) - S^{-1}(p) H(p, k, q)] \tag{3.15}$$

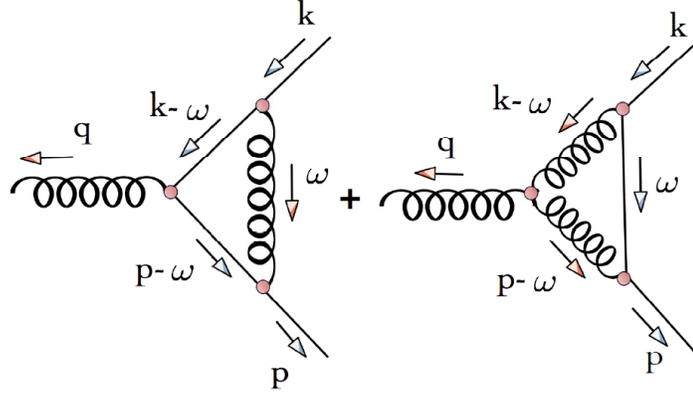


Fig. 3.2: Contribuciones abeliana y no abeliana de la corrección a un lazo del vértice de quark-gluón.

donde $q = k - p$ es el momento del gluón y $G(q^2)$ es la función escalar asociada al propagador del fantasma. La función H y su conjugada están relacionadas con el vértice completo de cuatro puntos quark-quark-fantasma-fantasma.

La ec. (3.15) nos permite separar al vértice en dos identidades [32], correspondientes a las contribuciones de la figura 3.2. La contribución abeliana resulta en la ec. (3.2), pesada por un factor de color, mientras que la contribución no-abeliana contiene la parte correspondiente a los fantasmas. Esto es:

$$\begin{aligned}
 q^\mu \Gamma_\mu^{(a)}(p, k, q) &= \left(C_F - \frac{1}{2} C_A \right) C_F^{-1} [S^{-1}(p) - S^{-1}(k)]^{(1)} \\
 q^\mu \Gamma_\mu^{(b)}(p, k, q) &= [S^{-1}(p)]^{(0)} H^{(1)}(p, k, q) - \bar{H}^{(1)}(k, p, q) [S^{-1}(k)]^{(0)} \\
 &\quad + \frac{1}{2} C_A C_F^{-1} [S^{-1}(p) - S^{-1}(k)]^{(1)} H^{(0)} + 2G^{(1)}(q^2) [S^{-1}(p) - S^{-1}(k)]^{(0)} H^{(0)}
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

En estas expresiones, los superíndices (0) y (1) indican las contribuciones a orden cero y a un lazo, respectivamente. Además, $C_A = N$ y $C_F = (N^2 - 1)/2N$ son los eigenvalores de los operadores cuadráticos de Casimir de la representación adjunta y fundamental de $SU(N)$, respectivamente.

De manera similar a lo que hicimos para la IWT, con la IWSST podemos separar el vértice completo en una parte longitudinal y en otra transversa, respecto al momento del gluón. De esta forma siguen siendo ciertas las ecuaciones sobre las dos partes en las que se divide el vértice: ecs. (3.6), (3.7) y (3.13), así como sus bases tensoriales definidas en las ecs. (3.8) y (3.12).

De aquí se sigue que Γ_μ^T no contribuye a la IWSST. Pero ahora la parte longitudinal no solo es función del propagador del quark sino también depende del propagador del fantasma. Es decir, toda la dinámica fantasmal queda metida en la parte longitudinal.

Considerando lo anterior, podemos decir que la invariancia de norma fija la parte longitudinal del vértice de quark-gluón. Por esto necesitamos de más criterios para poder trabajar con la parte transversa.

3.3 Renormalizabilidad multiplicativa

La interacción fermión-bosón está restringida por la invariancia de norma de la teoría y la renormalizabilidad multiplicativa. La IWT y la IWSST garantizan la invariancia de norma, imponiendo constricciones sobre la parte longitudinal pero dejan libre la construcción de la parte transversa. Es por ello que, para restringir la forma de la parte transversa, es necesaria la renormalizabilidad multiplicativa.

La renormalización nos permite escribir todas las cantidades físicas como independientes de un corte ultravioleta Λ^2 pero dependientes de una escala de masa μ^2 , que es la escala de renormalización donde las cantidades son definidas [45, 43, 37].

Consideremos la lagrangiana de la QCD (ver sección 1.2):

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{N_f} \bar{\psi}^k (i\gamma^\mu D_\mu - m_0^k) \psi^k - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + (\partial^\mu \chi^{a*}) D_\mu^{ab} \chi^b \quad (3.17)$$

donde ψ , A_μ^a y χ^a son los campos correspondientes a los quarks, gluones y de los fantasmas de Faddeev-Popov, respectivamente. g es la constante de acoplamiento para la interacción fuerte y el superíndice k corresponde a todos los sabores de los quarks. Además

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\ D_\mu &= \partial_\mu - igT^a A_\mu^a \end{aligned} \quad (3.18)$$

con $a = 1, 2, \dots, 8$, f^{abc} las constantes de estructura de $SU(3)$ y T^a los generadores del grupo.

Sin embargo, esta lagrangiana se considera como desnuda en el sentido de que, en estudios perturbativos, la expansión del acoplamiento resultan dependientes del momento. En general, las contribuciones de los lazos de las funciones de Green para los quarks y los gluones generan divergencias que deben ser subsanadas mediante la renormalización.

Los campos desnudos ψ , A_μ^a y χ^a , así como el vértice de quark-gluón Γ_μ pueden expresarse en términos de constantes de renormalización y de sus cantidades renormalizadas:

$$\psi = \sqrt{Z_{2F}} \psi_R, \quad A_\mu^a = \sqrt{Z_3} A_{\mu R}^a, \quad \chi^a = \sqrt{\tilde{Z}_3} \chi_R^a, \quad \Gamma_\mu = Z_{1F} \Gamma_{\mu R} \quad (3.19)$$

Los infinitos de estas cantidades son absorbidos en las constantes Z 's: la renormalización de la función de onda del quark Z_{2F} , la renormalización de la función de onda del gluón Z_3 , la renormalización del campo del fantasma \tilde{Z}_3 y la constante de renormalización del vértice Z_{1F} .

La IWST puede expresarse en términos de estas constantes de la siguiente forma [7]:

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_{1F}}{Z_{2F}} = \frac{Z_4}{Z_1} \quad (3.20)$$

Aquí, Z_1 , \tilde{Z}_1 y Z_4 corresponden a las constantes de renormalización para los vértices de triple gluón, fantasma-gluón y de cuatro gluones, respectivamente.¹

El propagador del quark renormalizado tiene la forma general de

$$S_R^{-1}(p) = \not{p} - m_R(\mu^2) - \Sigma_R(p) \quad (3.21)$$

¹Para QED, la IWT establece que $Z_{1F}=Z_{2F}$.

similar a la ecuación de gap. Aquí $\Sigma_R(p)$ es la autoenergía. Este resultado está sujeto a las condiciones de renormalización:

$$\begin{aligned} S_R^{-1}(p) \Big|_{p^2=-\mu^2} &= \not{p} - m_R(\mu^2) \\ \Gamma_R^\mu(p, p) \Big|_{p^2=-\mu^2} &= \gamma^\mu \end{aligned} \quad (3.22)$$

Estas expresiones son condiciones de renormalización *on-shell* y aseguran que el propagador $S_R(p)$ tenga un polo en la masa física del quark $m_R(\mu^2)$:

$$\Sigma_R(p^2 = -\mu^2) = 0 \quad (3.23)$$

Además, las condiciones (3.22) tienen las siguientes implicaciones sobre la ec. (3.3)

$$\begin{aligned} F(p^2 = -\mu^2) &= 1 \\ M(p^2 = -\mu^2) &= m_R(\mu^2) \end{aligned} \quad (3.24)$$

La masa renormalizada $m_R(\mu^2)$ corre con la escala de renormalización. En una teoría sin confinamiento, como lo es la QED, esta masa corresponde a la masa física cuando $m_R^2(\mu^2) = -\mu^2$, como en el caso on-shell. Para el caso de la QCD, estas condiciones son válidas para un momento suficientemente grande.

Cuando hablamos de renormalizabilidad multiplicativa en el contexto no perturbativo se busca intercambiar Λ^2 por μ^2 mediante funciones de vestimiento renormalizadas, usando la siguiente prescripción.

Los propagadores del fermión y del gluón, definidos como en las ecs. (3.3) y (1.16), tienen una dependencia implícita del corte UV, por lo que debería escribirse como:

$$\begin{aligned} S(p, \Lambda) &= \frac{F(p^2, \Lambda^2)}{\not{p} - M(p^2, \Lambda^2)} \\ D_{\mu\nu}^{ab} &= -i\delta^{ab} \frac{1}{q^2} \left[\mathcal{G}(q^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

De esta forma se hacen evidentes la dependencia del corte UV y las divergencias que pueden salir cuando Λ^2 tiende al infinito. Aquí $\mathcal{G}(q^2)$ es la función de vestimiento del propagador del gluón y es igual a

$$\mathcal{G}(q^2) = \frac{1}{1 + \Pi(q^2)} \quad (3.26)$$

En la aproximación quenched, $\Pi(q^2) = 0$, que corresponde al término de menor orden del propagador del gluón.

Así, la renormalización de estos propagadores se logra escribiendo:

$$\begin{aligned} F(p^2, \Lambda^2) &= Z_{2F}(\mu^2, \Lambda^2) F_R(p^2, \mu^2) \\ \mathcal{G}(q^2, \Lambda^2) &= Z_3(\mu^2, \Lambda^2) \mathcal{G}_R(q^2, \mu^2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde las funciones de vestimiento renormalizadas para el quark y para el gluón están normalizada de acuerdo a:

$$F_R(\mu^2, \mu^2) = \mathcal{G}_R(\mu^2, \mu^2) = 1 \quad (3.28)$$

La función de masa $M(p^2)$ en la ec. (3.25) es invariante del punto de renormalización, por lo que no depende de μ^2 .

Finalmente, la constante de acoplamiento renormalizada $g_R(\mu^2)$ es

$$g_R(\mu^2) = Z_g^{-1} g = \frac{Z_{2F}(\mu^2, \Lambda^2) \sqrt{Z_3(\mu^2, \Lambda^2)}}{Z_{1F}(\mu^2, \Lambda^2)} g \quad (3.29)$$

Podemos obtener el acoplamiento fuerte renormalizado $\alpha_S(\mu) = Z_\alpha^{-1}(\mu^2) \alpha_S$ considerando que $\alpha_S = g^2/4\pi$, pero $Z_\alpha(\mu^2) = 1 + \mathcal{O}(\alpha)$. Entonces, a un lazo tenemos que

$$\alpha_S(\mu) = \frac{g^2}{4\pi} \quad (3.30)$$

En la fase de Wigner, la renormalizabilidad multiplicativa del propagador del fermión requiere que

$$F(p^2) \propto (p^2)^\nu \quad (3.31)$$

donde ν es una dimensión anómala [33, 34]. Una dimensión anómala queda definida por su correspondiente constante de renormalización y la escala de renormalización [60]. En QED, $\nu = \frac{\alpha\xi}{4\pi}$, mientras que en QCD, $\nu = \frac{\alpha_s\xi C_F}{4\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2)$.

La renormalizabilidad multiplicativa asegura la ausencia de divergencias en la torre de ESDs,[35]. Así, para cualquiera de los regímenes de energía, el vértice de quark-gluón debe ser multiplicativamente renormalizable. Como mencionamos al principio de esta sección, la parte transversa es la que se verá afectada por esta condición, restringiendo la forma que debe tener, específicamente, los τ_i . Esto puede asegurarse observando el comportamiento que tiene la parte transversa en el límite asintótico, es decir, cuando el cuadrado del momento de uno de los fermiones es mucho mayor al otro, $k^2 \gg p^2$.

Además, el vértice de quark-gluón debe asegurar la covarianza local de norma de las funciones de Green, es decir, tanto el propagador del fermión como el vértice deben de cambiar según las leyes de transformación de Landau, Khalatnikov y Fradkin (LKFT) para cualquier variación de la norma [44].

De esta forma, la parte transversa queda constreñida por el requerimiento de la renormalizabilidad multiplicativa y las LKFTs.

3.4 Singularidades cinemáticas

El vértice de quark-gluón debe tener un límite único y finito cuando $k^2 \rightarrow p^2$. Esto implica que no hay singularidades cinemáticas. Una propuesta para una forma no perturbativa del vértice debe cumplir con esta característica dado a que las únicas singularidades que aparecen en la teoría son aquellas que vienen de la dinámica, como los polos de las masas para las partículas físicas.

Aquí es importante notar que la base escrita en las ecs. (3.12) no garantiza que el vértice transverso sea libre de singularidades cinemáticas. Ball y Chiu [31] introdujeron esta base para el cálculo del vértice electrón-fotón en QED a un lazo, en la norma de Feynman. Sin embargo,

el mismo cálculo en norma arbitraria covariante [36] mostró que es necesario modificar la base y algunos de los factores de forma para asegurar la ausencia de singularidades cinemáticas para el caso general. Entonces es necesario modificar el tensor T_4^μ de la ec. (3.12) como sigue:

$$\widetilde{T}_4^\mu(p, k) = q^2[\gamma^\mu(\not{k} + \not{p}) - (k + p)^\mu] + 2(k - p)^\mu \sigma_{\nu\lambda} p^\nu k^\lambda \quad (3.32)$$

Mientras que la definición de la ec. (3.13) debe ser de la siguiente forma:

$$\Gamma_T^\mu(p, k) = \sum_{i=1}^8 \widetilde{\tau}_i(p^2, k^2) T_i^\mu(p, k) \quad (3.33)$$

con $T_4^\mu = \widetilde{T}_4^\mu$ y

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau}_i &= \tau_i, \text{ para } i = 1, 2, 3, 5, 6, 8 \\ \widetilde{\tau}_4 &= \frac{1}{4}(k^2 - p^2)\tau_4 \\ \widetilde{\tau}_7 &= \tau_7 + \frac{1}{2}q^2\tau_4 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Conectando esta idea con lo dicho en la sección 3.1, al hacer el intercambio $k \leftrightarrow p$ y haciendo uso de la ec. (3.1) encontramos que todos los L_i^μ y los T_i^μ deben ser impares, excepto por L_4^μ y T_6^μ , que deben ser pares. Asimismo, todos los λ_i y los τ_i deben ser simétricos ante el intercambio de $k^2 \leftrightarrow p^2$, excepto por λ_4 y τ_6 , que deben ser antisimétricos.

En un caso especial de esto último, para el límite simétrico $k^2 = p^2$ se debe cumplir que

$$\lambda_4(p^2, p^2) = \tau_6(p^2, p^2) = 0 \quad (3.35)$$

Capítulo 4

Estructura del vértice

Como mencionamos en la sección anterior, la interacción quark-gluón puede ser descrita matemáticamente mediante un vértice que debe cumplir con ciertos requerimientos para ser compatible con la teoría cuántica de campos. Davydychev, Osland y Saks [32] hicieron el cálculo del vértice de quark-gluón a un lazo, en norma y dimensión arbitrarias. Con esto podemos derivar resultados en diferentes límites cinemáticos los cuales pueden ser una guía para una posible construcción no perturbativa.

En esta sección presentamos resultados perturbativos para los vértices longitudinal y transversal, definidos en la sección anterior, para algunos puntos cinemáticos de interés: el límite completamente simétrico $k^2 = p^2 = q^2$ y el asintótico $k^2 \gg k \cdot p \gg p^2 \gg m^2$, así como otras configuraciones simétricas con fines comparativos con lattice.

Los resultados de esta parte del trabajo se fueron reportando como poster en la *School on QCD and LHC Physics* y en la *XXX Reunión Anual de la División de Partículas y Campos* [3], y como charlas en el mini-taller *\overline{MS} Morelia 2014* y en la *Reunión General de la Red-FAE 2016*. Los resultados finales de este trabajo se publicaron en la revista *Physical Review D* 95, página 034041, 2017 [4] y se presentaron como charla en el *VI International Workshop on Non-Perturbative Aspects of Field Theory*.

4.1 Límite totalmente simétrico $k^2 = p^2 = q^2$

Un punto de interés en la comunidad es el del límite simétrico $k^2 = p^2 = q^2$ dado a que es un punto cinemático al cual lattice puede acceder [47]. Más aun, los resultados que aquí se presentan deben ser compatibles para los obtenidos con cualquier construcción no perturbativa del vértice para el caso de acoplamiento pequeño.

Los diagramas a un lazo del desarrollo perturbativo del vértice son los que se presentan en la figura 4.1. Aquí podemos identificar al diagrama de la izquierda como la contribución abeliana y al diagrama de la derecha como la contribución no abeliana.

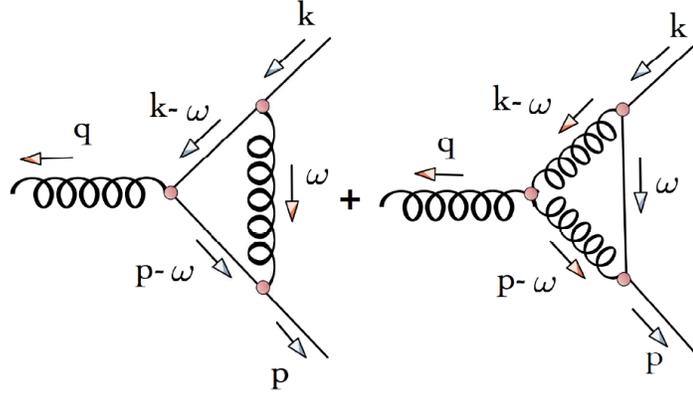


Fig. 4.1: Contribuciones abeliana y no abeliana de la corrección a un lazo del vértice de quark-gluón.

Cada factor de forma calculado tiene la etiqueta correspondiente que lo identifica con alguna de estas contribuciones: (a) para la contribución abeliana y (b) para la contribución no abeliana. De esta forma, el factor de forma completo es la suma de ambas contribuciones:

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \lambda_i^{(a)} + \lambda_i^{(b)} \\ \tau_i &= \tau_i^{(a)} + \tau_i^{(b)}\end{aligned}\tag{4.1}$$

4.1.1 Vértice longitudinal

Los factores de forma para esta parte están dadas por la ec. (3.7), con la base de las ecs. (3.8). El único factor de forma del vértice quark-gluón que diverge a un lazo en el UV es $\lambda_1(p^2, k^2, q^2, 1/\varepsilon)$, donde la dimensión del espacio tiempo es $n = 4 - 2\varepsilon$; $n \rightarrow 4$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Aquí, ε funciona como un regulador para el polo divergente $1/\varepsilon$, en el regimen UV.

Bajo el esquema de renormalización MOM (momentum subtraction), la renormalización del vértice permite que el término a nivel árbol en teoría de perturbaciones sea válido para

momentos suficientemente largos. Así, a un lazo se cumple

$$Z_{1F}(\mu^2, \varepsilon) = 1 + \lambda_1(-\mu^2, \varepsilon) \quad (4.2)$$

donde λ_1 es el factor de forma longitudinal sin renormalizar. Por otro lado, la ec. (3.22) nos dice que:

$$\Gamma_R^\mu(p^2, -\mu^2)|_{p^2=-\mu^2} = \gamma^\mu \quad (4.3)$$

Comparando con la ec. (3.19), esta condición de renormalización implica

$$\lambda_{1R}(p^2, -\mu^2)|_{p^2=-\mu^2} = 0 \quad (4.4)$$

Explícitamente, tenemos que

$$Z_{1F} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \left[\xi C_a + \frac{3}{4}(1 + \xi)C_b \right] + \text{Fin}_Z \quad (4.5)$$

donde las constantes de color C_a y C_b están definidas como

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} \left(C_F - \frac{1}{2}C_A \right) \\ C_b &= \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} C_A \end{aligned} \quad (4.6)$$

Podemos ver que el término proporcional C_a corresponde al diagrama abeliano y el término que involucra a C_b es la contribución no abeliana. [46]. Fin_Z es la parte finita de la constante de renormalización Z_{1F} y está dada por

$$\begin{aligned} \text{Fin}_Z &= C_a \xi \left\{ \frac{m^4 - \mu^4}{\mu^4} L(-\mu^2) - \frac{m^2}{\mu^2} + C_m \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4} C_b (1 + \xi) \left\{ -\frac{m^4 - m^2 \mu^2 - 2\mu^4}{\mu^4} L(-\mu^2) + \frac{m^2}{\mu^2} \right. \\ &\quad \left. - \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - (m^2 + \mu^2)\varphi_1(-\mu^2) - 2 - 3C_m \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde definimos una variable constante de masa como $C_m = 1 - \ln(m^2) + \ln(4\pi) - \gamma_E$, con γ_E la constante de Euler, y la función $L(p^2)$ es

$$L(p^2) = \ln\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \quad (4.8)$$

La evaluación de los factores de forma longitudinales, a partir de la prescripción dada en [32] es:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1R}^a(p^2, -\mu^2) &= -\frac{C_a \xi}{p^4 \mu^4} \left\{ p^4(m^4 - \mu^4)L(-\mu^2) + \mu^4(p^4 - m^4)L(p^2) - m^2 p^2 \mu^2(p^2 + \mu^2) \right\} \\
 \lambda_2^a(p^2) &= -\frac{C_a \xi}{2p^6} \left\{ p^2(2m^2 + p^2) + 2m^4 L(p^2) \right\} \\
 \lambda_3^a(p^2) &= -\frac{C_a(\xi + 3)m}{p^4} \left\{ p^2 + m^2 L(p^2) \right\} \\
 \lambda_4^a(p^2) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1R}^b(p^2, -\mu^2) &= -\frac{C_b(\xi + 1)}{4p^4 \mu^4} \left\{ p^4(m^4 - m^2 \mu^2 - 2\mu^4)L(-\mu^2) \right. \\
 &\quad \left. - \mu^4(m^4 + m^2 p^2 - 2p^4)L(p^2) + p^4 \mu^4 \ln\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \mu^2 p^2 [(\mu^2 + p^2)m^2 - \mu^2 p^2(m^2 + \mu^2)\varphi_1(-\mu^2) + \mu^2 p^2(m^2 - p^2)\varphi_1(p^2)] \right\} \\
 \lambda_2^b(p^2) &= \frac{C_b}{24p^6} \left\{ (3 - \xi)p^2 \left[p^2(2m^2 - p^2)\varphi_1(p^2) + 3p^2 - 2p^2 \ln\left(-\frac{p^2}{m^2}\right) + (m^2 + 2p^2)L(p^2) \right] \right. \\
 &\quad \left. - 3(1 + \xi) [p^2(p^2 + 2m^2) + 2m^4 L(p^2)] \right\} \\
 \lambda_3^b(p^2) &= -\frac{C_b m}{8p^4 [p^4 + m^4 - m^2 p^2]} \left\{ \left[2(\xi + 5)m^6 + 3(\xi + 3)m^2 p^2(p^2 - m^2) + (\xi - 1)p^6 \right] L(p^2) \right. \\
 &\quad \left. - p^2 \left[-2(\xi + 5)(p^4 + m^4 - m^2 p^2) + (\xi - 1)p^4 \ln\left(-\frac{p^2}{m^2}\right) \right] \right\} \\
 \lambda_4^b(p^2) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

La simetría en la conjugación de la carga del vértice de quark-gluón implica que $\lambda_4(p^2, k^2, q^2) = -\lambda_4(k^2, p^2, q^2)$. Es por ello que en el límite simétrico este factor de forma se anule.

Las integrales usadas se definen como:

$$\begin{aligned}
 i\pi^{n/2} \varphi_1(p^2, k^2) &= \int \frac{d^4 w}{(w^2 - m^2)(k - w)^2(p - w)^2} \\
 i\pi^{n/2} \varphi_2(p^2, k^2) &= \int \frac{d^4 w}{w^2 [(k - w)^2 - m^2][(p - w)^2 - m^2]}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

En el caso simétrico, $\varphi_{1,2}(p^2) \equiv \varphi_{1,2}(p^2, p^2, p^2)$. Aunque las expresiones analíticas de estas integrales pueden encontrarse en el apéndice A, en realidad fueron resueltas de forma numérica para el artículo [4].

Por otro lado, los resultados perturbativos son válidos solo para momentos grandes de p^2 . Aun así hemos extrapolado nuestras expresiones a la región del infrarrojo para hacer un análisis comparativo y probar la estructura general del vértice. Es por ello que tomamos $\alpha_S = 0.118$, con $\mu = 2\text{GeV}$.

En la figura 4.2 se grafica el comportamiento del factores de forma $\lambda_{1R}^{a,b}$ a un lazo, en la norma de Feynman. La contribución no abeliana es positiva en el infrarrojo y su magnitud en este regimen es mucho mayor a la de la contribución abeliana. Estas contribuciones juntas, graficadas en la figura 4.3 en la norma de Landau, muestran un acrecentamiento en el infrarrojo. Sin embargo, esta magnitud es pequeña comparada con el efecto no perturbativo reportado en lattice y en otros trabajos de ESD, [47, 49], como se puede ver en la figura 4.7.

La contribución total $\lambda_{1R}(p^2, -\mu^2)$ en el infrarrojo profundo se presenta en la Fig. (4.4), junto con los factores de forma λ_2 y λ_3 . Podemos ver que en esta región tenemos valores de saturación en ~ 0.119 , 0.177GeV^2 y 0.063GeV , respectivamente. El valor finito de λ_2 en el infrarrojo ha sido reportado en otros límites cinemáticos simétricos en [50, 51], en contraste con el comportamiento divergente reportado por lattice, [47].

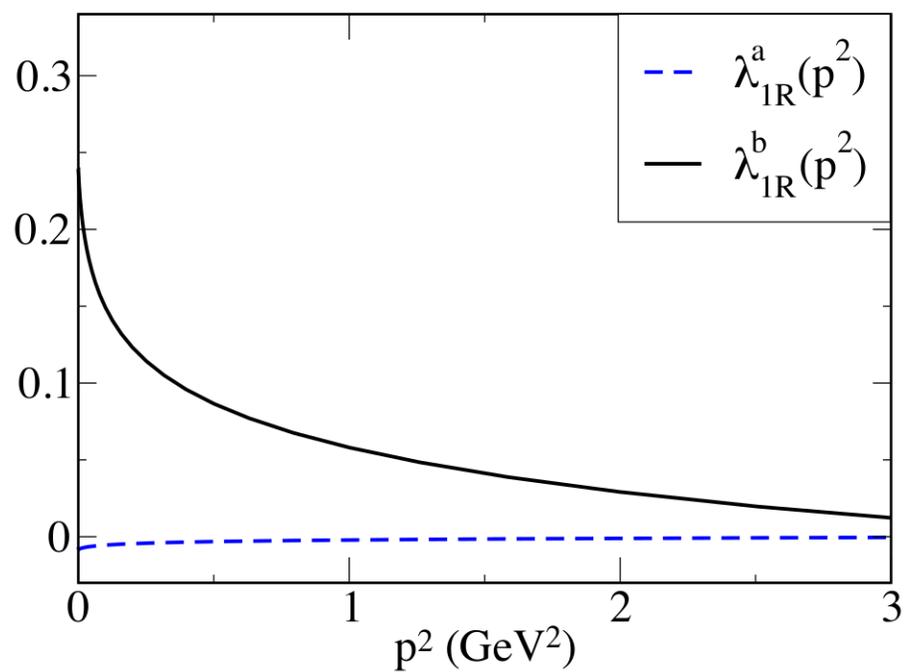


Fig. 4.2: Factores de forma $\lambda_{1R}^{a,b}$ a un lazo, en la norma de Feynman y $m = 0.115\text{GeV}$.

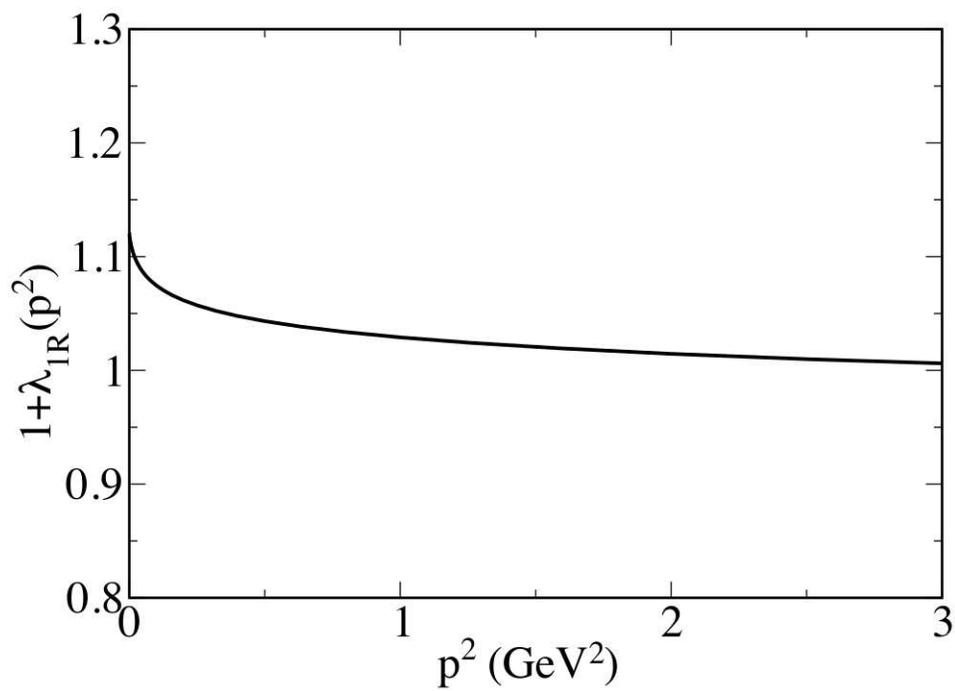


Fig. 4.3: Factor de forma $1 + \lambda_{1R}$ a un lazo, en la norma de Landau y $m = 0.115\text{GeV}$.

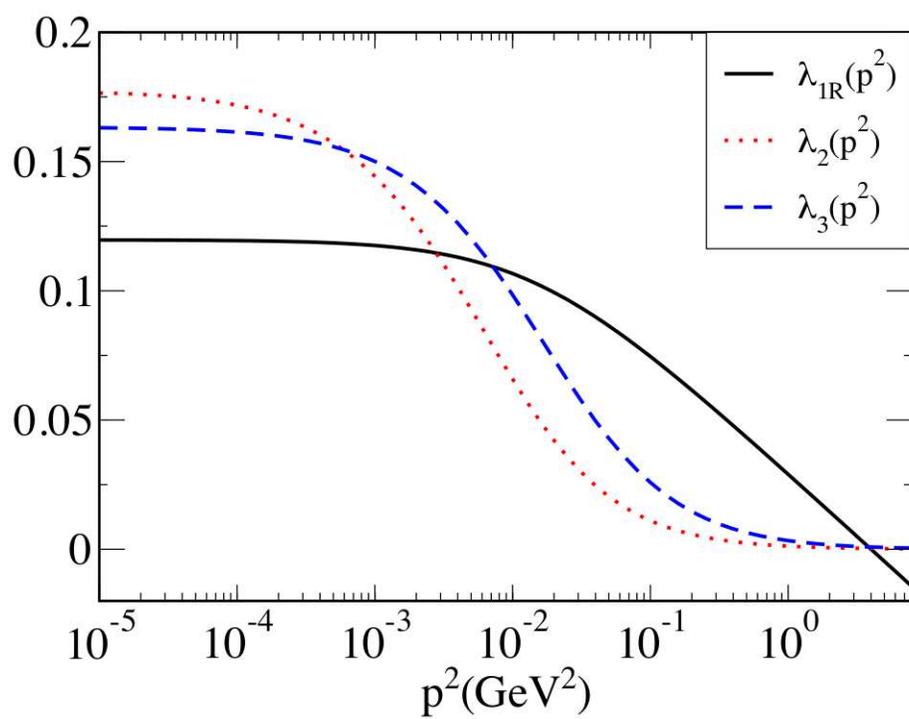


Fig. 4.4: Saturación de los factores de forma λ_{IR} , λ_2 y λ_3 a un lazo en el infrarrojo, en la norma de Landau y $m = 0.115\text{GeV}$.

4.1.2 Vértice transverso

De forma análoga a la sección anterior, obtuvimos las contribuciones abeliana y no abeliana de los factores de forma transversos en el límite simétrico. A diferencia del caso longitudinal, en esta parte analizamos la estructura singular de estos factores de forma en el infrarrojo, donde $p^2 \rightarrow 0$.

Similar al caso del factor de forma λ_4 , en este límite

$$\begin{aligned}\tau_6(p^2, k^2, q^2) &= -\tau_6(k^2, p^2, q^2) \\ \tilde{\tau}_4(p^2, k^2, q^2) &= -\tilde{\tau}_4(k^2, p^2, q^2)\end{aligned}$$

donde $\tilde{\tau}_4$ está definido en las expresiones (3.34). Así, estos factores de forma son nulos en el límite simétrico y $\tilde{\tau}_7 = \tau_7$.

Los resultados analíticos para los factores de forma dados en las ecs. (3.34) son:

$$\begin{aligned}\tau_1^a(p^2) &= -\frac{2C_a m}{3p^6}(\xi + 3) \{p^2[3 - (2m^2 + p^2)\varphi_2(p^2) - 4f(p^2)] + (m^2 + 2p^2)L(p^2)\} \\ \tau_2^a(p^2) &= \frac{C_a}{3p^6} \left\{ 4m^2\xi + p^2(\xi + 4) - [4m^4\xi + 2p^4] \varphi_2(p^2) - 4\xi(2m^2 + p^2)f(p^2) \right. \\ &\quad \left. + 2[2m^2 + \xi p^2]L(p^2) \right\} \\ \tau_3^a(p^2) &= -\frac{C_a}{3p^6} \left\{ 3p^2[(2 - \xi)p^2 + \xi m^2] + p^2[-2\xi m^4 + 4m^2 p^2 + (2\xi - 1)p^4] \varphi_2(p^2) \right. \\ &\quad \left. - 2p^2[(2 - \xi)p^2 + 2\xi m^2]f(p^2) - (m^2 - p^2)[(2 - \xi)p^2 - \xi m^2]L(p^2) \right\} \\ \tau_4^a(p^2) &= \frac{2C_a m(1 - \xi)}{3p^6(m^2 - p^2)} \left\{ -4m^2 + p^2 + 4m^2(m^2 - p^2)\varphi_2(p^2) \right. \\ &\quad \left. + 4(2m^2 - p^2)f(p^2) - 2(m^2 - p^2)L(p^2) \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_5^a(p^2) &= -\frac{C_a m(1-\xi)}{3p^4} \left\{ p^2 [3 + 2(m^2 - p^2)\varphi_2(p^2) + 4f(p^2)] + (5m^2 - 2p^2)L(p^2) \right\} \\
 \tau_6^a(p^2) &= \tilde{\tau}_4^a(p^2) = 0 \\
 \tau_7^a(p^2) &= -\frac{C_a m(1-\xi)}{3p^6(m^2 - p^2)} \left\{ 3p^4 - 6m^2 p^2 + (2m^2 p^4 - 2p^6) \varphi_2(p^2) \right. \\
 &\quad \left. + 4p^4 f(p^2) - 2(3m^4 - 4m^2 p^2 + p^4) L(p^2) \right\} \\
 \tau_8^a(p^2) &= -\frac{2C_a}{3p^4} \left\{ p^2 (2m^2 + p^2) \varphi_2(p^2) + 4p^2 f(p^2) + 2(m^2 - p^2)L(p^2) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Para el caso de los factores no abelianos, tenemos las siguientes expresiones¹

$$\begin{aligned}
 \tau_1^b(p^2) &= \frac{C_b m}{24p^6(m^4 - m^2 p^2 + p^4)^2} \left\{ p^2 \left[8m^8(\xi - 6) + 4m^6 p^2(24 - 3\xi - \xi^2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 6m^4 p^4(24 - 3\xi - 2\xi^2) + 2m^2 p^6(48 - 5\xi - 3\xi^2) - 2p^8(24 - 3\xi - 4\xi^2) \right] \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2p^2(m^4 - m^2 p^2 + p^4) \left[12m^2(m^2 - p^2)(\xi - 3) - 3p^4(12 - 4\xi + \xi^2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(m^4 - m^2 p^2 + p^4) [2m^2(\xi - 6) + p^2(6 - 2\xi + \xi^2)] \varphi_1(p^2) \right] \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left[4m^{10}(2\xi - 3) - m^8 p^2 \xi(13 + 2\xi) + 2m^6 p^4(6 + 7\xi + 4\xi^2) - m^4 p^6(48 + \xi + 6\xi^2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2m^2 p^8(18 - 2\xi - \xi^2) - p^{10}(24 - 5\xi - 2\xi^2) \right] L(p^2) \right\} \\
 \tau_2^b(p^2) &= -\frac{C_b}{12p^6(m^4 - m^2 p^2 + p^4)} \left\{ - \left[4(\xi - 2)m^6 + 8m^4 p^2 + (\xi^2 - 8)m^2 p^4 + 4\xi p^6 \right] \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. 4p^2(m^4 - m^2 p^2 + p^4) - 2(\xi - 2)(\xi p^2 - 2m^2)(m^4 - m^2 p^2 + p^4) \right. \\
 &\quad \left. + \left[4(\xi - 2)m^4 + 2(\xi + 2)m^2 p^2 + (\xi - 2)(\xi + 1)p^4 \right] (m^4 - m^2 p^2 + p^4) \varphi_1(p^2) \right. \\
 &\quad \left. + \left[(-2\xi^2 + 5\xi - 6)m^6 + m^4 p^2(2\xi^2 - \xi + 6) + (\xi - 6)m^2 p^4 + 4\xi p^6 \right] L(p^2) \right\} \\
 \tau_3^b(p^2) &= \frac{C_b}{24p^6(m^4 - m^2 p^2 + p^4)} \left\{ 6p^2(m^4 - m^2 p^2 + p^4) \left[(2 + 3\xi - \xi^2)p^2 + (\xi - 2)m^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. - p^2 \left[4(\xi - 2)m^6 - 2(\xi^2 - 3\xi - 6)m^4 p^2 + (5\xi^2 - 18\xi - 12)m^2 p^4 - 2(\xi^2 - 5\xi - 2)p^6 \right] \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + p^2(m^4 - m^2 p^2 + p^4) \left[\xi^2 p^2(p^2 - 2m^2) + 4\xi(m^2 + p^2)^2 - 8(m^4 - m^2 p^2 + p^4) \right] \varphi_1(p^2) \right. \\
 &\quad \left. + 2(m^2 - p^2) \left[(\xi - 2)m^6 - 2\xi(\xi - 3)m^4 p^2 - \xi(\xi - 6)m^2 p^4 + (\xi^2 - 5\xi - 2)p^6 \right] L(p^2) \right\}
 \end{aligned}$$

¹Para estas expresiones de τ_i^b , $\xi \rightarrow 1 - \xi$.

$$\begin{aligned}
\tau_4^b(p^2) &= \frac{C_b m \xi}{6p^6(m^4 - m^2 p^2 + p^4)^2} \left\{ -\xi p^2(m^4 - m^2 p^2 + p^4)(p^2 - 2m^2) \right. \\
&\quad + \left[(m^4 - m^2 p^2 + p^4)(4m^4 - 4m^2 p^2 + 3p^4) + \xi p^6(2p^2 - m^2) \right] \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) \\
&\quad - 2(m^4 - m^2 p^2 + p^4)^2 \left[(2m^2 - p^2) \varphi_1(p^2) + 2 \right] \\
&\quad \left. + \left[m^6(5 - 2\xi)(2p^2 - m^2) + m^4 p^4(6\xi - 13) - 2m^2 p^6(\xi - 4) - p^8(3 + 2\xi) \right] L(p^2) \right\} \\
\tau_5^b(p^2) &= -\frac{C_b m}{12p^4(m^4 - m^2 p^2 + p^4)} \left\{ p^2 \xi \left[2m^4 - m^2 p^2(\xi - 4) + 2p^4(\xi - 2) \right] \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) \right. \\
&\quad + p^2(m^4 - m^2 p^2 + p^4) \left[6\xi + [p^2(18 - 8\xi + \xi^2) - 2m^2 \xi] \varphi_1(p^2) \right] \\
&\quad \left. + 2\xi(m^2 - p^2) \left[4m^4 + m^2 p^2(\xi - 4) + p^4(\xi - 2) \right] L(p^2) \right\} \\
\tau_6^b(p^2) &= \tilde{\tau}_4^b(p^2) = 0 \\
\tau_7^b(p^2) &= \frac{C_b m \xi}{12p^6(m^4 - m^2 p^2 + p^4)} \left\{ -p^4(p^2 - 2m^2) \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2p^2(m^4 - m^2 p^2 + p^4) \left[3 - p^2 \varphi_1(p^2) \right] + \left(6m^6 - 7m^4 p^2 + 3m^2 p^4 + p^6 \right) L(p^2) \right\} \\
\tau_8^b(p^2) &= \frac{C_b}{12p^4(m^4 - m^2 p^2 + p^4)} \left\{ p^2 \left[2m^4(\xi - 6) - (\xi^2 - 2\xi - 12)m^2 p^2 + 2p^4(\xi^2 - 3\xi - 6) \right] \right. \\
&\quad \times \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) + p^2(m^4 - m^2 p^2 + p^4) \left[(\xi^2 - 6\xi + 12)p^2 - 2(\xi - 6)m^2 \right] \varphi_1(p^2) \\
&\quad \left. + 2(m^2 - p^2) \left[(\xi - 6)m^4 + (\xi^2 - 5\xi + 6)m^2 p^2 + (\xi^2 - 3\xi - 6)p^4 \right] L(p^2) \right\}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Las expresiones de las ecs. (4.6), (4.8) y (4.11) siguen siendo válidas para este cálculo, y la función $f(p^2)$ se define como

$$f(p^2) = \begin{cases} \sqrt{\frac{p^2 - 4m^2}{4p^2}} \ln \frac{\sqrt{p^2 - 4m^2} + \sqrt{p^2}}{\sqrt{p^2 - 4m^2} - \sqrt{p^2}}, & p^2 > 4m^2, \\ \sqrt{\frac{4m^2 - p^2}{p^2}} \arctan \sqrt{\frac{p^2}{4m^2 - p^2}}, & p^2 < 4m^2. \end{cases} \tag{4.14}$$

También checamos el comportamiento en la región del infrarrojo para estos factores de forma abelianos en la norma de Landau, ver figura 4.5. Podemos ver que todos los factores de forma tienen un comportamiento finito en esta región. Es por ello que esperamos que cualquier construcción del vértice en QED sea finito en el límite simétrico.

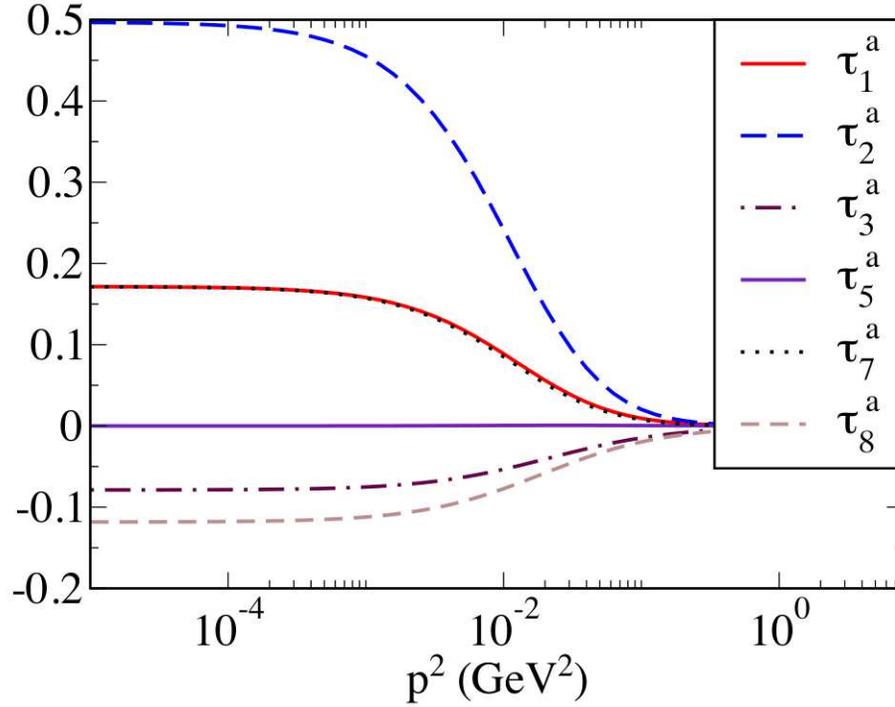


Fig. 4.5: Factores de forma abelianos $\tau_i^a(p^2)$ a un lazo en el infrarrojo, en la norma de Landau y $m = 0.115\text{GeV}$.

Por otro lado, no todos los factores de forma no abelianos son finitos en el infrarrojo, cuando $p^2 \rightarrow 0$. De hecho los τ_i^b divergen de forma logarítmica para $i = 1, 2, 3, 5, 8$, ver Ref. [4]. Sin embargo, estos factores de forma son bien portados cuando los pesamos con el factor p^2 , que aparece en los tensores de la base transversa de la ec. (3.12). Este factor suprime la divergencia, como se puede ver en la figura 4.6.

4.1.3 Comparación con lattice

Los factores de forma λ_{1R} y τ_5 , que son relevantes debido a que el primero es el factor que acompaña a γ^μ y el segundo al término relacionado con el momento magnético anómalo, en esta base, han sido calculados en lattice para límites cinemáticos simétricos pero en distintas configuraciones a la nuestra.

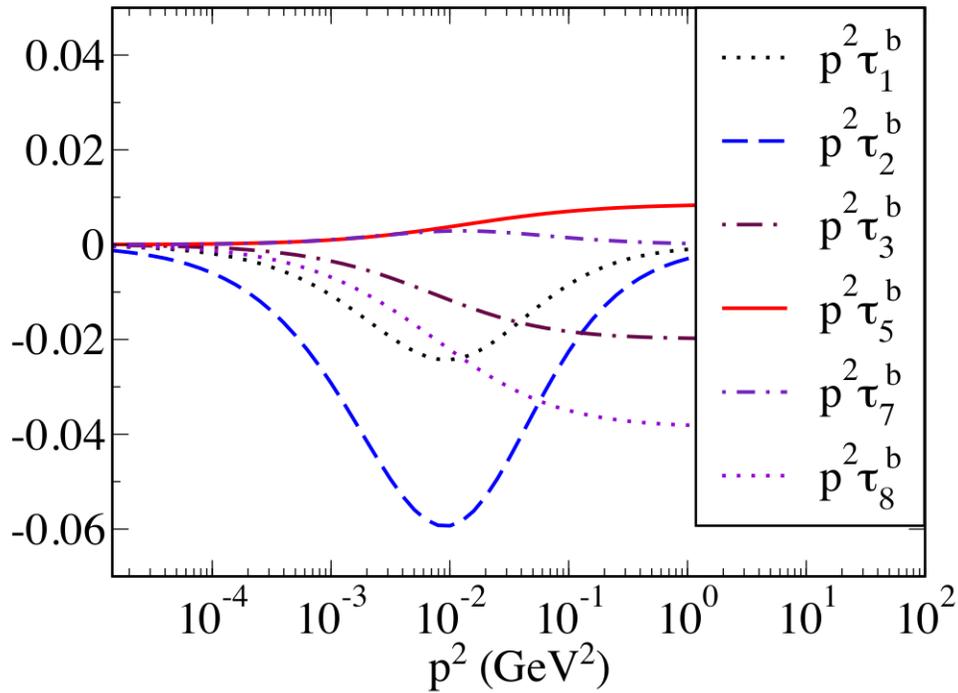


Fig. 4.6: Factores de forma no abelianos τ_i^a , pesados por p^2 , a un lazo en el infrarrojo, en la norma de Landau y $m = 0.115\text{GeV}$.

En el caso de λ_{1R} , los valores reportados por lattice [47, 48], así como los calculados para QED usando ESD [49] se encuentran en la figura 4.7 para el límite *soft photon* o de momento cero, donde $p^2 = k^2$ y $q^2 = 0$. Nuestra curva, QCD 1-Loop $\alpha = 0.118$, está graficada como $1 + \lambda_{1R}(p^2, p^2, 0)$, donde usamos los valores de $m = 0.06\text{GeV}$ como en lattice y las integrales expresadas para este caso específico están dadas en [32].

En esta gráfica podemos observar que el crecimiento que se da para valores perturbativos es pequeño comparado con el crecimiento no perturbativo en la misma región. Además, el resultado a un lazo es responsable de aproximadamente el 10% del crecimiento infrarrojo, comparado con el valor a orden árbol.

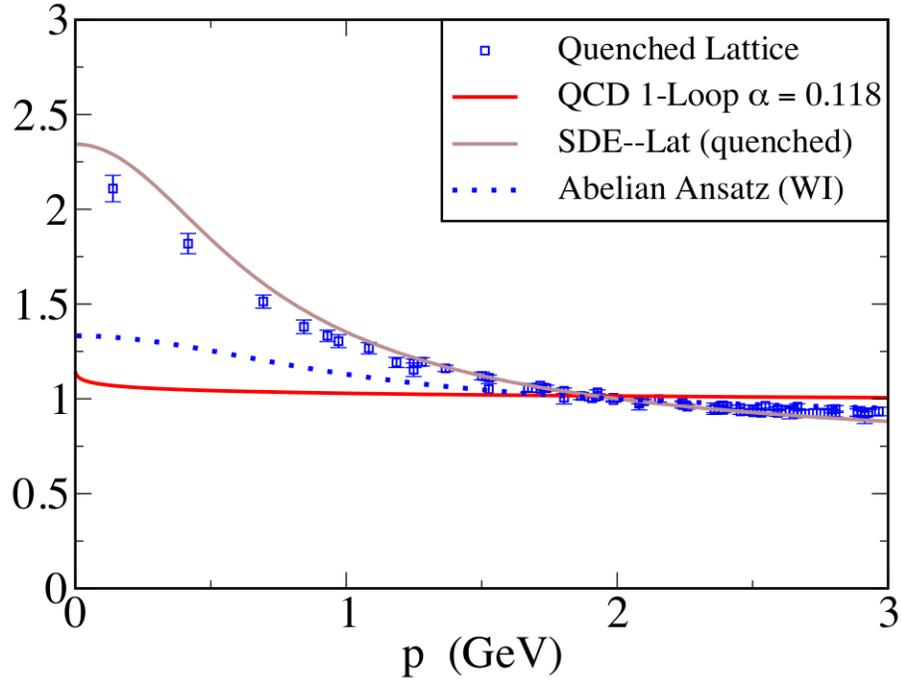


Fig. 4.7: Factor de forma $1 + \lambda_{1R}$ a un lazo, en la norma de Landau y $m = 0.06\text{GeV}$.

Por otro lado, los resultados para τ_5 se encuentra en la figura 4.8 donde la evaluación es en el límite *quark reflection* o de quark-antiquark con igual momento, donde $p^2 = k^2$ y $q^2 = 4p^2$. Nuestra curva se compara con los datos reportados por lattice [47] y utilizando el modelo de Curci-Ferrari [50]. Además, para fines comparativos, $g = 4.2$ y $m = 0.44\text{GeV}$.

Podemos observar que el comportamiento de nuestra curva coincide con el comportamiento reportado por lattice pero diverge en el infrarrojo. Esta divergencia se debe a la dependencia de $1/p^4$ de nuestras expresiones, las cuales son las siguientes:

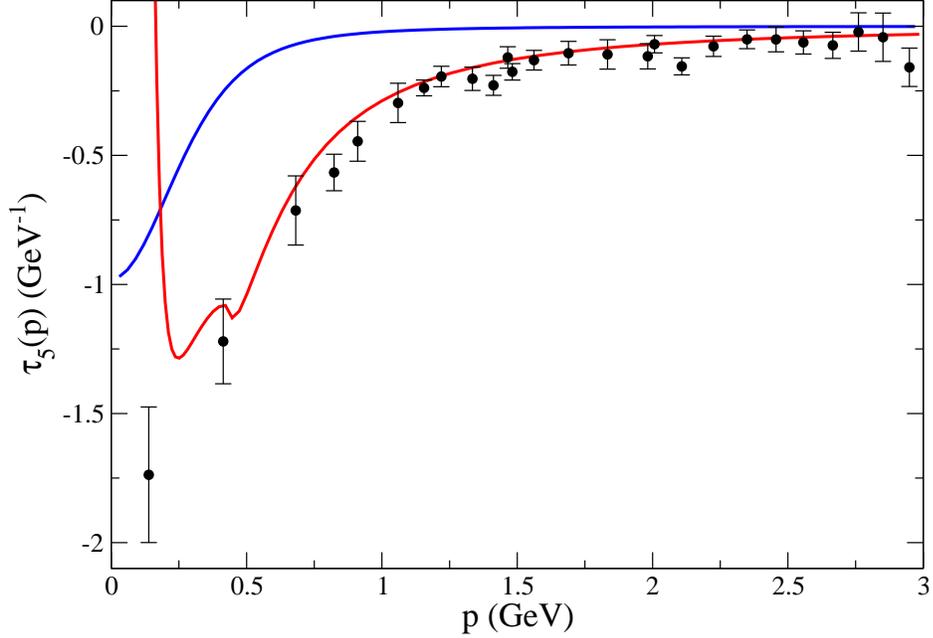


Fig. 4.8: Factor de forma τ_5 reportados por lattice (puntos negros), utilizando el modelo de Curci-Ferrari (curva azul) y nuestros resultados a un lazo, en la norma de Landau y $m = 0.44\text{GeV}$ (curva roja).

$$\begin{aligned}
 \tau_5^a(p^2, p^2, 4p^2) &= -\frac{1}{4p^4\eta} 3C_a m(1-\xi) \\
 &\quad \times \left(m^2 + 2(m^2 - p^2)p^2\eta\phi_2 - (m^2 - 2p^2)\ln\left(-\frac{4p^2}{m^2}\right) + 2(m^2 - p^2)L(p^2) \right) \\
 \tau_5^b(p^2, p^2, 4p^2) &= \frac{1}{8p^4(m^2 + p^2)\eta} 3C_b m(1-\xi)[m^2 - p^2(\xi - 2)] \\
 &\quad \times \left(p^2((m^2 + p^2)\eta\phi_1 - \ln\left(-\frac{4p^2}{m^2}\right)) - (m^2 - p^2)L(p^2) \right)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Cabe mencionar que este último es un resultado obtenido después de la publicación del artículo derivado de esta tesis [4]. Además, se agradece a Marcela Pelaez por proporcionar los datos de graficación usando el modelo de Curci-Ferrari y los que le proporcionó J.I. Skullerud para comparación.

4.2 Límite asintótico $k^2 \gg p^2 \gg m^2$

La interacción quark-gluón está restringida por la invariancia de norma y por la renormalización multiplicativa. Como ya mencionamos, la invariancia de norma se asegura con la im-

plementación de la WSTI (ver sección 3.3), lo que nos permite separar al vértice completo en sus contribuciones longitudinal y transversa. Por esto, la invariancia de norma fija la parte longitudinal.

En cambio, la parte transversa es relevante para la renormalización multiplicativa, poniendo restricciones en los factores de forma transversos τ_i . Para poder obtener más información sobre estos factores de forma es necesario observar el comportamiento del vértice transverso en el límite asintótico, cuando $k^2 \gg k \cdot p \gg p^2 \gg m^2$ [33]. En esta sección presentamos los resultados para estos factores de forma en este límite.

De forma similar a la sección pasada, las expresiones para cada τ_i perturbativo se encuentran definidas en [32]. Podemos separar estos 8 factores de forma en masivos (τ_1 , τ_4 , τ_5 y τ_7) y no masivos (τ_2 , τ_3 , τ_6 y τ_8), según si su contribución es cero o no en el límite quiral, es decir, cuando $m \rightarrow 0$. Los factores de forma masivos los redefinimos como τ/m para que no sean triviales en el límite quiral.

Los factores de forma transversos se pueden expresar en términos de factores y estructuras cinemáticas, dadas en [32], de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \tau_i^a(p^2, k^2, q^2) &= \frac{\eta C_a}{(4\pi)^{n/2-2}} \left\{ t_{i,0}^a \varphi_2 + t_{i,1}^a S_1^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + t_{i,2}^a S_2^{(1)} + t_{i,3}^a S_3^{(1)} + t_{i,4}^a S_4^{(1)} + t_{i,5}^a S_5^{(1)} \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \tau_i^b(p^2, k^2, q^2) &= \frac{\eta C_b}{(4\pi)^{n/2-2}} \left\{ t_{i,0}^b \varphi_1 + t_{i,1}^b S_1^{(1)} + t_{i,2}^b S_2^{(1)} \right. \\ &\quad \left. + t_{i,3}^b S_3^{(1)} + t_{i,4}^b S_4^{(1)} + t_{i,5}^b S_5^{(1)} \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

con C_a y C_b definidos en las ecs. (4.6).

Las estructuras escalares $S_i^{(1)}$ en este límite se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}
 \eta S_1^{(1)} &= -p \cdot q \ln \left(-\frac{p^2}{\mu^2} \right) + k \cdot q \ln \left(-\frac{k^2}{\mu^2} \right) - q^2 \ln \left(-\frac{q^2}{\mu^2} \right) \\
 \eta S_2^{(1)} &= -\ln \left(-\frac{p^2}{\mu^2} \right) - \ln \left(-\frac{k^2}{\mu^2} \right) + 2 \ln \left(-\frac{q^2}{\mu^2} \right) \\
 \eta S_3^{(1)} &= 2 - \ln \left(-\frac{p^2}{\mu^2} \right) - \ln \left(-\frac{k^2}{\mu^2} \right) \\
 \eta S_4^{(1)} &= 4 - 2\gamma + \frac{2}{\varepsilon} - \ln \left(-\frac{p^2}{\mu^2} \right) - \ln \left(-\frac{k^2}{\mu^2} \right) \\
 \eta S_5^{(1)} &= -\frac{1}{p^2 - k^2} \left[\ln \left(-\frac{p^2}{\mu^2} \right) - \ln \left(-\frac{k^2}{\mu^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

La única estructura que contiene polos en ε es $S_4^{(1)}$. Sin embargo, $t_{i,4}^{a,b}$ es proporcional a ε (ver [32]), por lo que no hay divergencias de este tipo.

La forma analítica de los factores de forma transversos abelianos τ^a en el límite asintótico son

$$\begin{aligned}
 k^4 \frac{\tau_1^a}{m} &= C_a (3 + \xi) \ln \left(\frac{p^2}{k^2} \right) \\
 k^4 \tau_2^a &= C_a \frac{1 - 2\xi}{3} \ln \left(\frac{p^2}{k^2} \right) \\
 k^2 \tau_3^a &= C_a \frac{1 + \xi}{3} \ln \left(\frac{p^2}{k^2} \right) \\
 k^6 \frac{\tau_4^a}{m} &= -C_a \frac{1 - \xi}{3} \ln \left(\frac{p^2}{k^2} \right) \\
 k^2 \frac{\tau_5^a}{m} &= -C_a \frac{1 - \xi}{6} \ln \left(\frac{p^2}{k^2} \right) \\
 k^2 \tau_6^a &= C_a \frac{2 - \xi}{6} \ln \left(\frac{p^2}{k^2} \right) \\
 k^4 \frac{\tau_7^a}{m} &= C_a \frac{1 - \xi}{3} \ln \left(\frac{p^2}{k^2} \right) \\
 k^2 \tau_8^a &= C_a \ln \left(\frac{p^2}{k^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Mientras que los no abelianos τ^b son

$$\begin{aligned}
 k^4 \frac{\tau_1^b}{m} &= C_b \frac{12 + 7\xi - \xi^2}{12} \ln\left(\frac{p^2}{k^2}\right) \\
 k^4 \tau_2^b &= C_b \frac{6 - 9\xi + \xi^2}{24} \ln\left(\frac{p^2}{k^2}\right) \\
 k^2 \tau_3^b &= C_b \frac{\xi(3 + \xi)}{24} \ln\left(\frac{p^2}{k^2}\right) \\
 k^6 \frac{\tau_4^b}{m} &= C_b \frac{2 - \xi - \xi^2}{12} \ln\left(\frac{p^2}{k^2}\right) \\
 k^2 \frac{\tau_5^b}{m} &= C_b \frac{22 + 11\xi + 3\xi^2}{24} \ln\left(\frac{p^2}{k^2}\right) \\
 k^2 \tau_6^b &= C_b \frac{3 - 3\xi + 2\xi^2}{48} \ln\left(\frac{p^2}{k^2}\right) \\
 k^4 \frac{\tau_7^b}{m} &= -C_b \frac{1 - \xi}{6} \ln\left(\frac{p^2}{k^2}\right) \\
 k^2 \tau_8^b &= C_b \frac{-2 - 3\xi - \xi^2}{8} \ln\left(\frac{p^2}{k^2}\right)
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Además, $\tilde{\tau}_4 = \frac{k^2}{4} \tau_4$ y $\tilde{\tau}_7 = \tau_7 + \frac{k^2}{2} \tau_4$.

En este límite, los tensores definidos en la ec. 3.12 se comportan como potencias del inverso del momento. Solo dos factores de forma son dominantes y proporcionales entre sí:

$$T_\mu^{3asy} = -T_\mu^{6asy} = k^2 \gamma_\mu - \not{k} k_\mu \equiv T_\mu \tag{4.21}$$

Así, el comportamiento del vértice transverso en este límite es

$$\begin{aligned}
 \Gamma_T^\mu(p, k, q) &\stackrel{k^2 \gg p^2}{\equiv} (\tau_3 - \tau_6) T^\mu \\
 &= -\alpha \frac{C_A(1 + \xi) - 8C_F \xi}{64k^2 \pi} \ln \frac{p^2}{k^2} T^\mu
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Este resultado se encuentra graficado en la figura 4.9.

La ecuación (4.22) es una generalización en QCD del resultado derivado en [33]:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_T^\mu(p, k, q) &\stackrel{k^2 \gg p^2}{\equiv} (\tau_3 - \tau_6) T^\mu \\
 &= \frac{\alpha \xi}{8k^2 \pi} \ln \frac{p^2}{k^2} T^\mu
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Podemos hacer un análisis similar solo para los factores de forma masivos, que no contribuyen al comportamiento asintótico del vértice completo pero puede darnos una información

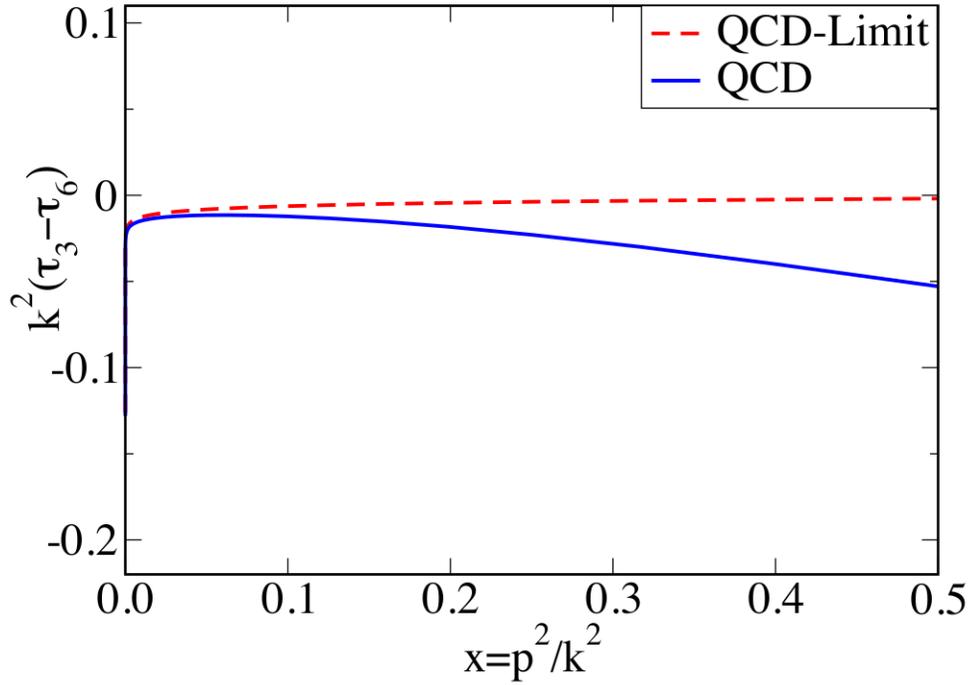


Fig. 4.9: Factores de forma que contribuyen al comportamiento asintótico del vértice. La línea sólida (azul) es la evaluación numérica del resultado a un lazo, mientras que la línea punteada (roja) corresponde al resultado de las ecs. (4.19) y (4.20), válido para $x \rightarrow 0$. Podemos observar que estas curvas convergen para $x \rightarrow 0$.

para una posible construcción no perturbativa del vértice de quark-gluón. En este caso las únicas contribuciones vienen de $\tau_{4,5,7}$. Además en este límite los tensores son proporcionales entre sí de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\mu^{4asy} &= -k^2 T_\mu^{5asy} = -2T_\mu^{7asy} \\ &= (k^2 \gamma_\mu - k_\mu \not{k}) \not{k} = T_\mu \not{k}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Así, el comportamiento de la vértice transverso en este límite es

$$\begin{aligned} \Gamma_{mT}^\mu(p, k, q) &\stackrel{k^2 \gg p^2}{\cong} \left(\tilde{\tau}_4 - \frac{1}{k^2} \tau_5 - \frac{1}{2} \tilde{\tau}_7 \right) T^\mu \not{k} \\ &= -\alpha \frac{C_A(20 + 13\xi + 3\xi^2)}{96k^4\pi} \ln \frac{p^2}{k^2} T^\mu \not{k} \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.3 Condiciones para una construcción no perturbativa

Si bien el vértice de quark-gluón a un lazo ha sido calculado de forma perturbativa por Davydchev, Osland y Saks en [32], este resultado tiene dos grandes desventajas: la insuficiencia del cálculo para generar masa de forma dinámica y su poca practicidad matemática.

Es por ello que existen propuestas o ansätze para abordar el primer problema. Estas propuestas consisten en expresar los factores de forma λ_i y τ_i en términos de las funciones de vestimiento de los propagadores. Algunos de estos ejemplos para el vértice en QED se pueden encontrar en [31, 33, 36, 35, 50]. Sin embargo, estas propuestas no logran cumplir los requerimientos expresados en el capítulo III o conllevan a una dificultad matemática para calcular objetos más complicados que los factores de forma.

Para poder manipular la estructura matemática del vértice se hacen aproximaciones o propuestas específicas para el proceso a estudiar. En la Física Hadrónica se utiliza la aproximación del vértice desnudo o RL, dado que es sencillo de manipular de forma numérica. Además, como la estructura del vértice de quark-gluón es muy similar a la del quark-fotón, estas propuestas se adaptan para calcular PDAs y factores de forma electromagnéticos [20, 52, 53].

Aun así, se sigue buscando mejorar estas propuestas de vértices, buscando comparar con las observables e incorporando los términos transversos que son relevantes para el momento cromomagnético anómalo [54, 55, 35].

Podemos aprovechar los resultados aquí presentados para establecer constricciones para una posible construcción no perturbativa para el vértice de quark-gluón que sea fácil de manipular.

En el caso del límite simétrico, el comportamiento del vértice implica que

$$\lambda_4(p^2, p^2, p^2) = \tilde{\tau}_4(p^2, p^2, p^2) = \tau_6(p^2, p^2, p^2) = 0$$

Esto debe mantenerse sin importar el regimen de energía. Además, el factor de forma λ_{1R} debe cumplir con

$$\lambda_{1R}(p^2, -\mu^2)|_{p^2=-\mu^2} = 0 \quad (4.26)$$

en concordancia con la expresión (3.22).

Para la parte longitudinal es comun utilizar el vértice de Ball y Chiu [31] indistintamente para QED y QCD. Hay propuestas para esta parte [56, 57], que consisten en utilizar este vértice pesado por una función escalar que depende de la función de vestimiento $G(q^2)$ del propagador del fantasma y las funciones escalares χ_i . Estas funciones son tales que

$$H(p, k, q) = \chi_0(p^2, k^2, q^2)\mathbb{I} + \chi_1(p^2, k^2, q^2)\not{p} + \chi_2(p^2, k^2, q^2)\not{k} + \chi_3(p^2, k^2, q^2)\sigma_{\mu\nu}p^\mu k^\nu \quad (4.27)$$

donde la función H está relacionada con el vértice completo de cuatro puntos quark-quark-fantasma-fantasma (ver ec. (3.15)). A nivel árbol, $\chi_0 = 1$ y $\chi_i = 0$, para $i = 1, 2, 3$. Dado a que χ_0 es el término dominante, la propuesta en [56] consiste en:

$$\Gamma_L^\mu(p, k) = G(q^2)\chi_0(p^2, k^2, q^2)\Gamma_{BC}^\mu(p, k) \quad (4.28)$$

donde $\Gamma_{BC}^\mu(p, k)$ está dado en la ec. (3.10), mientras que las funciones $G(q^2)$ y $\chi_0(p^2, k^2, q^2)$ están definidas de forma perturbativa en [32]. Sin embargo, aun se necesita un modelo no perturbativo para estas funciones.

El vértice de Ball y Chiu no puede usarse como el vértice completo dado a que no es multiplicativamente renormalizable. Por ello es necesario agregar la parte transversa del vértice. Para esta parte existen una gran cantidad de ansätze que incorporan uno o varios tensores de la parte transversa.

No podemos elegir una forma definitiva para el vértice transverso usando solo nuestros resultados en el límite asintótico. Sin embargo, podemos establecer criterios sobre los factores de forma no perturbativos que se deseen utilizar:

- Si se desea incorporar los factores de forma τ_3 y τ_6 , del resultado obtenido en la ec. (4.22), en el límite donde $k^2 \gg p^2$ estos deben cumplir lo siguiente:

$$\tau_3 - \tau_6 = -\alpha \frac{C_A(1 + \xi) - 8C_F \xi}{64k^2\pi} \ln \frac{p^2}{k^2} \quad (4.29)$$

En el caso de QED, donde $C_A = 0$ y $C_F = 1$, se elige [33, 38, 35] las siguientes expresiones para estos factores de forma

$$\begin{aligned}\tau_3(p^2, k^2) &= a_3 \frac{1}{k^2 - p^2} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right] \\ \tau_6(p^2, k^2) &= a_6 \frac{k^2 + p^2}{(k^2 - p^2)^2} \left[\frac{1}{F(k^2)} - \frac{1}{F(p^2)} \right]\end{aligned}\tag{4.30}$$

En el límite asintótico la condición (4.29) se lee como

$$\tau_3 - \tau_6 = \frac{\nu}{2k^2} \ln \frac{p^2}{k^2}\tag{4.31}$$

de donde se obtiene la constricción $a_3 - a_6 = 1/2$ y $\nu = \frac{\alpha\xi}{4\pi}$ es la dimensión anómala para el propagador del fermión a un lazo, como en la ec. (3.31).

Esta condición no se puede extender al caso de QCD dado a que aquí la dimensión anómala establece que $\nu = \frac{\alpha\xi C_F}{4\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2)$, ver la Ref. [60]. Es decir, los factores de color C_A que son puramente QCD aparecen a partir de correcciones a dos lazos.

- Se sabe el impacto que tienen los factores de forma que contribuyen al momento cromomagnético anómalo sobre el DCSB, en particular τ_5 [54, 35]. Del resultado obtenido en la ec. (4.25) podemos decir que la incorporación de alguno de los factores de forma τ_4 , τ_5 y τ_7 requiere que se cumpla:

$$\tau_4 - \frac{1}{k^2} \tau_5 - \frac{1}{2} \tau_7 = -\alpha \frac{C_A(20 + 13\xi + 3\xi^2)}{96k^4\pi} \ln \frac{p^2}{k^2}\tag{4.32}$$

Este resultado nos dice que la contribución abeliana es nula para estos tres factores de forma, similar a la constricción encontrada en [35].

En resumen, el análisis aquí presentado pueden utilizarse como guía hacia la construcción de un ansatz no perturbativo y para cálculos de lattice, de forma que sea fácil de manipular y que cumpla con los requisitos establecidos en el capítulo III.

Conclusiones

En este trabajo analizamos diversos aspectos de la interacción entre quarks y gluones, estudiando la estructura fundamental perturbativa con el fin de establecer una guía sobre los elementos y las condiciones necesarias para tener herramientas no perturbativas.

Después de haber hecho una revisión de QCD en el capítulo I, en el segundo capítulo exploramos la dinámica de los mesones ligeros a través de del formalismo de Bethe-Salpeter. Aquí trabajamos con la amplitud de distribución de partones que se refiere a la probabilidad de que un mesón esté compuesto por una combinación particular de quarks. Utilizando esta función calculamos las constantes de decaimiento para los mesones pseudoescalares piones y kaones, y para los mesones vectoriales ρ , ϕ y K^* , utilizando el modelo de la interacción de contacto.

Este modelo representa una interacción sin intercambio de momento. De hecho, este modelo reemplaza la dinámica por un factor efectivo constante. Esta propuesta simple para el propagador del gluón es útil para ver comportamientos gracias a la sencillez matemática y reproduce propiedades estáticas del mesón. Dada la falta de intercambio de momento, la interacción de contacto se debe combinar con un vértice de quark-gluón que no dependa de los momentos de las partículas participantes. Es por ello que se utiliza la aproximación rainbow-ladder como propuesta para el vértice. Esta aproximación corresponde al vértice desnudo, que es la propuesta más sencilla que se puede tener.

Tanto el propagador del gluón como el vértice de quark-gluón son sumamente importantes en el rompimiento dinámico de la simetría quiral y la generación dinámica de masa, procesos que ocurren en el contexto de la QCD no perturbativa. Así, la mejora de los cálculos implica una mejora en las propuestas para estos elementos.

Para el caso del vértice quark-gluón, algunos intentos para mejorar esta aproximación requiere de la implementación de otro tipo de tensores. Es por ello que en el capítulo III exploramos la estructura tensorial del vértice de quark-gluón, similar a la del vértice de fermión-fotón

dada en [31].

Aquí estudiamos las condiciones para la invariancia de norma, dadas por las identidades de Ward-Slavnov-Taylor. Esta identidad permite separar al vértice completo en dos componentes: longitudinal y transversa. Para la parte longitudinal es usual tomar el vértice de Ball y Chiu, ec. (3.10), o la modificada por funciones de vestimiento del propagador del fantasma, ec. (4.28), cuya primera componente es como la aproximación RL.

Además analizamos la renormalización multiplicativa del propagador del quark, que se traduce en que este propagador tenga una ley de potencias. Esta condición tiene implicaciones sobre la forma en la que se elige la parte transversa del vértice.

En el último capítulo hicimos un análisis cinemático del comportamiento del vértice perturbativo completo de donde obtuvimos condiciones sobre los factores de forma en distintas configuraciones simétricas de los momentos, ec. (4.26) y (3.22), así como de puntos asintóticos.

Calculamos los factores de forma longitudinales y transversos en la configuración simétrica $p^2 = k^2 = q^2$, a un lazo y en norma arbitraria. Para el caso de los factores longitudinales observamos que estos son finitos en el infrarrojo, al igual que la contribución abeliana de los transversos. La contribución no abeliana diverge en el infrarrojo de forma logarítmica.

Lattice tiene resultados para los factores de forma λ_1 y τ_5 en configuraciones simétricas para los momentos de los quarks, pero que difieren en el momento del gluón. Hemos calculado estos factores de forma en estas configuraciones: $\lambda_{1R}(p^2, p^2, 0)$ y $\tau_5(p^2, p^2, 4p^2)$ con el fin de comparar nuestros resultados con lattice y otros estudios del vértice.

Para el caso de la configuración asintótica, donde el momento de uno de los quarks es mucho más grande que el otro, encontramos constricciones sobre la elección de los factores de forma transversos τ_3 y τ_6 , ec. (4.29), y para τ_4 , τ_5 y τ_7 , ec. (4.32).

La finalidad de este trabajo era de proporcionar una guía para los grupos de lattice y ESD que

requieren de propuestas no perturbativas y simples para sus cálculos, dado a que las expresiones perturbativas completas no son suficiente para describir a los fenómenos no perturbativos y complican el cómputo. Esperamos que el análisis realizado en esta tesis sirva su propósito.

Apéndice A

Integrales

Las integrales que resultan útiles tener a la mano son las siguientes:

A.1 Integrales de uno, dos y tres puntos

Si los quarks son masivos, es claro que los diagramas *a* y *b* en la figura anterior contienen integrales de la forma:

$$J_2(v_1, v_2, v_3) \equiv \int \frac{d^n q}{[(p_2 - q)^2 - m^2]^{v_1} [(p_1 + q)^2 - m^2]^{v_2} (q^2)^{v_3}} \quad (\text{A.1})$$

$$J_1(v_1, v_2, v_3) \equiv \int \frac{d^n q}{[(p_2 - q)^2]^{v_1} [(p_1 + q)^2]^{v_2} [q^2 - m^2]^{v_3}} \quad (\text{A.2})$$

A.1.1 Integrales de un punto

Estas quedan definidas para cuando solo uno de los exponentes v_1 , v_2 y v_3 de A.2 o A.1 es igual a 1, mientras el resto debe ser cero.

Para nuestros cálculos serán necesarias las siguientes integrales de un punto, identificadas en [32] como:

$$J_1(0, 0, 1) = J_2(1, 0, 0) = J_2(0, 1, 0) = i\pi^{n/2} \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon(1 - \varepsilon)} (\mu^2)^{1 - \varepsilon} = i\pi^{n/2} \eta \mu^2 \tilde{\kappa} \quad (\text{A.3})$$

donde $n = 4 - 2\varepsilon$ y μ es una constante de renormalización. La variable η depende del espacio y es factorizada en esta integral para el manejo de $\tilde{\kappa}$. Se define como:

$$\eta \equiv \frac{\Gamma^2(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \Gamma(1 + \varepsilon) \quad (\text{A.4})$$

De esta forma, $\tilde{\kappa}$ representa una integral de *tadpole*. Además, cuando se usa regularización dimensional, $\tilde{\kappa}$ debe ser cero.

Para nosotros, la función $\tilde{\kappa}$ tiene la siguiente forma:

$$\tilde{\kappa} = (\mu^2)^{n/2 - 2} \frac{\Gamma(3 - \frac{n}{2})}{(2 - \frac{n}{2})(\frac{n}{2} - 1)} \quad (\text{A.5})$$

A.1.2 Integrales de dos puntos

Para las integrales de dos puntos usamos la notación $\kappa_i(p_l^2; m) \equiv \kappa_{i,l}$, donde p_l ($l = 1, 2, 3$) es el momento externo. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} J_1(1, 1, 0) &= J_0(1, 1, 0) = i \pi^{n/2} \eta \kappa_{0,3} \\ J_1(0, 1, 1) &= J_2(0, 1, 1) = i \pi^{n/2} \eta \kappa_{1,1} \\ J_1(1, 0, 1) &= J_2(1, 0, 1) = i \pi^{n/2} \eta \kappa_{1,2} \\ J_2(1, 1, 0) &= J_3(1, 1, 0) = i \pi^{n/2} \eta \kappa_{2,3} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

en la definición de Davydychev.

Estas integrales se pueden expresar en términos de funciones hipergeométricas y, cuando consideramos ε muy chico, podemos expandirlas como sigue:

$$\begin{aligned} \kappa_{1,1} &= \mu^{n/2-2} \Gamma \left[3 - \frac{n}{2} \right] \left\{ \frac{1}{2 - \frac{n}{2}} + 2 + \frac{m^2}{p_1^2} + \left[1 - \frac{m^2}{p_1^2} \right] \ln \left(-\frac{m^2}{p_1^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\} \\ \kappa_{1,2} &= \mu^{n/2-2} \Gamma \left[3 - \frac{n}{2} \right] \left\{ \frac{1}{2 - \frac{n}{2}} + 2 + \frac{m^2}{p_2^2} + \left[1 - \frac{m^2}{p_2^2} \right] \ln \left(-\frac{m^2}{p_2^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\} \\ \kappa_{2,3} &= \mu^{n/2-2} \Gamma \left[3 - \frac{n}{2} \right] \left\{ \frac{1}{2 - \frac{n}{2}} + 2 - 2f \left(\frac{p_3^2}{p_3^2 - 4m^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

en nuestra definición. Para $n = 4$ y $p_3^2 \gg m^2$, la función f se define como:

$$f \left(\frac{p_3^2}{p_3^2 - 4m^2} \right) = -\frac{1}{2} \left[1 - 2 \frac{m^2}{p_3^2} \right] \ln \left(-\frac{m^2}{p_3^2} \right) + \frac{m^2}{p_3^2} \quad (\text{A.8})$$

Por otro lado, para el caso sin masa, las integrales A.7 se definen como:

$$\kappa_{1,i} = \kappa_{2,i} = (\mu^2)^{n/2-2} \Gamma \left[3 - \frac{n}{2} \right] \left(\frac{1}{2 - \frac{n}{2}} + 2 - \ln[-(p_i^2)] + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \quad (\text{A.9})$$

A.1.3 Integrales de tres puntos

Podemos introducir la notación φ_i ($i = 1, 2$) para las integrales de tres puntos. De esta forma tendremos:

$$J_i(1, 1, 1) = i \pi^{n/2} \eta \varphi_i(p_1^2, p_2^2, p_3^2; m) \quad (\text{A.10})$$

en la forma de Davydychev.

Para el caso simétrico, $\phi_i(p^2) = \phi_i(p^2, p^2, p^2)$. Explícitamente esto es

$$\begin{aligned}\varphi_1(p^2) &= \frac{1}{p^2\sqrt{3}} \left\{ 2\text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3} + 2\theta\right) + \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right) + \text{Cl}_2(\pi - 2\theta) \right\}, \\ \varphi_2(p^2) &= \frac{2}{p^2\sqrt{3}} \left\{ 2\text{Cl}_2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3} + 2\tilde{\theta}\right) + \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3} - 2\tilde{\theta}\right) \right\},\end{aligned}$$

donde Cl_2 es la función de Clausen, con θ y $\tilde{\theta}$ definidas como en [32])

$$\tan \theta = \frac{p^2 - 2m^2}{p^2\sqrt{3}}, \quad \tan \tilde{\theta} = \sqrt{\frac{p^2 - 4m^2}{3p^2}}.$$

A.2 Integrales de la forma $I_{\alpha\beta}$

Las integrales que usaremos son de la forma

$$I_{\alpha\beta}(\mathcal{M}^2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(q^2)^\alpha}{(q^2 + \mathcal{M}^2)^\beta} \quad (\text{A.11})$$

Si $\beta > \alpha$ por dos potencias, por lo menos, entonces la integral es convergente, de otra forma no lo es. Por eso será necesario regularizar y la forma de hacerlo será con cortes usando que

$$\frac{1}{X^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{0 \rightarrow \tau_{UV}^2}^{\infty \rightarrow \tau_{IR}^2} dt t^{n-1} e^{-Xt} \quad (\text{A.12})$$

A.2.1 I_{02}

$$\begin{aligned}I_{02}(\mathcal{M}^2) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + \mathcal{M}^2)^2} \\ &= \int \frac{d\Omega_4}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dq q^3 \frac{1}{(q^2 + \mathcal{M}^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^4} \underbrace{\int d\Omega_4}_{2\pi^2} \int_0^\infty dq^2 \frac{q^2}{(q^2 + \mathcal{M}^2)^2} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \underbrace{\int_0^\infty dq^2 \frac{q^2}{(q^2 + \mathcal{M}^2)^2}}_{\tilde{I}_{02}}\end{aligned}$$

Usando A.12 para $n = 2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_{02} &= \int_0^\infty dq^2 q^2 \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} dt t e^{-(q^2 + \mathcal{M}^2)t} \\
 &= \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} dt t e^{-\mathcal{M}^2 t} \int_0^\infty dq^2 q^2 e^{-q^2 t} \\
 &\stackrel{s=q^2 t}{=} \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} dt t e^{-\mathcal{M}^2 t} \underbrace{\int_0^\infty \frac{ds}{t} \left(\frac{s}{t}\right) e^{-s}}_{\frac{1}{t^2} \int_0^\infty ds s e^{-s} = \frac{1}{t^2} \Gamma(2) = \frac{1}{t^2}} \\
 &= \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} dt t^{-1} e^{-\mathcal{M}^2 t} \\
 &\stackrel{s=\mathcal{M}^2 t}{=} \int_{\mathcal{M}^2 \tau_{UV}^2}^{\mathcal{M}^2 \tau_{IR}^2} ds s^{-1} e^{-s} \\
 &= \int_{\mathcal{M}^2 \tau_{UV}^2}^\infty ds s^{-1} e^{-s} - \int_{\mathcal{M}^2 \tau_{IR}^2}^\infty ds s^{-1} e^{-s} \\
 &= \Gamma(0, \mathcal{M}^2 \tau_{UV}^2) - \Gamma(0, \mathcal{M}^2 \tau_{IR}^2) \\
 &= \Gamma(0, \mathcal{M}^2 \tau_{UV}^2, \mathcal{M}^2 \tau_{IR}^2) \\
 &= \mathcal{C}_1(\mathcal{M}^2; \tau_{UV}^2, \tau_{IR}^2)
 \end{aligned}$$

donde usamos la función Gamma incompleta $\Gamma(a, \alpha) = \int_\alpha^\infty dt t^{a-1} e^{-t}$. Por lo que

$$I_{02} = \frac{1}{16\pi^2} \mathcal{C}_1(\mathcal{M}^2; \tau_{UV}^2, \tau_{IR}^2) \quad (\text{A.13})$$

A.2.2 I_{12}

$$\begin{aligned}
 I_{12}(\mathcal{M}^2) &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^2}{(q^2 + \mathcal{M}^2)^2} \\
 &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^2 + \mathcal{M}^2 - \mathcal{M}^2}{(q^2 + \mathcal{M}^2)^2} \\
 &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + \mathcal{M}^2} - \mathcal{M}^2 I_{02}(\mathcal{M}^2) \\
 &= I_{01}(\mathcal{M}^2) - \mathcal{M}^2 I_{02}(\mathcal{M}^2)
 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Entonces solo debemos resolver I_{01} . Esto es

$$\begin{aligned} I_{01}(\mathcal{M}^2) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{q^2}{q^2 + \mathcal{M}^2} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \underbrace{\int_0^\infty dq^2 \frac{q^2}{q^2 + \mathcal{M}^2}}_{\tilde{I}_{01}} \end{aligned}$$

Usando A.12 para $n = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{01} &= \int_0^\infty dq^2 q^2 \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} dt e^{-(q^2 + \mathcal{M}^2)t} \\ &= \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} dt e^{-\mathcal{M}^2 t} \int_0^\infty dq^2 q^2 e^{-q^2 t} \\ &\stackrel{s=q^2 t}{=} \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} dt t^{-2} e^{-\mathcal{M}^2 t} \\ &\stackrel{s=\mathcal{M}^2 t}{=} \int_{\mathcal{M}^2 \tau_{UV}^2}^{\mathcal{M}^2 \tau_{IR}^2} ds s^{-2} e^{-s} \\ &= \mathcal{M}^2 \Gamma(-1, \mathcal{M}^2 \tau_{UV}^2, \mathcal{M}^2 \tau_{IR}^2) \\ &= \mathcal{E}(\mathcal{M}^2; \tau_{UV}^2, \tau_{IR}^2) \end{aligned}$$

Sustituyendo en A.14 tenemos

$$I_{12} = \frac{1}{16\pi^2} [\mathcal{E}(\mathcal{M}^2; \tau_{UV}^2, \tau_{IR}^2) - \mathcal{M}^2 \mathcal{E}_1(\mathcal{M}^2; \tau_{UV}^2, \tau_{IR}^2)] \quad (\text{A.15})$$

Apéndice B

τ 's y t 's de Davydychev

B.1 Parte abeliana

La ecuación para la definición de los coeficientes $\tau_i^{(a)}$ la escribimos como:

$$\begin{aligned} \tau_i^{(a)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) = & \frac{g^2 (C_F - \frac{1}{2}C_A)}{(4\pi)^{n/2}} \left\{ t_{i,0}^{(a)} \varphi_2 + t_{i,1}^{(a)} [(p_1 p_3) \kappa_{1,1} + (p_2 p_3) \kappa_{1,2} + p_3^2 \kappa_{2,3}] \right. \\ & + t_{i,2}^{(a)} (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,2} - 2\kappa_{2,3}) + t_{i,3}^{(a)} (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,2} - 2\tilde{\kappa}) \\ & \left. + t_{i,4}^{(a)} (n-4) (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,2}) + t_{i,5}^{(a)} \frac{\kappa_{1,1} - \kappa_{1,2}}{p_1^2 - p_2^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Los t 's necesarios para los cálculos están dados en [32]. Por ejemplo, $\tau_3^{(a)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)$ son los siguientes

$$\begin{aligned} t_{3,0}^{(a)} = & \frac{1}{8} \mathcal{K}^{-1} \{ (p_1^2 + p_2^2 - 2m^2) ((1 + \xi)(p_1^2 + p_2^2) - 2(1 - \xi)m^2) - 4(n-2) \mathcal{K} \\ & + (n-1) \mathcal{K}^{-1} (p_1^2 - p_2^2)^2 ((p_1 p_2) - m^2) ((1 - \xi)(p_1 p_2) - (1 - \xi)m^2) \\ & - 2(n-4) \xi m^2 \mathcal{M}_2^{-1} (p_1^2 - p_2^2)^2 ((p_1 p_2) - m^2) (p_1^2 + p_2^2 - 2m^2) \} \\ t_{3,1}^{(a)} = & 0 \\ t_{3,2}^{(a)} = & \frac{1}{16} \mathcal{K}^{-2} \{ 2(n-3) \xi m^2 \mathcal{K} \mathcal{M}_2^{-1} (p_1^2 - p_2^2)^2 (p_1^2 + p_2^2 - 2m^2) \\ & - [(n-1)(p_1^2 - p_2^2)^2 + 4\mathcal{K}] [(1 + \xi)(p_1 p_2) - (1 - \xi)m^2] \} \\ t_{3,3}^{(a)} = & \frac{1}{16} (n-2) m^2 \mathcal{K}^{-1} \{ (1 - \xi) (p_1^2 p_2^2)^{-1} [(p_1 - p_2)^2 (p_1 p_2) - 2\mathcal{K}] + 2\xi \mathcal{M}_2^{-1} (p_1^2 - p_2^2)^2 [(p_1 p_2) - m^2] \} \\ t_{3,4}^{(a)} = & \frac{1}{16} \mathcal{K}^{-1} \{ (1 + \xi) (p_1 - p_2)^2 + 2\xi m^2 \mathcal{M}_2^{-1} (p_1^2 - p_2^2)^2 [(p_1 p_2) - m^2] \} \\ t_{3,5}^{(a)} = & \frac{1}{16} \mathcal{K}^{-2} (p_1^2 - p_2^2)^2 \{ (n-1 + 2\xi) [2\mathcal{K} - (p_1 p_2)(p_1 - p_2)^2] - (n - n\xi + 6\xi) \mathcal{K} \\ & - (1 - \xi) m^2 [(n-2) \mathcal{K} (p_1^2 p_2^2)^{-1} (p_1 p_2) - (n-1)(p_1 - p_2)^2] \\ & + (n-3) \xi \mathcal{M}_2^{-1} (p_1 - p_2)^2 [2m^2 p_1^2 p_2^2 p_3^2 - p_3^2 (p_1 p_2) (p_1^2 p_2^2 + m^4) - 4m^4 \mathcal{K}] \} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Mientras que, para $\tau_6^{(a)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)$ necesitamos

$$\begin{aligned}
t_{6,0}^{(a)} &= -\frac{1}{8}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}_2^{-1}(p_1^2 - p_2^2)\{\mathcal{M}_2[(1 + \xi)p_3^2 - 4m^2] + 6\xi m^2 p_3^2[(p_1 p_2) - m^2](p_1^2 + p_2^2 - 2m^2) \\
&\quad + (n - 1)\mathcal{K}^{-1}p_3^2[(p_1 p_2) - m^2]^2[\mathcal{M}_2 + \xi p_3^2(p_1^2 p_2^2 - m^4)]\} \\
t_{6,1}^{(a)} &= \frac{1}{8}\mathcal{K}^{-1}(p_1^2 - p_2^2)\{2(n - 3)\xi m^2 \mathcal{M}_2^{-1}(p_1^2 + p_2^2 - 2m^2) - (n - 1)\mathcal{K}^{-1}[(1 + \xi)(p_1 p_2) - (1 - \xi)m^2]\} \\
t_{6,2}^{(a)} &= 0 \\
t_{6,3}^{(a)} &= -\frac{1}{16}(n - 2)m^2 \mathcal{K}^{-1}(p_1^2 - p_2^2)\{(1 - \xi)(p_1^2 p_2^2)^{-1}(p_1 p_2) + 2\xi \mathcal{M}_2^{-1}p_3^2[(p_1 p_2) - m^2]\} \\
t_{6,4}^{(a)} &= -\frac{1}{16}\mathcal{K}^{-1}\mathcal{M}_2^{-1}(p_1^2 - p_2^2)\{(1 - \xi)\mathcal{M}_2 + 2\xi p_1^2 p_2^2 p_3^2 - 2\xi m^2[4\mathcal{K} + p_3^2(p_1 p_2)]\} \\
t_{6,5}^{(a)} &= \frac{1}{16}\mathcal{K}^{-1}(p_1^2 - p_2^2)\{(n - 2)(1 - \xi)m^2[(p_1^2 p_2^2)^{-1}(p_1 p_2)(p_1^2 + p_2^2) - 2] - (n - 2)(1 + \xi)(p_1 - p_2)^2 \\
&\quad - 8(n - 3)\xi m^2 \mathcal{K} \mathcal{M}_2^{-1}(p_1^2 + p_2^2 - 2m^2)\}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

En estas expresiones definimos

$$\mathcal{K} = p_1^2 p_2^2 - (p_1 p_2)^2 \tag{B.4}$$

$$\mathcal{M}_2 = (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2)p_3^2 + m^2(p_1^2 - p_2^2)^2 \tag{B.5}$$

Además, es necesario hacer el cambio $\xi \rightarrow 1 - \xi$ para poder comparar con los vértices de la literatura. Este cambio es debido a que en [32] se define el propagador del gluón con un parámetro para la norma, de tal forma que $\xi = 0$ es la norma de Feynman.

B.2 Parte no-abeliana

La ecuación para la definición de los coeficientes $\tau_i^{(b)}$ la escribimos como:

$$\begin{aligned}
\tau_i^{(b)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= \frac{g^2 C_A}{(4\pi)^{n/2}} \left\{ t_{i,0}^{(b)} \varphi_1 + t_{i,1}^{(b)} [(p_1 p_3) \kappa_{1,1} + (p_2 p_3) \kappa_{1,2} + p_3^2 \kappa_{0,3}] \right. \\
&\quad + t_{i,2}^{(b)} (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,2} - 2\kappa_{0,3}) + t_{i,3}^{(b)} (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,2} - 2\tilde{\kappa}) \\
&\quad \left. + t_{i,4}^{(b)} (n - 4)(\kappa_{1,1} + \kappa_{1,2}) + t_{i,5}^{(b)} \frac{\kappa_{1,1} - \kappa_{1,2}}{p_1^2 - p_2^2} \right\}
\end{aligned}$$

Los t 's necesarios para el cálculo de $\tau_3^{(b)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)$ son los siguientes

$$\begin{aligned}
t_{3,0}^{(b)} &= \frac{1}{32} \mathcal{K}^{-1} \{ (n-4) \xi m^2 \mathcal{M}_1^{-1} [(p_1 p_2) + m^2] [(n-3) \xi (p_1^2 - p_2^2)^2 - 4(4-\xi) \mathcal{K}] \\
&\quad + \xi [4 + (n-4) \xi] [(p_1 p_2) + m^2] [(n-3) (p_1 - p_2)^2 - 4(n-4) \mathcal{K} (p_3^2)^{-1}] \\
&\quad + (2-\xi) [(n-2) (p_1^2 - p_2^2)^2 (1 - \mathcal{K}^{-1} \mathcal{M}_1) - \mathcal{K}^{-1} \mathcal{M}_1 p_3^2 (p_1 - p_2)^2] + 8(n-3) \xi \mathcal{K} \\
&\quad + (n-3) \xi^2 (p_1^2 - p_2^2)^2 + (n-3) \xi^2 (p_1 p_2) [(p_1 p_2) + m^2] [4 + (n-1) \mathcal{K}^{-1} (p_1^2 - p_2^2)^2] \} \\
t_{3,1}^{(b)} &= \frac{1}{32} \mathcal{K}^{-1} (p_3^2)^{-1} \{ (n-3) \xi m^2 \mathcal{M}_1^{-1} [(n-3) \xi (p_1^2 - p_2^2)^2 - 4(4-\xi) \mathcal{K}] \\
&\quad + [(n-1) \mathcal{K}^{-1} (p_1^2 - p_2^2)^2 + 4] [(n-3) \xi^2 (p_1 p_2) - (2-\xi) (p_1 p_2) - (2-\xi) m^2] \} \\
t_{3,2}^{(b)} &= -\frac{1}{64} \xi \mathcal{K}^{-1} (p_3^2)^{-1} [4 + (n-4) \xi] [4 \mathcal{K} + (n-3) (p_1^2 - p_2^2)^2] \\
t_{3,3}^{(b)} &= \frac{1}{64} (n-2) m^2 \mathcal{K}^{-1} (p_3^2)^{-1} \{ \xi \mathcal{M}_1^{-1} [(p_1 p_2) + m^2] [4(4-\xi) \mathcal{K} - (n-3) \xi (p_1^2 - p_2^2)^2] \\
&\quad + (2-\xi) (p_1^2 p_2^2)^{-1} p_3^2 [(p_1 p_2) (p_1 - p_2)^2 - 2 \mathcal{K}] \} \\
t_{3,4}^{(b)} &= \frac{1}{64} \mathcal{K}^{-1} (p_3^2)^{-1} \{ (n-3) \xi^2 \mathcal{M}_1^{-1} (p_1^2 - p_2^2)^2 [p_1^2 p_2^2 + m^2 (p_1 p_2)] \\
&\quad - (2-\xi) p_3^2 (p_1 - p_2)^2 - 4 \xi (4-\xi) \mathcal{K} \mathcal{M}_1^{-1} [p_1^2 p_2^2 + m^2 (p_1 p_2)] \} \\
t_{3,5}^{(b)} &= \frac{1}{64} \mathcal{K}^{-1} (p_3^2)^{-1} (2-\xi) (p_1^2 - p_2^2)^2 \{ 4(n-2) m^2 \mathcal{K} (p_1^2 p_2^2)^{-1} - 2(n-3) \xi (p_1 - p_2)^2 \\
&\quad - (n-2) (p_1 - p_2)^2 [m^2 (p_1^2 p_2^2)^{-1} (p_1 p_2) + 1] \}
\end{aligned}
\tag{B.6}$$

Mientras que, para $\tau_6^{(a)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)$ necesitamos

$$\begin{aligned}
 t_{6,0}^{(b)} &= -\frac{1}{32} \mathcal{K}^{-1}(p_1^2 - p_2^2) \{ (n-3)(n-4) \xi^2 (m^2 \mathcal{M}_1^{-1} p_3^2 + 1) [(p_1 p_2) + m^2] \\
 &\quad + (n-1)(n-3) \xi^2 \mathcal{K}^{-1} p_3^2 (p_1 p_2) [(p_1 p_2) + m^2] + [(n-2)(2-\xi) + (n-3) \xi^2] p_3^2 \\
 &\quad - 2[2 - (n-3) \xi] [(p_1 p_2) + m^2] - (n-1)(2-\xi) \mathcal{K}^{-1} \mathcal{M}_1 p_3^2 \} \\
 t_{6,1}^{(b)} &= \frac{1}{32} \mathcal{K}^{-2}(p_1^2 - p_2^2) \{ (n-1)(2-\xi) [(p_1 p_2) + m^2] - (n-1)(n-3) \xi^2 (p_1 p_2) - (n-3)^2 \xi^2 m^2 \mathcal{K} \mathcal{M}_1^{-1} \} \\
 t_{6,2}^{(b)} &= -\frac{1}{64} \mathcal{K}^{-1}(p_1^2 - p_2^2) [4 - 2(n-3) \xi - (n-3)(n-4) \xi^2] \\
 t_{6,3}^{(b)} &= \frac{1}{64} (n-2) \mathcal{K}^{-1}(p_1^2 - p_2^2) \{ (n-3) \xi^2 m^2 \mathcal{M}_1^{-1} [(p_1 p_2) + m^2] - (2-\xi) m^2 (p_1^2 p_2^2)^{-1} (p_1 p_2) \} \\
 t_{6,4}^{(b)} &= \frac{1}{64} \mathcal{K}^{-1} \mathcal{M}_1^{-1} (p_1^2 - p_2^2) \{ (2-\xi) \mathcal{M}_1 - (n-3) \xi^2 [p_1^2 p_2^2 + m^2 (p_1 p_2)] \} \\
 t_{6,5}^{(b)} &= \frac{1}{64} \mathcal{K}^{-1}(p_1^2 - p_2^2) \{ (n-2)(2-\xi) m^2 [(p_1^2 p_2^2)^{-1} (p_1 p_2) (p_1^2 + p_2^2) - 2] \\
 &\quad + (p_1 - p_2)^2 [(n-4)(2+\xi) - 2(n-3) \xi^2] \}
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Aquí solo hay que definir

$$M_1 = (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2) + m^2 p_3^2 \tag{B.8}$$

mientras que todas las variables restantes continúan con la misma definición antes dada.

Referencias

- [1] R. Bermudez, et. al., J. Phys. Conf. Ser. **651**, 012002 (2015).
- [2] M. Mulders and G. Zanderighi, CERN-2016-005 (2017). arXiv:1708.02150 [hep-ph]
- [3] R. Bermudez, J. Phys. Conf. Ser. **761**, 012027 (2016).
- [4] R. Bermudez, L. Albino, et. al., Phys. Rev. D**95**, 034041 (2017) arXiv:1702.04437 [hep-ph]
- [5] CMS Physics TDR, CERN-LHCC 2006-021; ATLAS Physics TDR, CERN-LHCC 99-14/15.
- [6] C. Patrignani, et. al., Particle Data Group, Chin. Phys. C, 40, 100001 (2016)
- [7] Muta, Taizo (1998). *Foundation of Quantum Chromodynamics*. World Scientific Publishing Company. Reino Unido.
- [8] J. C. Collins, D. E. Soper and G. F. Sterman, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **5** (1988) 1-91.
- [9] F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949).
- [10] J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sc. **37**, 425, 455 (1951).
- [11] R.A. Bermúdez Ramos (2011) $\Gamma_\mu(k, p)$, Tesis de Maestría, Instituto de Física y Matemática, UMSNH.
- [12] Williams, Richard (2007) *Schwinger–Dyson Equations in QED and QCD*, Durham Theses, Durham University.

- [13] R. Aaij, et. al. (LHCb Collaboration), Phys. Rev. Lett. **118**, 022003 (2017).
arXiv:1606.07895 [hep-ex]
- [14] R. Aaij, et. al. (LHCb Collaboration), Phys. Rev. Lett. **115**, 072001 (2015).
arXiv:1507.03414 [hep-ex]
- [15] A. Bashir, Lei Chang, et. al., Commun. Theor. Phys. **58**, 79-134 (2012). arXiv:1201.3366
[nucl-th]
- [16] L.X. Gutiérrez-Guerrero, et. al., Phys. Rev. C**81**, 065202 (2010). arXiv:1002.1968 [nucl-
th]
- [17] L.X. Gutiérrez-Guerrero, et. al., Phys. Rev. C**83**, 065206 (2011). arXiv:1102.4376 [nucl-
th]
- [18] F. Gao, L. Chang, et. al., Phys. Rev. D**90**, 014011 (2014). arXiv:1405.0289 [nucl-th]
- [19] P.G. Lepage, S.J. Brodsky, Physics Letters **B87**, 359-365, 1172 (1979).
- [20] L. Chang, I.C. Cloet, et. al., Phys. Rev. Lett. **110**, 132001 (2013). arXiv: 1301.0324 [nucl-
th]
- [21] M. Bedolla, K. Raya, et. al., Phys. Rev. D**93**, 094025 (2016). arXiv:1606.03760 [hep-ph]
- [22] M. Bedolla, J.J. Cobos-Martines, et. al., Phys. Rev. D**92**, 054031 (2015).
arXiv:1601.05639 [hep-ph]
- [23] Chen Chen, Lei Chang, C.D. Roberts, et. al., Few Body Syst. **53**, 293-326 (2012).
arXiv:1204.2553 [nucl-th]
- [24] P. Ball, V.M. Braun, Phys. Rev. D**54**, (1996).
- [25] T. Nguyen, et. al., Phys. Rev. C**83**, 062201 (2011).
- [26] Shi, Chao, Chen, Chen, et. al., Phys. Rev. D**92**, 014035 (2015). arXiv:1504.00689 [nucl-
th]
- [27] D. Becirevic, V. Lubicz, et. al., J. High Energy Physics **05**, 007 (2003). arXiv:0301020
[hep-lat]

- [28] K. Jansen, C. McNeile, et. al., Phys. Rev. **C80**, 054510 (2009). arXiv:0906.4720 [hep-lat]
- [29] P. Maris and P.C. Tandy, Phys. Rev. **C60**, 055214 (1999).
- [30] D. Ebert, T. Feldmann, and H. Reinhardt, Phys. Lett. B **388**, 154 (1996)
- [31] J.S. Ball and T.-W. Chiu, Phys. Rev. **D22**, 2542 (1980).
- [32] A.I. Davydychev, P. Osland and L. Saks, Phys. Rev. **D63**, 014022 (2001).
- [33] Curtis, Duncan Charles (1991) *A non-perturbative study of fermions propagators and their interactions in gauge theories*, Durham Theses, Durham University.
- [34] A. Bashir and R. Delbourgo, J. Phys. **A37**, 6587 (2004). arXiv:0405018 [hep-ph]
- [35] A. Bashir, R. Bermudez, et. al., Phys. Rev. **C85**, 045205 (2012).
- [36] A. Kizilersu, M. Reenders and M.R. Pennington, Phys. Rev. **D52**, 1242 (1995). arXiv:9503238 [hep-ph].
- [37] Benhaddou, Kamel (2003) *Dynamical mass generation: from elementary fields to bound states*, Durham Theses, Durham University.
- [38] Bashir, Adnan (1995) *Constructing vertices in QED*, Durham Theses, Durham University.
- [39] J.C. Ward, Phys. Rev. **78**, 182 (1950).
- [40] Y. Takahashi, Nuovo Cim **6**, 371 (1957).
- [41] A.A. Slavnov, Teor. Mat. Fiz. **10**, 153 (1972).
- [42] J.C. Taylor, Nucl. Phys. **B33**, 436 (1971).
- [43] C.D. Roberts and A.G. Williams, Prog. Part. Nucl. Phys. **33**, 477 (1994). arXiv:9403224 [hep-ph]
- [44] A. Bashir and A. Raya, Phys. Rev. **D66**, 105005 (2002). arXiv:0206277 [hep-ph]
- [45] C. Itzykson and J-B. Zuber. (1980). *Quantum field theory*. McGraw-Hill. Estados Unidos.
- [46] W. Celmaster and R.J. Gonsalves, Phys. Rev. **D20**, 1420 (1979).

- [47] J.I. Skullerud, P.O. Bowman, et. al., J. High Energy Physics **04**, 047 (2003).
- [48] J.I. Skullerud, P.O. Bowman, et. al., Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. **141**, 244 (2005).
arXiv:0408032 [hep-lat]
- [49] M.S. Bhagwat and P.C. Tandy, Phys. Rev. **D70**, 094039 (2004). arXiv:0407163 [hep-ph]
- [50] M. Pelaez, M. Tissier, et. al., Phys. Rev. **D92**, 045012 (2015). arXiv:1504.05157 [hep-th]
- [51] A.C. Aguilar, D. Binosi, et. al., Phys. Rev. **D90**, 065027 (2014). arXiv:1405.3506 [hep-ph]
- [52] L. Chang, I.C. Cloët, et. al. Phys. Rev. Lett. **111**, 141802 (2013).
- [53] K. Raya, L. Chang, et. al., Phys. Rev. **D93**, 074017 (2016). arXiv:1510.02799 [nucl-th]
- [54] L. Chang, Y.X. Liu, et. al. Phys. Rev. Lett. **106**, 072001 (2011).
- [55] L. Chang, , et. al. Phys. Rev. **C85**, 052201 (2012).
- [56] A.C. Aguilar and J. Papavassiliou, Phys. Rev. **D83**, 014013 (2011). arXiv:1010.5815 [hep-ph]
- [57] G.H.S. Yabusaki, I. Ahmed, et. al., Phys. Rev. **D92**, 034017 (2015). arXiv:1504.06764 [hep-ph]
- [58] F.F. Mojica, C.E. Vera, et. al., Phys. Rev. **D96**, 014012 (2017). arXiv:1704.08593 [hep-ph]
- [59] S.-X. Qin, C.D. Roberts, et. al., Phys. Lett. **B733**, 202-208 (2014). arXiv:1402.1176 [nucl-th]
- [60] S.A. Larin and J.A.M. Vermaseren, Phys. Lett. **B303**, 334-336 (1993). arXiv:9302208 [hep-ph]