



# UNIVERSIDAD DE SONORA

---

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Investigación en Física

## **Acoplamiento de Modos Electromagnéticos en Cilindros Metálicos Paralelos**

**TESIS**

que para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

presenta

***Jesús Pablo Lauterio Cruz***

Hermosillo, Sonora

Abril de 2010

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess



# UNIVERSIDAD DE SONORA

---

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Investigación en Física

## **Acoplamiento de Modos Electromagnéticos en Cilindros Metálicos Paralelos**

**TESIS**

que para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

presenta

***Jesús Pablo Lauterio Cruz***

Hermosillo, Sonora

Abril de 2010

# Dedicatoria

---

A mi familia.

# Agradecimientos

---

A mi Señor, por compartir conmigo un poco de la física  
que inventó para darle orden al universo.

A mi mamá, Paulina, por lo que ha hecho por mí,  
por lo que me ha dado y a quien agradezco lo que soy.

A mi hermana, Ana Paulina,  
por su cariño, sus risas y ocurrencias.

A mi Mariana, por estar a mi lado y por darme ánimos  
cuando sentía que todo estaba en contra y nada avanzaba.

A mi director de tesis, Dr. Jorge Gaspar,  
por la física que me compartió, por su enseñanza y por su amistad.

Al Dr. Jesús Manzanares por la paciencia que me tuvo  
al dar mis primeros pasos en esta área de la física.

A CONACyT por su indispensable apoyo económico  
durante el tiempo de clases.

A todos los doctores del CIFUS que me instruyeron o ayudaron,  
a Sandra y al CIFUS mismo, por sus instalaciones.

# Resumen

---

Los cilindros metálicos forman parte importante de los cristales fotónicos y metamateriales. Es importante entender y cuantificar los modos electromagnéticos existentes para un cilindro y su comportamiento al juntar varios cilindros. En el presente trabajo de tesis estudiamos los modos electromagnéticos que ocurren para frecuencias menores que la frecuencia de plasma del cilindro. En esta región existen los modos normales de un cilindro metálico, que se localizan a la derecha de la línea de luz en el diagrama de frecuencia contra componente del vector de onda a lo largo del eje del cilindro,  $k_z$ . Asimismo, existen los llamados modos virtuales, nombrados así por su carácter radiativo y tiempo de vida finito. Estos últimos modos existen a partir de  $k_z = 0$  hasta  $k_z = \omega/c$ , es decir hasta la línea de luz en el vacío.

Por medio del método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD) estudiamos la excitación de los modos electromagnéticos que ocurren en el plano al cual es perpendicular el eje del cilindro, es decir con  $k_z = 0$ . En este caso, sólo los modos virtuales son importantes. Debido a su carácter radiativo, su acoplamiento a la luz incidente es más débil que la de los modos normales.

Encontramos que estos modos se manifiestan como estructura en la sección eficaz de absorción, sobre todo para cilindros con un radio comparable a la longitud de onda de plasma. Para cilindros de radio mucho menor que la longitud de onda de plasma, la sección eficaz de absorción solamente muestra un pico alrededor de la frecuencia del plasmón de superficie,  $\omega_p/\sqrt{2}$ , como ya se había encontrado por otros autores.

---

Cuando se excitan dos cilindros simultáneamente, obtenemos dos situaciones extremas. Primero cuando los radios de los cilindros son muy pequeños, el pico que se observa para el cilindro aislado, se desdobra en dos a medida que se acercan los dos cilindros. Por otra parte, para cilindros de radio comparable a la longitud de onda de plasma, el espectro de absorción contiene demasiada estructura y es difícil seguir la evolución de cada pico al acercar los dos cilindros. Para ambos casos estudiamos los aspectos de absorción con fuentes de luz incidentes desde distintos ángulos.

# Contenido

---

Resumen	VI
Lista de Figuras	XII
Introducción	XIX
<b>I CILINDRO METÁLICO AISLADO</b>	<b>1</b>
<b>1. Cilindro Metálico: Modos Normales</b>	<b>2</b>
1.1. Ecuación de Bessel . . . . .	2
1.2. Ecuaciones de Maxwell en coordenadas cilíndricas . . . . .	7
1.3. Caso general: solución con dependencia en $\varphi$ . . . . .	8
1.4. Relaciones de Dispersión de los Modos Normales . . . . .	9
1.4.1. Radio de 25 nm . . . . .	9
1.4.2. Radio de 510 nm . . . . .	12
<b>2. Cilindro Metálico: Modos Virtuales</b>	<b>16</b>
2.1. Ecuación de Difusión y Ecuación de Bessel . . . . .	16
2.2. Caso general: solución con dependencia en $\varphi$ . . . . .	19
2.3. Relaciones de Dispersión de los Modos Virtuales . . . . .	20
2.3.1. Radio de 25 nm . . . . .	20
2.3.2. Radio de 510 nm . . . . .	23



<b>II</b>	<b>FDTD</b>	<b>27</b>
<b>3.</b>	<b>Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo</b>	<b>28</b>
3.1.	Acerca del método FDTD . . . . .	28
3.2.	Estabilidad del método . . . . .	30
3.3.	Ejemplo de FDTD . . . . .	31
3.4.	Capa de Acoplamiento Perfecto (PML) . . . . .	32
3.5.	Condiciones y Definición de las PML . . . . .	33
<b>4.</b>	<b>Sistema 2D</b>	<b>37</b>
4.1.	Solución de las ecuaciones de Maxwell en 2D . . . . .	37
4.2.	Fuentes de luz o de radiación . . . . .	40
<b>5.</b>	<b>Medios dispersivos con FDTD</b>	<b>42</b>
5.1.	La Función Dieléctrica de Drude . . . . .	42
5.1.1.	De $\vec{D}(\vec{r}, \omega)$ a $\vec{D}(\vec{r}, t)$ . . . . .	42
<b>III</b>	<b>SECCIÓN EFICAZ DE ABSORCIÓN DE UN CILINDRO METÁLICO</b>	<b>47</b>
<b>6.</b>	<b>Vector de Poynting y Sección Eficaz</b>	<b>48</b>
6.1.	El vector de Poynting . . . . .	49
6.2.	Sección Eficaz de Absorción, Dispersión y Extinción . . . . .	51
6.3.	Teorema Óptico . . . . .	53
<b>7.</b>	<b>Sección Eficaz de Absorción a través de diferencias de energía</b>	<b>56</b>
7.1.	Obtención de la Sección Eficaz de absorción . . . . .	56
<b>8.</b>	<b>Cálculo directo de la Energía Absorbida: <math>\int \vec{E} \cdot \vec{J}</math></b>	<b>59</b>
8.1.	Energía absorbida por un sistema metálico . . . . .	59
8.2.	Barra de sección transversal arbitraria . . . . .	60

<b>9. Sección Eficaz con FDTD para un cilindro metálico</b>	<b>65</b>
9.1. Cilindro Infinito . . . . .	65
<b>10. Simulación Numérica de la Sección Eficaz de un Cilindro Metálico</b>	<b>68</b>
10.1. Radio de 25 nm . . . . .	69
10.2. Radio de 100 nm . . . . .	73
10.3. Radio de 510 nm . . . . .	77
<b>IV ACOPLAMIENTO DE LOS MODOS VIRTUALES DE DOS CILINDROS METÁLICOS PARALELOS</b>	<b>85</b>
<b>11. Dos Cilindros Metálicos Paralelos</b>	<b>86</b>
11.1. Radio de 25 nm . . . . .	88
11.1.1. Fuente colineal al centro de los cilindros . . . . .	88
11.1.2. Fuente lateral al centro de los cilindros . . . . .	92
11.2. Radio de 100 nm . . . . .	96
11.2.1. Fuente colineal al centro de los cilindros . . . . .	96
11.2.2. Fuente lateral respecto al centro de los cilindros . . . . .	98
11.3. Radio de 510 nm . . . . .	101
11.3.1. Fuente colineal al centro de los cilindros . . . . .	101
11.3.2. Fuente lateral respecto al centro de los cilindros . . . . .	103
<b>V CONCLUSIONES</b>	<b>106</b>
<b>VI APÉNDICES</b>	<b>109</b>
<b>A. De Maxwell a Helmholtz</b>	<b>110</b>
A.1. Ecuaciones Vectoriales de Helmholtz . . . . .	110
A.2. Ecuación de Helmholtz dependiente de la frecuencia . . . . .	115

---

A.3. Transversal del Laplaciano . . . . .	117
<b>B. Cilindro Dieléctrico</b>	<b>119</b>
B.1. Ecuación de Bessel y Ecuación de Difusión . . . . .	119
B.2. Caso sin variación azimutal . . . . .	122
B.2.1. Modos de oscilación TM y Frecuencias de Corte . . . . .	123
B.3. Caso general: solución con dependencia en $\varphi$ . . . . .	131
B.4. Relaciones de Dispersión de los Modos Normales . . . . .	134
B.4.1. Radio de 510 nm . . . . .	134
<b>C. Cilindro Metálico: Solución general analítica de los modos</b>	<b>145</b>
C.1. Modos Normales . . . . .	145
C.2. Modos Virtuales . . . . .	154
<b>D. Capa de Acoplamiento Perfecto (PML)</b>	<b>160</b>
D.1. Definición y Fórmulas . . . . .	160
<b>E. Modelo de Drude</b>	<b>167</b>
E.1. Construcción del modelo . . . . .	167
<b>F. Solución de Integral Compleja</b>	<b>170</b>
 <b>VII BIBLIOGRAFÍA</b>	 <b>175</b>

# Lista de Figuras

---

1.1.1. Funciones modificadas de Bessel: $I_0(x)$ , $I_1(x)$ y $K_0(x)$ , $K_1(x)$ . . . . .	6
1.4.1. Relaciones de dispersión del cilindro metálico de 25 nm: $m = 0$ hasta $m = 5$ . Modos normales. . . . .	10
1.4.2. Modos normales del campo eléctrico $E_z$ . Cilindro metálico de 25 nm.	11
1.4.3. Relaciones de dispersión del cilindro metálico de 510 nm: $m = 0$ hasta $m = 8$ . Modos normales. . . . .	12
1.4.4. Modos normales del campo eléctrico $E_z$ . Cilindro metálico de 510 nm.	13
1.4.5. Bosquejo de máximos y mínimos de los modos. Cilindro metálico. . .	15
2.3.1. Relaciones de dispersión del cilindro metálico de 25 nm: $m = 1$ hasta $m = 5$ . Modos virtuales. . . . .	20
2.3.2. Relaciones de dispersión del cilindro metálico de 25 nm cerca de $k_z = 0$ . Modos virtuales. . . . .	21
2.3.3. Acoplamiento de las relaciones de dispersión del cilindro metálico de 25 nm de radio: $m = 1$ hasta $m = 5$ . Modos normales y virtuales . . . .	22
2.3.4. Relaciones de dispersión del cilindro metálico de 510 nm: $m = 3$ hasta $m = 15$ . Modos virtuales. . . . .	23
2.3.5. Relaciones de dispersión del cilindro metálico de 510 nm cerca de $k_z = 0$ . Modos virtuales. . . . .	24
2.3.6. Modos virtuales del campo eléctrico $E_z$ . Cilindro metálico de 510 nm.	25

2.3.7. Acoplamiento de las relaciones de dispersión del cilindro metálico de 510 nm de radio: $m = 0$ hasta $m = 8$ . Modos normales y virtuales . . . . .	26
3.1.1. Algoritmo del método FDTD. . . . .	29
3.3.1. Reflexión de una película delgada. Comparación de la curva exacta y la curva FDTD. . . . .	31
3.4.1. Esquema de un problema de electrodinámica, donde algunas ondas escapan al infinito. . . . .	32
3.4.2. Esquema del mismo problema, con el espacio computacional truncado por las capas ficticias PML. . . . .	33
4.1.1. Celda de Yee. Malla para $\vec{E}$ y $\vec{H}$ en 2D. . . . .	40
4.2.1. Bosquejo de una fuente puntual en 2D y un cilindro metálico. . . . .	41
7.1.1. Sección eficaz de absorción. Diferencia de energías. Cilindro de plata con radio 25 nm. Malla de $24 \times 24 \lambda_p$ . . . . .	57
7.1.2. Sección eficaz de absorción. Diferencia de energías. Cilindro de plata con radio 25 nm. Malla de $26 \times 26 \lambda_p$ . . . . .	58
9.1.1. Caja de integración para calcular la sección eficaz de absorción. . . . .	67
10.1.1. Sección eficaz de absorción. Cilindro de plata con 25 nm de radio, 6.0 $\lambda_p$ distancia fuente-cilindro. . . . .	70
10.1.2. Sección eficaz de absorción. Cilindro de plata con 25 nm de radio, 1.0 $\lambda_p$ distancia fuente-cilindro. . . . .	71
10.1.3. Sección eficaz de absorción. Cilindro de plata con 25 nm de radio, 0.1 $\lambda_p$ distancia fuente-cilindro. . . . .	71
10.1.4. Sección eficaz de absorción. Cilindro de plata con 25 nm de radio, 0.1 $\lambda_p$ distancia fuente-cilindro. Absorción $\gamma = \omega_p/10$ . . . . .	72
10.2.1. Sección eficaz de absorción. Cilindro de plata con 100 nm de radio, 6.0 $\lambda_p$ distancia fuente-cilindro. . . . .	73

10.2.2.	Acoplamiento de las relaciones de dispersión del cilindro metálico de 100 nm de radio: $m = 0$ hasta $m = 7$ . Modos normales y virtuales . . . . .	74
10.2.3.	Relaciones de dispersión del cilindro metálico de 100 nm cerca de $k_z = 0$ . Modos virtuales. . . . .	75
10.2.4.	Sección eficaz de absorción. Cilindro de plata con 100 nm de radio, $1.0 \lambda_p$ distancia fuente-cilindro. . . . .	75
10.2.5.	Sección eficaz de absorción. Cilindro de plata con 100 nm de radio, $0.5 \lambda_p$ distancia fuente-cilindro. . . . .	76
10.2.6.	Sección eficaz de absorción. Cilindro de plata con 100 nm de radio, $0.1 \lambda_p$ distancia fuente-cilindro. . . . .	76
10.3.1.	Sección eficaz de absorción. Cilindro de plata con 510 nm de radio, $4.0 \lambda_p$ distancia fuente-cilindro. . . . .	77
10.3.2.	Sección eficaz de absorción. Cilindro de plata con 510 nm de radio, $1.0 \lambda_p$ distancia fuente-cilindro. . . . .	78
10.3.3.	Sección eficaz de absorción. Cilindro de plata con 510 nm de radio, $0.5 \lambda_p$ distancia fuente-cilindro. . . . .	79
10.3.4.	Sección eficaz de absorción. Cilindro de plata con 510 nm de radio, $0.1 \lambda_p$ distancia fuente-cilindro. . . . .	79
10.3.5.	Campo $H_z$ en el tiempo. Cilindro metálico aislado. Fuente Puntual.	81
10.3.6.	Lóbulos del campo. Fuente Puntual. . . . .	82
10.3.7.	Campo $H_z$ en el tiempo. Cilindro metálico aislado. Onda Plana. . . . .	83
10.3.8.	Lóbulos del campo. Onda Plana. . . . .	84
11.0.1.	Intensidad del campo electromagnético sobre la línea central. Iluminación colineal. . . . .	87
11.1.1.	Esquema del arreglo entre cilindros y fuente. Iluminación Frontal. . . . .	88
11.1.2.	Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación colineal. Radios de 25 nm, y $1.0 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	89

11.1.3. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación colineal. Radios de 25 nm, y $0.2 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	89
11.1.4. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación colineal. Radios de 25 nm, y $0.1 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	90
11.1.5. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación colineal. Radios de 25 nm, y $0.05 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	90
11.1.6. Posición de los Máximos de las Secciones Eficaces de Absorción, respecto a la frecuencia. Dos Cilindros Metálicos de 25 nm de radio. . .	91
11.1.7. Esquema del arreglo entre cilindros y fuente. Iluminación Lateral. .	92
11.1.8. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación lateral. Radios de 25 nm, y $1.0 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	92
11.1.9. Esquema del arreglo de cilindros de 25 nm de radio visto por la fuente. . . . .	93
11.1.10. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación colineal. Radios de 25 nm, y $0.5 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	94
11.1.11. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación colineal. Radios de 25 nm, y $0.2 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	94
11.1.12. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación colineal. Radios de 25 nm, y $0.1 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	95
11.1.13. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación colineal. Radios de 25 nm, y $0.01 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	95

11.2.1. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación colineal. Radios de 100 nm, y $1.0 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	97
11.2.2. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación colineal. Radios de 100 nm, y $0.2 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	97
11.2.3. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación colineal. Radios de 100 nm, y $0.05 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	98
11.2.4. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación lateral. Radios de 100 nm, y $2.0 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	99
11.2.5. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación lateral. Radios de 100 nm, y $1.0 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	99
11.2.6. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación lateral. Radios de 100 nm, y $0.5 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	100
11.2.7. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación lateral. Radios de 100 nm, y $0.05 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	100
11.3.1. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación colineal. Radios de 510 nm, y $1.0 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	102
11.3.2. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación colineal. Radios de 510 nm, y $0.2 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	102



11.3.3. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación colineal. Radios de 510 nm, y $0.05 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	103
11.3.4. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación lateral. Radios de 510 nm, y $1.0 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	104
11.3.5. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación lateral. Radios de 510 nm, y $0.5 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	104
11.3.6. Sección eficaz de absorción de dos cilindros de plata paralelos. Iluminación lateral. Radios de 510 nm, y $0.2 \lambda_p$ de separación entre cilindros. . . . .	105
B.2.1. Relaciones de dispersión TM del cilindro dieléctrico para $m = 0$ . . . .	130
B.4.1. Relaciones de dispersión: $m = 0$ , TM y TE. Cilindro dieléctrico. . . .	134
B.4.2. Relaciones de dispersión: $m = 1$ , $m = 2$ , $m = 3$ . Cilindro dieléctrico. . .	135
B.4.3. Relaciones de dispersión: $m = 10$ . Cilindro dieléctrico. . . . .	136
B.4.4. Modo del campo eléctrico: $m = 0$ , $1^a$ relación de dispersión. . . . .	137
B.4.5. Modos del campo eléctrico: $m = 0$ , $2^a$ y $3^a$ relación de dispersión. . .	137
B.4.6. Modos del campo eléctrico; $m = 1$ , $1^a$ relación de dispersión. . . . .	138
B.4.7. Modos del campo eléctrico; $m = 1$ , $2^a$ relación de dispersión. . . . .	139
B.4.8. Modos del campo eléctrico; $m = 2$ , $1^a$ relación de dispersión. . . . .	140
B.4.9. Modos del campo eléctrico; $m = 2$ , $2^a$ relación de dispersión. . . . .	141
B.4.10. Modos del campo eléctrico; $m = 3$ , $1^a$ relación de dispersión. . . . .	142
B.4.11. Modos del campo eléctrico; $m = 3$ , $2^a$ relación de dispersión. . . . .	143
B.4.12. Bosquejo de máximos y mínimos de los modos. Cilindro dieléctrico.	144
D.1.1. Figura 3.4.1. . . . .	161
D.1.2. Figura 3.4.2. . . . .	161

F.0.1. Contorno de la integral compleja (5.1.8). . . . .	170
--	-----

# Introducción

---

Las nanoestructuras periódicas del orden de la longitud de onda se han convertido en objeto de gran interés en los últimos veinte años. Pese a que en un principio los metales habían sido excluidos, algunos trabajos de investigación detonaron su estudio de manera intensa dando lugar a dos nuevas áreas conocidas como metamateriales y plasmonics<sup>[1]</sup>. La primera, está relacionada con estructuras metálicas menores que la longitud de onda con el fin de obtener una respuesta resonante al campo magnético. La segunda área, se refiere a plasmones de superficie. Esto hace que la línea que separa a la una de la otra muchas veces no sea del todo clara.

Los modos electromagnéticos asociados a un cilindro metálico individual ya han sido estudiados extensamente. Tal es el caso de Pfeiffer, Economou y Ngai<sup>[2]</sup>, que mediante una expresión trascendental derivada de las funciones Bessel encuentran las relaciones de dispersión que describen no sólo los modos normales resonantes de un cilindro sino también sus modos virtuales resonantes. Descubrieron propiedades generales de las oscilaciones de superficie (*surface plasmon oscillations*), en particular dos comportamientos: (i) las oscilaciones de superficie en la región derecha a la línea de luz muestran los *modos reales no-radiativos*, reales porque la solución de la ecuación trascendental marca las eigenfrecuencias reales, y no-radiativos porque los campos electromagnéticos asociados a estos modos decaen exponencialmente a cero fuera del cilindro; (ii) las oscilaciones de superficie en la región izquierda a la línea de luz son los *modos virtuales radiativos*, virtuales porque la solución de la ecuación trascendental arroja eigenfrecuencias complejas (donde  $k$  es real y donde la parte imaginaria de  $\omega$  es el inverso del tiempo de

vida de cada modo), y radiativos debido a que los campos se comportan como ondas cilíndricas propagantes.

Gray y Kupka en uno sus trabajos<sup>[3]</sup>, aunque se enfocaron principalmente a la propagación de luz en cadenas lineales de nanocilindros de plata, presentan sección eficaz de absorción, dispersión y extinción de un cilindro aislado y de un arreglo con dos de ellos. Para obtener sus conclusiones comparan en el camino los resultados del método numérico *FDTD* para un cilindro, con el cálculo basado en las expresiones de Bohren y Hoffman<sup>[4]</sup>, y en los valores experimentales de Johnson y Christy<sup>[5]</sup> (índices de reflexión  $n$  y  $k$  obtenidos de películas delgadas de metales nobles) y comparan con la parametrización de los índices de reflexión de Lynch y Hunter para plata<sup>[6]</sup>, donde ajustan el modelo de Drude a las constantes dieléctricas empíricas. En el mismo caso aislado, llegan a que el pico grande de la sección eficaz se debe a los polaritones de superficie (*surface plasmon polariton*). También analizaron el acoplamiento de la pareja de nanocilindros. Aquí, hallaron dos estructuras en la sección eficaz, un hombro cerca de la resonancia del cilindro aislado ( $\lambda = 340$  nm) y un máximo más fuerte corrido al rojo ( $\lambda = 375$  nm). La presencia de la resonancia extra, comentan que se debe a la interacción de los cilindros a muy corta separación.

Otros tantos investigadores, han enfocado sus trabajos de manera teórica y muchos más de forma experimental, al acoplamiento de nanocilindros. Kottmann y Martin<sup>[7,8]</sup>, con la solución de las ecuaciones de Maxwell en el dominio de las frecuencias, observaron como el radio de dos cilindros acoplados y la separación entre ellos modifica la magnitud de la resonancia. De hecho hablan del equilibrio que debe existir entre estas dos magnitudes para lograr una mayor amplitud. Analizaron también lo que ocurre al arrojar luz desde un costado y desde el frente del par de cilindros, donde hacen notar que la distancia entre los nanoalambres juega un papel importante, pues mientras la separación entre ellos se vuelve mucho más pequeña que el radio, la resonancia principal de la sección eficaz muestra un corrimiento al rojo (*red-shifted*). Asimismo, explican que se puede llegar a tener múltiples resonancias dependiendo de la sección transversal que tenga el

cilindro en particular. Es decir, comentan que mientras un cilindro circular exhibe una resonancia, en un cilindro triangular del mismo metal se pueden observar cinco o más distintas resonancias<sup>[9]</sup>.

Unos años después J. M. Elson *et al.*<sup>[10]</sup> dicen que, en el hecho de tener excitación de plasmones, la forma y el material de la estructura es muy importante respecto a las condiciones de resonancia y al incremento de la dispersión de las ondas electromagnéticas, por lo que consideraron trabajar con cilindros de sección transversal cuadrada. Meses después, trabajan con cilindros con defectos en forma de V<sup>[11]</sup>.

Otro punto que también viene a jugar un papel notable, es que las resonancias de superficie y la amplitud del campo local en un arreglo de dos cilindros pueden ser controladas por el cambio en la dirección de la luz incidente sobre los cilindros. Se ha mostrado también que los modos resonantes complejos pueden ser excitados al incrementar el número de pares de cilindros<sup>[12]</sup>.

Con todo esto, y a pesar de que se han encontrado resultados relevantes a lo largo de los años, ninguno han logrado relacionar la estructura de la sección eficaz con la excitación de los modos electromagnéticos. Más bien dicho, ninguno ha podido demostrar que en un solo cilindro metálico aislado se pueden llegar a tener más de una resonancia en la sección eficaz, lo que gráficamente sería ver más de un pico de distintas magnitudes, sin la necesidad de tener un acoplamiento de cilindros.

Lo que muchos autores han mostrado es que la estructura de más de un pico que muestra la sección eficaz se relaciona con el acoplamiento de cilindros. Las investigaciones no han logrado establecer la existencia de una fuerte correlación entre los plasmones de superficie inducidos por el campo eléctrico y los cambios en los picos de la extinción, incluyendo trabajos recientes<sup>[13]</sup>.

Es por ello que en la presente tesis nos proponemos estudiar el acoplamiento de modos electromagnéticos virtuales entre nanocilindros metálicos utilizando el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo, *FDTD*.

Primeramente demostraremos que se pueden excitar distintos modos para un mismo cilindro aislado y luego podremos analizar lo que realmente sucede al interaccionar los modos de un cilindro con los del otro, debido a que es más interesante estudiar la radiación asociada a los modos virtuales.

La necesidad de utilizar un método numérico como el *FDTD* se debe a la geometría del problema. Cuando se tiene un cilindro aislado, es posible darle solución analítica resolviendo las ecuaciones de Maxwell en coordenadas cilíndricas. Sin embargo, cuando el problema escapa de algún modelo geométrico (cilíndrico, rectangular, esférico, elipsoidal,...) no es posible resolverlo analíticamente.

Aunque existen diversos métodos numéricos incluso algunos también en el dominio temporal como el *DGTD*<sup>[14]</sup>, el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (*FDTD*) ha sido probado cuantiosas veces para distintos tipos de partículas como nanocilindros<sup>[3]</sup>, cristales de hielo<sup>[15]</sup>, cuerpos curvos dieléctrico-metálicos<sup>[16]</sup>, entre otros, por lo que puede reproducir con muy alta precisión la sección eficaz (*cross section*) de nanoalambres.

En la primera parte de este trabajo, analizaremos los modos no-radiativos de un cilindro metálico y enseguida los modos radiativos, todo esto resolviendo analíticamente la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas. Obtendremos así las relaciones de dispersión de los modos en función del vector de onda a lo largo del eje del cilindro. Luego introduciremos el método FDTD y lo aplicaremos para estudiar los modos con vector de onda en el plano perpendicular al eje de un cilindro metálico, es decir,  $k_z = 0$ . Posteriormente se estudiará los modos para un par de cilindros y el efecto de la separación entre ellos en la sección eficaz de absorción.

## Parte I

# CILINDRO METÁLICO AISLADO

# Cilindro Metálico: Modos Normales

---

En el presente capítulo analizaremos un cilindro de metal aislado de radio  $R$  con sección transversal circular y sin restricciones a lo largo del eje  $z$ , es decir, el problema será resuelto sobre el plano  $x$ - $y$ . Al resolver las ecuaciones de Maxwell en coordenadas cilíndricas hallaremos una expresión trascendental de donde obtendremos las relaciones de dispersión del cilindro, para el caso donde existe variación azimutal. Consideraremos dos medios: el medio metálico  $(\mu_1, \varepsilon_1)$ , como medio interior y el vacío  $(\mu_0, \varepsilon_0)$ , como medio externo.

## 1.1. Ecuación de Bessel

Partamos de la ecuación de onda de Helmholtz escrita como<sup>1</sup>

$$[\nabla_{\perp}^2 + (\mu\varepsilon\omega^2 - k_z^2)] \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0. \quad (1.1.1)$$

Debido a que hemos asumido que los campos tienen dependencia en  $z$ , de la forma  $e^{ik_z z}$ , las ecuaciones de Helmholtz se han reducido a ecuaciones de forma bidimensional. Escribamos la Ec. (1.1.1) para cada medio:

---

<sup>1</sup> Consulte el Apéndice A, pág. 117, para ver desarrollo algebraico.



$$[\nabla_{\perp}^2 + (\mu_1 \varepsilon_1 \omega^2 - k_z^2)] \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{dentro del cilindro}) \quad (1.1.2)$$

$$[\nabla_{\perp}^2 + (\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - k_z^2)] \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0. \quad (\text{fuera del cilindro}) \quad (1.1.3)$$

Es muy importante hacer notar que la constante de propagación axial  $k_z$  debe satisfacer los campos dentro y fuera del cilindro, lo que hace que  $k_z$  sea exactamente la misma dentro y fuera del material, ya que los campos satisfacen las condiciones de frontera. Por ello, consideremos para el exterior del cilindro

$$\beta^2 = -(\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - k_z^2) \geq 0, \quad (1.1.4)$$

ya que los campos decaen exponencialmente. Y como en el interior del cilindro metálico los campos también decaen exponencialmente, definamos<sup>2</sup>

$$\gamma^2 = -(\mu_1 \varepsilon_1 \omega^2 - k_z^2) \geq 0. \quad (1.1.5)$$

Así, las ecuaciones de Helmholtz quedan para el interior y exterior del cilindro metálico, respectivamente como

$$(\nabla_{\perp}^2 - \gamma^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.1.6)$$

$$(\nabla_{\perp}^2 - \beta^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0, \quad (1.1.7)$$

En coordenadas cilíndricas, en general, la ecuación de Helmholtz para alguna función  $\psi$  es

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_{\perp}^2 \psi = 0 \quad (1.1.8)$$

<sup>2</sup> Cfr. Ecs. (1.1.4) y (1.1.5) contra (B.1.3) y (B.1.2) respectivamente, pág. 120.

donde  $k_{\perp}^2 = \gamma^2$  ó bien  $k_{\perp}^2 = \beta^2$ . Si proponemos

$$\psi(\rho, \varphi, z) = P(\rho) \Phi(\varphi) Z(z)$$

tendremos

$$\frac{\Phi Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{PZ}{\rho^2} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + k_{\perp}^2 P\Phi Z = 0.$$

Dividiendo por  $P\Phi Z$  y multiplicando por  $\rho^2$ :

$$\frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + k_{\perp}^2 \rho^2 = 0. \quad (1.1.9)$$

Aquí, obtenemos

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2.$$

cuya solución es

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}. \quad (1.1.10)$$

Ahora, sustituyendo (1.1.10) en (1.1.9):

$$\frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) - m^2 + k_{\perp}^2 \rho^2 = 0.$$

Multiplicando por  $P$ , tenemos

$$\rho \frac{dP}{d\rho} + \rho^2 \frac{d^2P}{d\rho^2} + \left( k_{\perp}^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) \rho^2 P = 0.$$

Dividiendo ahora por  $\rho^2$  se obtiene la *Ecuación de Bessel*

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left( k_{\perp}^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) \right] P = 0. \quad (1.1.11)$$

Por lo tanto para cada medio (interior y exterior al cilindro) se tiene

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \left( \gamma^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) \right] \psi = 0 \quad (\text{dentro}) \quad (1.1.12)$$

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \left( \beta^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) \right] \psi = 0. \quad (\text{fuera}) \quad (1.1.13)$$

Nótese que debido a las definiciones de  $\gamma^2$  y  $\beta^2$ , las ecuaciones de Bessel se han transformado en ecuaciones de Difusión para ambos medios. Las soluciones de la ecuación de Difusión son  $\psi = I_m(x)$  ó  $\psi = K_m(x)$ .

La primer solución se define como

$$\psi \equiv I_m(\gamma\rho) = i^{-m} J_m(i\gamma\rho), \quad (1.1.14)$$

y la segunda es escrita en términos de funciones Bessel de tercera clase o funciones Hankel  $H_m^{(1)}$ :

$$K_m(\beta\rho) \equiv \frac{\pi}{2} i^{m+1} H_m^{(1)}(i\beta\rho)$$

i.e.,

$$K_m(\beta\rho) = \frac{\pi}{2} i^{m+1} [J_m(i\beta\rho) + iN_m(i\beta\rho)] \quad (1.1.15)$$

siendo  $N_m$  la función de Neumann definida como

$$N_m(x) = \frac{\cos(\pi m)J_m(x) - J_{-m}(x)}{\sin(\pi m)}. \quad (1.1.16)$$

Ahora debemos saber cuál de las dos soluciones de la ecuación de Difusión modela físicamente cada parte de nuestro problema. De las familias de funciones  $I_m$  y  $K_m$ , basta que analicemos las primeras dos para entender su comportamiento, mostrado en la Fig. 1.1.1.

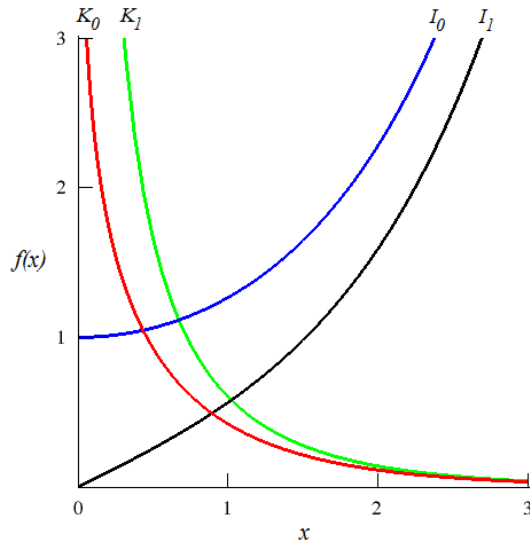


Figura 1.1.1. Funciones modificadas de Bessel:  
 $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$  y  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$ .

Analizando el comportamiento físico de los campos, sabemos que estos deben decaer exponencialmente fuera del cilindro, lo que sería descrito por  $\psi = K_m(\beta\rho)$ . Sin embargo, como los campos internos también deben decaer exponencialmente pero hacia el centro del cilindro, los campos pueden describirse con  $\psi = I_m(\gamma\rho)$ .

Por lo tanto, las soluciones para el cilindro metálico, en el caso de *modos normales*, son

$$\psi = \begin{cases} I_m(\gamma\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z} & \text{(dentro)} \\ K_m(\beta\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z} & \text{(fuera)} \end{cases} \quad (1.1.17)$$

## 1.2. Ecuaciones de Maxwell en coordenadas cilíndricas

En esta breve sección reescribiremos las ecuaciones de Maxwell empleando coordenadas cilíndricas para ajustarlas a la geometría de nuestro problema y con esto poder obtener un resultado analítico. Consideremos un vector arbitrario  $\vec{A} = (A_\rho, A_\varphi, A_z)$ . Como en coordenadas cilíndricas se sabe que el rotacional está dado como

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \hat{\varphi} \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \quad (1.2.1)$$

y por otra parte sabemos que las ecuaciones de Maxwell,<sup>3</sup> para los campos con dependencia temporal de la forma  $\vec{A}_0 e^{-i\omega t}$ , son

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -i\mu\epsilon\omega \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0.$$

entonces, en coordenadas cilíndricas quedan respectivamente como:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= i\omega \vec{B} \\ &= \hat{\rho} \left( \frac{1}{\rho} imE_z - ik_z E_\varphi \right) + \hat{\varphi} \left( ik_z E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \\ &\quad + \hat{z} \left( \frac{1}{\rho} E_\varphi + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} - \frac{im}{\rho} E_\rho \right) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

<sup>3</sup> Consulte el Apéndice A, pág. 110, para ver desarrollo algebraico.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= -i\mu\epsilon\omega \vec{E} \\
&= \hat{\rho} \left( \frac{1}{\rho} imB_z - ik_z B_\varphi \right) + \hat{\varphi} \left( ik_z B_\rho - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right) \\
&\quad + \hat{z} \left( \frac{1}{\rho} B_\varphi + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \rho} - \frac{im}{\rho} B_\rho \right)
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{1.2.4}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \tag{1.2.5}$$

Una vez reescritas de esta manera, podemos emplearlas para darle solución analítica a las relaciones de dispersión de los modos del sistema.

### 1.3. Solución a un cilindro metálico.

#### Caso general: dependencia en $\varphi$

Procedemos en esta sección a obtener la solución analítica del cilindro metálico con variación azimutal, ya que el caso donde no hay dependencia en  $\varphi$  no tiene sentido (pues no existen modos TM y TE por separado), contrario al caso de un cilindro dieléctrico.<sup>4</sup>

Debido a que las componentes paralelas a la superficie del cilindro son  $\varphi$  y  $z$ , por las condiciones de frontera, podemos aplicar la continuidad tangencial de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  si conocemos  $E_\varphi$ ,  $E_z$ ,  $H_\varphi$  y  $H_z$ . Esto nos dará un sistema de  $4 \times 4$  que puede ser resuelto de manera algebraica.

<sup>4</sup> Consulte el Apéndice B, pág. 123.

Mediante el álgebra desarrollado en el Apéndice C, Sección C.1, se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell en coordenadas cilíndricas la siguiente *ecuación trascendental para los modos normales de un cilindro metálico*:<sup>5</sup>

$$\left[ \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} \frac{I'_m(\gamma R)}{I_m(\gamma R)} - \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} \frac{K'_m(\beta R)}{K_m(\beta R)} \right] \left[ \frac{\omega}{\gamma} \frac{I'_m(\gamma R)}{I_m(\gamma R)} - \frac{\omega}{\beta} \frac{K'_m(\beta R)}{K_m(\beta R)} \right] = \frac{k_z^2 m^2}{R^2} \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2} \right)^2. \quad (1.3.1)$$

## 1.4. Relaciones de Dispersión de los Modos Normales

Ahora bien, sabiendo el comportamiento de las funciones  $I$  y  $K$  de Bessel, se procedió a la creación de una rutina computacional con la cual resolvimos numéricamente la ecuación trascendental (1.3.1) obteniendo como solución las relaciones de dispersión para  $m$  deseada. Es importante mencionar que para modelar el material empleamos la función dieléctrica de Drude

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

siendo  $\gamma$  la absorción o amortiguamiento, y tomando los valores de  $\omega_p$  para la plata.

### 1.4.1. Radio de 25 nm

Definiendo un radio de 25 nm para el cilindro de metal, obtuvimos soluciones de la Ec. (1.3.1) para  $m = 0$  a  $m = 5$ , graficando  $k$  normalizada ( $k/k_p$ ) contra frecuencia normalizada ( $\omega/\omega_p$ ), como se muestra a continuación.

Puede observarse en la Fig. 1.4.1 como las relaciones de dispersión viven en la parte

<sup>5</sup> Consulte el Apéndice C.1, para ver desarrollo algebraico.

derecha de la línea de luz del vacío ( $k = \omega$ ) y se extienden de manera creciente y asintótica bajo la frecuencia del plasmón de superficie  $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$ , lo que significa que  $\omega/\omega_p = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0.7071$ . Cabe mencionar que los valores donde nacen las relaciones de dispersión sobre la línea de luz se conocen como frecuencias de corte y se pueden obtener de manera analítica.<sup>6</sup>

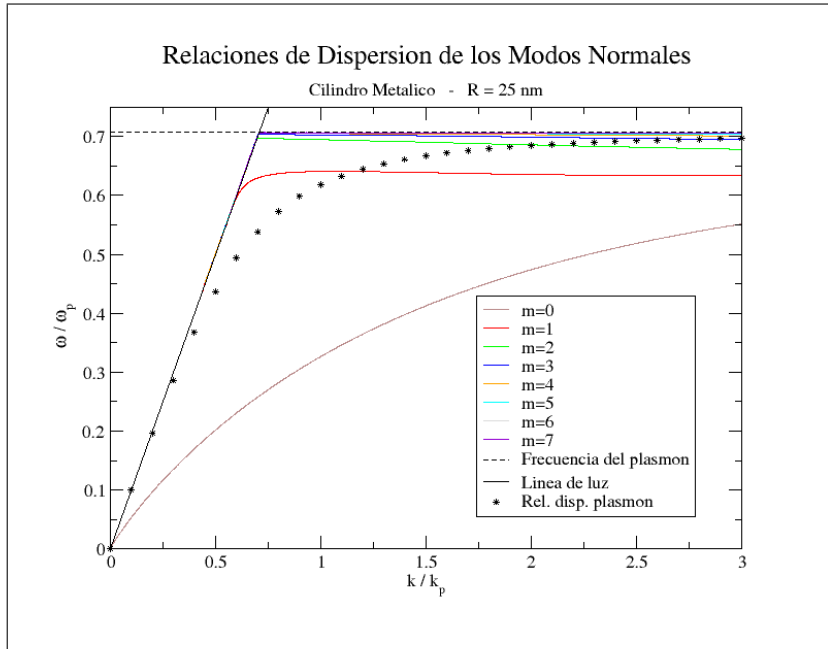


Figura 1.4.1. Relaciones de dispersión para  $m = 0$  hasta  $m = 5$ .

Sobre las curvas de relaciones de dispersión, fijando un par cartesiano, se obtienen para su respectiva  $m$  un modo normal del cilindro metálico, cuando  $z = 0$ .

Para el cilindro de 25 nm, tomando  $m = 0, 1, 2, 3, 4$  y respectivamente sobre sus relaciones de dispersión, los puntos: [a]  $(k_z, \omega) = (1.00, 0.327)$ , [b]  $(k_z, \omega) = (1.00, 0.64086)$ , [c]  $(k_z, \omega) = (1.00, 0.69476)$ , [d]  $(k_z, \omega) = (1.00, 0.7029)$  y [e]  $(k_z, \omega) = (1.00, 0.7051)$ , obtenemos los modos presentados en la figura 1.4.2, que es el comportamiento del campo  $E_z(\rho, \varphi, z = 0)$ .

<sup>6</sup> Consulte el Apéndice B, pp. 123-130, para ver el caso dieléctrico.



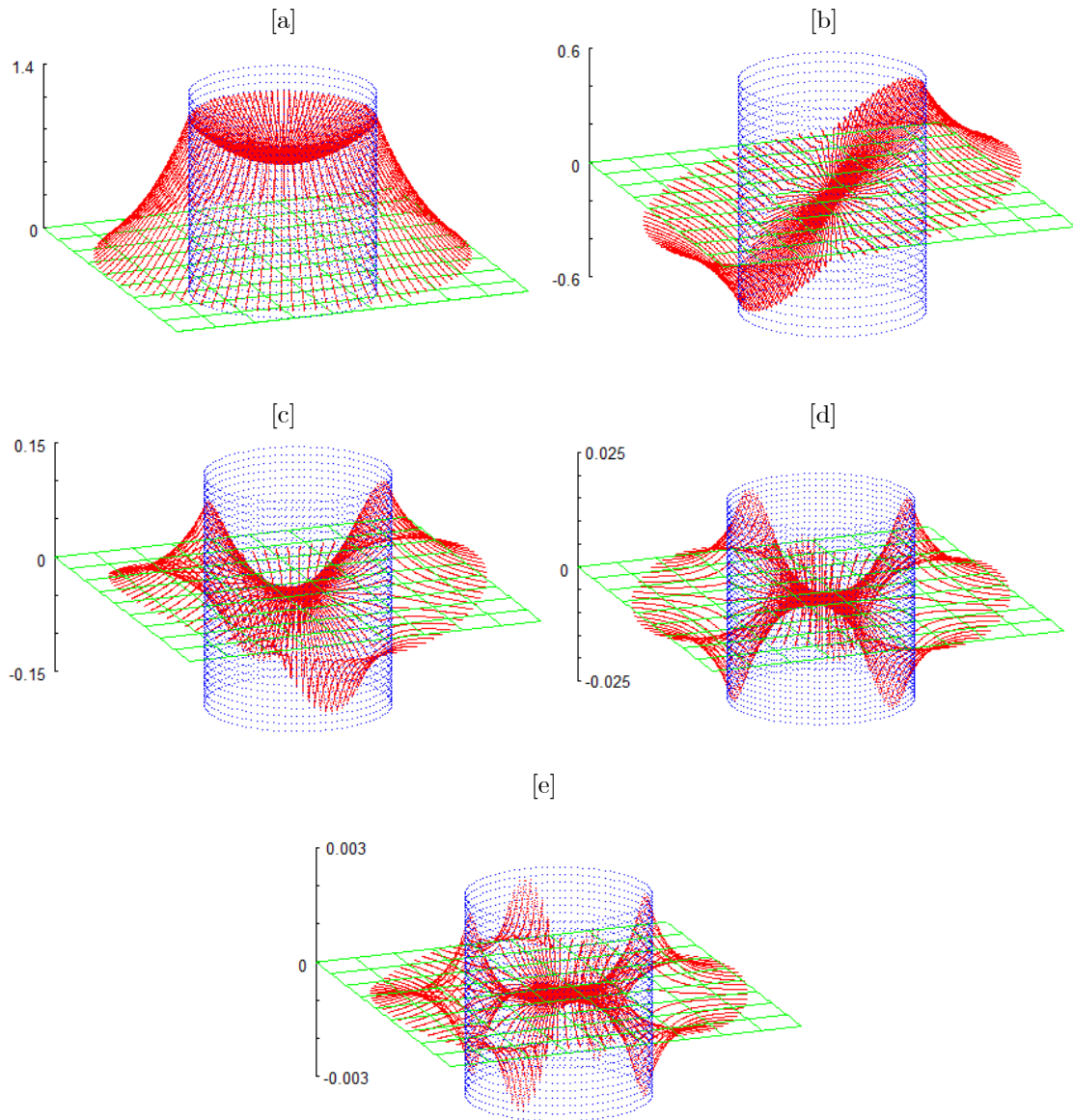


Figura 1.4.2. Modos normales del campo  $E_z$ . Cilindro metálico de 25 nm de radio.  
 [a]  $m = 0$ , [b]  $m = 1$ , [c]  $m = 2$ , [d]  $m = 3$  y [e]  $m = 4$ .

Para analizar más detalladamente el comportamiento de las relaciones de dispersión de los modos normales y a manera de comparación, presentaremos a continuación las relaciones del cilindro metálico aislado con radio de 510 nm, pues debido al gran tamaño respecto al presente caso (25 nm de radio), las curvas (en particular  $m$  pequeñas) tienden a parecerse más a la relación del plasmón de superficie.

### 1.4.2. Radio de 510 nm

Definiendo un radio de 510 nm, mostraremos las relaciones de dispersión desde  $m = 0$  hasta  $m = 8$ , obtenidas al resolver la ecuación (1.4.1). Comparado con el caso anterior (25 nm), este nuevo radio es más de 20 veces su tamaño.

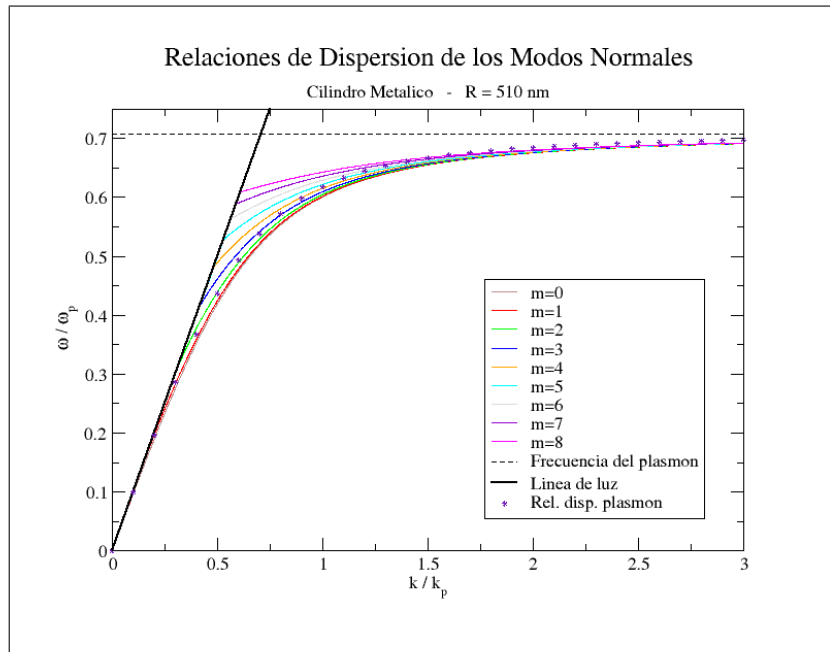


Figura 1.4.3. Relaciones de dispersión para  $m = 0$  hasta  $m = 8$ .

Nótese como estas relaciones de dispersión están separadas más uniformemente en contraste con las de las relaciones anteriores que estaban más definidas (aisladas) para  $m$  pequeña. Esto causa que la excitación entre un modo y otro no sea tan marcada, es decir, que para lograr excitar un modo en particular en el cilindro de 510 nm, se requieren fijar más restricciones debido al tamaño del radio del cilindro respecto a la longitud de onda.

Mostramos a continuación los modos normales del campo eléctrico  $E_z(\rho, \varphi, z = 0)$  obtenidos al resolver la Ec. (1.3.1). Obtenidas las relaciones de dispersión, si elegimos un punto fijo sobre alguna de ellas, podremos obtener los modos normales del campo.

Tomemos los mismo cinco órdenes  $m = 0, 1, 2, 3, 4$  y respectivamente los mismos puntos sobre sus relaciones que para el cilindro de 25 nm: [a]  $(k_z, \omega) = (1.00, 0.5911)$ , [b]  $(k_z, \omega) = (1.00, 0.5939)$ , [c]  $(k_z, \omega) = (1.00, 0.6017)$ , [d]  $(k_z, \omega) = (1.00, 0.6126)$  y [e]  $(k_z, \omega) = (1.00, 0.6250)$ .

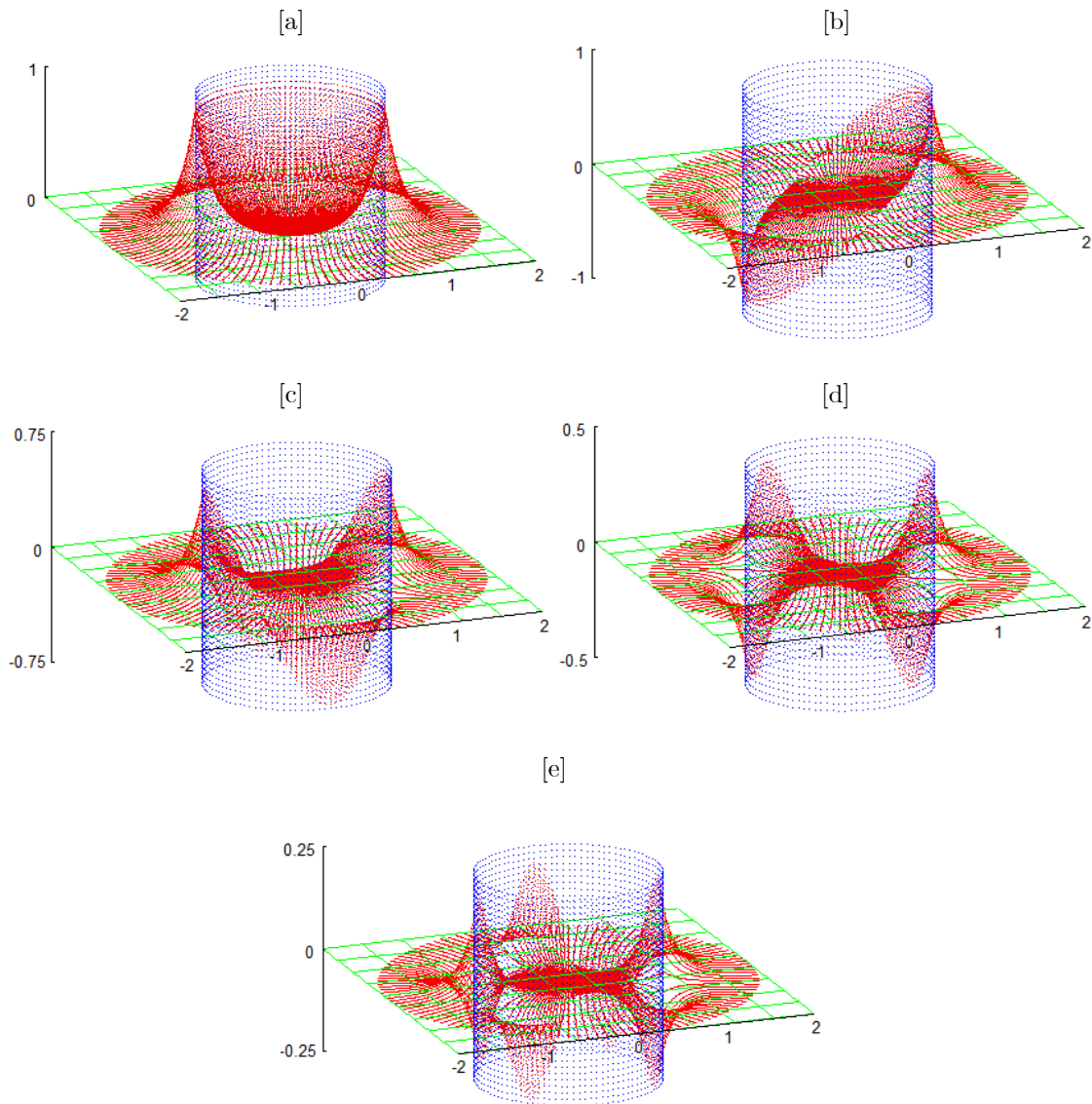


Figura 1.4.4. Modos normales del campo  $E_z$ . Cilindro metálico de 25 nm de radio. [a]  $m = 0$ , [b]  $m = 1$ , [c]  $m = 2$ , [d]  $m = 3$  y [e]  $m = 4$ .

Para ambos casos (25 y 510 nm), nótese cómo los campos en el metal alcanzan sus máximos y mínimos en la frontera del material<sup>7</sup>, a diferencia de los campos en el cilindro dieléctrico que alcanzan sus máximos y mínimos dentro del cilindro. Esto se debe a que los campos dentro y fuera del cilindro de metal decaen de manera exponencial pues obedecen a las funciones Bessel  $I$  y  $K$ .

Pese a esto último, note que para  $m = 0$  (el caso más simple y por tanto el más notorio) el campo  $E_z$  decae casi por completo en el centro cuando se tiene un cilindro con un radio grande (como puede apreciarse en la Fig. 1.4.4a) pero no decae por completo para un radio pequeño (Fig. 1.4.2a). Este fenómeno obedece a que el campo penetra con más facilidad al nanoalambre de 25 nm de radio, mientras que para el de 510 nm, el campo penetra el metal pero logra decaer exponencialmente casi a cero en el centro.

Cabe mencionar, respecto a las relaciones de dispersión, que existe una enorme diferencia entre las de un cilindro dieléctrico y las de uno metálico,<sup>8</sup> pues mientras que para un cilindro dieléctrico se tienen varias relaciones de dispersión para cada  $m$  (Fig. B.4.2), para un cilindro de metal existe una sola relación de dispersión cada  $m$ . Esto significa que los campos dentro del cilindro dieléctrico forman ondas estacionarias, mientras que dentro del metálico los campos decaen exponencialmente.

Debe notarse también que para las relaciones de dispersión del cilindro dieléctrico, el comportamiento de estas curvas se extienden de manera creciente y no acotada, mientras que para el alambre metálico, las relaciones de dispersión se extienden asintóticamente bajo la línea de la frecuencia del plasmón  $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$ .

Finalmente, podemos bosquejar el patrón simétrico que siguen los modos de un cilindro de metal, es decir, podemos analizar el comportamiento de sus máximos y mínimos para predecir el comportamiento de cualquier  $m$ .

<sup>7</sup> Cfr. con Figs. B.4.4 – B.4.11, pp. 137 – 143.

<sup>8</sup> Consulte el Apéndice B, pp. 134-136.

Presentamos el bosquejo de los modos antes estudiados,  $m = 0, 1, 2, 3$  y  $4$ , e indicaremos con el signo (+) donde se localizan los máximos, y el signo (-) indicará la ubicación de los mínimos (Fig. 1.4.5).

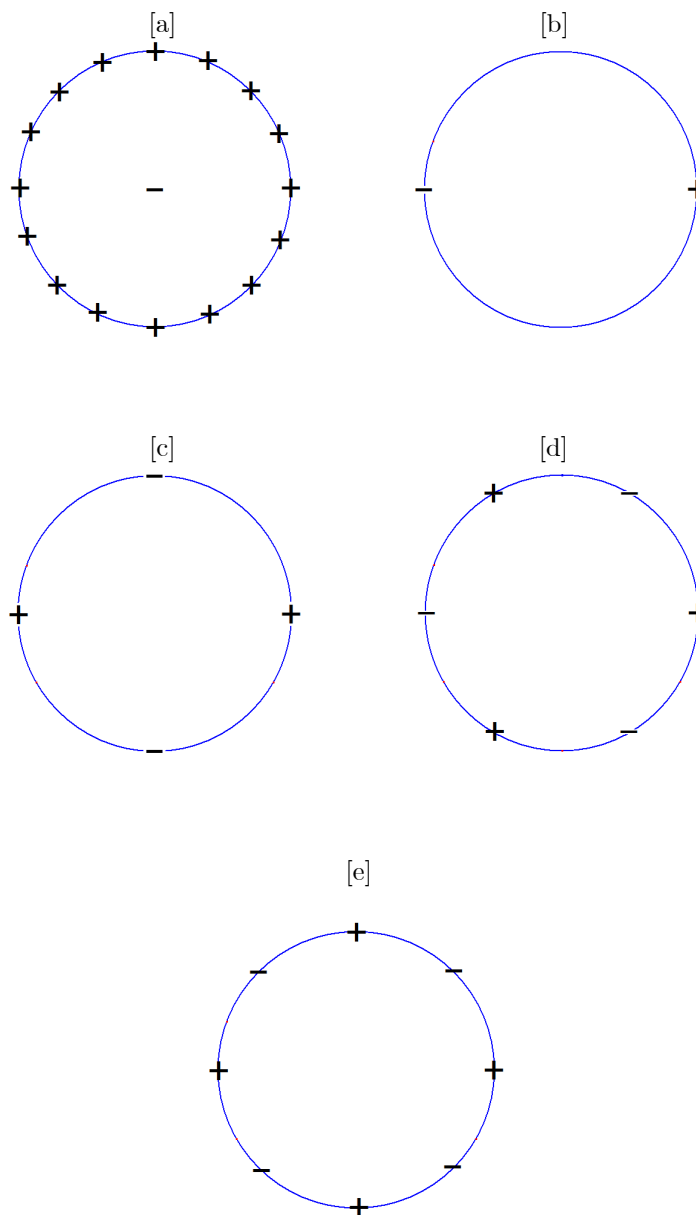


Figura 1.4.5. Bosquejo de máximos y mínimos de los modos para [a]  $m = 0$ , [b]  $m = 1$ , [c]  $m = 2$ , [d]  $m = 3$  y [e]  $m = 4$ .

# Cilindro Metálico: Modos Virtuales

---

Debido a las propiedades del material en consideración (metal), para los campos eléctrico y magnético, no solamente existen los modos normales (estudiados previamente en el Capítulo 1) sino también existen los *modos virtuales radiativos*. Estos últimos son oscilaciones de superficie en la región izquierda a la línea de luz, estudiados inicialmente por Pfeiffer, Economou y Ngai<sup>[2]</sup>.

Las relaciones de dispersión que los modos virtuales poseen se obtienen al resolver numéricamente una ecuación trascendental, como se hace para los modos normales del cilindro dieléctrico y del cilindro metálico, sólo que ahora los campos decaen hacia el centro del cilindro y se propagan hacia el exterior, disipando energía.

## 2.1. Ecuación de Difusión y Ecuación de Bessel

Como lo hicimos anteriormente, partiendo de la ecuación de Helmholtz y considerando la dependencia en la coordenada  $z$ , de la forma  $e^{ik_z z}$ , se obtiene la expresión reducida<sup>1</sup>

$$[\nabla_{\perp}^2 + (\mu\epsilon\omega^2 - k_z^2)] \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0.$$

---

<sup>1</sup> Consulte el Apéndice A, pág. 117 para ver desarrollo algebraico.

De nuevo, para el interior del cilindro de metal propongamos  $\gamma^2$  positiva definida como

$$\gamma^2 = -(\mu_1 \varepsilon_1 \omega^2 - k_z^2) \geq 0 \quad (2.1.1)$$

ya que los campos decaen exponencialmente hacia dentro del cilindro. Sin embargo, en el exterior del cilindro las ondas son propagantes, perdiendo energía. Por lo que definiremos

$$\beta^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - k_z^2 \geq 0. \quad (2.1.2)$$

Entonces las ecuaciones de onda de Helmholtz quedan como

$$(\nabla_{\perp}^2 - \gamma^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.1.3)$$

$$(\nabla_{\perp}^2 + \beta^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0, \quad (2.1.4)$$

para el interior y el exterior del cilindro, respectivamente. Resolviendo la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas obtenemos la Ecuación de Bessel:

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left( k_{\perp}^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) \right] \psi = 0$$

donde  $k_{\perp}^2 = \gamma^2$  ó  $k_{\perp}^2 = \beta^2$ . Así para cada medio, debido a las nuevas definiciones (2.1.1) y (2.1.2), se tiene

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \left( \gamma^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) \right] \psi = 0 \quad (\text{dentro}) \quad (2.1.5)$$

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left( \beta^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) \right] \psi = 0. \quad (\text{fuera}) \quad (2.1.6)$$

Sabemos ya, que para el interior del cilindro debemos tomar  $\psi = I_m(\gamma\rho)$  como solución a la ecuación de Difusión (2.1.5). No obstante, de la ecuación de Bessel (2.1.6) que modela los campos en el exterior del cuerpo cilíndrico debemos considerar no sólo las oscilaciones de dichos campos sino también la disipación de energía.

Para este caso, el fenómeno a modelar son ondas que se propagan desde una fuente definida hacia el infinito, lo que debe implicar que debemos reemplazar nuestro problema de ondas estacionarias por el de ondas cilíndricas viajeras. Nótese que la ecuación diferencial es la misma que para ondas estacionarias.<sup>2</sup>

Entonces para asegurarnos de que las componentes de los campos correspondan a ondas propagantes salientes, tomaremos como solución para la Ec. (2.1.6) la función de Hankel del primer tipo, definida como la superposición de la función Bessel y la función de Neumann<sup>3</sup> acompañada por la unidad imaginaria:

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iN_m(x). \quad (2.1.7)$$

Por lo tanto, las soluciones para el caso de *modos virtuales* del cilindro metálico son

$$\psi = \begin{cases} I_m(\gamma\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z} & (\text{dentro}) \\ H_m^{(1)}(\beta\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z} & (\text{fuera}) \end{cases} \quad (2.1.8)$$

<sup>2</sup> Cfr. Ecs. (2.1.6) contra (B.1.4).

<sup>3</sup> Véase Ec. (1.1.16).



## 2.2. Solución a un cilindro metálico.

### Caso general: dependencia en $\varphi$

Similar al caso de los modos normales (para un cilindro metálico o dieléctrico), podemos encontrar la solución analítica de los modos virtuales radiativos de un cilindro de metal con variación azimutal.<sup>4</sup>

Como las componentes paralelas a la superficie del cilindro son  $\varphi$  y  $z$ , podemos aplicar la continuidad tangencial de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  si conocemos  $E_\varphi$ ,  $E_z$ ,  $H_\varphi$  y  $H_z$ , haciendo uso de las condiciones de frontera.

Al resolver de manera algebraica un sistema de ecuaciones simultáneas de  $4 \times 4$  que aparece al considerar los campos de manera general, como puede verse detalladamente en el Apéndice C, Sección C.2, obtenemos la *ecuación trascendental para los modos virtuales de un cilindro metálico*, expresada como

$X =$

$$\left[ \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} \frac{I'_m(\gamma R)}{I_m(\gamma R)} + \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} \frac{H_m^{(1)'}(\beta R)}{H_m^{(1)}(\beta R)} \right] \left[ \frac{\omega}{\gamma} \frac{I'_m(\gamma R)}{I_m(\gamma R)} + \frac{\omega}{\beta} \frac{H_m^{(1)'}(\beta R)}{H_m^{(1)}(\beta R)} \right] - \frac{k_z^2 m^2}{R^2} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2} \right)^2 \quad (2.2.1)$$

Como ahora debemos solucionar modos radiativos y por tanto tener ondas viajeras, las funciones Hankel que las describen tienen argumento complejo, lo que implica que la solución  $X = 0$  existe para un número complejo.

A través de la creación de una nueva rutina computacional, esta vez hemos encontrado numéricamente los máximos de la función  $\frac{1}{|X|}$ , lo que nos da como resultado las relaciones de dispersión de los modos virtuales radiativos.

<sup>4</sup> Consulte el Apéndice C.2, para ver desarrollo algebraico.

## 2.3. Relaciones de Dispersión de los Modos Virtuales

En esta sección mostraremos las relaciones de dispersión de los modos virtuales para un cilindro de 25 nm y uno de 510 nm de radio, además mostraremos el comportamiento de los campos eléctricos para algunos modos virtuales generados a partir de estas relaciones.

### 2.3.1. Radio de 25 nm

Los máximos de la ecuación trascendental (2.2.1) nos permiten obtener las relaciones de dispersión de manera analítica para los modos virtuales radiativos.

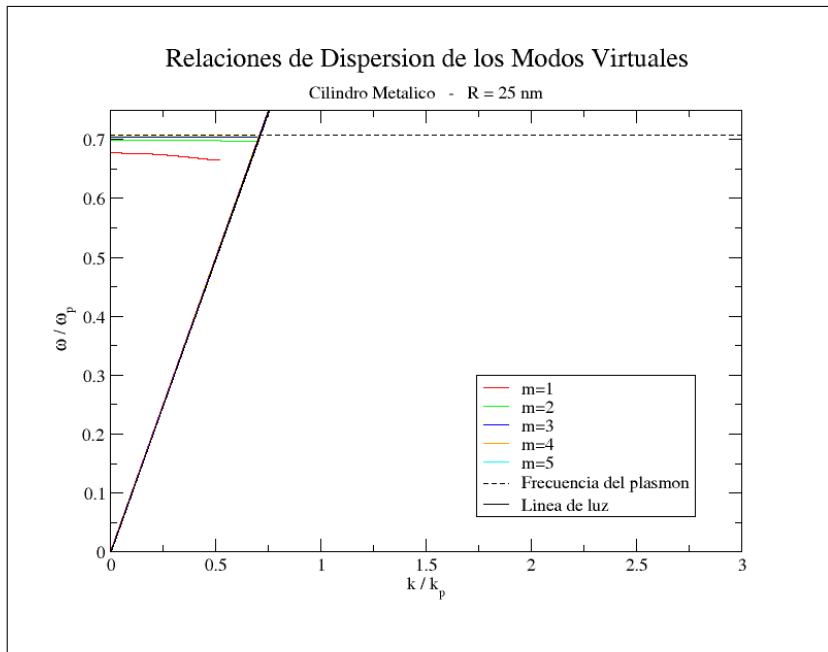


Figura 2.3.1. Relaciones de dispersión para  $m = 1$  hasta  $m = 5$ .

En la Fig. 2.3.1, la curva para  $m = 1$  aparentemente no parte de la línea de luz. Esto se debe a un error numérico de las rutinas computacionales, que se diseñaron para la

presente tesis, pues los argumentos de las funciones Hankel no son reales. Para evitar encontrar los ceros de la ecuación (2.2.1) con argumentos complejos, tomamos la idea de Pfeiffer, Economou y Ngai de encontrar sus máximos<sup>[2]</sup>.

A pesar de ello nuestros resultados son completamente útiles y válidos pues en nuestro caso los valores que fundamentalmente nos interesan son aquellos de las relaciones de dispersión cuando  $k_z = 0$  (Fig. 2.3.2), pues es ahí donde mostraremos los modos virtuales radiativos de los campos. Además, algunos de nuestros resultados fueron comparados satisfactoriamente con resultados que Pfeiffer *et al* obtuvieron.<sup>5</sup>

Entre más grande sea el orden  $m$ , las relaciones de dispersión se aproximan asintóticamente más a la recta  $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$ , y es por esto que es difícil observar órdenes mayores a 2 de manera aislada, para un radio de 25 nm.

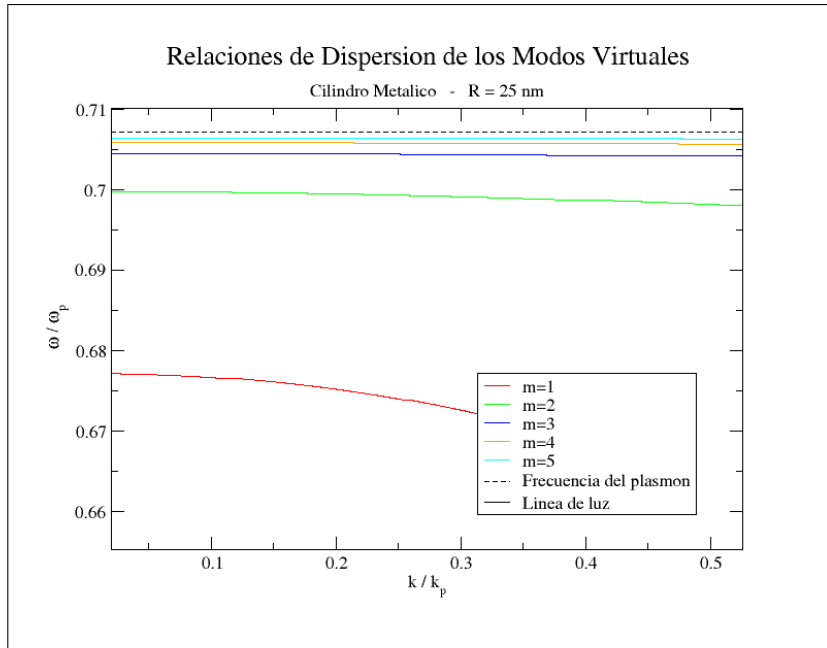


Figura 2.3.2. Relaciones de dispersión cerca de  $k_z = 0$ .

<sup>5</sup> Por ejemplo para el caso de 510 nm consulte la sección 2.3.2, pág. 23.

En el caso de un cilindro con radio tan pequeño como este, la tendencia asintótica es enorme, tanto que la curva de  $m = 2$  parece casi una recta horizontal. Por esta misma razón los modos virtuales radiativos en un cilindro de 25 nm no son tan claros y es mejor analizarlos teniendo un radio mucho más grande. Los modos del cilindro pequeño son cualitativamente similares a los del cilindro de radio grande.

Hay algunos elementos que vale la pena remarcar acerca de las relaciones de los modos virtuales. Primeramente, que estas relaciones de dispersión viven en la parte izquierda de la línea de luz, no del lado derecho como las relaciones de los modos normales. También, que si las relaciones virtuales parten de la línea de luz del vacío hacia la izquierda, y las relaciones de los modos normales parten de la línea de luz a la derecha, debe ocurrir un acoplamiento justo en las frecuencias de corte (sobre la línea de luz)<sup>[2]</sup>. Esto último nos lleva a proponer el hecho de que no tiene sentido hablar de  $m = 0$  para el caso virtual.

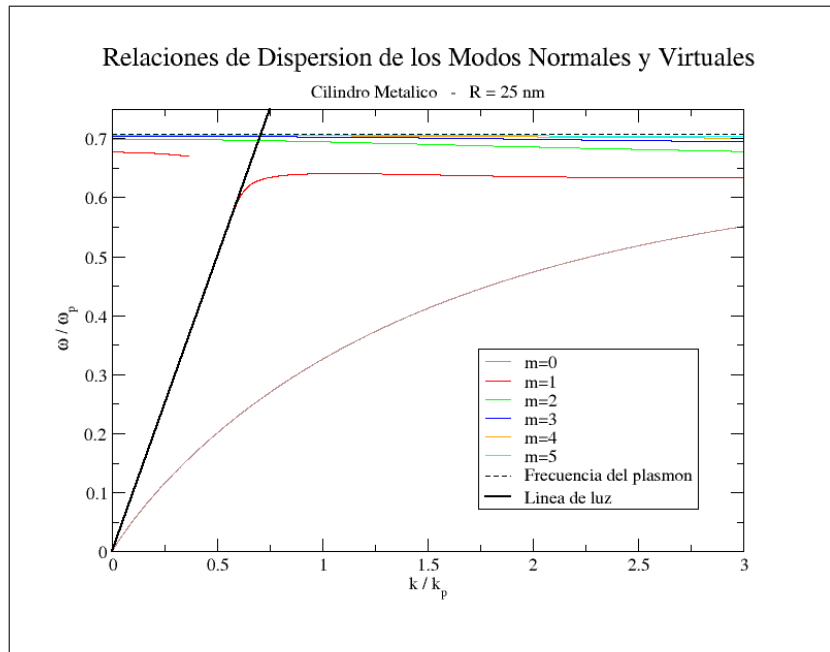


Figura 2.3.3. Acoplamiento de las relaciones de dispersión para  $m = 1$  hasta  $m = 5$ . Modos Normales y Virtuales.

### 2.3.2. Radio de 510 nm

Ahora para un cilindro 510 nm de radio, mostraremos algunas relaciones de dispersión para obtener a partir de ellas los modos radiativos del sistema. Estos resultados analíticos han sido comparados con los que obtuvieron Pfeiffer, Economou y Ngai sólo que presentaremos las curvas desde  $m = 3$  hasta  $m = 15$ , ya que para muy bajas frecuencias el cálculo de mínimos de la ecuación (2.2.1) se vuelve complicado computacionalmente por los argumentos complejos.

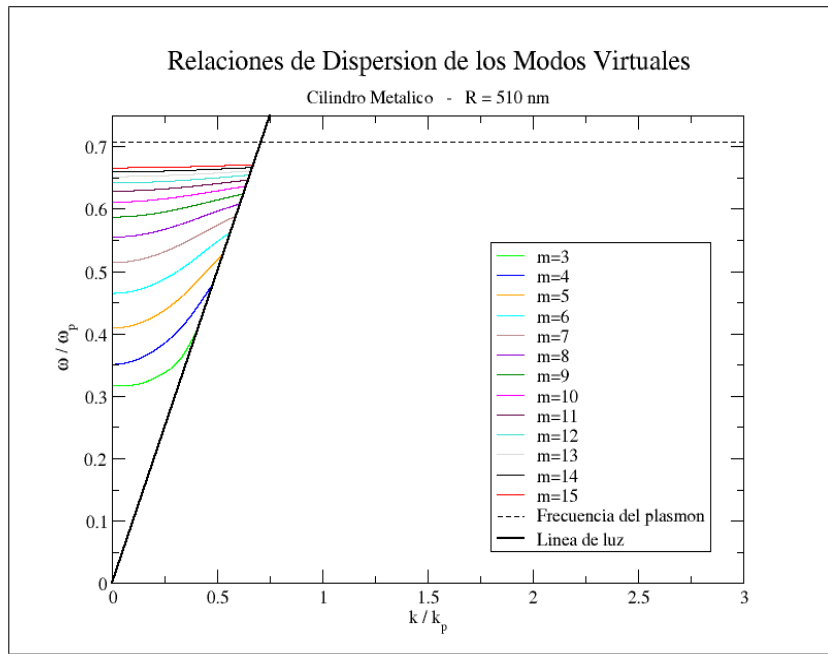


Figura 2.3.4. Relaciones de dispersión para  $m = 3$  hasta  $m = 15$ .

Observe nuevamente que entre mayor sea el orden  $m$  tienden asintóticamente hacia el valor de la frecuencia del plasmón de superficie  $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$ , aunque esta vez de manera mucho más lenta, o sea, para  $m$  grandes. Podemos comparar el comportamiento de estas relaciones de dispersión de modos virtuales radiativos con las relaciones de los modos normales del nanocilindro metálico anteriormente obtenidas.<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Cfr. con Fig. 1.4.3, pág. 12.

Mostraremos un acercamiento a las curvas de relaciones para apreciar mejor los valores de las frecuencias en  $k_z = 0$ , para los diferentes modos (Fig. 2.3.5).

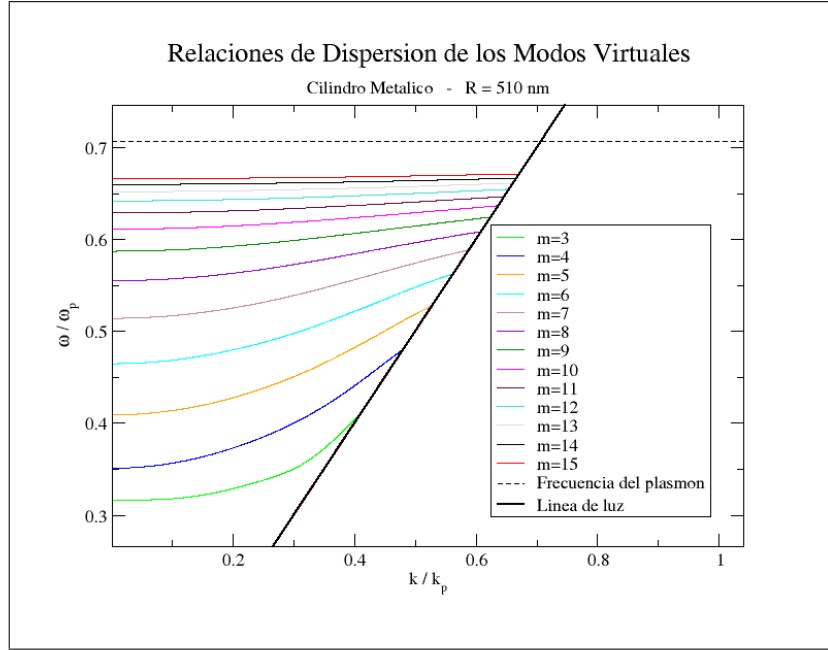


Figura 2.3.5. Relaciones de dispersión cerca de  $k_z = 0$ .

Ahora bien, para graficar los modos virtuales esta vez no fijamos  $k_z$  como en el caso de modos normales sino que tomamos puntos  $(k_z, \omega)$  sobre alguna recta no muy cercana a la línea de luz para evitar la solución trivial. Se eligió sin perder generalidad la recta  $k_z = (5/3)\omega$ .

Si hacemos  $m = 3, 4, 5, 6$  y  $7$  sobre la ecuación trascendental (2.2.1), y tomamos respectivamente los siguientes puntos de intersección entre las relaciones de dispersión y la recta  $k_z = (5/3)\omega$ : [a]  $(k_z, \omega) = (0.198, 0.3289)$ , [b]  $(k_z, \omega) = (0.228, 0.3799)$ , [c]  $(k_z, \omega) = (0.266, 0.442)$ , [d]  $(k_z, \omega) = (0.299, 0.4981)$  y [e]  $(k_z, \omega) = (0.326, 0.5436)$ , podemos ver el comportamiento de los modos virtuales radiativos para el campo  $E_z$  en un cilindro metálico con radio de 510 nm cuando  $z = 0$ , como puede apreciarse a continuación en la figura 2.3.6.

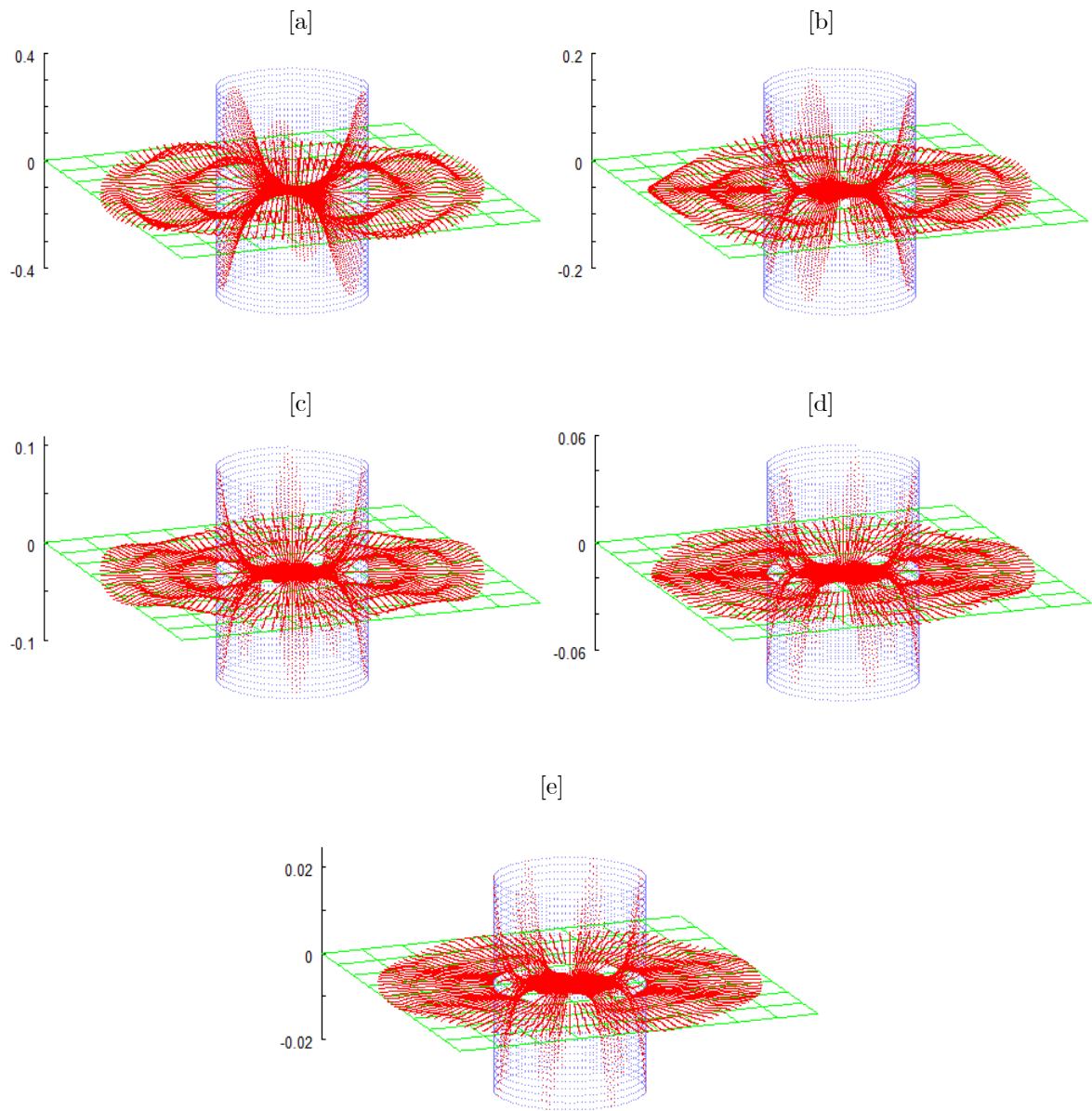


Figura 2.3.6. Modos virtuales del campo  $E_z$ . Cilindro metálico de 510 nm de radio. [a]  $m = 3$ , [b]  $m = 4$ , [c]  $m = 5$ , [d]  $m = 6$  y [e]  $m = 7$ .

Observe cómo los máximos del campo ocurren justo en la superficie del metal y note cómo la energía se disipa fuera del cilindro a través de ondas cilíndricas viajeras.

Pfeiffer, Economou y Ngai analizaron las relaciones de dispersión normales y virtuales de un cilindro metálico y comentaron como debe ocurrir un acoplamiento (igualamiento) de ellas justo en la línea de luz del vacío<sup>[2]</sup>.

En la presente tesis hemos corroborado dichos resultados con la finalidad de comparar los nuestros con los suyos, y además hemos obtenido la gráfica del acoplamiento de las relaciones de dispersión, comentadas por Pfeiffer *et al.*

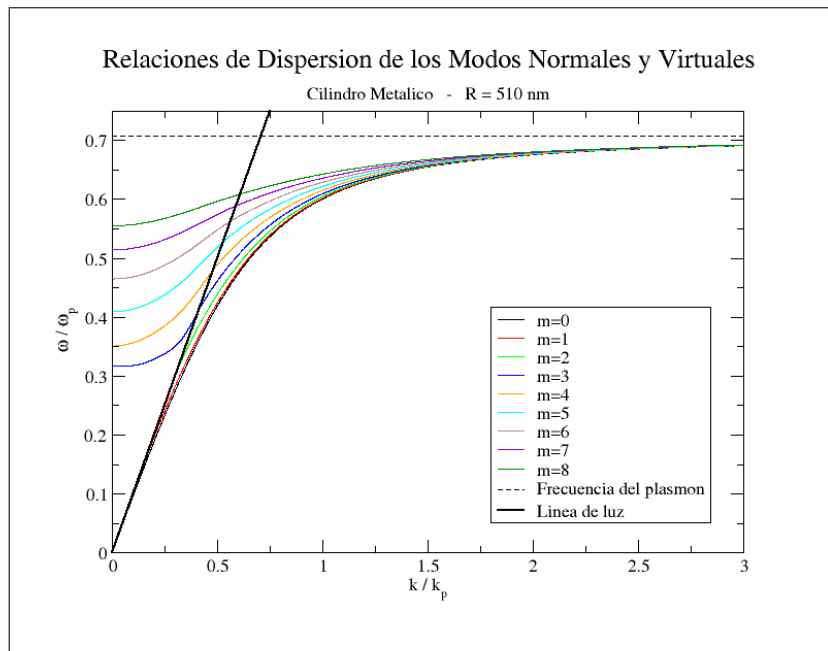


Figura 2.3.7. Acoplamiento de las relaciones de dispersión para  $m = 0$  hasta  $m = 8$ . Modos normales y Virtuales.



# Parte II

## FDTD

# Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD)

---

El método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD), es una poderosa teoría de simulación creada para resolver las ecuaciones de Maxwell<sup>[20]</sup>. Las ecuaciones a resolver deben ser reemplazadas por un sistema de ecuaciones expresadas en diferencias finitas donde se deben elegir las componentes a evaluar de manera conveniente. La solución a este sistema de ecuaciones satisface condiciones de frontera las cuales involucran capas ideales (*PML*).

## 3.1. Acerca del método FDTD

Este método computacional se ha popularizado debido a su gran poder y flexibilidad como herramienta para modelar problemas de electrodinámica. Algunas de las grandes ventajas del FDTD son las siguientes: poder modelar geometrías arbitrarias, incluir diferentes tipos de fuentes con facilidad, su programación es relativamente simple y sus cálculos son precisos.

Por otra parte, el algoritmo FDTD tiene varias ventajas sobre otros esquemas de diferencias finitas. Primero, el método FDTD utiliza diferencias espacio-temporales cen-

tradas para aproximar las derivadas, lo que proporciona una precisión de segundo orden en dichas derivadas espacio-temporales comparadas con otros esquemas de primer orden. Y segundo, no hay necesidad de un tratamiento muy especial de los límites del problema<sup>[21]</sup>.

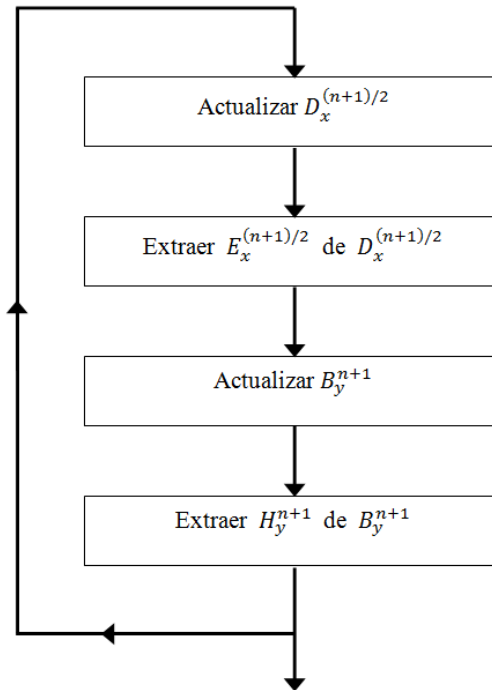


Figura 3.1.1. Algoritmo del método FDTD.

La propagación de los campos electromagnéticos en medios dispersivos presenta comportamientos complicados por lo que se debe implementar métodos numéricos precisos para estudiar diferentes situaciones donde existe interacción de luz con materiales dependientes de la frecuencia.

Originalmente, el FDTD fue propuesto como una técnica numérica para resolver las ecuaciones de Maxwell en problemas lineales, sin embargo ahora se sabe que puede emplearse para resolver problemas con geometrías complicadas, interacción de luz con medios dispersivos e incluso física no lineal.<sup>[22]</sup>

## 3.2. Estabilidad del método

Como es bien sabido<sup>[23]</sup>, una onda electromagnética que se propaga en el vacío no puede ir más rápido que la velocidad de la luz. Entonces para lograr su propagación en una unidad espacial, con dirección paralela a los ejes, se requiere un tiempo mínimo de  $\Delta t = \Delta x/c$ .

Sin embargo, cuando queremos una simulación en 2D, como en nuestro caso, debemos considerar también la propagación en dirección diagonal, por lo cual nos lleva a que el tiempo requerido sea  $\Delta t = \Delta x/\sqrt{2}c$ . Esto puede generalizarse con la llamada *Condición de Courant*, donde  $n$  es la dimensión de la simulación:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{nc}}. \quad (3.2.1)$$

Dicha condición afirma que para una solución numérica, dada una discretización espacial, no debe tomarse un intervalo temporal más grande que una cierta cantidad computable. En otras palabras, el paso temporal debe mantenerse lo suficientemente pequeño como para que la onda, en nuestro caso, tenga tiempo suficiente para propagarse a través de la discretización espacial. Por facilidad, definiremos  $\Delta t$  como

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2c}$$

con lo que lograremos que

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}c = \frac{\Delta x/(2c)}{\Delta x}c$$

y por tanto

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}c = \frac{1}{2}. \quad (3.2.2)$$

### 3.3. Ejemplo de FDTD

Para ejemplificar la efectividad del método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo, presentamos a continuación un resultado ampliamente conocido: la curva del coeficiente de reflexión  $R$  para una película delgada de metal con vacío a los lados, modelada con Drude.

Aquí, hemos calculado la reflexión para la película delgada de manera exacta con los coeficientes de Fresnel y calculado el mismo resultado empleando el método FDTD.

En esta prueba, hemos definido un espesor para el metal de 500 nm. Asimismo definimos la frecuencia de plasma y la absorción, para el modelo de Drude, como  $\omega_p = 5.887 \times 10^{15}$  y  $\gamma = \omega_p/20$ .

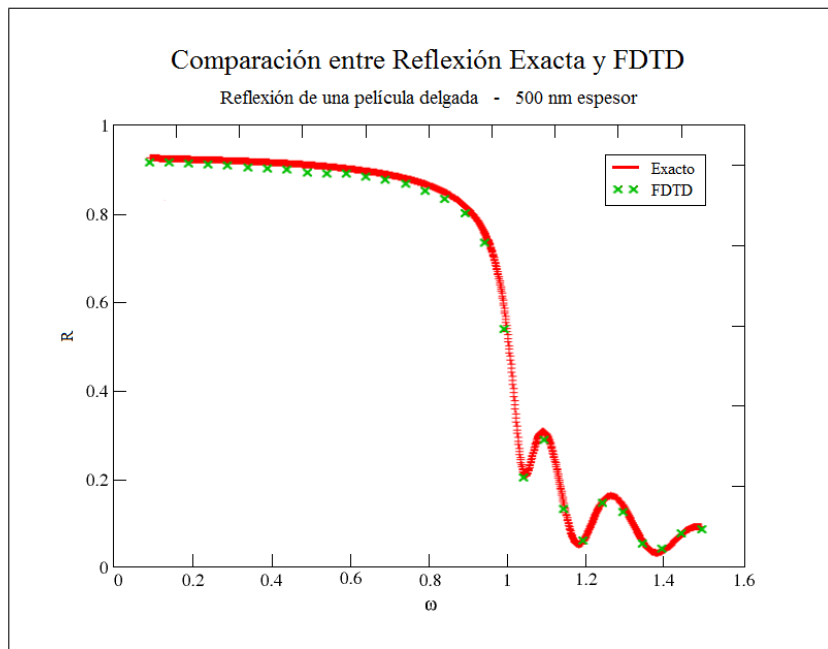


Figura 3.3.1. Reflexión de una película delgada. Comparación de la curva exacta y la curva FDTD.

### 3.4. Capa de Acoplamiento Perfecto (PML)

Cuando se hace una simulación con FDTD existe un problema cuando el campo llega a la orilla del espacio de cómputo: se refleja (Fig. 3.4.1). Esta reflexión no deseada interfiere con los resultados, por lo que es necesario implementar una herramienta que elimine dicha reflexión.

Para solucionar este problema, primero es necesario comprender que el tamaño del área simulada por el FDTD es limitada por nuestros recursos computacionales. En el presente caso, tenemos una simulación en dos dimensiones y nuestro código fuente contiene matrices bidimensionales para el valor de todos los campos ( $H_z$ ,  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $E_x$ ,  $E_y$ ), así como algunas otras matrices que empleamos.

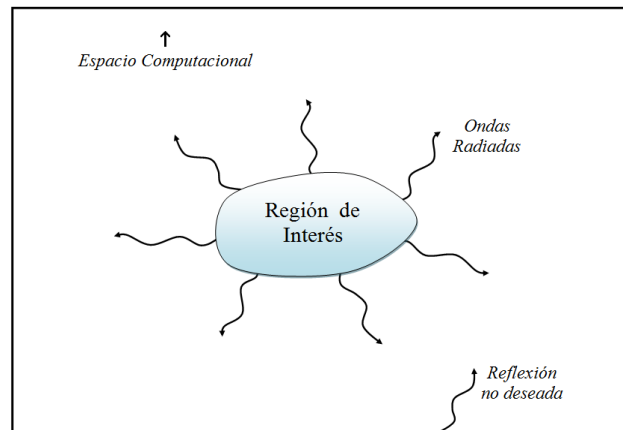


Figura 3.4.1. Esquema de un problema de electrodinámica, donde algunas ondas escapan al infinito.

Una de las herramientas más utilizadas para solucionar este problema (Fig. 3.4.2) es el método llamado *Perfectly Matched Layer*, PML<sup>[24]</sup>. A continuación explicaremos brevemente las condiciones y requisitos para emplear PML.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Consulte el Apéndice D, pág. 160, para mayor explicación.

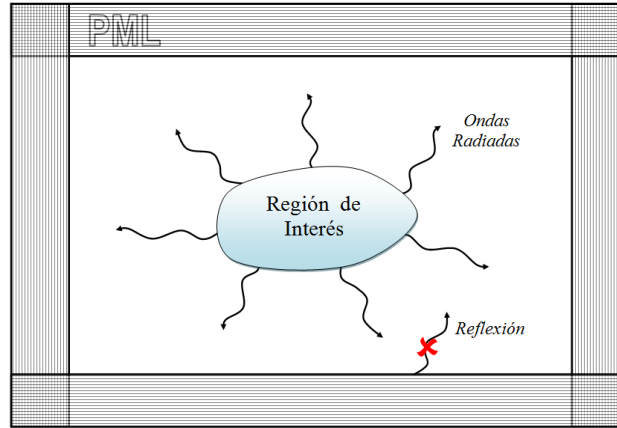


Figura 3.4.2. Esquema del mismo problema, con el espacio computacional truncado por las PML.

### 3.5. Condiciones y Definición de las PML

El método PML y sus variantes posteriores, consisten básicamente en definir una capa ficticia que tenga igual impedancia que su capa contigua para toda frecuencia y para todo ángulo. Esta capa es capaz de absorber todo lo que llegue a ella, evitando así la reflexión.

Para lograr estas condiciones se introducen absorción y constantes ficticias que simulan respuesta anisotrópica en  $\varepsilon$  y  $\mu$ . Hay dos condiciones<sup>[25]</sup> que se requieren para una PML:

(a) que la impedancia sea constante:

$$\eta_0 = \eta_m = \sqrt{\frac{\mu_{F_x}^*}{\varepsilon_{F_x}^*}} = 1$$

(b) y que en la dirección perpendicular a la frontera, la constante dieléctrica relativa y la permeabilidad relativa deben ser la inversa de ellas en las otras direcciones. Es decir, si vamos perpendiculares en la dirección  $x$  (análogamente si vamos a otra dirección),

entonces

$$\varepsilon_y = \frac{1}{\varepsilon_x}, \quad \varepsilon_z = \frac{1}{\varepsilon_x}$$

y también

$$\mu_y = \frac{1}{\mu_x}, \quad \mu_z = \frac{1}{\mu_x}.$$

Suponiendo que estas cantidades ficticias son complejas, de la forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_{F_x}^* &:= \varepsilon_{F_m} - \frac{\sigma_{D_m}}{i\omega\varepsilon_0} && \text{para } m = x \text{ ó } y \\ \mu_{F_x}^* &:= \mu_{F_m} - \frac{\sigma_{H_m}}{i\omega\mu_0} && \text{para } m = x \text{ ó } y \end{aligned}$$

la siguiente selección de parámetros satisface las condiciones impuestas por el inciso (b)

$$\varepsilon_{F_m} = \mu_{F_m} = 1$$

$$\frac{\sigma_{D_m}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{H_m}}{\mu_0} = \frac{\sigma_D}{\varepsilon_0}.$$

De donde

$$\eta_0 = \eta_m = \sqrt{\frac{\mu_{F_x}^*}{\varepsilon_{F_x}^*}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sigma(x)}{i\omega\varepsilon_0}}{1 - \frac{\sigma(x)}{i\omega\varepsilon_0}}} = 1$$

lo que satisface la condición (a). De las ecuaciones de Maxwell, y tomando la polarización TM con propagación sobre el plano  $x$ - $y$  se tiene la Ec. (D.1.9):<sup>2</sup>

$$-i\omega D_z \left( 1 - \frac{\sigma_D(x)}{i\omega\varepsilon_0} \right) = \frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\sigma_D(x)}{\varepsilon_0} D_z. \quad (3.5.1)$$

<sup>2</sup> Consulte el Apéndice D, pág. 160, para ver desarrollo algebraico.



Tomando la aproximación en diferencias finitas, se tiene que (3.5.1) queda como

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\sigma_D(x)}{\varepsilon_0} D_z &\simeq \frac{D_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - D_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta t} + \frac{\sigma_D(i)}{\varepsilon_0} \frac{D_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) + D_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{2} \\ &= D_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) \frac{1}{\Delta t} \left[ 1 + \frac{\sigma_D(i)}{2\varepsilon_0} \Delta t \right] - D_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j) \frac{1}{\Delta t} \left[ 1 - \frac{\sigma_D(i)}{2\varepsilon_0} \Delta t \right] \end{aligned}$$

que al unir con las derivadas espaciales y al utilizar la Ec. (3.2.2):

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} c = \frac{\Delta x / (2c)}{\Delta x} c = \frac{1}{2},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} D_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) &= gi3(i) D_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j) + gi2(i) \left(\frac{1}{2}\right) \left[ H_y^n \left(i + \frac{1}{2}, j\right) \right. \\ &\quad \left. - H_y^n \left(i - \frac{1}{2}, j\right) - H_x^n \left(i, j + \frac{1}{2}\right) - H_x^n \left(i, j - \frac{1}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Análogamente, para  $H_y$ , en un procedimiento casi idéntico, se obtiene

$$\begin{aligned} H_y^{n+1} \left(i + \frac{1}{2}, j\right) &= fi3 \left(i + \frac{1}{2}\right) H_y^n \left(i + \frac{1}{2}, j\right) \\ &\quad + fi2 \left(i + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left[ E_z^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, j\right) - E_z^{n-\frac{1}{2}} \left(i, j\right) \right] \end{aligned}$$

donde los nuevos parámetros  $gi2$  y  $gi3$  están dados por

$$gi2(i) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_D(i) \Delta t}{2\varepsilon_0}} \qquad gi3(i) = \frac{1 - \frac{\sigma_D(i) \Delta t}{2\varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma_D(i) \Delta t}{2\varepsilon_0}}$$

y

$$fi2\left(i + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_D\left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta t}{2\varepsilon_0}} \qquad fi3(i) = \frac{1 - \frac{\sigma_D\left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta t}{2\varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma_D\left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta t}{2\varepsilon_0}}.$$

Estas cuatro funciones  $gi2$ ,  $gi3$ ,  $fi2$  y  $fi3$  son los parámetros de las capas artificiales PML cuya función es hacer absorber los campos con los que esté en contacto. Fuera del espacio de las PML, los parámetros son la unidad.

# Sistema 2D

---

Como ya hemos mencionado en capítulos anteriores trabajamos sobre un sistema bidimensional pues hemos estado considerando un cilindro aislado sin restricciones a lo largo del eje  $z$ , es decir, hemos definido los campos de la forma  $e^{ik_z z}$ , tomando la sección transversal del cilindro sobre el plano  $x-y$ .

Al tomar en cuenta dos coordenadas en lugar de las tres se aminora considerablemente la complejidad del problema debido a la geometría del mismo.

### 4.1. Solución de las ecuaciones de Maxwell en 2D

Para aplicar el método de Diferencias Finitas en el Dominio Temporal, debemos reescribir las ecuaciones de Maxwell en base a la celda de Yee (Fig. 4.1.1). Para esto tenemos que discretizar la derivada.

Para resolver las ecuaciones de Maxwell en 2D, propongamos

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_z(x, y, t) \hat{k}.$$

Separando en componentes

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{i} \partial_y E_z(x, y, t) - \hat{j} \partial_x E_z(x, y, t)$$

y

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{i}B_x(x, y, t) + \hat{j}B_y(x, y, t).$$

Usando la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t),$$

se tiene componente a componente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} E_z(x, y, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} B_x(x, y, t) \\ -\frac{\partial}{\partial x} E_z(x, y, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} B_y(x, y, t). \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) &= -\hat{i}\partial_z H_y(x, y, t) + \hat{j}\partial_z H_x(x, y, t) \\ &\quad + \hat{k}[\partial_x H_y(x, y, t) - \partial_y H_x(x, y, t)]. \end{aligned}$$

Como  $H(x, y, t)$  no tiene dependencia en  $z$ ,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \hat{k}[\partial_x H_y(x, y, t) - \partial_y H_x(x, y, t)].$$

Usando la ley de Ampère-Maxwell, Ec. (A.2.2), se tiene

$$\partial_x H_y(x, y, t) - \partial_y H_x(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} D_z(x, y, t)$$

Resumiendo, las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse como un sistema de  $3 \times 3$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} E_z(x, y, t) = -\frac{\partial}{\partial t} B_x(x, y, t) \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_z(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} B_y(x, y, t) \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H_y(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial y} H_x(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} D_z(x, y, t). \quad (4.1.3)$$

Ahora bien, tomando la derivada en su forma discreta

$$\frac{d}{dx} f(x) \approx \frac{f(i + \frac{1}{2}) - f(i - \frac{1}{2})}{\Delta x}$$

reescribamos las ecuaciones (4.1.1), (4.1.2) y (4.1.3). Debido a la distribución que tiene la celda de Yee (Fig. 4.1.1), tomaremos puntos específicos para cada una de las tres ecuaciones del sistema. Para (4.1.1), tomemos el punto  $(x, y + \frac{\Delta y}{2}, t + \frac{\Delta t}{2})$ . Entonces

$$\frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j + 1) - E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta y} = -\frac{B_x^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) - B_x^n(i, j + \frac{1}{2})}{\Delta t}.$$

Ahora para (4.1.2), tomemos  $(x + \frac{\Delta x}{2}, y, t + \frac{\Delta t}{2})$ :

$$\frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(i + 1, j) - E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta x} = \frac{B_y^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) - B_y^n(i + \frac{1}{2}, j)}{\Delta t}.$$

Y por último, elijamos el punto específico  $(x, y, t)$  para la Ec. (4.1.3). Así obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{H_y^n(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} - \frac{H_x^n(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^n(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} \\ = \frac{D_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - D_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta t} \end{aligned}$$

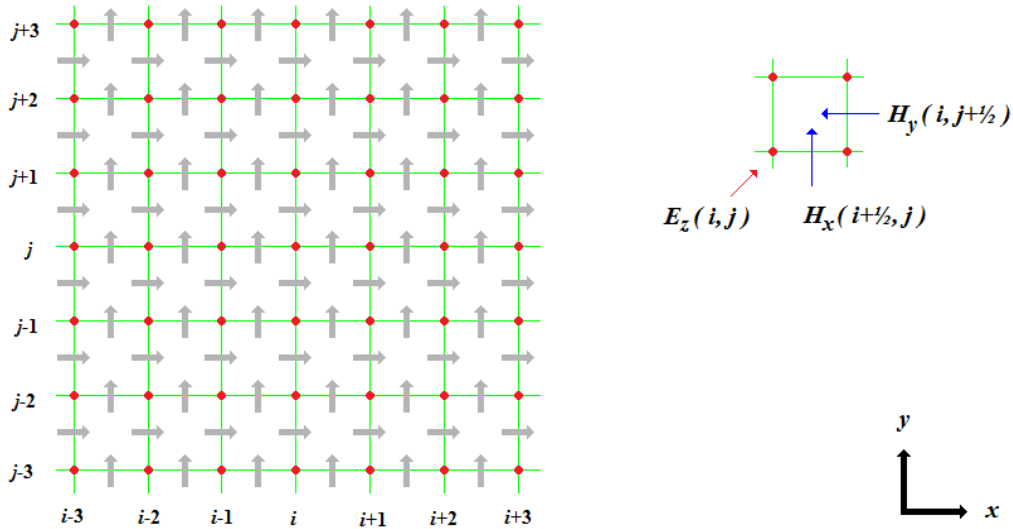


Figura 4.1.1. Celda de Yee. Malla para  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  en 2D.

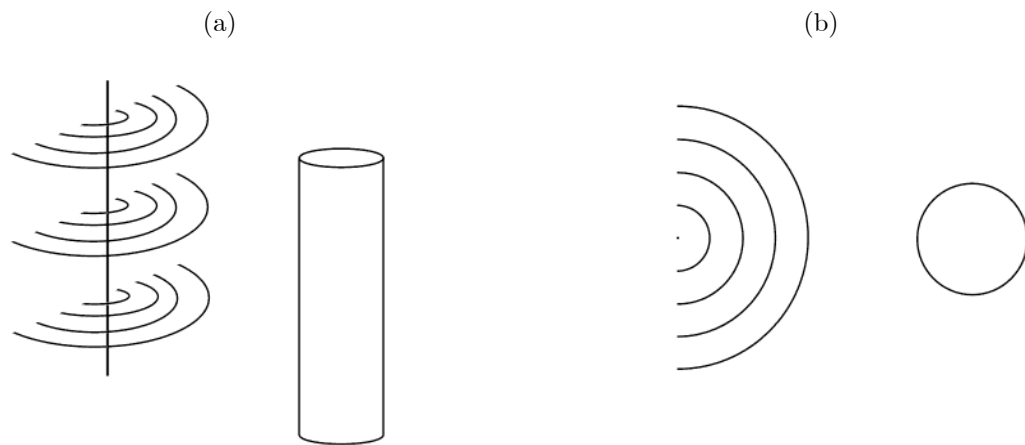
## 4.2. Fuentes de luz o de radiación

Para la presente tesis al momento de realizar simulaciones computacionales emplearemos dos tipos de fuentes: una fuente puntual y una onda plana. La fuente puntual en 2D debe entenderse como una antena cilíndrica de radio despreciable donde se define un campo oscilatorio en la superficie con una frecuencia central  $\omega_c$ , y escrito de la forma

$$H_z(x_0, y_0, t) = e^{-\frac{(t-t_0)^2}{(\Delta t)^2}} \text{sen}(\omega_c t).$$

La onda plana en 2D la definimos como un haz pulsado gaussiano con una frecuencia central y con dependencias en tiempo y espacio. Esta fuente es un pulso oscilatorio que se mueve en una dirección debido al efecto de las ecuaciones de Maxwell y no a la definición de la fuente misma, escrita de la forma

$$H_z(x, y_0, t) = e^{-\frac{(x-x_0)^2}{(\Delta x)^2}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{(\Delta t)^2}} \text{sen}(\omega_c t)$$



*Figura 4.2.1. Bosquejo de una fuente puntual en 2D y un cilindro metálico, (a) vista lateral y (b) vista superior.*

# Medios dispersivos con FDTD

---

Los fenómenos que incluyen medios dispersivos pueden ser modelados a través de la técnica FDTD. Su metodología está basada en la aplicación directa de transformadas de Fourier empleando variables complejas. Para simular dichos fenómenos, uno de los modelos que se pueden emplear es la función dieléctrica de Drude.

## 5.1. La Función Dieléctrica de Drude

Para poder implementar el uso de materiales dispersivos, podemos emplear del modelo de Drude. Sin embargo, al momento de querer utilizarlo en el método FDTD, nos enfrentaremos con el siguiente problema: las relaciones constitutivas dependen de la frecuencia  $\omega$  del campo. Es por ello que debemos reescribir la relación constitutiva  $\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$  en términos del tiempo  $t$ , a través de la transformada de Fourier<sup>[22]</sup>.

### 5.1.1. De $\vec{D}(\vec{r}, \omega)$ a $\vec{D}(\vec{r}, t)$

De la función material de Drude:<sup>1</sup>

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

---

<sup>1</sup> Consulte el Apéndice E, pág. 167, para ver el origen de la expresión.



nótese que

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} = \left(\frac{\omega_p^2}{i\gamma}\right) \frac{1}{\omega} + \left(\frac{\omega_p^2}{i\gamma}\right) \frac{1}{\omega + i\gamma}.$$

Luego, de la relación constitutiva (A.2.3) y de la transformada de Fourier (FT) expresada en (A.2.5), se tiene que el vector desplazamiento eléctrico está dado por

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

i.e.,

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - \left(\frac{\omega_p^2}{i\gamma}\right) \frac{1}{\omega} + \left(\frac{\omega_p^2}{i\gamma}\right) \frac{1}{\omega + i\gamma} \right] \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (5.1.1)$$

De los tres términos de la integral a resolver, observe que el primero se resuelve con la FT (A.2.5). Entonces nos queda

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{\omega_p^2}{i\gamma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega \\ &\quad + \frac{\omega_p^2}{i\gamma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}}{\omega + i\gamma} d\omega \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Facilitemos el álgebra definiendo:

$$I_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}}{i\omega} d\omega \quad (5.1.3)$$

$$I_2(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}}{\omega + i\gamma} d\omega.$$

Si hacemos

$$S(\omega) = \frac{1}{\omega + i\gamma}$$

entonces

$$I_2 = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) S(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (5.1.4)$$

Por lo tanto

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\omega_p^2}{\gamma} I_1(t) + \frac{\omega_p^2}{\gamma} I_2(t). \quad (5.1.5)$$

Resolvamos la segunda de (5.1.2). De (5.1.3), note que su derivada es la FT de  $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ :

$$\frac{d}{dt} I_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \equiv \vec{E}(\vec{r}, t).$$

Por lo que

$$I_1(t) = \int_0^t \vec{E}(\vec{r}, t') dt'. \quad (5.1.6)$$

Por último, para resolver  $I_2$  separaremos la integral en tres integrales y sustituiremos las FT de  $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$  y  $S(\omega)$  usando (A.2.6). Así

$$I_2(t) = \frac{1}{i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t') e^{i\omega t'} dt' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(t'') e^{i\omega t''} dt'' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt$$

i.e.,

$$I_2(t) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} S(t'') dt'' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'+t''-t)} dt.$$

Recordemos la función Delta:

$$\delta(t-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)} d\omega. \quad (5.1.7)$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \frac{1}{2\pi i \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t') S(t') 2\pi \delta(t' + t'' - t) dt' \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t') S(t') \delta(t'' - [t - t']) dt' \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t') S(t - t') dt'. \end{aligned}$$

Pero como sabemos que<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\gamma} d\omega \\ &= -\sqrt{2\pi} i e^{-\gamma t} \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \frac{-1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t') i\sqrt{2\pi} e^{-\gamma(t-t')} dt' \\ &= - \int_0^t \vec{E}(\vec{r}, t') e^{-\gamma(t-t')} dt'. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

<sup>2</sup> Consulte el Apéndice F, pág. 170, para ver desarrollo algebraico.

Finalmente, sustituyendo las Ecs. (5.1.6) y (5.1.9) en la Ec. (5.1.5) obtenemos

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\omega_p^2}{\gamma} \int_0^t \vec{E}(\vec{r}, t') dt' - \frac{\omega_p^2}{\gamma} \int_0^t \vec{E}(\vec{r}, t') e^{-\gamma(t-t')} dt'. \quad (5.1.10)$$

Esta expresión (5.1.10) nos permite emplear de manera temporal-dependiente el desplazamiento eléctrico en el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo, para medios dispersivos, escrito en términos de la función dieléctrica de Drude.

**Parte III**

**SECCIÓN EFICAZ  
DE ABSORCIÓN  
DE UN CILINDRO METÁLICO**

---

## Capítulo 6

# Vector de Poynting y Sección Eficaz

---

Un gran número de trabajos recientes centran su atención en los fenómenos causados por la interacción entre la luz y los metales. Algunos de ellos son acerca de resonancia de plasmones, propagación de luz en nanoarreglos como cristales fotónicos, aplicaciones en el área optoelectrónica y muchos más.

Varios trabajos experimentales muy recientes e incluso teóricos han mostrado resultados significativos acerca de estos fenómenos, y en particular sobre alambres con radio del orden de la longitud de onda o mucho menores. Sin embargo han dejado de lado la importancia de las relaciones de dispersión como medio para saber dónde excitar los modos de una estructura, en nuestro caso, cilíndrica<sup>[13,14,16,26]</sup>.

En la presente tesis, nos hemos apoyado en el trabajo que Pfeiffer, Economou y Ngai hicieron acerca de las relaciones de dispersión de un cilindro metálico aislado, pero además nuestra intención es relacionarlas con la sección eficaz de absorción cuando se incide luz en el nanocilindro de metal.

Para ello haremos incidir luz desde una fuente en un cilindro de plata, con sección transversal circular, sin tomar en cuenta restricciones a lo largo del eje  $z$ . Junto a esto, lograremos excitar los diversos modos del sistema colocando la fuente en diferentes distancias (del orden de la longitud de onda) a la superficie del metal.

Para lograr obtener la sección eficaz, haremos uso del vector de Poynting para calcular su integral con lo que obtendremos la energía por unidad de tiempo que entre o sale del sistema.

## 6.1. El vector de Poynting

El flujo de energía (con unidades de energía/área·tiempo,  $\omega/m^2s$ ) de un campo electromagnético es conocido como el *vector de Poynting* y se expresa como

$$\vec{S}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}(\vec{r}, \omega) \times \vec{H}^*(\vec{r}, \omega) \right] \quad (6.1.1)$$

donde  $\vec{S}$  representa un vector en la posición  $\vec{r}$  que proviene del promedio temporal de los campos complejos para las amplitudes de Fourier, cuya dirección y magnitud nos indica la energía por unidad de área y tiempo que están fluyendo por ese punto. Si integráramos el vector de Poynting alrededor de un área  $S_0$  que encierra a un volumen  $V$ , la integral resultante nos dará la energía por unidad de tiempo que entra o sale de ese volumen al instante  $t$ .

Así pues, al incidir una fuente monocromática sobre un objeto, la luz saldrá en todas direcciones con la misma frecuencia y podemos calcular, entre otras cosas, la energía total que atraviesa a una superficie  $S_0$  que encierra al sistema, empleando dicho vector de Poynting. La energía total al tiempo  $t$ , por unidad de tiempo estaría dada como

$$U(t) = \int_{S_0} \vec{S}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} \, ds \quad (6.1.2)$$

con  $\hat{n}$  un vector unitario apuntando hacia afuera de  $V$ , cuya superficie es  $S_0$ . Si  $U(t) > 0$  la energía sale del volumen, y viceversa.

Si integramos  $U(t)$  entre  $t_0$  y  $t$ , el resultado sería la energía total saliente de  $V$  en ese intervalo de tiempo. Si  $U(t)$  es periódico, entonces es conveniente calcular la cantidad

promediada, de la forma

$$v = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t U(t) dt' \quad (6.1.3)$$

donde  $v$  es energía por unidad de tiempo. Nótese también que los campos de la forma  $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \hat{x}$  y  $\vec{H}(z, t) = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \hat{z}$ , dan lugar a un vector de Poynting de la forma

$$\begin{aligned} \vec{S}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \vec{H}_0 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \hat{x} \times \hat{z} \\ &= \vec{E}_0 \vec{H}_0 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) (-\hat{y}) \end{aligned}$$

y promediando sobre un periodo de tiempo podemos obtener el flujo promedio de energía por unidad de área y tiempo. Para campos más generales, tales como haces, campos pulsados, entre otros,  $v$  nos daría la energía promedio por unidad de tiempo. Para encontrar la relación entre  $U(t)$  y  $U(\omega)$  debemos tomar la transformada de Fourier. Entonces

$$U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{i\omega t} dt. \quad (6.1.4)$$

Sustituyendo (6.1.2) en (6.1.4) se tiene

$$U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_0} \vec{S}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} ds e^{i\omega t} dt$$

i.e.,

$$U(\omega) = \int_{S_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{S}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \right] \cdot \hat{n} ds.$$

Por tanto

$$U(\omega) = \int_{S_0} \vec{S}(\vec{r}, \omega) \cdot \hat{n} ds. \quad (6.1.5)$$



Ahora, ya podemos ver la relación que existe entre el vector de Poynting  $\vec{S}(\vec{r}, t)$  y los campos  $\vec{E}(\omega)$  y  $\vec{H}(\omega)$ :

$$\vec{S}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{S}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (6.1.6)$$

## 6.2. Sección Eficaz de Absorción, Dispersión y Extinción

Consideremos la energía total dispersada en todas direcciones igual a la onda incidente en el área  $\sigma_{sca}$ . Asimismo, la energía absorbida por el objeto al que incide el haz puede definirse igual a la energía incidente en el área  $\sigma_{abs}$ . Y la energía removida del flujo original puede definirse como la energía que incide en el área  $\sigma_{ext}$ . Por la ley de conservación de energía, se debe tener que

$$\sigma_{ext} = \sigma_{sca} + \sigma_{abs}.$$

Las cantidades  $\sigma_{sca}$ ,  $\sigma_{abs}$  y  $\sigma_{ext}$  son llamadas respectivamente la Sección Eficaz de Dispersión, Absorción y Extinción<sup>[18]</sup>, y pueden ser obtenidas dados los campos eléctrico y magnético dependientes del tiempo:  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{H}(\vec{r}, t)$ . Ahora bien, como los campos totales en cada punto del espacio pueden escribirse como la suma de la parte incidente y la parte dispersada<sup>[19,3]</sup>, es decir,

$$\vec{E} = \vec{E}_{inc} + \vec{E}_{sca} \quad \vec{H} = \vec{H}_{inc} + \vec{H}_{sca}.$$

El valor de  $U$  con los campos totales representa la energía absorbida por el sistema, lo que implica que

$$P_{abs}(\omega) = - \int_{S_0} \vec{S}(\omega) \cdot \hat{n} ds = - \int_{S_0} \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}(\omega) \times \vec{H}^*(\omega) \right] \cdot \hat{n} ds \quad (6.2.1)$$

donde el signo de la segunda integral se debe a que la potencia absorbida por el sistema  $P_{abs}$  tiene el sentido opuesto de  $\hat{n}$ , lo que hace que siempre sea negativa porque la energía entrante es mayor a la dispersada. Entonces podemos definir la sección eficaz de absorción (*absorption cross section*) como

$$\sigma_{abs} = \frac{P_{abs}}{I_{inc}}$$

i.e.,

$$\sigma_{abs} = -\frac{1}{2I_{inc}} \int_{S_0} \text{Re} \left[ \vec{E} \times \vec{H}^* \right] \cdot \hat{n} ds \quad (6.2.2)$$

donde  $I_{inc}$  es la magnitud del flujo incidente por unidad de área. Por otro lado, la potencia dispersada  $P_{sca}$  puede obtenerse con la integral de la componente dispersada del vector de Poynting:

$$P_{sca}(\omega) = \int_{S_0} \vec{S}_{sca}(\omega) \cdot \hat{n} ds = \int_{S_0} \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}_{sca}(\omega) \times \vec{H}_{sca}^*(\omega) \right] \cdot \hat{n} ds. \quad (6.2.3)$$

$P_{sca}$  siempre es positiva porque está en el mismo sentido que  $\hat{n}$ , es decir, sale del área de integración. Entonces la sección eficaz de dispersión (*scattering cross section*) es

$$\sigma_{sca} = \frac{P_{sca}}{I_{inc}}$$

i.e.,

$$\sigma_{sca} = \frac{1}{2I_{inc}} \int_{S_0} \text{Re} \left[ \vec{E}_{sca} \times \vec{H}_{sca}^* \right] \cdot \hat{n} ds. \quad (6.2.4)$$

Finalmente, al sumar (6.2.2) y (6.2.4) obtenemos la sección eficaz de extinción  $\sigma_{ext}$ , o sea, la energía total removida del flujo original. Esto significa que

$$\begin{aligned} \sigma_{ext} &= -\frac{1}{2I_{inc}} \int_{S_0} \text{Re} \left[ \vec{E} \times \vec{H}^* \right] \cdot \hat{n} ds + \frac{1}{2I_{inc}} \int_{S_0} \text{Re} \left[ \vec{E}_{sca} \times \vec{H}_{sca}^* \right] \cdot \hat{n} ds \\ &= -\frac{1}{2I_{inc}} \int_{S_0} \text{Re} \left[ \left( \vec{E}_{inc} + \vec{E}_{sca} \right) \times \left( \vec{H}_{inc} + \vec{H}_{sca} \right)^* - \vec{E}_{sca} \times \vec{H}_{sca}^* \right] \cdot \hat{n} ds \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{2I_{inc}} \int_{S_0} \text{Re} \left[ \vec{E}_{inc} \times \vec{H}_{inc}^* + \vec{E}_{inc} \times \vec{H}_{sca}^* + \vec{E}_{sca} \times \vec{H}_{inc}^* + \vec{E}_{sca} \times \vec{H}_{sca}^* - \vec{E}_{sca} \times \vec{H}_{sca}^* \right] \cdot \hat{n} ds.$$

Como la integral de una suma real, es la suma de integrales, tenemos por tanto cinco de ellas. Observe que de estas cinco integrales, la primera no contribuye porque la energía entrante al área  $S_0$  es la misma que la saliente. También observe que la suma de las últimas integrales se anulan. Por lo tanto

$$\sigma_{ext} = -\frac{1}{2I_{inc}} \int_{S_0} \text{Re} \left[ \vec{E}_{inc} \times \vec{H}_{sca}^* + \vec{E}_{sca} \times \vec{H}_{inc}^* \right] \cdot \hat{n} ds.$$

Para evitar el signo negativo podemos conjugar uno de los dos sumando. Esto hace que sección eficaz de extinción  $\sigma_{ext}$  pueda ser escrita como

$$\sigma_{ext} = \frac{1}{2I_{inc}} \int_{S_0} \text{Re} \left[ \vec{E}_{inc}^* \times \vec{H}_{sca} + \vec{E}_{sca} \times \vec{H}_{inc}^* \right] \cdot \hat{n} ds. \quad (6.2.5)$$

### 6.3. Teorema Óptico

En física existe una ley fundamental que relaciona la sección eficaz de extinción  $\sigma_{ext}$  con la parte imaginaria de la amplitud de dispersión, conocida como el Teorema Óptico. A saber, si los campos están escritos explícitamente como

$$\vec{E}_{inc} = E_0 \vec{\varepsilon}_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}$$

$$\vec{H}_{inc} = \frac{1}{ck} \vec{k}_0 \times \vec{E}_{inc}$$

donde  $k = \left| \vec{k}_0 \right|$ , al sustituirlos en la Ec. (6.2.5), se obtiene

$$\sigma_{ext} = \frac{1}{2I_{inc}} \operatorname{Re} \left\{ E_0^* \int_{S_0} e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} \left[ \vec{\varepsilon}_0^* \cdot (\hat{n} \times \vec{H}_{sca}) + \vec{\varepsilon}_0^* \cdot \frac{\vec{k}_0 \times (\hat{n} \times \vec{E}_{sca})}{kc} \right] ds \right\}$$

Por otra parte la radiación dispersada con un vector de onda  $\vec{k}$  y una polarización  $\vec{\varepsilon}_0$  se define como<sup>1</sup>

$$\vec{\varepsilon}_0^* \cdot \vec{f}(\vec{k} = \vec{k}_0) = \int_{S_0} e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}} \left[ \omega \vec{\varepsilon}_0^* \cdot (\hat{n} \times \vec{H}_{sca}) + \vec{\varepsilon}_0^* \cdot [\vec{k}_0 \times (\hat{n} \times \vec{E}_{sca})] \right] ds$$

De estas dos últimas expresiones se obtiene el resultado conocido como Teorema Óptico:

$$\sigma_{ext} = \frac{1}{k} \operatorname{Im} \left[ \vec{\varepsilon}_0^* \cdot \vec{f}(\vec{k} = \vec{k}_0) \right] \quad (6.3.1)$$

donde  $\vec{f}$  es la amplitud normalizada de dispersión, definida respecto a la amplitud de la onda incidente y  $\vec{k}$  es el vector de onda en la dirección de observación  $\vec{k}_0$ . Si hablamos de radiación electromagnética, esta es indicada en la Ec. (6.3.1) por la amplitud de  $\vec{\varepsilon}_0^* \cdot \vec{f}$  para radiación dispersada con la misma polarización final e inicial.

Este teorema muestra que la amplitud no puede ser expresada puramente como un valor real y que tiene una parte imaginaria en la dirección  $\vec{k}_0$ , lo que significa que podemos expresar dicha amplitud como una integral sobre toda la sección eficaz total y obtener así una relación que puede ser comprobada experimentalmente. En palabras simples, el Teorema Óptico muestra que la parte imaginaria de la amplitud frontal  $\vec{f}(\vec{k} = \vec{k}_0)$  es proporcional a  $\sigma_{ext}$ .

Las aplicaciones que tiene este teorema son muy amplias. Simplemente la notación de la Ec. (6.3.1) corresponde a la usada convencionalmente en mecánica cuántica. En esta área de la física la amplitud del scattering importante es la que hace que no haya

<sup>1</sup> Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3a Ed.; pág. 485.

---

cambios en los estados del spin en las partículas. La generalización del Teorema Óptico hace que su uso abarque el scattering elástico y el no-elástico. Incluso hay razones importantes para pensar que la expresión (6.3.1) sea válida en scattering relativista ya que su fundamentación depende únicamente de la unicidad de  $\vec{S}$ .

# Sección Eficaz de Absorción a través de diferencias de energía

---

En este capítulo comentaremos brevemente una de las técnicas que fueron diseñadas para obtener la sección eficaz de absorción de un cilindro de metal aislado. Dicho método consiste en calcular las diferencias entre los promedios de los máximos y mínimos de la transformada de Fourier del campo electromagnético, para un tiempo  $t$  grande.

## 7.1. Obtención de la Sección Eficaz de absorción

Una vez obtenidas las relaciones de dispersión, de acuerdo a los resultados presentados en el Capítulo 2 donde presentamos el comportamiento de los modos virtuales radiativos para un cilindro de metal aislado, se calcula la integral del vector de Poynting de una superficie que rodea al cilindro con la finalidad de estimar la diferencia de energía entrante y saliente, así como la integral del campo incidente con la finalidad de normalizar el resultado. Por conservación de energía, la cantidad que no cruza la superficie hacia afuera es la cantidad de energía que el cilindro absorbe, pues la energía que no está en contacto con el cilindro y la que se disipa, cruzan la mencionada superficie. Finalmente se procede a calcular la transformada de los campos obteniéndose el flujo de la energía promedio que, en otras palabras, es la sección eficaz de absorción a través de las diferencias de energía entrante y saliente de un volumen. Estas diferencias se

realizan para un tiempo  $t$  grande, cuando los campos se han estabilizado.

Empleando esta técnica se definió en primera instancia un cilindro infinito de metal de 25 nm de radio y con una absorción de  $\gamma = \omega_p/10$ , además de que la fuente electromagnética se colocó a varias longitudes de onda de la superficie de la partícula metálica. En las figuras 7.1.1 y 7.1.2 se presenta la sección eficaz de absorción a través de diferencias de energía al probar la estabilidad, definiendo dos posiciones de la fuente ( $2.0 \lambda_p$  una más alejada que la otra) y a la vez dos tamaños de la malla computacional.

Sin embargo, consideramos esta técnica poco conveniente pues a partir de la diferencia de grandes cantidades se obtenía unas muy pequeñas, lo cual podría facilitar errores por cuestiones de ruido. Este inconveniente nos llevó a diseñar otros métodos para calcular la potencia absorbida como el presentado en el siguiente capítulo donde se realiza la integral directa del producto interior sobre el campo eléctrico  $\vec{E}$  y la densidad de corriente  $\vec{J}$ .

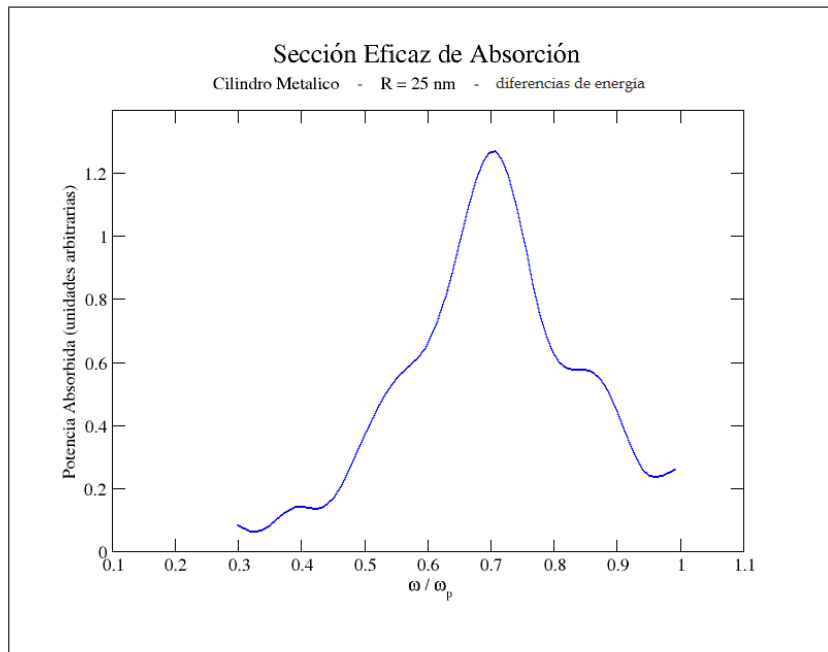


Figura 7.1.1. Sección eficaz de absorción. Diferencia de energías.  
Cilindro de plata con radio 25 nm. Malla de  $24 \times 24 \lambda_p$ .

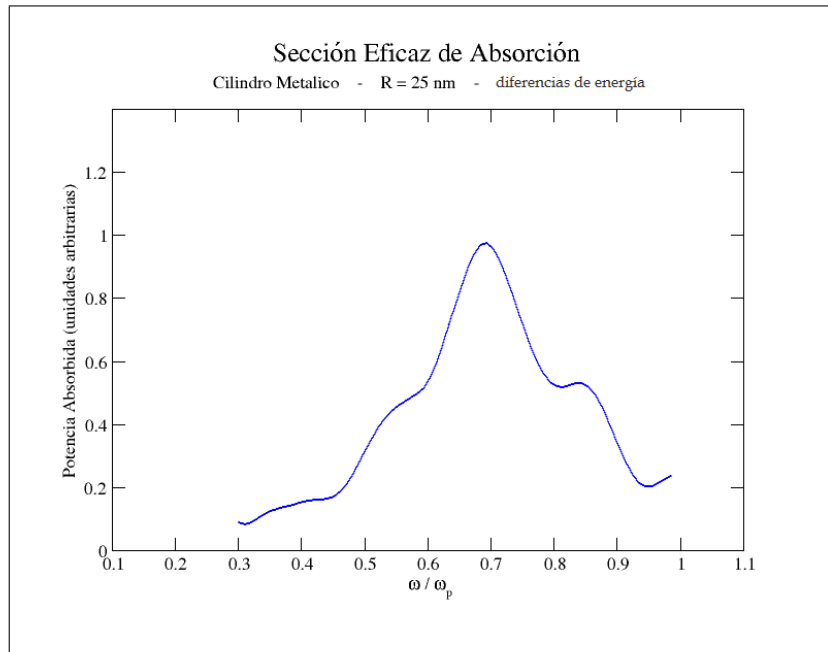


Figura 7.1.2. Sección eficaz de absorción. Diferencia de energías.  
Cilindro de plata con radio 25 nm. Malla de  $26 \times 26 \lambda_p$ .

A pesar de esto, los resultados de la sección eficaz de absorción mediante el cálculo de diferencias de energía muestra una gran similitud con los resultados presentados más adelante al analizar un cilindro aislado con el mismo radio<sup>1</sup> empleando la integral directa de  $\vec{E} \cdot \vec{J}$  dentro del cilindro de metal. El hecho de que dos técnicas diferentes nos arrojen un comportamiento muy similar de la sección eficaz nos da señal de un buen resultado.

<sup>1</sup> Cfr. Figs. 7.1.1 y 7.1.2, con Fig. 10.1.4.



# Cálculo directo de la Energía Absorbida: $\int \vec{E} \cdot \vec{J}$

---

Después de haber desarrollado distintos métodos para poder obtener la sección eficaz de absorción del cilindro metálico aislado encontramos que el mejor era a través de la transformada de Fourier del campo eléctrico  $\vec{E}$  y de la densidad de corriente  $\vec{J}$ , en  $\omega$ , para cada punto en la sección transversal de dicho cilindro donde se lleva a cabo la integral para obtener la absorción de energía, normalizada apropiadamente.

## 8.1. Energía absorbida por un sistema metálico

A partir de la mecánica de Newton, es posible obtener una expresión que represente la energía disipada por unidad de volumen. A saber, el trabajo  $W$  realizado sobre una partícula sometida a una fuerza  $\vec{F}$  en una trayectoria  $S$  puede escribirse como

$$W = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Luego,

$$W = \int_S \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_0^t \vec{F} \cdot \vec{v} dt'$$

en el tiempo de la trayectoria. Si tenemos una densidad  $n$  de partículas por unidad de

volumen, entonces el trabajo  $W$  por unidad de volumen es

$$W_n = \int_0^t \vec{F} \cdot (n \vec{v}) dt'.$$

Si se trata de electrones con carga  $q = -e$ , tendríamos que  $\vec{F} = -e \vec{E}$ . Entonces

$$W_n = - \int_0^t \vec{E} \cdot (ne \vec{v}) dt'$$

pero  $\vec{J} = -ne \vec{v}$ . Por lo tanto

$$W_n = \int_0^t \vec{E}(t) \cdot \vec{J}(t) dt. \quad (8.1.1)$$

Así pues, se ha encontrado una expresión que calcula el trabajo, es decir la energía disipada por unidad de volumen de un sistema metálico en un tiempo  $t$ .

## 8.2. Barra de sección transversal arbitraria

Consideremos el eje  $z$  a lo largo de un cilindro y consideremos su sección transversal dada por alguna función arbitraria  $f(x, y)$ . La energía disipada en una barra metálica, por unidad de volumen, es dada por la Ec. (8.1.1):

$$W_n = \int_0^t \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dt.$$

Como los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{J}$  no dependen de la coordenada  $z$ , entonces la energía disipada en un tramo de longitud  $L$  sería

$$\begin{aligned} U(t) &= \int_V W_n dv \\ &= L \int_S W_n da \\ &= L \int_S da \int_0^t \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dt \end{aligned}$$

donde  $S$  es el área de la sección transversal. Luego, la energía por unidad de longitud sería  $u = \frac{U}{L}$ . Ahora, escribamos  $U$  en términos de la frecuencia  $\omega$ , pasando  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  a la forma  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, \omega)$  y  $\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}, \omega)$ . Para facilitar la notación, llamaremos simplemente a  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  como  $\vec{E}(t)$ , y así respectivamente a los demás campos. Sea

$$U_V(\vec{r}, \omega) = \int_0^\infty U(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt.$$

Entonces

$$\begin{aligned} U_V(\omega) &= L \int da \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \left\{ \int_0^t \vec{E}(t') \cdot \vec{J}(t') dt' \right\} \\ &= L \int da \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \left\{ \int_0^t \left( \int \vec{\mathcal{E}}(\omega_1) e^{-i\omega_1 t'} d\omega_1 \cdot \int \vec{\mathcal{J}}(\omega_2) e^{-i\omega_2 t'} d\omega_2 \right) dt' \right\} \\ &= L \int da \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \left\{ \int \vec{\mathcal{E}}(\omega_1) d\omega_1 \cdot \int \vec{\mathcal{J}}(\omega_2) d\omega_2 \int_0^t e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t'} dt' \right\} \\ &= L \int da \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \left\{ \int d\omega_1 \int d\omega_2 \vec{\mathcal{E}}(\omega_1) \cdot \vec{\mathcal{J}}(\omega_2) \int_0^t e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t'} dt' \right\} \\ &= L \int da \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \left\{ \int d\omega_1 \int d\omega_2 \vec{\mathcal{E}}(\omega_1) \cdot \vec{\mathcal{J}}(\omega_2) \left( \frac{e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} - 1}{-i(\omega_1 + \omega_2)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Luego, si tomamos  $\frac{U_V(\omega)}{L}$ , tendríamos

$$\begin{aligned} \frac{U_V(\omega)}{L} &= \int da \int_0^\infty e^{i\omega t} dt \int d\omega_1 \int d\omega_2 \vec{\mathcal{E}}(\omega_1) \cdot \vec{\mathcal{J}}(\omega_2) \left( \frac{e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} - 1}{-i(\omega_1 + \omega_2)} \right) \\ &= \int da \int d\omega_1 \int d\omega_2 \vec{\mathcal{E}}(\omega_1) \cdot \vec{\mathcal{J}}(\omega_2) \int_0^\infty e^{i\omega t} \left( \frac{e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} - 1}{-i(\omega_1 + \omega_2)} \right) dt \\ &= \int da \int d\omega_1 \int d\omega_2 \vec{\mathcal{E}}(\omega_1) \cdot \vec{\mathcal{J}}(\omega_2) \int_0^\infty \left( \frac{e^{i(\omega - \omega_1 - \omega_2)t} - e^{i\omega t}}{-i(\omega_1 + \omega_2)} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int da \int d\omega_1 \int d\omega_2 \vec{\mathcal{E}}(\omega_1) \cdot \vec{\mathcal{J}}(\omega_2) \left( \frac{\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) - \delta(0)}{-i(\omega_1 + \omega_2)} \right) \\
&= \delta(0) \int da \int d\omega_1 \int d\omega_2 \frac{\vec{\mathcal{E}}(\omega_1) \cdot \vec{\mathcal{J}}(\omega_2)}{i(\omega_1 + \omega_2)} \\
&\quad + i \int da \int d\omega_1 \frac{\vec{\mathcal{E}}(\omega_1) \cdot \vec{\mathcal{J}}(\omega - \omega_1)}{\omega}.
\end{aligned}$$

Para  $\omega \neq 0$

$$\frac{U_V(\omega)}{L} = \int da \frac{i}{\omega} \int \vec{\mathcal{E}}(\omega_1) \cdot \vec{\mathcal{J}}(\omega - \omega_1) d\omega_1.$$

Así pues, para una onda monocromática,  $\vec{\mathcal{E}}(\omega_1)$  y  $\vec{\mathcal{J}}(\omega - \omega_1)$  serán funciones delta en  $\omega$  con  $\omega_0 := \omega - \omega_1 = \omega_1$ , lo que implica que  $\omega = 2\omega_0$  y salvo algún factor constante  $A$ , tendremos

$$\frac{U_V(2\omega_0)}{L} = A \int da \frac{i}{2\omega_0} \vec{\mathcal{E}}(\omega_0) \cdot \vec{\mathcal{J}}(\omega_0).$$

En resumen, la energía disipada por unidad de volumen en el tiempo  $t$  es

$$W_n = \int_0^t \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dt.$$

Si el volumen es de la forma  $V = LA$ , entonces

$$\begin{aligned}
U_V(t) &= \int_V W_n dv \\
&= \int_V dv \int_0^t \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dt \\
&= L \int_S da \int_0^t \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dt.
\end{aligned}$$

Esto implica que la energía disipada por unidad de longitud en el tiempo  $t$  es

$$u := \frac{U_v(t)}{L} = \int_S da \int_0^t \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dt.$$

Si consideramos una onda monocromática de la forma

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &\equiv \vec{E}(x, y, t) = \frac{1}{2} \left[ \vec{\mathcal{E}}(x, y) e^{-i\omega t} + \vec{\mathcal{E}}^*(x, y) e^{i\omega t} \right] \\ \vec{J}(\vec{r}, t) &\equiv \vec{J}(x, y, t) = \frac{1}{2} \left[ \vec{\mathcal{J}}(x, y) e^{-i\omega t} + \vec{\mathcal{J}}^*(x, y) e^{i\omega t} \right], \end{aligned}$$

a quienes llamaremos solamente  $\vec{E}$  y  $\vec{J}$  respectivamente para facilitar la notación, se tiene entonces que

$$u = \frac{1}{2} \int_S da \int_0^t \left[ \vec{\mathcal{E}} e^{-i\omega t} + \vec{\mathcal{E}}^* e^{i\omega t} \right] \cdot \left[ \vec{\mathcal{J}} e^{-i\omega t} + \vec{\mathcal{J}}^* e^{i\omega t} \right] dt.$$

Luego

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \int_S da \int_0^t \left[ \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}} e^{-2i\omega t} + \vec{\mathcal{E}}^* \cdot \vec{\mathcal{J}}^* e^{2i\omega t} + \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}}^* + \vec{\mathcal{E}}^* \cdot \vec{\mathcal{J}} \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_S \left( \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}}^* + \vec{\mathcal{E}}^* \cdot \vec{\mathcal{J}} \right) da + \frac{1}{2} \int_S da \int_0^t \left[ \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}} e^{-2i\omega t} + \vec{\mathcal{E}}^* \cdot \vec{\mathcal{J}}^* e^{2i\omega t} \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_S \left( \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}}^* + \vec{\mathcal{E}}^* \cdot \vec{\mathcal{J}} \right) da \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_S da \left[ \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}} \frac{(e^{-2i\omega t} - 1)}{-2i\omega} + \vec{\mathcal{E}}^* \cdot \vec{\mathcal{J}}^* \frac{(e^{2i\omega t} - 1)}{2i\omega} \right]. \end{aligned}$$

Si promediamos en un tiempo  $t$  muy grande, la segunda integral se hace nula pues  $(e^{-2i\omega t} - 1)$  oscila entre 0 y  $-2$ .

Por tanto tenemos

$$\langle u \rangle_t = \frac{1}{2} \int_S \left( \vec{\mathcal{E}}(x, y, \omega) \cdot \vec{\mathcal{J}}^*(x, y, \omega) + \vec{\mathcal{E}}^*(x, y, \omega) \cdot \vec{\mathcal{J}}(x, y, \omega) \right) da \quad (8.2.1)$$

que es la Potencia absorbida por unidad de longitud por unidad de tiempo en el cilindro.

Por otra parte, si sustituimos la densidad de corriente

$$\vec{J}(\omega) = \sigma(\omega) \vec{E}(\omega)$$

en el integrando la Ec. (8.2.1),  $\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}}^* + \vec{\mathcal{E}}^* \cdot \vec{\mathcal{J}}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}}^* + \vec{\mathcal{E}}^* \cdot \vec{\mathcal{J}} &= \vec{\mathcal{E}} \cdot (\sigma \vec{\mathcal{E}})^* + \vec{\mathcal{E}}^* \cdot (\sigma \vec{\mathcal{E}}) \\ &= \sigma^* |\vec{\mathcal{E}}|^2 + \sigma |\vec{\mathcal{E}}|^2 \\ &= (\sigma + \sigma^*) |\vec{\mathcal{E}}|^2 \\ &= 2 \operatorname{Re}(\sigma) |\vec{\mathcal{E}}|^2. \end{aligned}$$

Entonces, la Potencia absorbida también se puede escribir como

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_t &= \frac{1}{2} \int_S \left( 2 \operatorname{Re}(\sigma) |\vec{\mathcal{E}}|^2 \right) da \\ &= \int_S \operatorname{Re}(\sigma) |\vec{\mathcal{E}}|^2 da. \end{aligned}$$

# Sección Eficaz con FDTD para un cilindro metálico

---

Ahora, para calcular la sección eficaz de absorción por unidad de longitud e implementar el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo, prepararemos nuestras expresiones reescribiéndolas de manera discreta con la finalidad de programarlas en una rutina. Para un cilindro infinito, si consideramos que la luz se mueve en el plano  $x-y$  y el eje del cilindro está en dirección  $z$ , podemos calcular la energía por unidad de longitud del cilindro y por unidad de tiempo, integrando alrededor del cilindro a través de la expresión (6.1.2):

$$U(t) = \int_{S_0} \vec{S}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} ds$$

donde  $S_0$  es la superficie que encierra al cilindro. Debido a que  $\vec{S}$  está sobre  $x-y$ , las integrales con  $\hat{n} = \hat{z}$  no contribuyen.

## 9.1. Cilindro Infinito

Cuando decimos que un cilindro es “infinito” es muy claro que tal cosa no existe y que sólo es una idealización. Lo que en realidad se quiere decir es que su longitud es demasiado grande comparada con su diámetro.

Entonces, supongamos el caso donde el eje de un cilindro infinito de radio  $R$  está a lo

largo de  $z$  y consideremos que  $\vec{H}$  está a lo largo de dicho eje, de manera que

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_x \hat{x} + E_y \hat{y} \\ \vec{H} &= H_0 \hat{z}.\end{aligned}$$

Si tomáramos  $\vec{E} = E_0 \hat{z}$  y  $\vec{H} = H_x \hat{x} + H_y \hat{y}$  no obtendríamos efectos importantes, pues si el campo magnético  $\vec{H}$  tiene componentes perpendiculares al eje del cilindro no lograremos excitar las cargas y lo que sólo lograríamos es inducir una corriente debido al campo  $\vec{H}$ . Supongamos entonces que la luz polarizada incide manteniendo su vector de propagación en el plano  $x$ - $y$ . Como el cilindro es infinito, calcularemos la sección eficaz de absorción por unidad de longitud del cilindro. Es decir, sólo integraremos en el plano  $x$ - $y$  un perímetro arbitrario que encierre al cilindro.

Por facilidad al emplear FDTD, tomaremos una caja con esquinas  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  que encierre al cilindro. Suponiendo que ya tenemos los campos  $\vec{E}(\omega)$  y  $\vec{H}(\omega)$  y que la caja se encuentra en el vacío, tendremos el vector de Poynting  $\vec{S}$  promediado en el tiempo, expresado en la ecuación (6.1.1):

$$\vec{S}(\omega) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}(\omega) \times \vec{H}^*(\omega) \right]$$

por lo que

$$\begin{aligned}\vec{S}(\omega) &= \frac{1}{2} \text{Re} [(E_x \hat{x} + E_y \hat{y}) \times H_0^* \hat{z}] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} [H_0^* (E_x \hat{x} \times \hat{z} + E_y \hat{y} \times \hat{z})] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} [H_0^* (E_x \hat{y} + E_y \hat{x})] \\ &= \text{Re} \left[ \frac{E_0 H_0}{2} \right] (\cos \alpha \hat{y} + \text{sen } \alpha \hat{x}) \equiv \vec{S}_y + \vec{S}_x.\end{aligned}$$



Así tenemos de la Ec. (6.2.1), donde  $S_i$  son las caras de la caja que rodea al cilindro (Fig. 9.1.1), que el promedio de la energía absorbida es

$$P_{abs}(\omega) = \int_{S_1} \vec{S}(\omega) \cdot (-\hat{y}) da + \int_{S_2} \vec{S}(\omega) \cdot \hat{x} da + \int_{S_3} \vec{S}(\omega) \cdot \hat{y} da + \int_{S_4} \vec{S}(\omega) \cdot (-\hat{x}) da.$$

Como cada área está partida en secciones  $Ldx \rightarrow L\Delta x$ , para cada campo, se tiene entonces

$$P_{abs}(\omega) = L\Delta x \left\{ \sum_{\substack{i=x_0 \\ j=y_0}}^{x_1} [-S_y(i, j)] + \sum_{\substack{i=x_1 \\ j=y_0}}^{y_1} S_x(i, j) + \sum_{\substack{i=x_1 \\ j=y_1}}^{x_0} S_y(i, j) + \sum_{\substack{i=x_0 \\ j=y_1}}^{y_0} [-S_x(i, j)] \right\}.$$

Por lo tanto, la sección eficaz de absorción por unidad de área está dada como

$$P_{abs}(\omega) = \Delta x \left\{ \sum_{\substack{i=x_0 \\ j=y_0}}^{x_1} [-S_y(i, j)] + \sum_{\substack{i=x_1 \\ j=y_0}}^{y_1} S_x(i, j) + \sum_{\substack{i=x_1 \\ j=y_1}}^{x_0} S_y(i, j) + \sum_{\substack{i=x_0 \\ j=y_1}}^{y_0} [-S_x(i, j)] \right\}.$$

(9.1.1)

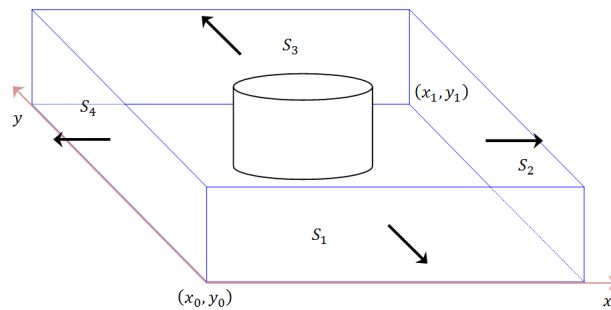


Figura 9.1.1. Caja de integración para calcular la sección eficaz de absorción.

# Simulación Numérica de la Sección Eficaz de un Cilindro Metálico

---

Definamos en el centro del espacio computacional un cilindro metálico aislado y procedamos a observar los fenómenos que resultan cuando interacciona con una fuente electromagnética que evoluciona en el tiempo. Para ello haremos uso del FDTD al momento de obtener la sección eficaz de absorción. En estas simulaciones hacemos uso del modelo de Drude empleando la  $\omega_p$  para plata, por lo que  $\lambda_p = 320$  nm.

Cuando fijamos la fuente puntual<sup>1</sup>  $H_z(x_0, y_0, t)$  en la rutina computacional (véase Fig. 4.2.1) lo que hacemos es poner las condiciones iniciales para el campo magnético  $\vec{H}$  fijando la polarización de la radiación resultante (que igual lo podemos hacer con el campo eléctrico  $\vec{E}$ ). Al lanzar la fuente puntual, el campo se dispersa en todas las direcciones sobre el plano  $x$ - $y$  y al llegar a los límites matemáticos de la matriz (que es de  $18 \times 18\lambda_p$  para todos los radio) se desvanece a muy alta eficiencia debido a las multicapas de PML que se definieron previamente. Así pues, la luz golpea al cilindro únicamente sobre la mitad frontal expuesta a dicha fuente. Sin embargo, el radio del cilindro, el material y algunas consideraciones más hacen que el campo pueda llegar o no a espaldas del cilindro, respecto a la fuente.

---

<sup>1</sup> Como estamos en 2D, recordemos que la fuente puntual significa en realidad una fuente lineal infinita que observamos en el plano. Dicho de otra manera, es como una antena cilíndrica de radio muy pequeño donde nosotros fijamos algún campo oscilatorio en su superficie.

En este tipo de fenómenos podemos ser capaces de excitar diversos modos del cilindro metálico dependiendo del radio, de la posición de la fuente y, muy importante, conociendo las relaciones de dispersión de sus modos virtuales. En el Capítulo 2 encontramos, a través de una rutina computacional que se diseñó empleando de manera analítica la ecuación (2.2.1), las relaciones de dispersión de los modos virtuales cuando  $k_z = 0$ , las cuales vimos que viven en la parte izquierda de la línea de luz.

Esta tesis tiene como finalidad encontrar un sólido y estrecho vínculo entre las relaciones de dispersión virtuales y los modos radiativos del cilindro metálico. Por ello, al analizar las relaciones de dispersión sabemos en qué frecuencia debe mostrarse una notable excitación de los modos, al colocar de manera adecuada la fuente.

## 10.1. Radio de 25 nm

Para el presente caso, hemos tomado un cilindro de plata infinito con sección transversal circular y con radio de 25 nm, que es mucho menor al de la longitud de onda (320 nm). Si tomamos frecuencias por debajo de la frecuencia de plasma ( $\omega/\omega_p < 1$ ), el campo penetra al cilindro y aunque decae de manera exponencial,<sup>2</sup> el cilindro no es capaz de crear ‘sombra’ respecto a la fuente del campo debido a los fenómenos originados por la dispersión y debido también a que una parte del campo logra atravesarlo. Asimismo, a causa de la geometría cilíndrica de la partícula metálica, se genera una onda propagándose alrededor suyo provocando que el campo rodee completamente al cilindro.<sup>3</sup>

La sección eficaz de absorción nos servirá para saber dónde ocurre mayor absorción de energía incidida por la fuente, que bien puede ser en términos de la frecuencia. En nuestro caso, cuando la constante de propagación  $k_z$  es nula, esperamos de antemano obtener algún resultado significativo mostrado en frecuencias, a partir de las relaciones de dispersión de los modos virtuales.

---

<sup>2</sup> Consulte la Fig. 1.4.2, pág. 11.

<sup>3</sup> Esto puede apreciarse mejor cuando el radio del cilindro no es tan pequeño respecto a la longitud de onda. Véase Fig. 10.3.5, pág. 81, de este Capítulo.

Y en efecto, al obtener la sección eficaz de absorción mediante el FDTD, representando frecuencia normalizada ( $\omega/\omega_p$ ) contra potencia absorbida ( $P_{abs}$ , en unidades arbitrarias) por medio de la Ec. (8.2.1), observamos un notable pico alrededor de  $0.7 \omega/\omega_p$  y otro ligeramente más pequeño cerca de  $0.67\omega/\omega_p$  (Fig. 10.1.1), sin tomar en cuenta un par de picos laterales, que pueden deberse al choque de la onda estacionaria consigo misma y que posiblemente no tengan significado directo con los modos del cilindro metálico. Cabe mencionar que para esta simulación definimos una absorción de  $\gamma = \omega_p/20$ .

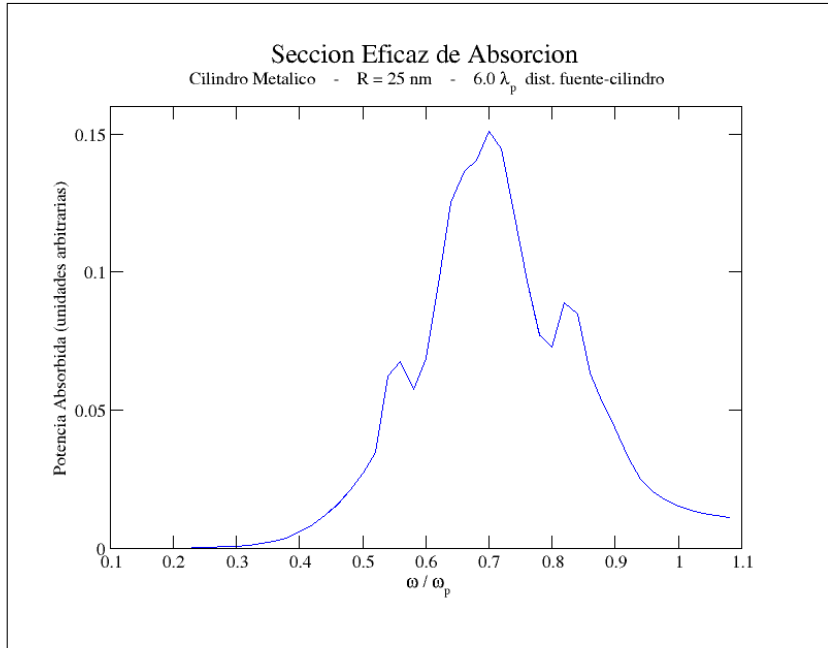


Figura 10.1.1. Sección eficaz de absorción. Distancia entre fuente y cilindro:  $6.0 \lambda_p$ .

Como habíamos comentado anteriormente, la posición de la fuente juega un papel importante al momento de excitar los modos del sistema. Sin embargo, debido al diámetro de este alambre, la diferencia entre la sección eficaz, cuando la fuente está a varias longitudes de onda de distancia del cilindro ( $6.0 \lambda_p$ , Fig. 10.1.1), cuando está a una longitud de onda de distancia (Fig. 10.1.2) y cuando está mucho más cerca de él ( $0.1 \lambda_p$  de distancia, Fig. 10.1.3), no presenta una diferencia cualitativa significativa. Incluso, al aumentar la absorción a  $\gamma = \omega_p/10$ , es notorio que la absorción de energía más importante ocurre alrededor  $0.7 \omega/\omega_p$  (Fig. 10.1.4).

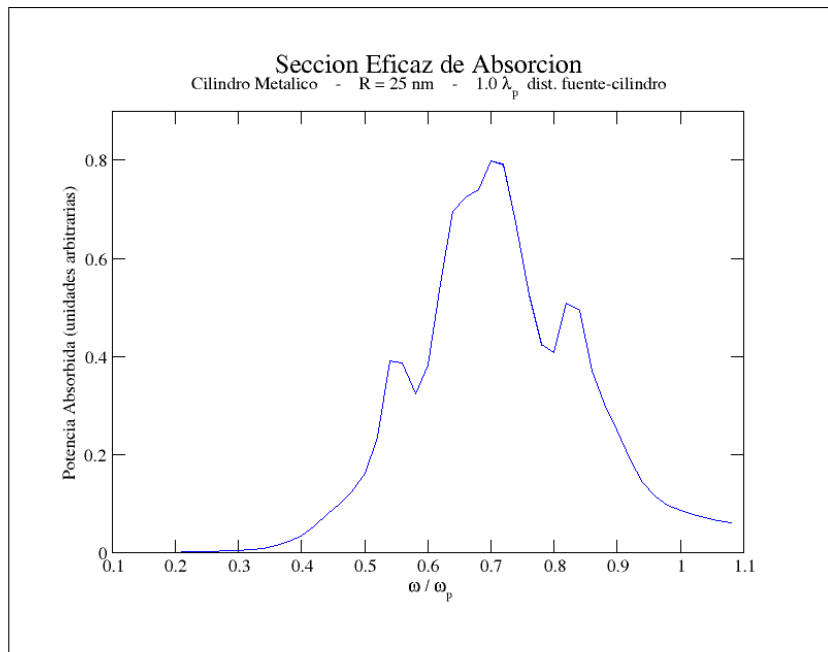


Figura 10.1.2. Sección eficaz de absorción. Distancia entre fuente y cilindro:  $1.0 \lambda_p$ .

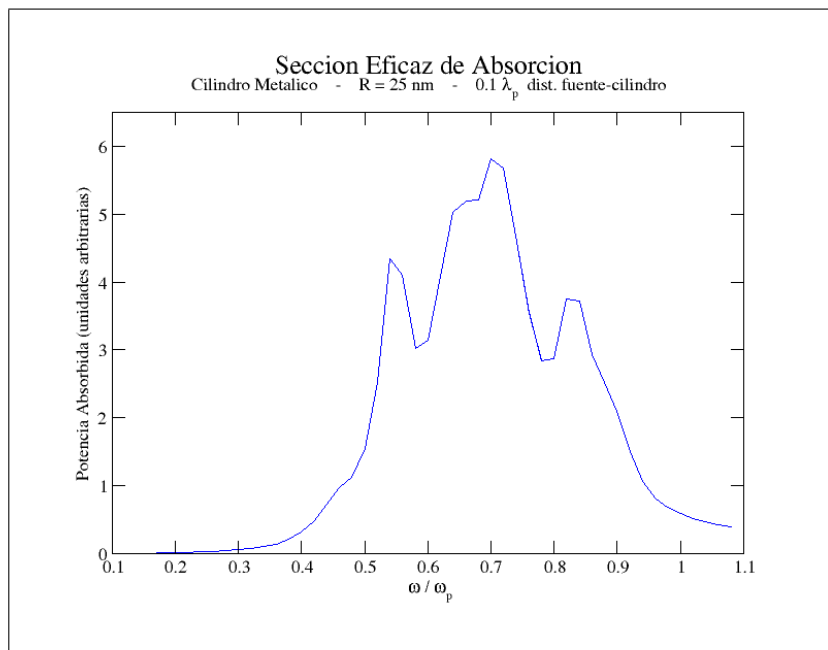


Figura 10.1.3. Sección eficaz de absorción. Distancia entre fuente y cilindro:  $0.1 \lambda_p$ .

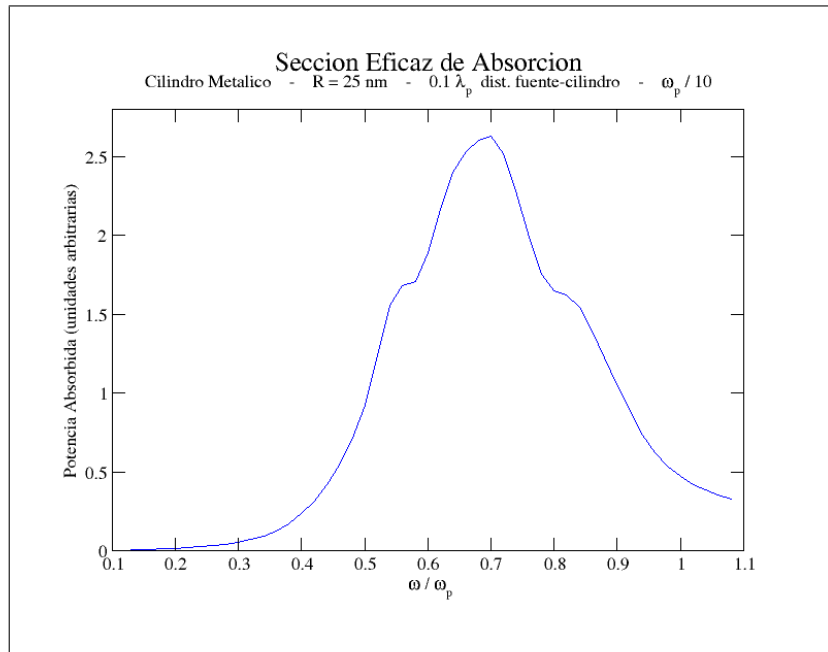
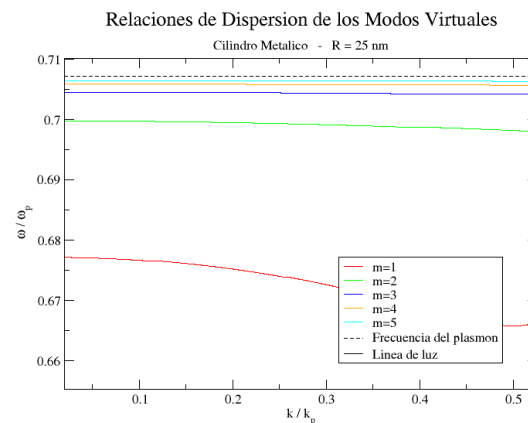
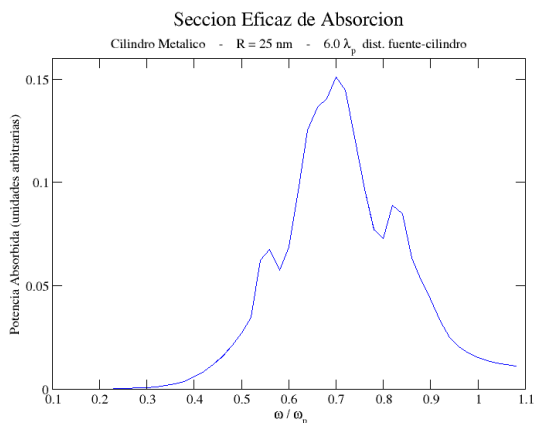


Figura 10.1.4. Sección eficaz de absorción.  
Distancia entre fuente y cilindro:  $0.1 \lambda_p$ . Absorción:  $\gamma = \omega_p/10$ .

Analicemos ahora la sección eficaz de absorción respecto a las relaciones de dispersión de los modos virtuales, obtenidas analíticamente en la Sección 2.3 (Fig. 10.1.1 y Fig. 2.3.2, respectivamente):



Observe como los picos más pronunciados de la sección eficaz ocurren justo en las frecuencias donde se hallan los modos virtuales, señalados por las relaciones de dispersión cuando  $k_z = 0$ .

El primer modo virtual,  $m = 1$ , lo ubicamos a través de nuestra rutina computacional, resolviendo numéricamente la ecuación trascendental (2.2.1), en  $0.677 \omega/\omega_p$  y el segundo ( $m = 2$ ) en  $0.6997 \omega/\omega_p$ , por mencionar los modos más importantes. Además note como los demás modos ( $m \geq 3$ ) se acumulan de forma asintótica en la frecuencia del plasmón  $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$ , o lo que es lo mismo,  $\omega/\omega_p = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0.7071$ ).

## 10.2. Radio de 100 nm

Ahora, definiendo un cilindro de plata de 100 nm de radio, con las mismas condiciones que el cilindro anterior, analizaremos la sección eficaz de absorción obtenida y esta vez notaremos la importancia de la posición de la fuente respecto a la partícula metálica.

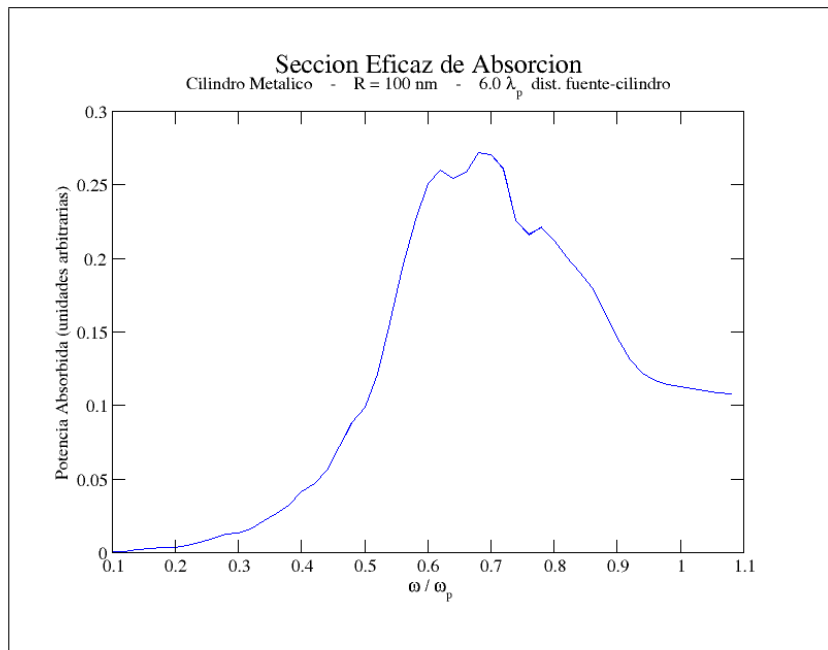


Figura 10.2.1. Sección eficaz de absorción. Distancia entre fuente y cilindro:  $6.0 \lambda_p$ .

Si colocamos la fuente electromagnética a una distancia de 6.0 veces la longitud de onda respecto a la orilla del cilindro logramos excitar modos cuyas potencias absorbidas máximas se localizan entre  $0.55$  y  $0.75 \omega/\omega_p$  (Fig. 10.2.1). A manera que acercamos la fuente al cilindro (véase Figs. 10.2.4 – 10.2.6) logramos excitar el modo virtual  $m = 2$ , que es la relación de dispersión mejor definida (mostrada en las Figs. 10.2.2 y 10.2.3). Observe como el pico central de la sección eficaz de absorción (Fig. 10.2.6) se estará más definido y muy próximo a  $0.6024 \omega/\omega_p$ , que es el valor analítico de la curva de relación de dispersión para  $m = 2$  en  $k_z = 0$ .

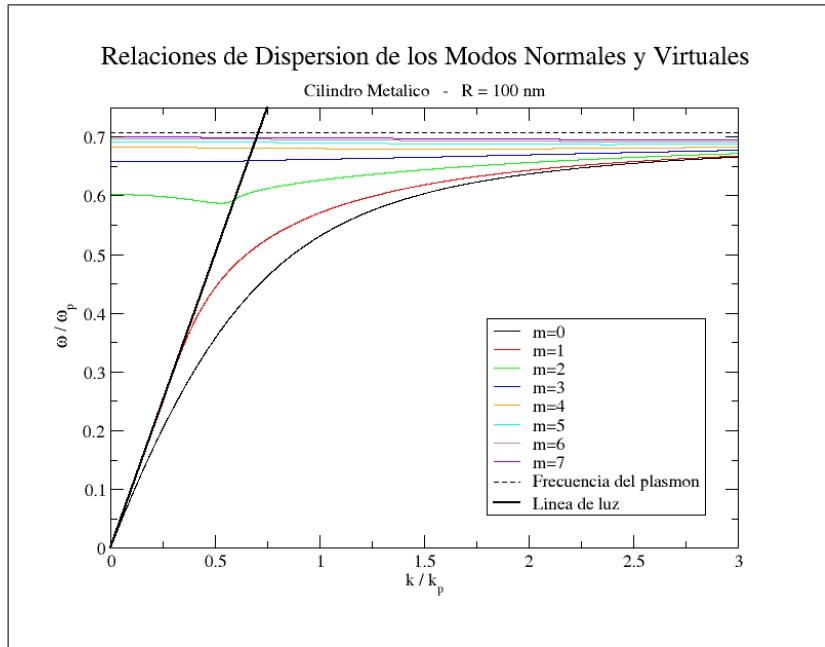


Figura 10.2.2. Acoplamiento de las relaciones de dispersión para  $m = 0$  hasta  $m = 7$ . Modos Normales y Virtuales.

Nótese que la curva del modo virtual  $m = 2$  (Fig. 10.2.3) está separada del resto de las relaciones de dispersión, por lo que su valor en frecuencias cuando  $k = 0$  marca el pico principal de la sección eficaz de absorción (Fig. 10.2.6).



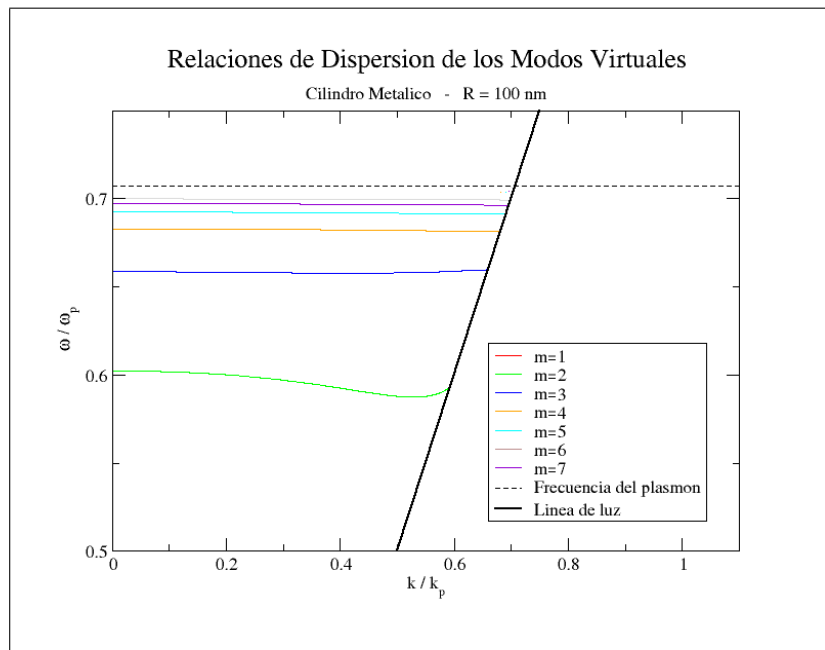


Figura 10.2.3. Relaciones de dispersión cerca de  $k_z = 0$ .

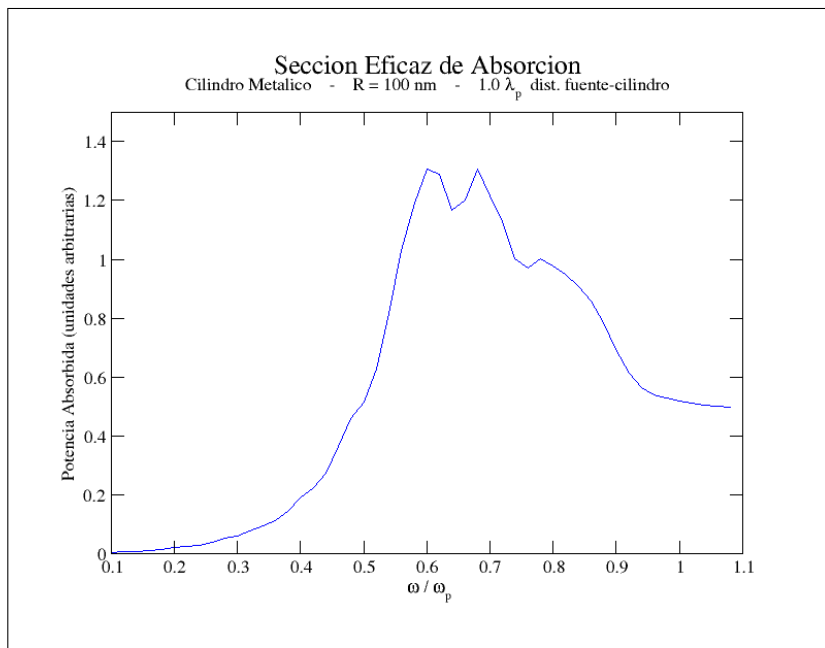


Figura 10.2.4. Sección eficaz de absorción. Distancia entre fuente y cilindro:  $1.0 \lambda_p$ .

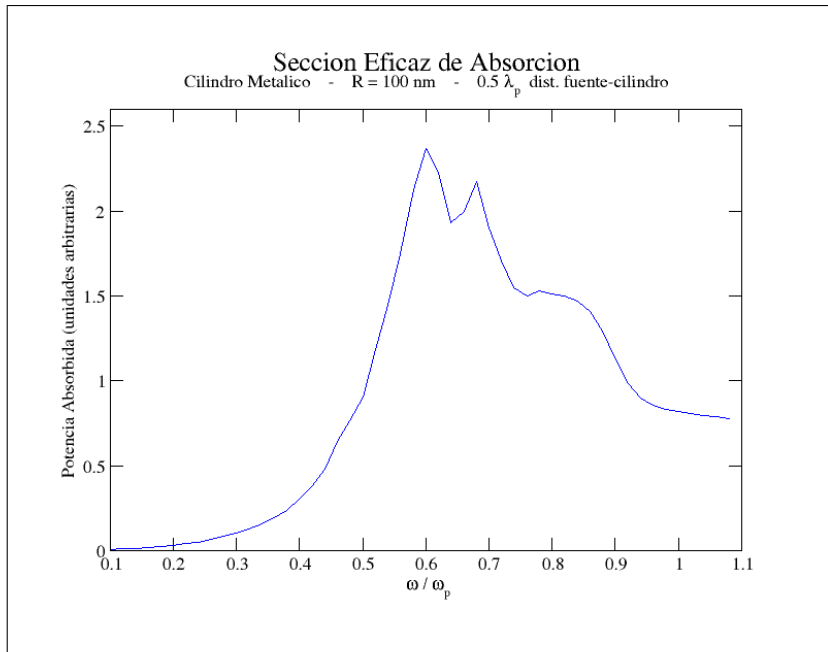


Figura 10.2.5. Sección eficaz de absorción. Distancia entre fuente y cilindro:  $0.5 \lambda_p$ .

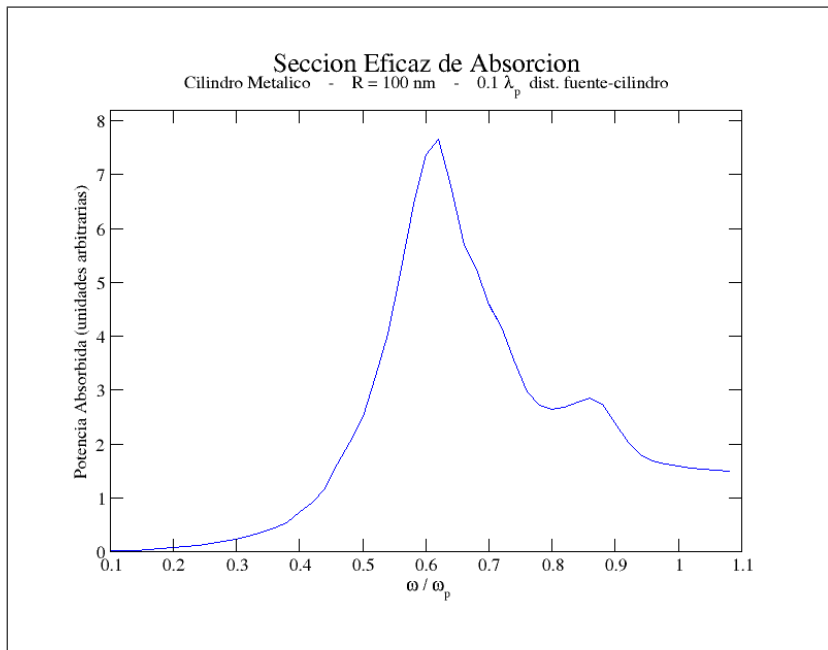


Figura 10.2.6. Sección eficaz de absorción. Distancia entre fuente y cilindro:  $0.1 \lambda_p$ .

## 10.3. Radio de 510 nm

Por último, analizaremos un poco más a detalle la correspondencia entre las relaciones de dispersión y la sección eficaz de absorción de un cilindro de 510 nm de radio y remarcaremos la importancia de la posición de la fuente respecto a la partícula metálica.

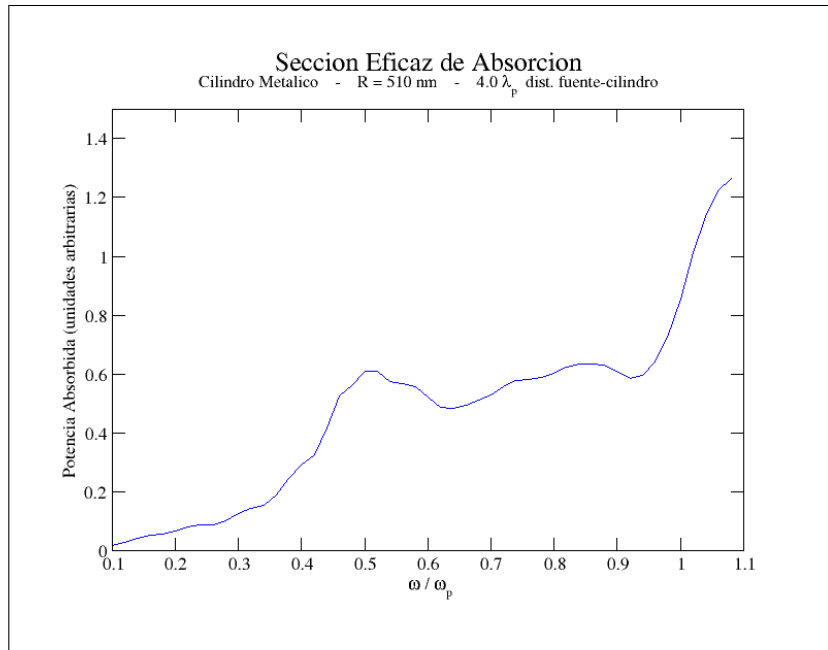


Figura 10.3.1. Sección eficaz de absorción. Distancia entre fuente y cilindro:  $4.0 \lambda_p$ .

En esta gráfica, donde la fuente se encuentra a 4.0 longitudes de onda de la superficie del cilindro, se muestra una gran absorción de energía arriba de la frecuencia de plasma, debido a que el diámetro del cilindro es más de tres veces  $\lambda_p$ , por lo que el cilindro se torna una guía de onda.

No obstante, nuestro actual interés se centra en frecuencias menores a la del plasma. Por ejemplo, cerca de  $0.5\omega/\omega_p$  puede notarse un pico que se debe a la excitación de ciertos modos del sistema que resultan de la acción del campo y de la distancia entre su fuente y el cilindro.

Si acercamos la fuente a la superficie del cilindro a una distancia de  $1.0 \lambda_p$  notaremos que el pico central está más pronunciado y definido (Fig. 10.3.2).

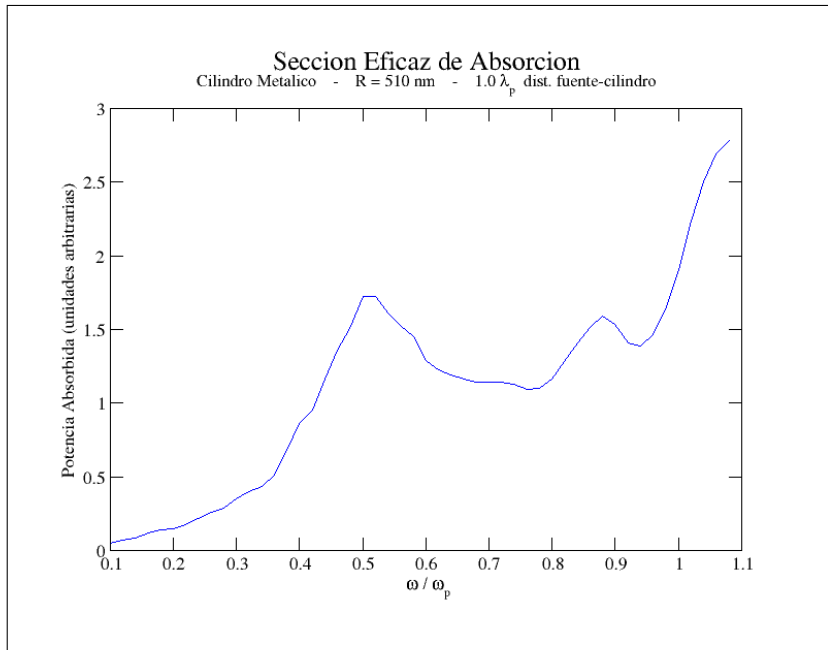


Figura 10.3.2. Sección eficaz de absorción. Distancia entre fuente y cilindro:  $1.0 \lambda_p$ .

Si reducimos aún más la distancia entre la fuente y la superficie metálica, notaremos como el pico central de potencia absorbida tiene un corrimiento de  $0.5 \omega / \omega_p$  (Fig. 10.3.1) a  $0.6 \omega / \omega_p$  (Fig. 10.3.4), pasando por un notorio cambio de máximo (Fig. 10.3.3). Observe como incluso el pico central se vuelve mucho más grande que el máximo generado por el comportamiento como guía de onda (Fig. 10.3.4) cuando se excitan de manera correcta los modos radiativos.

Al acercar la fuente al cilindro a distancias menores que la longitud de onda, se logran excitar modos que cuando la fuente se encuentra a varias  $\lambda_p$  de distancia no es posible. Este fenómeno es debido al acoplamiento que se da entre la longitud de onda de la fuente y la generada en la superficie del cilindro de metal. Es importante resaltar que si la longitud de onda del modo del cilindro es mayor a la longitud de onda generada alrededor del nanoalambre no se tendrán algunos acoplamientos (Fig. 10.3.1).

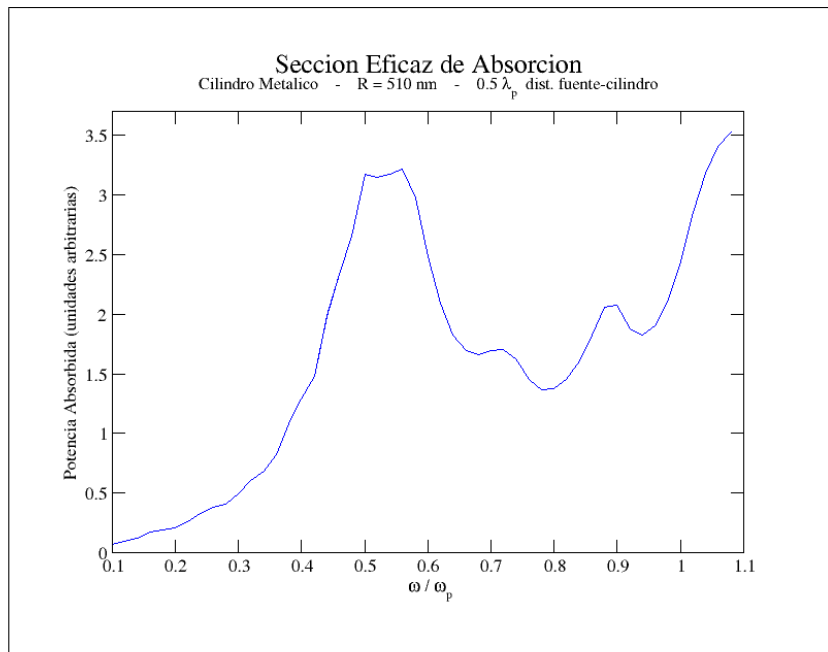


Figura 10.3.3. Sección eficaz de absorción. Distancia entre fuente y cilindro:  $0.5\lambda_p$ .

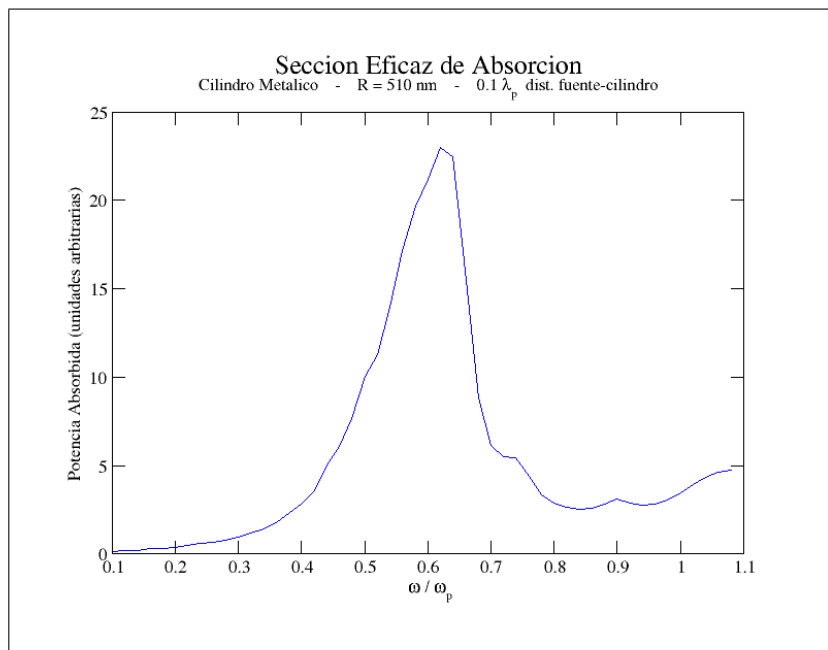
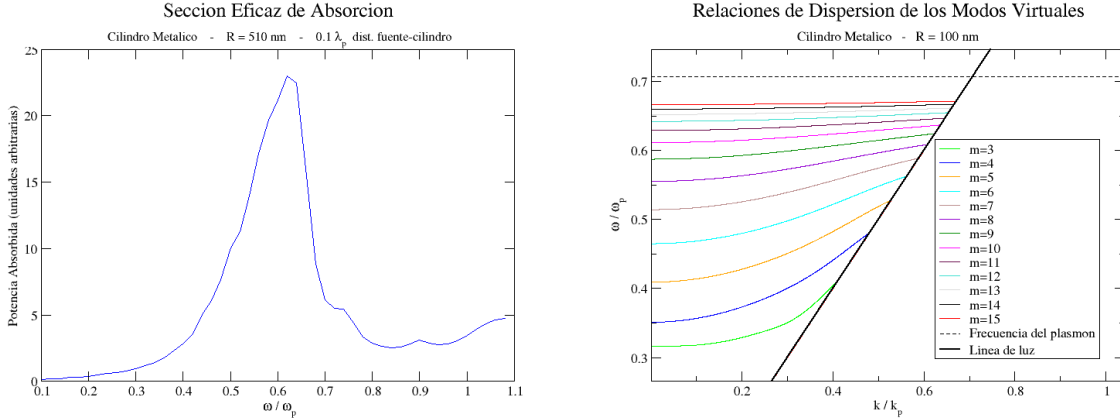


Figura 10.3.4. Sección eficaz de absorción. Distancia entre fuente y cilindro:  $0.1\lambda_p$ .

De manera similar que cuando hablamos de los cilindro de 25 y 100 nm de radio, podemos analizar la sección eficaz junto a las relaciones de dispersión que obtuvimos anteriormente para el cilindro de 510 nm de radio.



Aunque la tendencia de estas relaciones de dispersión es también hacia la frecuencia del plasmón, las de baja frecuencia están separadas de forma muy homogénea. Esto causa que varíe tanto el comportamiento de la sección eficaz de absorción con la posición de la fuente, debido la excitación de los diversos modos del sistema. Sin embargo, como ningún modo está muy bien localizado, como en los casos de 25 y 100 nm (Fig. 2.3.1 y 10.2.3, respectivamente) no es muy sencillo poder excitar un modo en particular.

Cuando la distancia entre la fuente y el cilindro es de  $0.1 \lambda_p$ , el pico central de la sección eficaz, según la partición de nuestra rutina FDTD, está sobre  $0.62 \omega/\omega_p$  lo que indica que le debe corresponder  $m = 10$ , ya que para este modo, la curva de relación de dispersión está en  $0.61147 \omega/\omega_p$ , cuando  $k_z = 0$ . Por la misma razón es necesario observar el comportamiento del campo electromagnético, como se muestra en la Fig. 10.3.5. Esta figura presenta la evolución temporal del campo desde que nace, choca contra el cilindro metálico, muere y hasta que sólo queda el campo en el vacío sin la fuente. Debe notarse como el campo, con una frecuencia central de  $0.6 \omega/\omega_p$ , aún está presente a pesar de que ya no hay fuente e incluso el pulso se ha ido. El campo todavía presente se debe a la energía absorbida por el metal y que está siendo disipada.

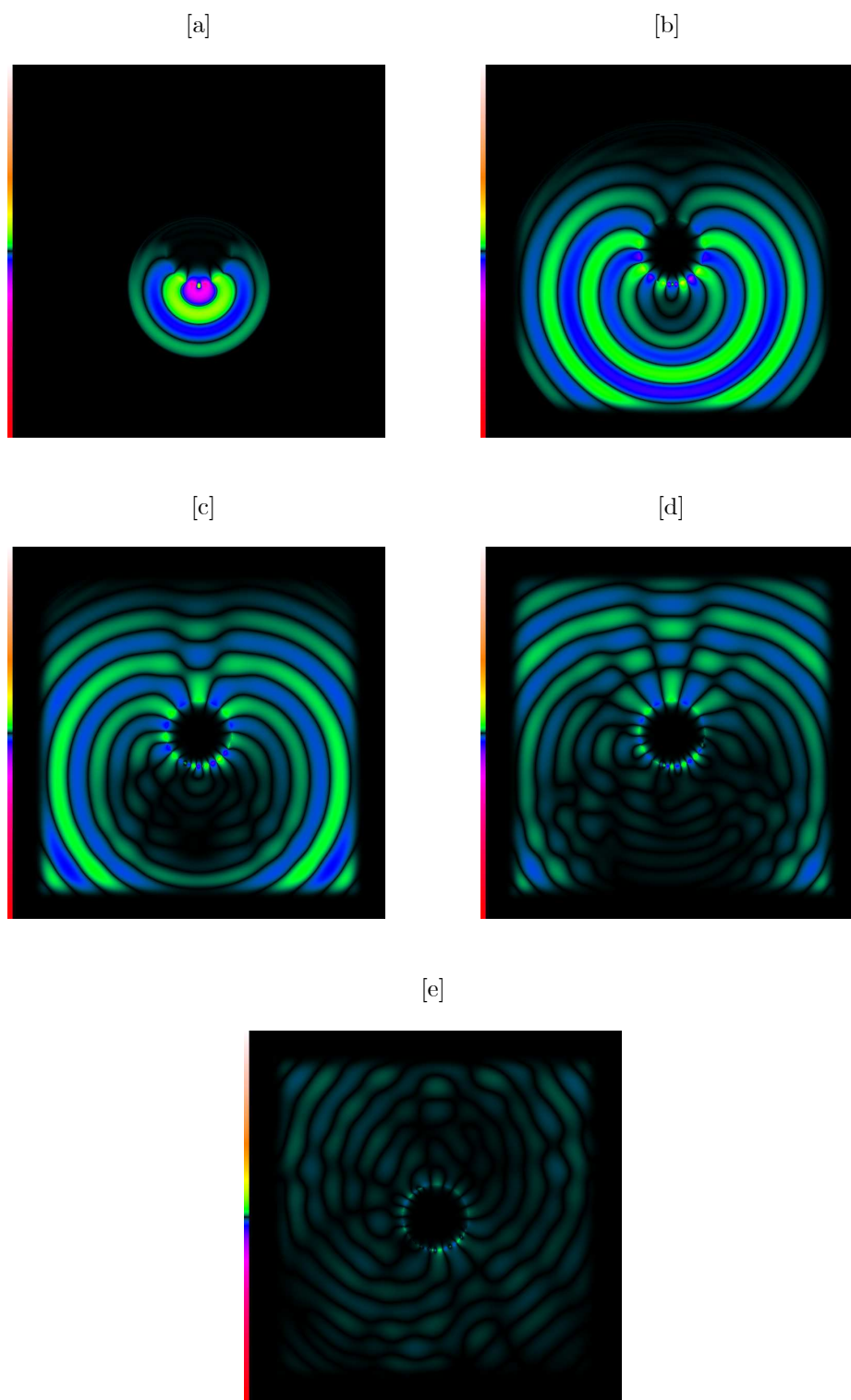
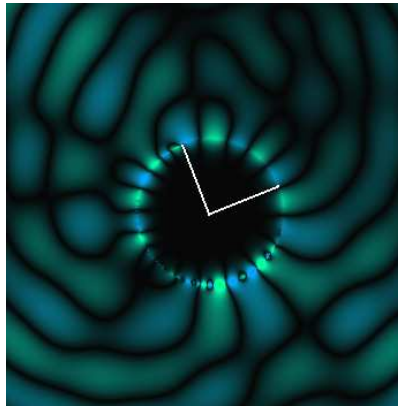


Figura 10.3.5. Campo  $H_z$ . Fuente Puntual. Evolución en el tiempo [a]-[e].

Es claro entonces que el metal ha absorbido luz y después que la fuente del campo se ha ido, el material continúa disipando en el medio la energía que absorbió gracias a la excitación de modos virtuales radiativos al acoplarse la longitud de onda del campo lanzado con la longitud de onda del campo formado en la superficie del nanoalambre.

Por otra parte, si observamos el número de lóbulos<sup>4</sup> de energía que el metal sigue emitiendo una vez que ya no está la fuente, como en la Fig. 10.3.5e, es posible ver que se trata del modo comentado:  $m = 10$ .

Debido a los efectos de la onda estacionaria alrededor del cilindro, los lóbulos no son completamente simétricos más aún, podemos analizarlos mirando una sección del mismo cilindro. Elegiremos una parte en la cara opuesta a donde se encontraba la fuente<sup>[26]</sup>. Si decimos que se trata de  $m = 10$  en este caso, deberíamos poder ver 20 lóbulos en los  $2\pi$  radianes debido a que hay 10 máximos y 10 mínimos.<sup>5</sup> Por lo que en  $\frac{\pi}{2}$  radianes, es decir en una cuarta parte de la sección transversal del cilindro, se deberían apreciar 5 lóbulos como se muestran en la siguiente figura, que es solamente un acercamiento de la Fig. 10.3.5e.



*Figura 10.3.6. Lóbulos del campo. Fuente Puntual.*

<sup>4</sup> Al hablar de lóbulos, nos referiremos a los máximos y mínimos del campo, alternados y representados en verde y azul respectivamente.

<sup>5</sup> Véase Fig. 1.4.5, para analizar el comportamiento.



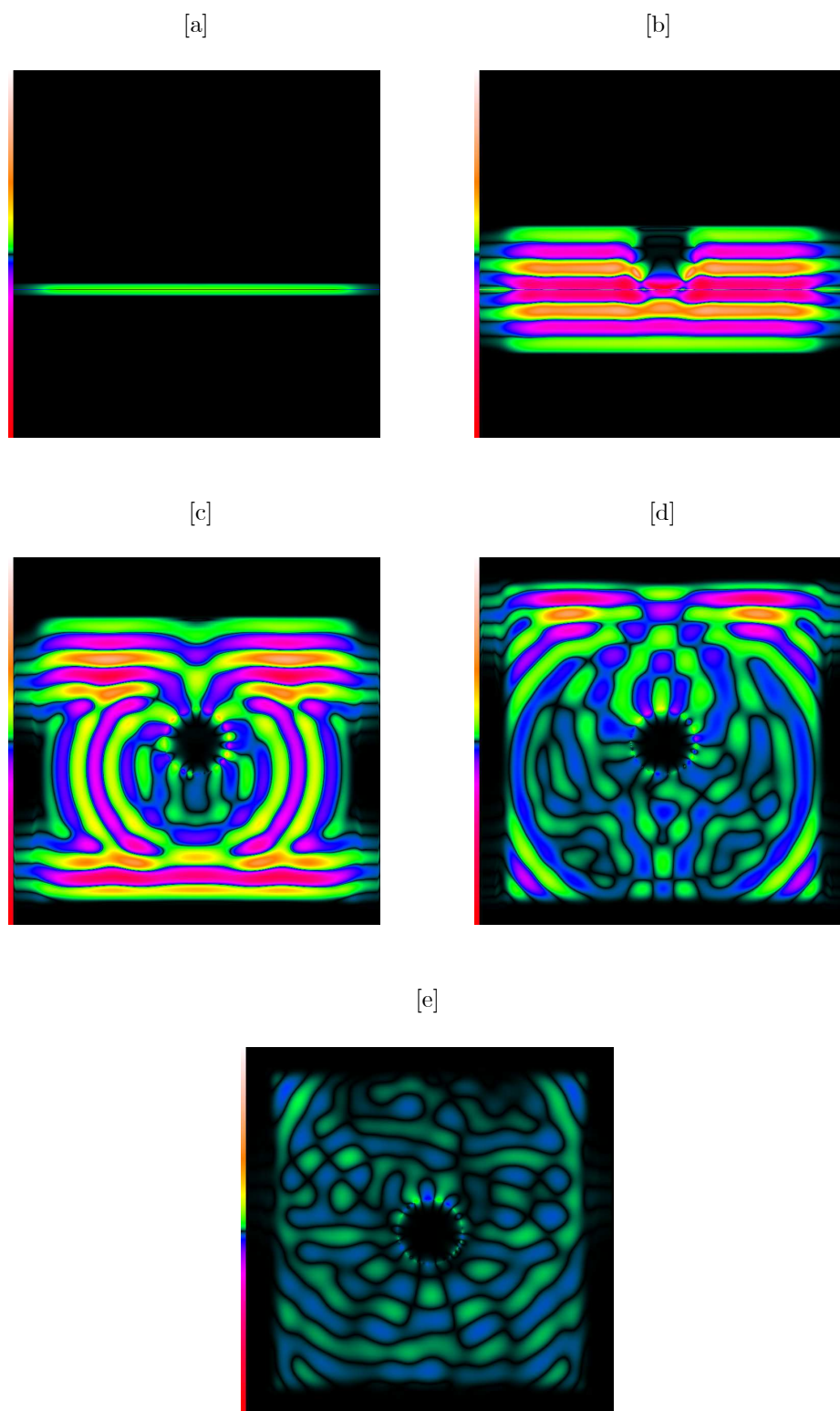
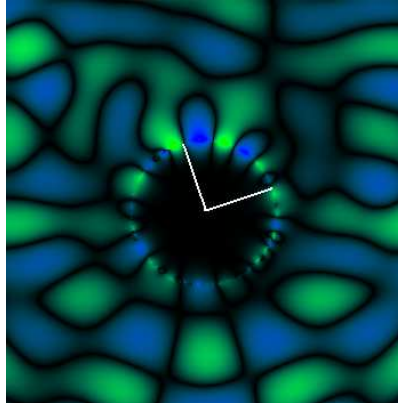


Figura 10.3.7. Campo  $H_z$ . Onda Plana. Evolución en el tiempo [a]-[e].

Si en vez de colocar una fuente teórica (puntual) colocamos una onda plana (Fig. 10.3.7), obtendremos un resultado similar, al definir nuevamente una frecuencia central de  $0.6 \omega/\omega_p$ .



*Figura 10.3.8. Lóbulos del campo. Onda Plana.*

Cabe destacar que, contrario a lo dicho en varios trabajos publicados, la sección eficaz de un cilindro metálico aislado puede mostrar más de un pico de absorción, sin la necesidad de tener dos o más cilindros acoplados.

## Parte IV

# ACOPLAMIENTO DE LOS MODOS VIRTUALES DE DOS CILINDROS METÁLICOS PARALELOS

# Dos Cilindros Metálicos Paralelos

---

Una vez analizada la dependencia que existe entre las relaciones de dispersión de los modos virtuales radiativos y la sección eficaz de absorción en un cilindro metálico aislado, podemos proceder al estudio del acoplamiento de los modos virtuales de un par de cilindros de metal paralelos. Siguiendo el análisis con los radios antes tratados, estudiaremos el comportamiento de la sección eficaz de absorción cuando el par de cilindros paralelos tiene definidos 25, 100 o 510 nm de radio.

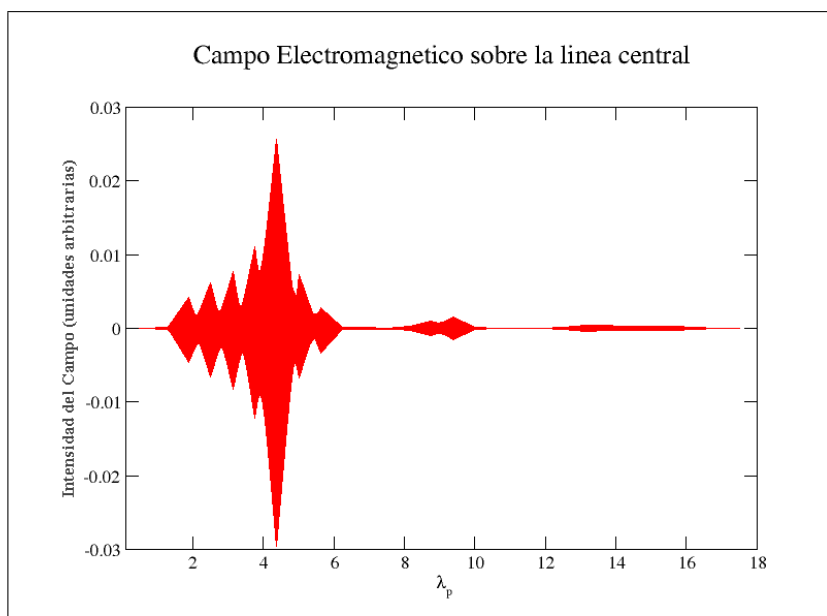
Es necesario mencionar que debido a la geometría de este nuevo problema, no es posible encontrar una solución analítica como en el caso de un cilindro aislado. En el caso del nanoalambre aislado (dieléctrico o metálico) se pueden emplear coordenadas cilíndricas para hallar la solución analítica a partir de la ecuación de Bessel (o Difusión), sin embargo no existe un sistema de coordenadas que represente dos cilindros paralelos, por lo que la única manera hasta ahora de solucionar este tipo de problemas es a través de cálculos numéricos.

Así pues, definiremos para cada cilindro de plata, un radio fijo y estudiaremos el comportamiento de su sección eficaz de absorción cuando los cilindros son iluminados de dos maneras: al colocar la fuente colineal al centro de los cilindros y colocándola a un costado del par de los nanoalambres paralelos.

Para el caso donde la fuente es colineal al centro de los cilindros, fijaremos la distancia entre la fuente y el primero de ellos a  $1.0 \lambda_p$ , y haremos variar la separación entre los

cilindros. Para el caso de la fuente lateral, colocaremos la fuente a  $1.0 \lambda_p$  de distancia del arreglo y también variaremos la separación entre los alambres paralelos. El hecho de no colocar la fuente electromagnética muy cerca del primer cilindro se debe a que el campo se verá apantallado por él y su absorción será tal, que muy poca intensidad llegará a la superficie del segundo.

Por ejemplo, en la Fig. 11.0.1 donde se muestra el comportamiento del campo sobre la línea central de la malla computacional, se observa como este manifiesta una enorme presencia a la altura del primer cilindro, pero la intensidad que llega a la superficie del segundo es muy poca, si la separación fuente-cilindro es de  $0.1 \lambda_p$ . En este ejemplo se definieron radios de 510 nm, que en términos de la longitud de onda son de casi  $1.6 \lambda_p$ .



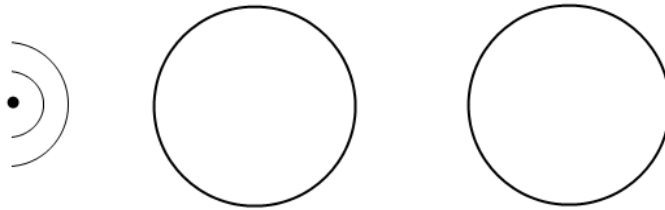
*Figura 11.0.1. Intensidad del campo electromagnético sobre la línea central. Iluminación colineal.*

## 11.1. Radio de 25 nm

Definiremos un radio de 25 nm para el par de cilindros paralelos y procederemos al análisis de la sección eficaz de absorción de los modos acoplados de este arreglo, al iluminar las partículas metálicas de dos maneras.

### 11.1.1. Fuente colineal al centro de los cilindros

Colocaremos primeramente una fuente puntual que sea colineal al centro de ambos cilindros paralelos, como lo muestra la Fig. 11.1.1, y analizaremos qué sucede cuando la fuente electromagnética choca primero contra uno de los dos.



*Figura 11.1.1. Esquema del arreglo entre cilindros y fuente. Iluminación Frontal.*

Cuando la separación entre los cilindros es muy grande ( $1.0 \lambda_p = 320 \text{ nm}$ ) comparada con el radio actual, la estructura de la sección eficaz de absorción (Fig. 11.1.2) es muy similar a la del caso de un cilindro aislado del mismo radio (Fig. 10.1.1). Esto es algo que ya esperábamos que ocurriera, pues los modos del par de cilindros no tienen un acoplamiento significativo debido a la separación entre ellos.

Conforme vayamos acercando los cilindros, los picos mayores de la estructura (cerca de  $0.7 \omega/\omega_p$ ) comenzarán a separarse sufriendo un corrimiento que se debe al acoplamiento de los modos, como puede verse en las figuras 11.1.3 a la 11.1.5.

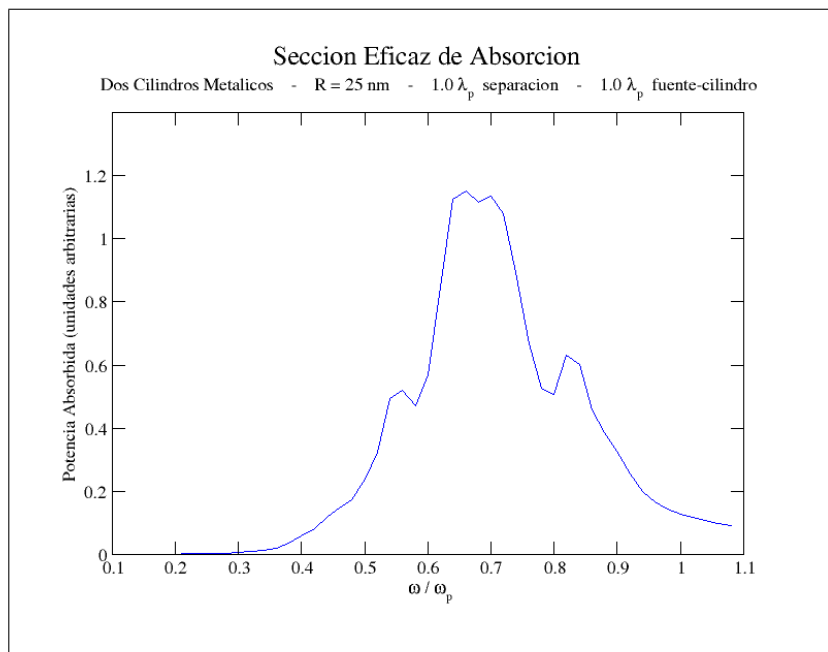


Figura 11.1.2. Sección eficaz de absorción. Iluminación colineal. Dos cilindros paralelos de 25 nm de radio. 1.0  $\lambda_p$  de separación entre cilindros.

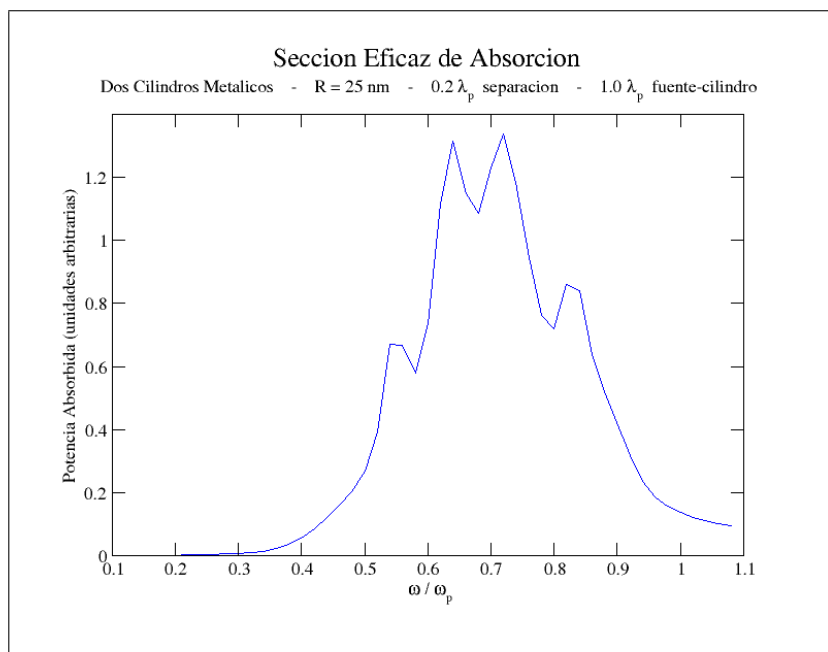


Figura 11.1.3. Sección eficaz de absorción. Iluminación colineal. Dos cilindros paralelos de 25 nm de radio. 0.2  $\lambda_p$  de separación entre cilindros.

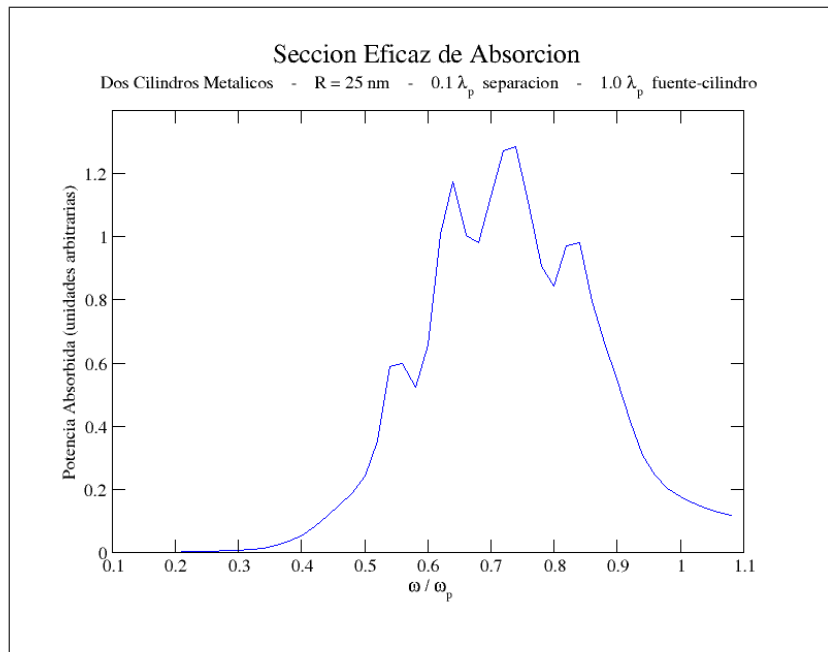


Figura 11.1.4. Sección eficaz de absorción. Iluminación colineal. Dos cilindros paralelos de 25 nm de radio. 0.1  $\lambda_p$  de separación entre cilindros.

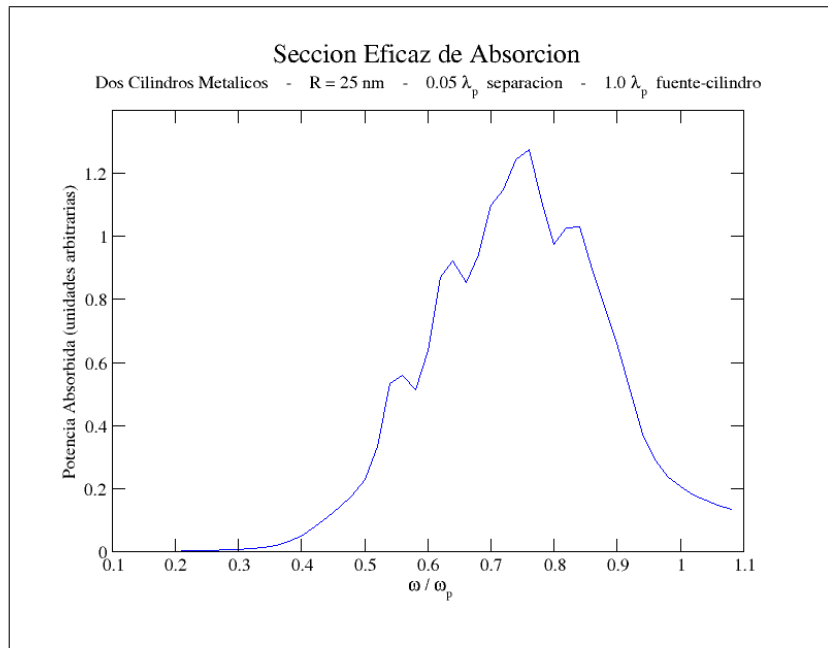
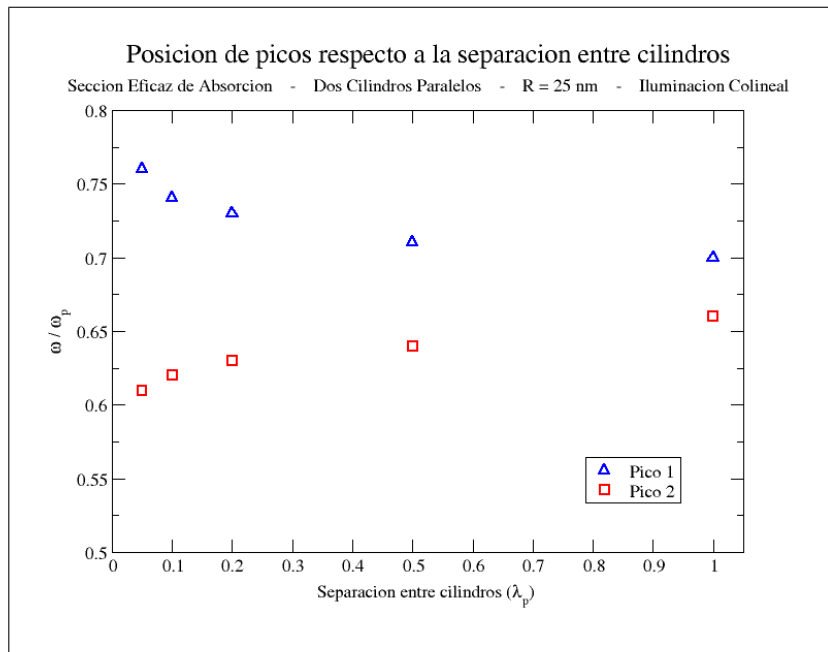


Figura 11.1.5. Sección eficaz de absorción. Iluminación colineal. Dos cilindros paralelos de 25 nm de radio. 0.05  $\lambda_p$  de separación entre cilindros.



Observe como el par de picos principales de las secciones eficaces de absorción comienzan a separarse a medida que acercamos los nanoalambres. Este comportamiento se debe al acoplamiento del modo  $m = 1$  entre los cilindros. Si  $m = 1$  en el cilindro de 25 nm de radio, se tiene un comportamiento dipolar en los modos.<sup>1</sup>

Para ilustrar dicho comportamiento presentamos a continuación una imagen donde se contrasta la separación entre los picos de la sección eficaz de absorción (variando la distancia entre los cilindros, en unidades de longitud de onda) y la frecuencia ( $\omega/\omega_p$ ) donde ocurren los máximos.



*Figura 11.1.6. Posición de los Máximos de las Secciones Eficaces de Absorción, respecto a la frecuencia. Dos Cilindros Metálicos de 25 nm de radio.*

En el análisis del arreglo del par de cilindro de 100 nm de radio se obtiene algo similar debido a que podemos ubicar el modo  $m = 2$ . Sin embargo para el cilindro con radio de 510 nm es difícil seguir la separación de los picos pues la estructura resultante es demasiada.

<sup>1</sup> Véase Fig. 1.4.2b y Fig. 1.4.5b.

### 11.1.2. Fuente lateral al centro de los cilindros

Pongamos la misma fuente a un costado del arreglo cilíndrico como los muestra la Fig. 11.1.7. Cuando la separación es grande ( $1.0 \lambda_p$ ), debemos esperar que la nueva sección eficaz sea similar a la mostrada en la Fig. 10.1.1 (cilindro aislado), y por ende debe parecerse a la del caso previo, donde la iluminación es de forma colineal (Fig. 11.1.2).

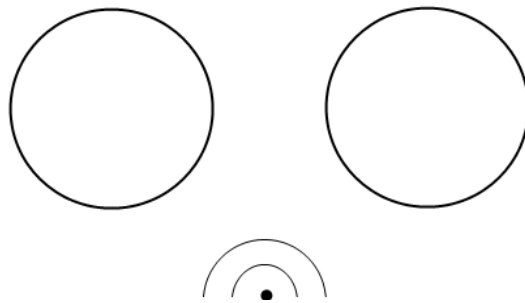


Figura 11.1.7. Esquema del arreglo entre cilindros y fuente. Iluminación Lateral.

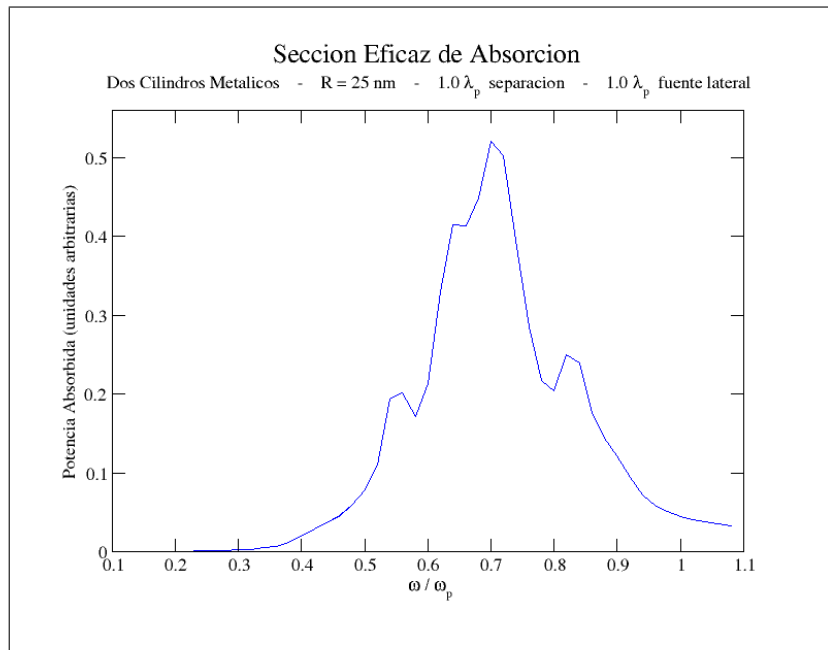
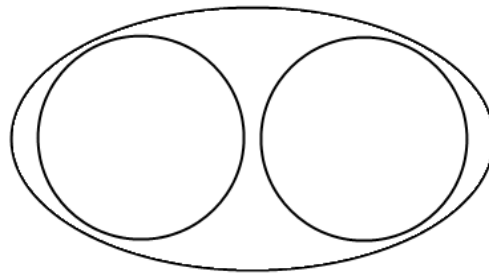


Figura 11.1.8. Sección eficaz de absorción. Iluminación lateral. Dos cilindros paralelos de 25 nm de radio.  $1.0 \lambda_p$  de separación entre cilindros.

Y efectivamente, esta sección eficaz de absorción (Fig. 11.1.8) es muy semejante a los casos mencionados. Sin embargo, debido al tamaño de los radios y sobre todo a la posición de la fuente electromagnética, al variar la separación entre los cilindros, los picos de la curva se separan pero de manera distinta, mostrando un corrimiento mucho más notorio, como podrá apreciarse en algunas figuras más adelante.

Como sabemos, en el caso del cilindro aislado de 25 nm, el primer modo virtual  $m = 1$  es el que predomina (Fig. 2.3.2) generándose un efecto de dipolo que podemos describir mediante la Fig. 1.4.5b.

Ahora bien, al definir este mismo radio pequeño para el par de cilindros, el efecto de dipolo sufre una modificación al ser iluminados de las dos maneras aquí tratadas. Es decir, si se ilumina de forma colineal, la onda choca primeramente con un cilindro, mientras que al estar la fuente de forma lateral, la onda ve los dos al mismo tiempo. Y de hecho, al ser muy pequeños los radios (25 nm) respecto a la longitud de onda (320 nm), el campo ve un solo cilindro elipsoidal, descrito por el siguiente bosquejo, cuando la separación entre los cilindros es pequeña.



*Figura 11.1.9. Esquema del arreglo de cilindros de 25 nm de radio visto por la fuente.*

El efecto dipolar es mucho más notable cuando la variación del campo ocurre en el eje mayor de la elipse, o sea cuando la fuentes está colocada a un costado del par de cilindros paralelos. Por ello, se obtiene las siguientes secciones eficaces al acercar las partículas metálicas entre sí:

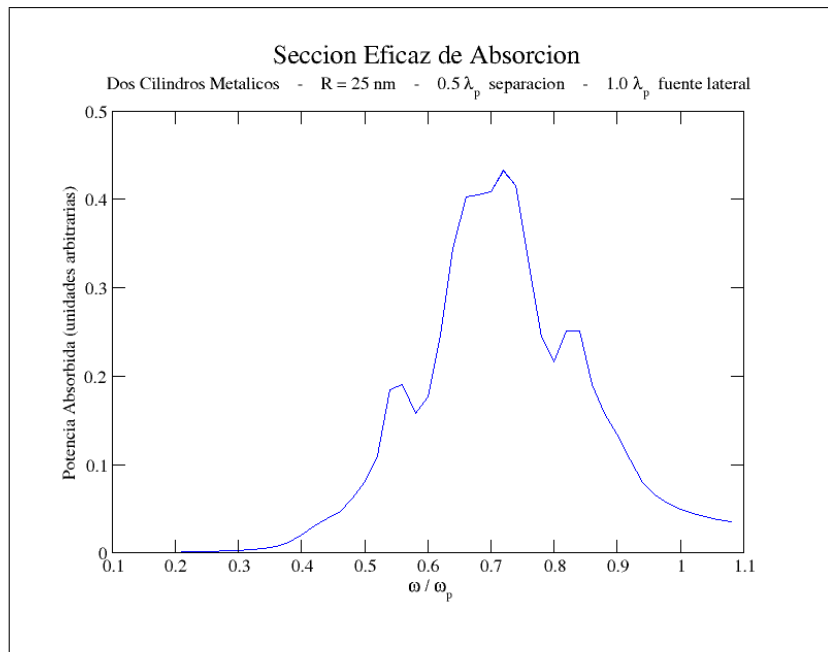


Figura 11.1.10. Sección eficaz de absorción. Iluminación lateral.  
 Dos cilindros paralelos de 25 nm de radio.  $0.5 \lambda_p$  de separación entre cilindros.

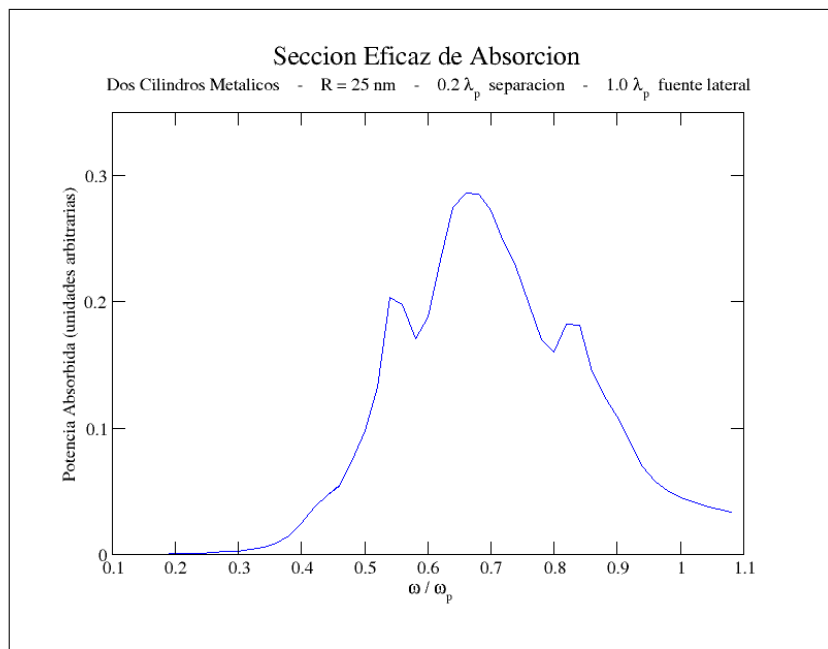
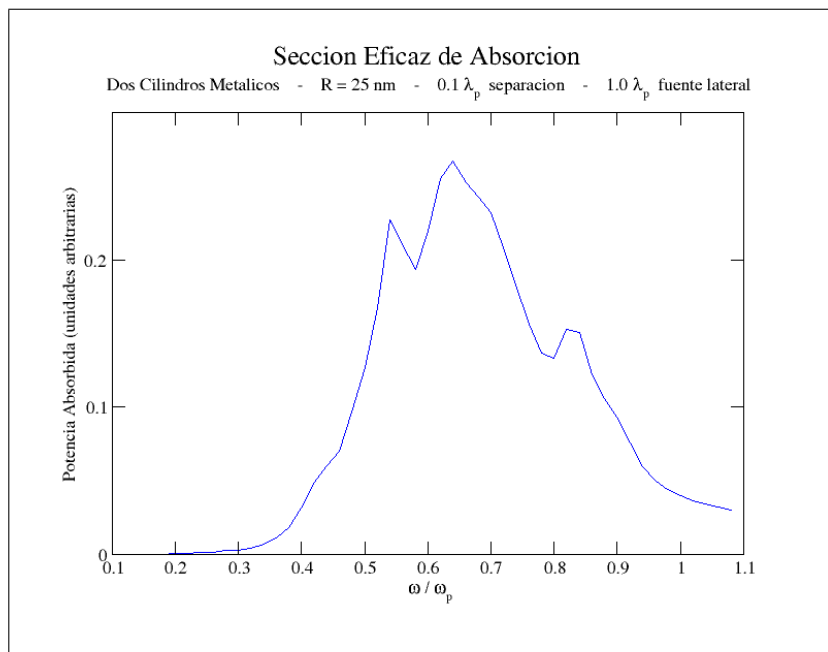
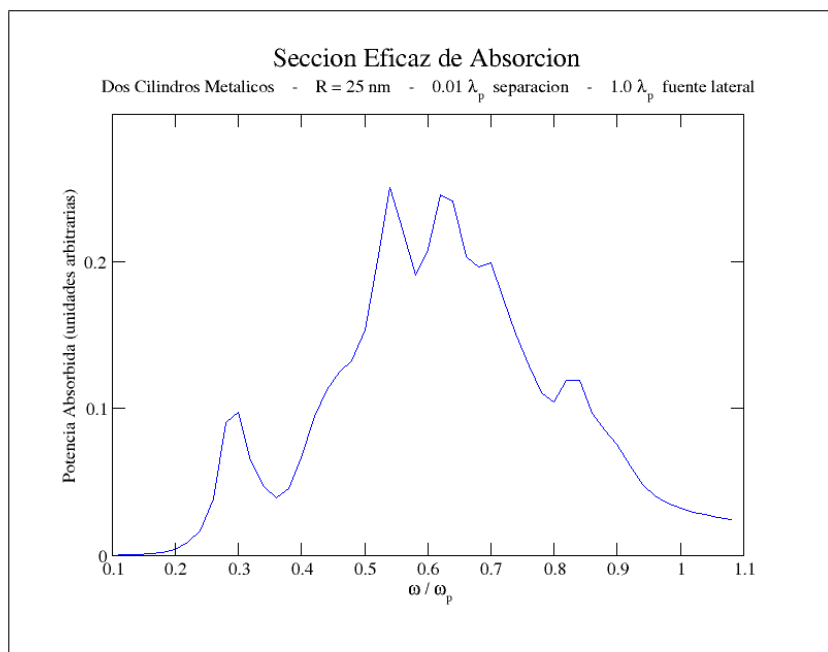


Figura 11.1.11. Sección eficaz de absorción. Iluminación lateral.  
 Dos cilindros paralelos de 25 nm de radio.  $0.2 \lambda_p$  de separación entre cilindros.



*Figura 11.1.12. Sección eficaz de absorción. Iluminación lateral. Dos cilindros paralelos de 25 nm de radio.  $0.1 \lambda_p$  de separación entre cilindros.*



*Figura 11.1.13. Sección eficaz de absorción. Iluminación lateral. Dos cilindros paralelos de 25 nm de radio.  $0.01 \lambda_p$  de separación entre cilindros.*

Resultados similares, al iluminar un par de cilindros de estas dos formas, han sido encontrados por Kottmann y Martin<sup>[8]</sup>, señalando que la sección eficaz (en su caso, la sección eficaz de dispersión de dos cilindros de plata de 50 nm de radio) sufre un notable corrimiento a longitudes de onda más altas, si es que la fuente está en el caso lateral y un corrimiento a longitudes un poco menores, si es que la fuente es colineal a los cilindros; sin embargo, sus resultados no hacen alusión a los modos virtuales. Además, como sus curvas deben estar muy suavizadas, únicamente conjeturan que la aparición de más de un pico en la sección eficaz se debe al hecho de tener dos cilindros y no debido al acoplamiento de modos virtuales radiativos.

## 11.2. Radio de 100 nm

Si ahora se considera un radio cuatro veces mayor que en el caso anterior, no debemos esperar un comportamiento dipolar debido a que la longitud de onda empleada (320 nm) es casi del diámetro de los cilindros. Lo que debe ocurrir es un corrimiento de los picos de la sección eficaz y, por el acoplamiento de modos, la aparición de nuevos picos pues no sólo se excita el modo dominante.<sup>2</sup>

### 11.2.1. Fuente colineal al centro de los cilindros

Coloquemos la fuente sobre la línea central según el esquema mostrado en la Fig. 11.1.1 y definamos primeramente  $1.0 \lambda_p$  de separación entre las superficies de los cilindros. Lo que se obtiene (Fig. 11.2.1) es una sección eficaz de absorción muy similar a la de un cilindro aislado de 100 nm de radio cuando la fuente está alejada (Fig. 10.2.4), con la diferencia de que ahora aparece un hombro arriba de  $0.45 \omega/\omega_p$  que no se mostraba para el cilindro aislado. Si comenzamos a acercar los cilindros, manteniendo la separación entre la fuente electromagnética y la superficie del primero de ellos en  $1.0 \lambda_p$ , notaremos como la estructura de la sección eficaz se mantiene aunque el hombro comienza a recorrerse (Fig. 11.2.2) e incluso se da la aparición de otro pico más (Fig. 11.2.3).

<sup>2</sup> Véase Fig. 10.2.3, pág. 75.

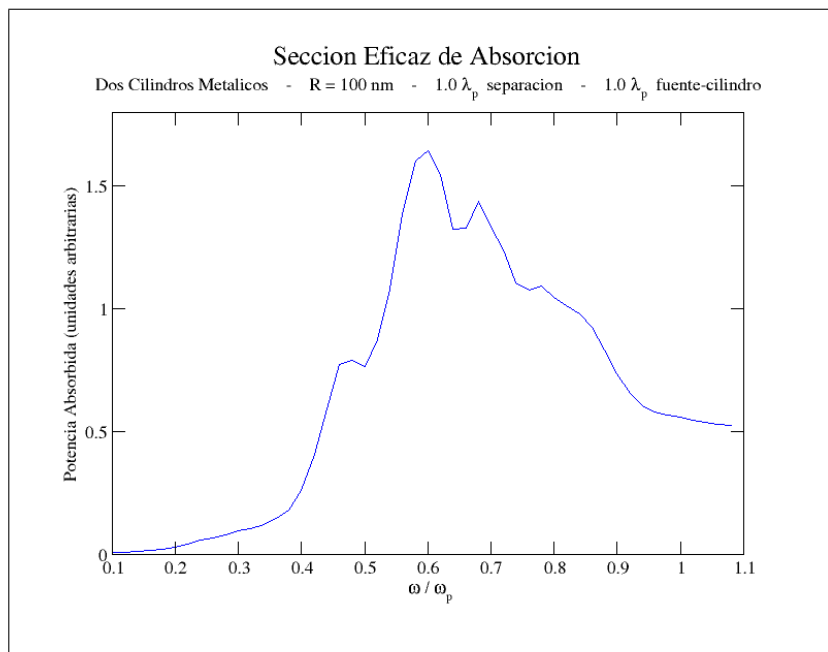


Figura 11.2.1. Sección eficaz de absorción. Iluminación colineal. Dos cilindros paralelos de 100 nm de radio. 1.0  $\lambda_p$  de separación entre cilindros.

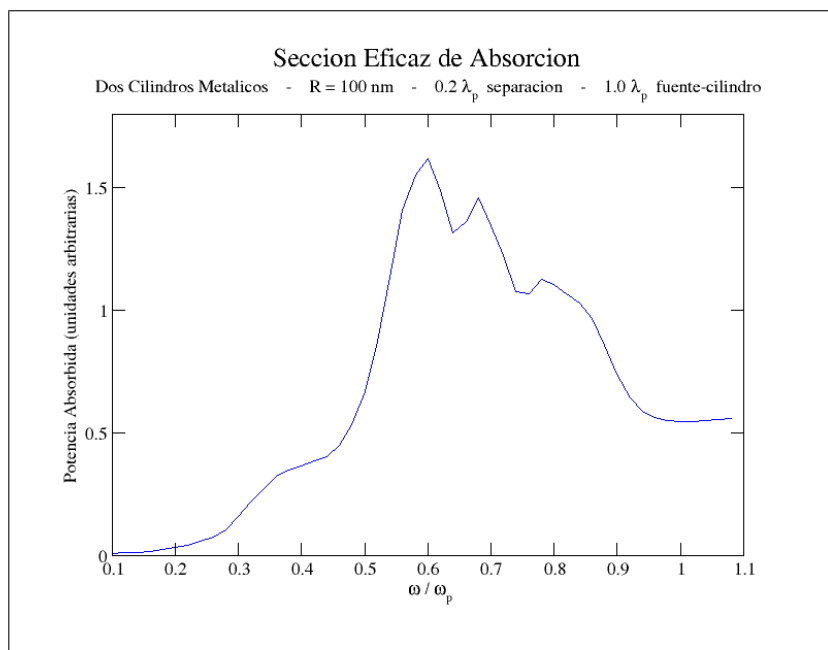


Figura 11.2.2. Sección eficaz de absorción. Iluminación colineal. Dos cilindros paralelos de 100 nm de radio. 0.2  $\lambda_p$  de separación entre cilindros.

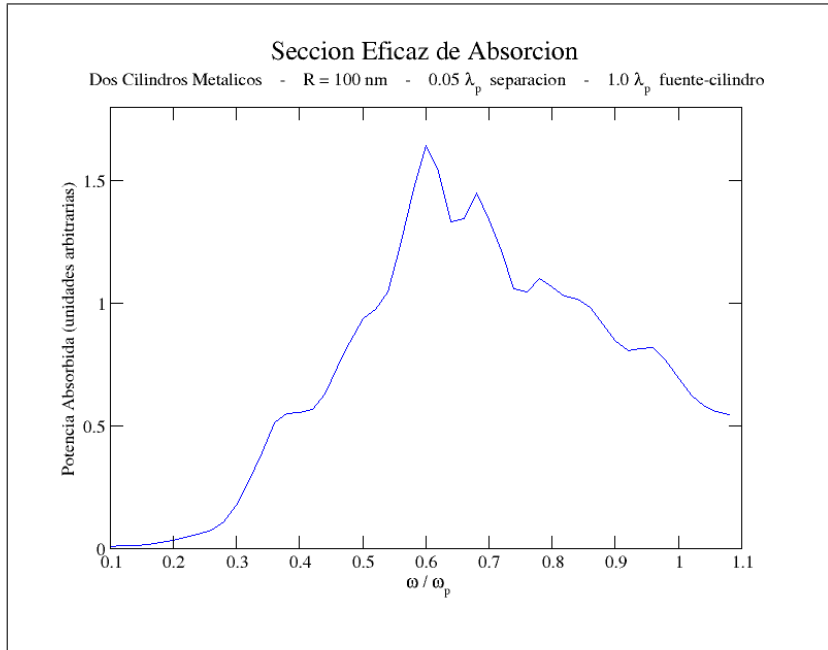


Figura 11.2.3. Sección eficaz de absorción. Iluminación colineal. Dos cilindros paralelos de 100 nm de radio.  $0.05 \lambda_p$  de separación entre cilindros.

### 11.2.2. Fuente lateral respecto al centro de los cilindros

Para el radio de 100 nm, pondremos la fuente a un lado del arreglo de cilindros como se indica en la figura 11.1.7. A diferencia de la sección eficaz de absorción obtenida cuando la fuente es colineal, esta vez (Fig. 11.2.4) al haber mucha separación entre las superficies de los nanoalambres, en particular  $2.0 \lambda_p$ , se obtiene una estructura semejante a la del cilindro aislado cuando se encuentra muy cerca de la fuente (Fig. 10.2.6). Esto debe ocurrir porque los modos virtuales dominantes del caso aislado ( $m = 2$ ) están acoplados, opacando el efecto de los demás modos.

No obstante, al acercar las partículas de plata entre sí, la sección eficaz muestra que el pico antes mencionado se ve poco a poco atenuado por el posible acoplamiento de otros modos, hasta llegar a una estructura donde el pico central se dividió de manera irregular en dos picos.



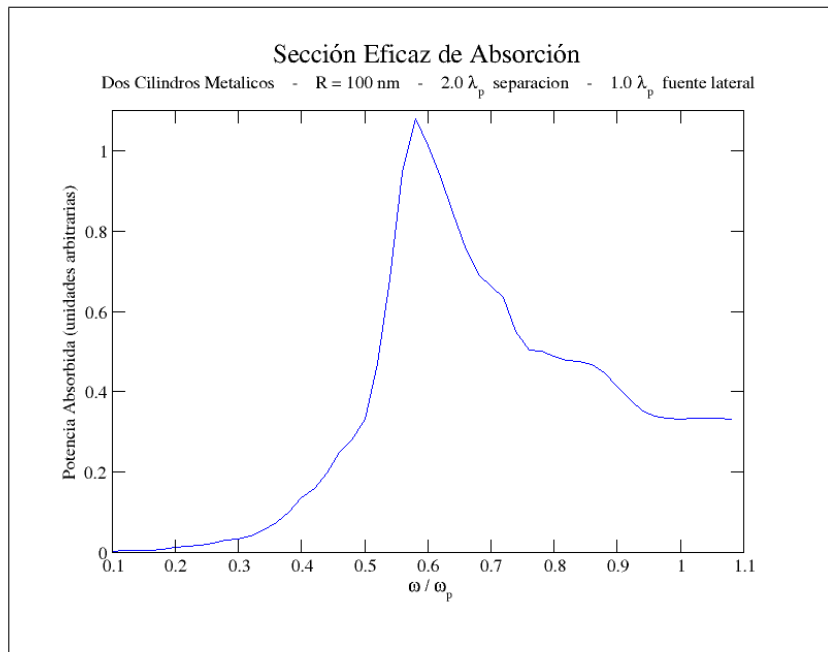


Figura 11.2.4. Sección eficaz de absorción. Iluminación lateral. Dos cilindros paralelos de 100 nm de radio. 2.0  $\lambda_p$  de separación entre cilindros.

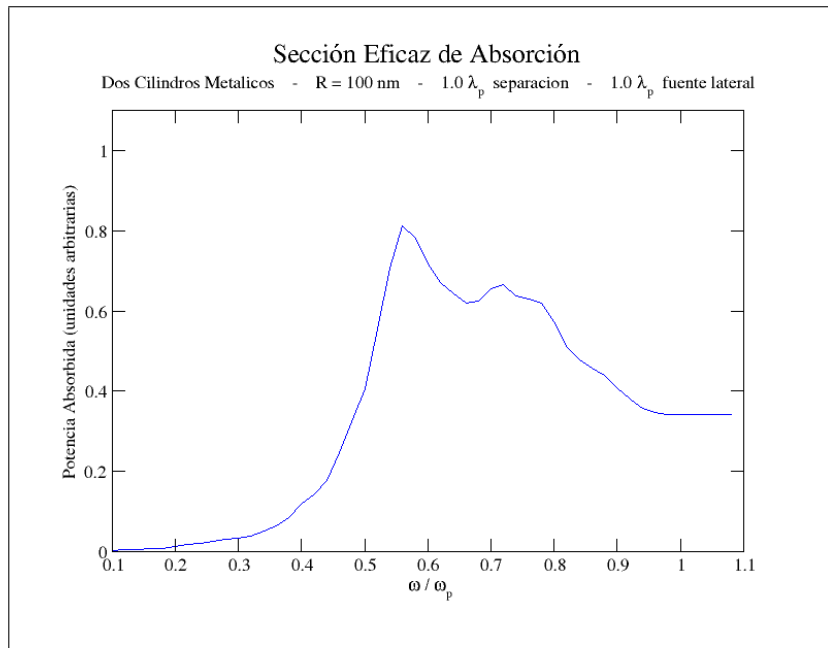


Figura 11.2.5. Sección eficaz de absorción. Iluminación lateral. Dos cilindros paralelos de 100 nm de radio. 1.0  $\lambda_p$  de separación entre cilindros.

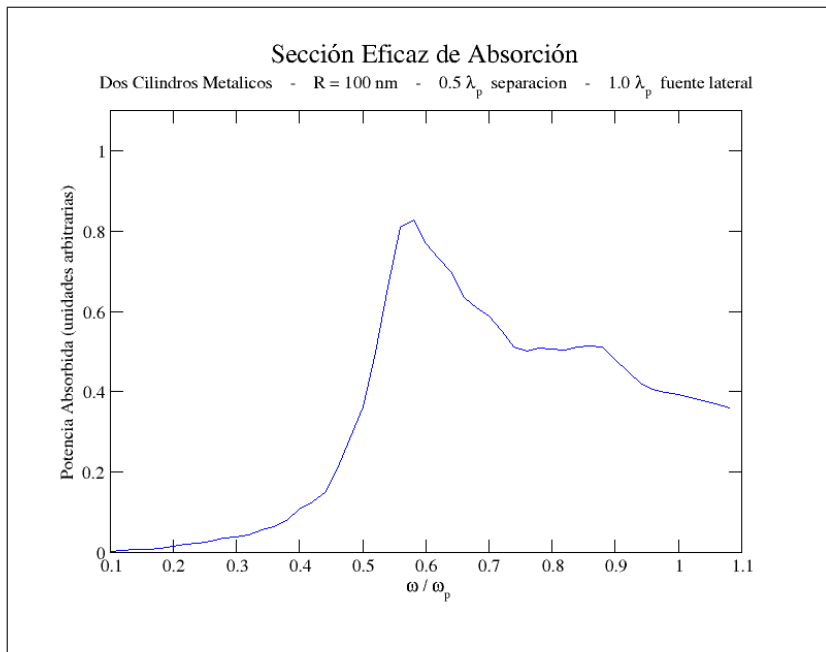


Figura 11.2.6. Sección eficaz de absorción. Iluminación lateral. Dos cilindros paralelos de 100 nm de radio. 0.5  $\lambda_p$  de separación entre cilindros.

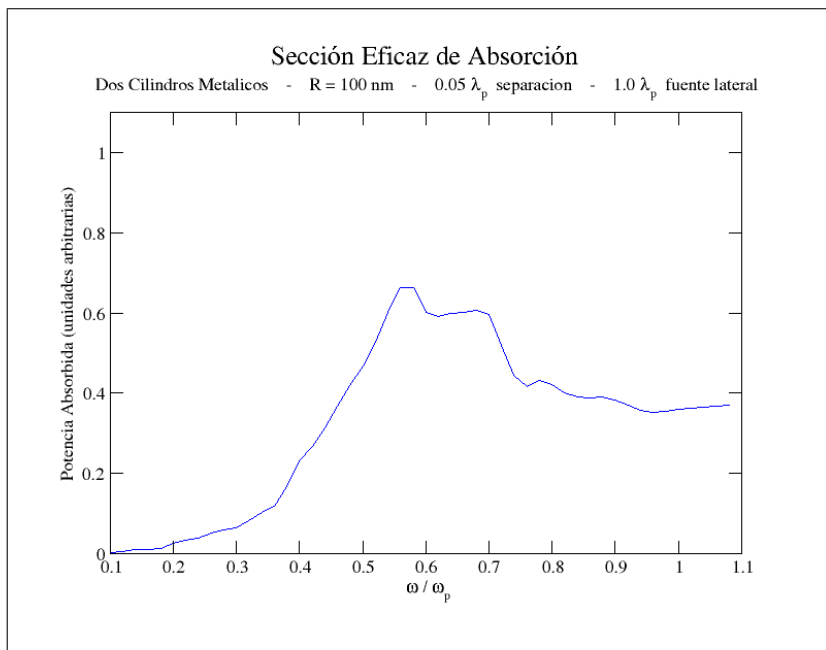


Figura 11.2.7. Sección eficaz de absorción. Iluminación lateral. Dos cilindros paralelos de 100 nm de radio. 0.05  $\lambda_p$  de separación entre cilindros.

## 11.3. Radio de 510 nm

Finalmente, consideraremos este radio para el par de cilindros de plata paralelos y los iluminaremos de las dos maneras antes definidas. Recordemos que como los radios son mayores a la longitud de onda empleada, arriba de la frecuencia  $\omega_p/\sqrt{2}$  los alambres tendrán el comportamiento de guías de onda.

### 11.3.1. Fuente colineal al centro de los cilindros

Al colocar la fuente de manera colineal respecto a los centros de los cilindros, a una distancia de  $1.0 \lambda_p$  del primero (Fig. 11.3.1), se obtiene un comportamiento similar al de la sección eficaz de absorción del cilindro aislado con este mismo radio cuando la fuente se encuentra lejos del mencionado cilindro (Fig. 10.3.2). Sin embargo, debido al diámetro, no se puede excitar un modo en particular para acoplarlo pues las relaciones de dispersión de los modos virtuales se encuentran distribuidas casi de manera uniforme y no hay un modo aislado<sup>3</sup> como se vio en para 25nm y 100 nm de radio.

A pesar de variar la separación entre los cilindros, la estructura de la sección eficaz de absorción sufre muy mínimos cambios por el acoplamiento de modos (Figs. 11.3.2 y 11.3.3). Excitar un modo bien definido no es como en el caso de 25 nm, donde se obtiene un comportamiento dipolar (excitando el modo  $m = 1$ ), o incluso en el de 100 nm, donde el modo  $m = 2$  está suficientemente aislado del resto como para excitarlo de manera más sencilla. Para un cilindro cuyo grosor es más de tres veces la longitud de onda, hacemos hincapié en que las relaciones de los modos están distribuidas con una separación casi uniforme (en término de frecuencias) y es difícil una excitación en particular. Además de esto, hallar una sección eficaz análoga al caso aislado se debe grandemente a que el campo se apantalla con el primer cilindro<sup>4</sup> a pesar que la fuente está muy lejana. Este hecho se aprecia al iluminar el arreglo desde un costado.

<sup>3</sup> Véase Fig. 2.3.5, pág. 24.

<sup>4</sup> Véase Fig. 11.0.1, pág. 87.

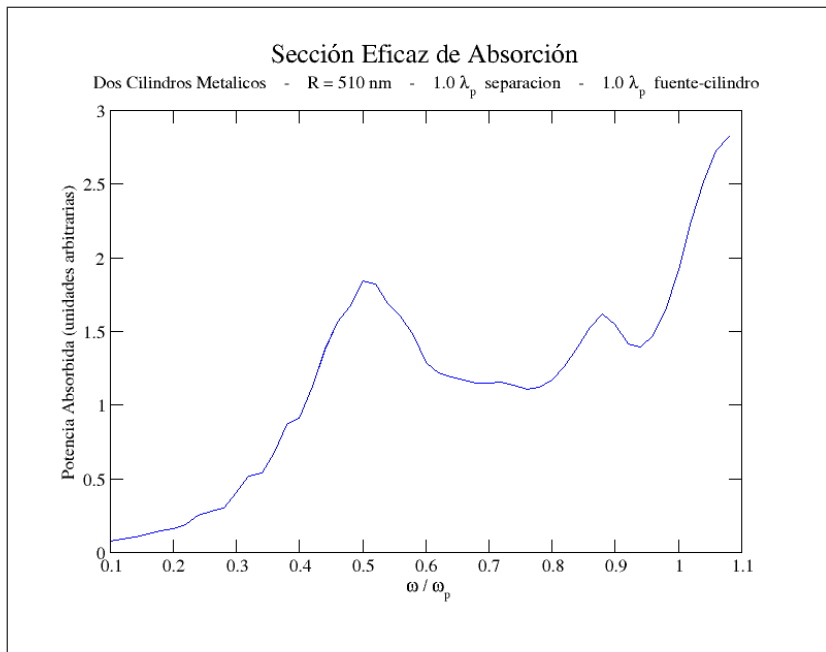


Figura 11.3.1. Sección eficaz de absorción. Iluminación colineal. Dos cilindros paralelos de 510 nm de radio. 1.0  $\lambda_p$  de separación entre cilindros.

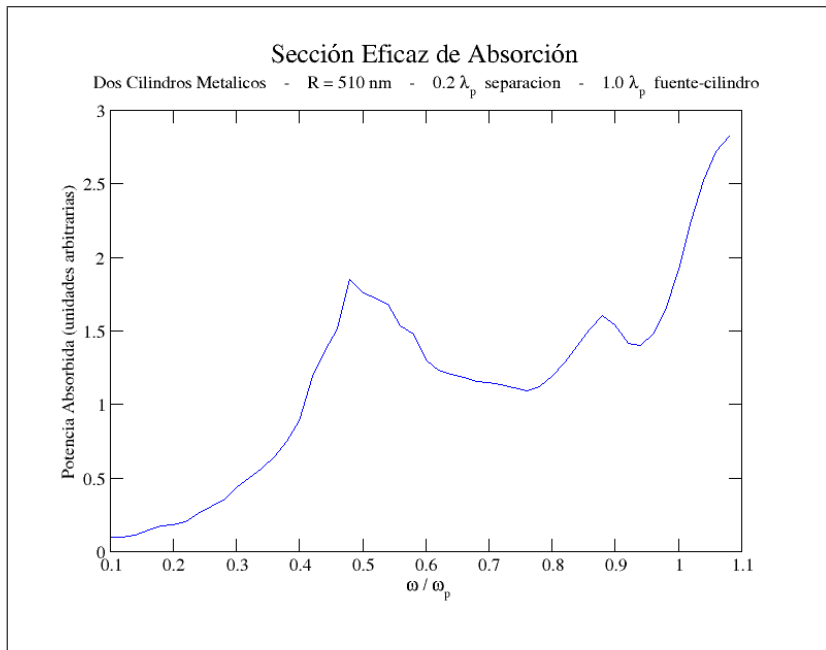


Figura 11.3.2. Sección eficaz de absorción. Iluminación colineal. Dos cilindros paralelos de 510 nm de radio. 0.2  $\lambda_p$  de separación entre cilindros.

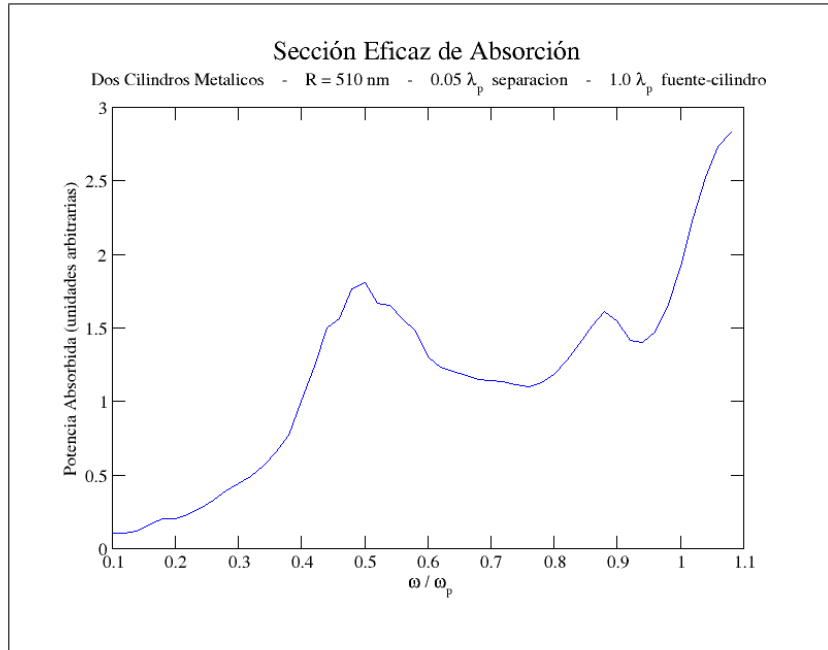


Figura 11.3.3. Sección eficaz de absorción. Iluminación colineal. Dos cilindros paralelos de 510 nm de radio. 0.05  $\lambda_p$  de separación entre cilindros.

### 11.3.2. Fuente lateral respecto al centro de los cilindros

Coloquemos la fuente en posición lateral, como lo indica la Fig. 11.1.7. Al iluminar los cilindros infinitos con sección transversal circular, la onda choca con ambos a la vez y se genera una estructura (Fig. 11.3.4) semejante a la del cilindro aislado cuando la fuente está alejada (Fig. 11.3.1). A medida que se acercan los cilindros paralelos, los modos centrales (entre 0 y 1  $\omega/\omega_p$ ) presentan un acoplamiento entre casi todos los primeros modos y hace que la sección eficaz de absorción se vuelve muy compleja, o sea, con demasiada estructura.

Cuando se trabaja con cilindros de radios tan grandes como en este caso, ocurren fenómenos como cuando los cilindros se comportan como guías de onda para frecuencias altas. Además, también se vuelve más difícil dominarlos ya que la onda puede o no acoplarse con la onda generada en la superficie del cilindro debido a su tamaño.

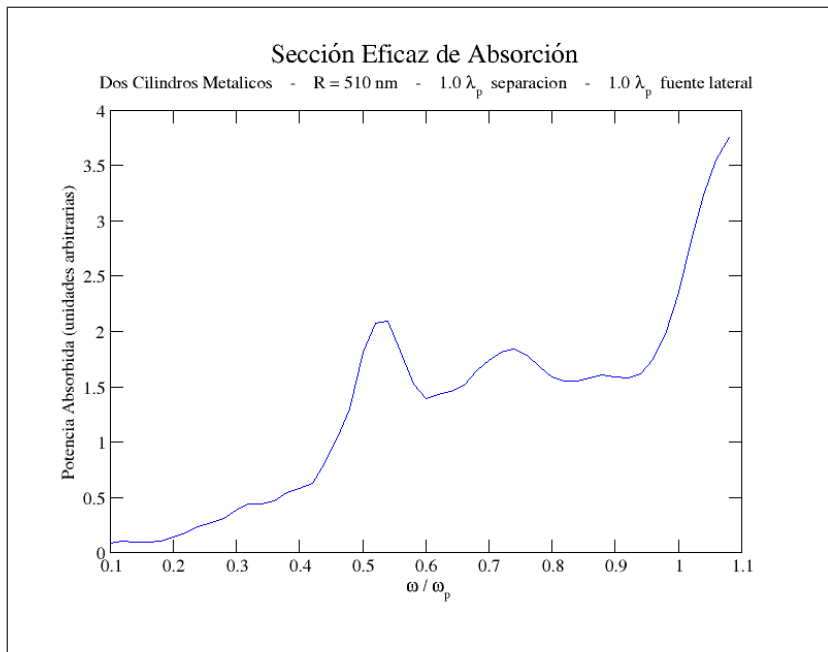


Figura 11.3.4. Sección eficaz de absorción. Iluminación lateral. Dos cilindros paralelos de 510 nm de radio. 1.0  $\lambda_p$  de separación entre cilindros.

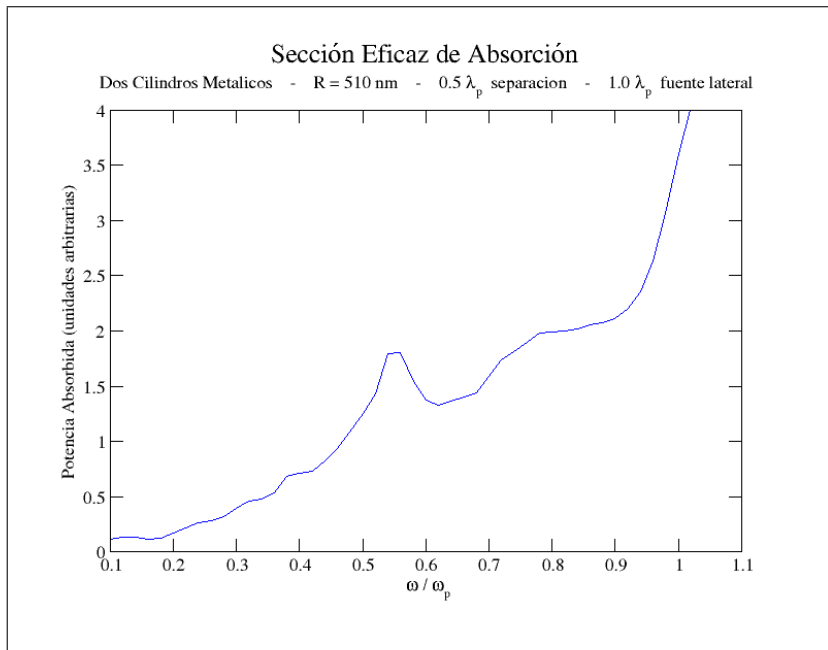
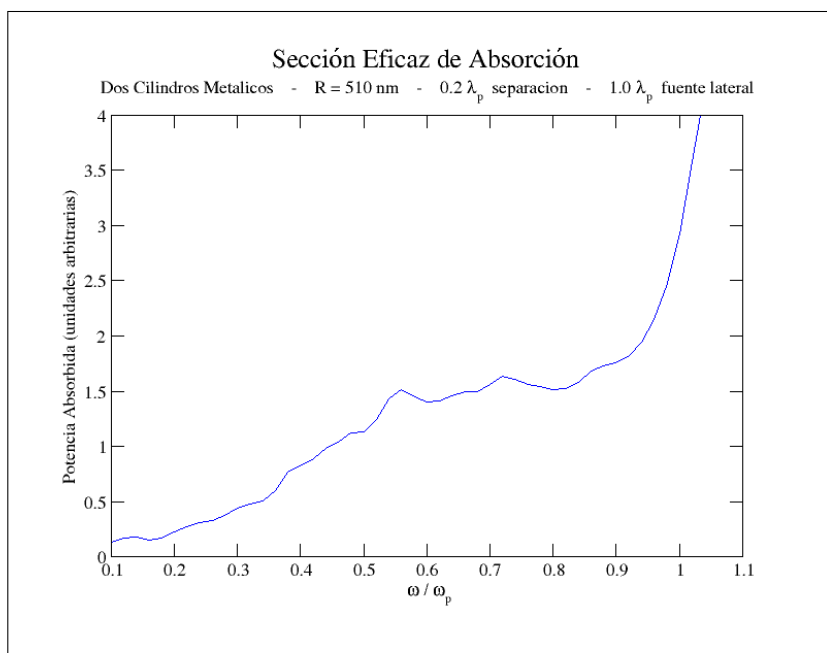


Figura 11.3.5. Sección eficaz de absorción. Iluminación lateral. Dos cilindros paralelos de 510 nm de radio. 0.5  $\lambda_p$  de separación entre cilindros.



*Figura 11.3.6. Sección eficaz de absorción. Iluminación lateral.  
Dos cilindros paralelos de 510 nm de radio.  $0.2 \lambda_p$  de separación entre cilindros.*

## Parte V

# CONCLUSIONES



# Conclusiones

---

Varios son los resultados encontrados durante la presente tesis. Algunos reprodujeron resultados encontrados en la literatura con la finalidad de contrastarlos con los aquí obtenidos, y otros más son resultados que rompen algunas conjeturas mostradas en algunas publicaciones.

Primeramente de las ecuaciones de Maxwell, se obtuvo de manera analítica una ecuación trascendental cuya solución son las relaciones de dispersión para los modos normales de un cilindro metálico aislado. De manera análoga, se obtuvo una expresión para las relaciones de dispersión de los modos virtuales radiativos. En ambos casos se crearon rutinas computacionales que resolvían numéricamente estas ecuaciones trascendentales. En base a estas soluciones otras rutinas creadas graficaban el comportamiento de los modos normales y virtuales.

Luego, a través de la integral del vector de Poynting se obtuvo la sección eficaz con un primer método, para más adelante obtenerla mediante el cálculo directo de la integral del producto interior de  $\vec{E}$  y  $\vec{J}$ .

Con este último método se calcularon las secciones eficaces de un cilindro metálico aislado donde se mostró que el comportamiento de la sección eficaz de absorción tiene una estrecha correspondencia con las relaciones de dispersión de los modos virtuales radiativos, estudiados inicialmente por Pfeiffer, Economou y Ngai. Pese a esto muchos son quienes trabajan con secciones eficaces sin tomar en cuenta las relaciones de dispersión de los modos virtuales. Otros más indican que la aparición de más de un pico

en la sección eficaz se debe únicamente por tener un arreglo de cilindros. Sin embargo hemos visto que no: un cilindro metálico aislado puede presentar más de un pico en la estructura de su sección eficaz de absorción.

Por último se observó que la sección eficaz de absorción para dos cilindros metálicos paralelos puede tener diversos comportamientos. Para radios mucho menores que la longitud de onda de plasma, el pico que aparece para un cilindro aislado se desdobra en dos a medida que se acercan los cilindros, mostrando un comportamiento dipolar. Para cilindros de radio comparable a  $\lambda_p$ , el espectro de absorción contiene demasiada estructura y no es fácil seguir la evolución de cada pico al acercar los dos cilindros.

Por otro lado es importante remarcar que la posición de la fuente juega un papel importante al momento de iluminar las estructuras y no sólo en términos del ángulo sino también en la distancia a la superficie de los metales.

**Parte VI**

**APÉNDICES**

---

## Apéndice A

# De Maxwell a Helmholtz para un sistema Cilíndrico

---

En este Apéndice, haremos un breve recorrido construyendo las expresiones elementales que nos sirvan de soporte para la presente tesis. Partiremos de la base de toda la teoría electrodinámica, las Ecuaciones de Maxwell, para obtener las ecuaciones vectoriales de Helmholtz e incluso su expresión dependiente de la frecuencia.

Finalmente, definiremos el transversal del Laplaciano para geometría cilíndrica, que es la herramienta que nos permitirá reducir considerablemente la dificultad de nuestros problemas al momento de calcular los modos del cilindro metálico y cilindro dieléctrico.

### A.1. Ecuaciones Vectoriales de Helmholtz

Los fenómenos electromagnéticos pueden ser descritos por dos campos vectoriales, el campo eléctrico  $\vec{E}$  y el campo magnético  $\vec{H}$ . Este tipo de fenómenos es gobernado por las *Ecuaciones de Maxwell*:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho.\end{aligned}\tag{A.1.1}$$

En ausencia de fuentes, las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{A.1.2})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{A.1.3})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{A.1.4})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0. \quad (\text{A.1.5})$$

En el interior de un cilindro, las ondas electromagnéticas de frecuencia  $\omega$  oscilan con dependencia temporal, de forma que los campos pueden escribirse como

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (\text{A.1.6})$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-i\omega t}. \quad (\text{A.1.7})$$

Sustituyendo (A.1.7) en (A.1.2), tenemos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{B}_0 e^{-i\omega t} \right) \\ &= i\omega \left( \vec{B}_0 e^{-i\omega t} \right) \end{aligned}$$

i.e.,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}. \quad (\text{A.1.8})$$

Ahora, consideremos las relaciones constitutivas para medios no dispersivos

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{A.1.9})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (\text{A.1.10})$$

Reemplazando (A.1.10) en la parte izquierda de (A.1.3)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{B} \\ &= \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B}.\end{aligned}$$

Esto implica

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{\nabla} \times \vec{H}.$$

Usando la parte derecha de (A.1.3), tendremos

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Por esta ecuación y la relación constitutiva (A.1.9):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (\text{A.1.11})$$

Sustituyendo (A.1.6) en (A.1.11):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \right).$$

Como el campo tiene dependencia temporal,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu \varepsilon \vec{E}_0 \frac{\partial}{\partial t} (e^{-i\omega t}) \\ &= -i\mu \varepsilon \omega \vec{E}_0 e^{-i\omega t}.\end{aligned}$$

Esto es

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -i\mu \varepsilon \omega \vec{E}.$$

Finalmente, de la ecuación (A.1.4) y debido a la consideración de medio homogéneo,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0,$$

i.e.,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0.$$

Por tanto, las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (\text{A.1.12})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -i\mu\epsilon\omega \vec{E} \quad (\text{A.1.13})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{A.1.14})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0. \quad (\text{A.1.15})$$

Ahora bien, apliquemos el rotacional en ambos lados de (A.1.12). Entonces

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{\nabla} \times (i\omega \vec{E}) \\ &= i\omega \vec{\nabla} \times \vec{E}. \end{aligned}$$

Por la Ec. (A.1.13):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= i\omega (-i\mu\epsilon\omega \vec{E}) \\ &= \mu\epsilon\omega^2 \vec{E}. \end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}. \quad (\text{A.1.16})$$

Debido a (A.1.15), obtenemos

$$\mu\epsilon\omega^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}.$$

Por tanto, obtenemos la ecuación vectorial de Helmholtz, para el campo eléctrico:

$$\nabla^2\vec{E} + \mu\epsilon\omega^2\vec{E} = 0. \quad (\text{A.1.17})$$

De forma análoga, se hace para la Inducción Magnética  $\vec{B}$ . Apliquemos el rotacional en ambos lados de (A.1.13). Entonces

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla} \times (-i\mu\epsilon\omega\vec{E}) \\ &= -i\mu\epsilon\omega (\vec{\nabla} \times \vec{E}). \end{aligned}$$

Por la Ec. (A.1.12)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= -i\mu\epsilon\omega (i\omega\vec{B}) \\ &= \mu\epsilon\omega^2\vec{B}. \end{aligned}$$

Por esta ecuación y usando (A.1.16) para la inducción magnética, tenemos

$$\mu\epsilon\omega^2\vec{B} = -\nabla^2\vec{B}$$

Por tanto, obtenemos la ecuación vectorial de Helmholtz para  $\vec{B}$ :

$$\nabla^2\vec{B} + \mu\epsilon\omega^2\vec{B} = 0 \quad (\text{A.1.18})$$



## A.2. Ecuación de Helmholtz dependiente de la frecuencia

De las ecuaciones de Maxwell, tomemos la ley de Faraday y la ley de Ampère-Maxwell, dependientes de  $\vec{r}$  y del tiempo  $t$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (\text{A.2.1})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) \quad (\text{A.2.2})$$

y supongamos que  $\vec{J}(\vec{r}, t) = 0$ . Las ecuaciones (A.2.1) y (A.2.2) están relacionadas por las relaciones constitutivas

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (\text{A.2.3})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\vec{r}, \omega). \quad (\text{A.2.4})$$

Luego, recordemos que para cambiar a una función  $f$  del dominio de la frecuencia  $f(\omega)$  al dominio del tiempo  $f(t)$ , hacemos uso de las transformadas de Fourier ( $FT$ ):

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{A.2.5})$$

y viceversa

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (\text{A.2.6})$$

Debido a que  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ , entonces

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = i\omega \vec{B}(\vec{r}, t).$$

Multiplicando en ambos lados por  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t} dt$ , se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t} \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) dt = i\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t} \vec{B}(\vec{r}, t) dt$$

i.e.,

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \vec{E}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt = i\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \vec{B}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt.$$

Entonces por (A.2.6)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, \omega) = i\omega \vec{B}(\vec{r}, \omega). \quad (\text{A.2.7})$$

Por otra parte, por la relación constitutiva (A.2.3) y análogo al campo eléctrico,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, \omega) = i\omega \vec{D}(\vec{r}, \omega). \quad (\text{A.2.8})$$

Finalmente, aplicando el rotacional a (A.2.7) y (A.2.8), llegamos a

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, \omega) + k^2(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad (\text{A.2.9})$$

que es la ecuación de Helmholtz pero dependiente de la frecuencia  $\omega$ .

### A.3. Transversal del Laplaciano

Si consideramos un problema donde no hay restricciones a lo largo del eje  $z$ , podemos escribir los campos como

$$\vec{E}'(\vec{r}) = \vec{E}(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (\text{A.3.1})$$

$$\vec{B}'(\vec{r}) = \vec{B}(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (\text{A.3.2})$$

Debido a esa falta de restricciones, el operador Laplaciano  $\nabla^2$  puede ser escrito como

$$\nabla^2 = \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Por tanto, podemos definir

$$\nabla_{\perp}^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

donde  $\nabla_{\perp}^2$  es la parte transversal del Laplaciano. Sustituyendo este nuevo operador en las ecuaciones de Helmholtz:<sup>1</sup>

$$(\nabla^2 + \mu\epsilon\omega^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0$$

tendremos

$$\left[ \left( \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \mu\epsilon\omega^2 \right] \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0,$$

i.e.,

$$\nabla_{\perp}^2 \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} + \mu\epsilon\omega^2 \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0.$$

<sup>1</sup> Forma compacta de las ecuaciones (A.1.17) y (A.1.18).

Como

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = -k_z^2 \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix}$$

llegamos a

$$[\nabla_{\perp}^2 + (\mu\epsilon\omega^2 - k_z^2)] \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0, \quad (\text{A.3.3})$$

donde esta ecuación es el transversal del Laplaciano para geometría cilíndrica y la hemos utilizado para facilitar los cálculos para los casos de cilindro metálico y cilindro dieléctrico.

---

## Apéndice B

# Cilindro Dieléctrico

---

Antes de estudiar un cilindro de metal aislado, hicimos un amplio análisis a un cilindro dieléctrico aislado. Dicho cilindro tiene radio  $R$  con sección transversal circular sin restricciones a lo largo del eje  $z$ . Consideramos también dos medios, el dieléctrico  $(\mu_1, \varepsilon_1)$  y el vacío  $(\mu_0, \varepsilon_0)$ , y asumimos que ambos son uniformes e isotrópicos en sus propiedades y  $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ . Al resolver las ecuaciones de Maxwell en coordenadas cilíndricas obtuvimos una expresión trascendental de donde hallamos las relaciones de dispersión para cuando existe y no existe variación azimutal. Para el caso del cilindro metálico, no tiene sentido el caso sin dependencia en  $\varphi$ .

### B.1. Ecuación de Bessel y Ecuación de Difusión

De las ecuaciones vectoriales de Helmholtz y debido a que no hay restricciones en la coordenada  $z$ , se obtiene la expresión:<sup>1</sup>

$$[\nabla_{\perp}^2 + (\mu\varepsilon\omega^2 - k_z^2)] \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0. \quad (\text{B.1.1})$$

Luego, sabiendo que  $k_z$  debe ser la misma dentro y fuera del cilindro para que se

---

<sup>1</sup> Consulte el Apéndice A, pág. 117 para ver desarrollo algebraico.

satisfagan las condiciones de frontera, para el interior del cilindro dieléctrico la constante (B.1.1) marcada entre paréntesis debe ser positiva debido a que las ondas son propagantes:

$$\gamma^2 = \mu_1 \varepsilon_1 \omega^2 - k_z^2 \geq 0. \quad (\text{B.1.2})$$

Sin embargo, fuera del cilindro los campos deben decaer exponencialmente para no exista flujo trasversal de energía. Esto significa que no hay modos TEM en una guía dieléctrica. Entonces la cantidad de (B.1.1) equivalente a  $\gamma^2$  debe ser negativa:

$$\beta^2 = -(\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - k_z^2) \geq 0. \quad (\text{B.1.3})$$

Entonces las ecuaciones de Helmholtz quedan, para el interior y exterior del cilindro, respectivamente como

$$(\nabla_{\perp}^2 + \gamma^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0$$

$$(\nabla_{\perp}^2 - \beta^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0.$$

En coordenadas cilíndricas, de la ecuación de Helmholtz, se obtiene<sup>2</sup> la *Ecuación de Bessel* para alguna función  $\psi$ :

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left( k_{\perp}^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) \right] P = 0.$$

Por lo tanto, para cada medio se tiene

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left( \gamma^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) \right] \psi = 0 \quad (\text{dentro}) \quad (\text{B.1.4})$$

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \left( \beta^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) \right] \psi = 0. \quad (\text{fuera}) \quad (\text{B.1.5})$$

<sup>2</sup> Consulte el Capítulo 1, pp. 2–4,, para ver desarrollo algebraico.

Argumentos dimensionales sugieren reescalar  $\rho \rightarrow r = \gamma\rho$ . Tomemos primero el caso interior: Ec. (B.1.4). Entonces

$$\left[ \gamma^2 \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\gamma}{r} \frac{d}{dr} + \left( \gamma^2 - \frac{m^2 \gamma^2}{r^2} \right) \right] \psi = 0.$$

Dividiendo por  $\gamma^2$ , obtenemos

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left( 1 - \frac{m^2}{r^2} \right) \right] \psi(\gamma\rho) = 0, \quad (\text{B.1.6})$$

donde sus soluciones son las funciones  $J_m$  de Bessel<sup>[17]</sup>

$$\psi = J_m(\gamma\rho).$$

Ahora, note que para el medio externo al cilindro, tenemos una ecuación modificada de Bessel: Ec. (B.1.5). Entonces la ecuación de Helmholtz puede ser transformada en la *Ecuación de Difusión* cambiando el parámetro  $k \rightarrow ik$ . Y ya sabemos que las soluciones de la ecuación de Difusión son  $I_m(\beta\rho)$  y  $K_m(\beta\rho)$ .<sup>3</sup> Entonces, debido al comportamiento físico de los campos, los cuales deben ser evanescentes fuera del cilindro dieléctrico, la solución debe ser de la forma

$$\psi = K_m(\beta\rho).$$

Por lo tanto, hemos encontrado que el cilindro dieléctrico tiene como soluciones

$$\psi = \begin{cases} J_m(\gamma\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z} & (\text{dentro}) \\ K_m(\beta\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z} & (\text{fuera}) \end{cases} \quad (\text{B.1.7})$$

<sup>3</sup> Consulte el Capítulo 1, pág. 5.

## B.2. Solución a un cilindro dieléctrico.

### Caso sin variación azimutal

De las ecuaciones de Maxwell en coordenadas cilíndricas<sup>4</sup> y suponiendo que los campos no tienen variación azimutal, tendremos entonces  $m = 0$ . Así, de la Ec. (1.2.1) se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= i\omega \vec{B} \\ &= -\hat{\rho} ik_z E_\varphi + \hat{\varphi} \left( ik_z E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi).\end{aligned}\quad (\text{B.2.1})$$

y también que

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= -i\mu\epsilon\omega \vec{E} \\ &= -\hat{\rho} ik_z B_\varphi + \hat{\varphi} \left( ik_z B_\rho - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\varphi).\end{aligned}\quad (\text{B.2.2})$$

Observe cómo las otras dos ecuaciones de Maxwell quedan:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.2.3})$$

y

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (\text{B.2.4})$$

<sup>4</sup> Consulte el Capítulo 1, pág. 7.



### B.2.1. Modos de oscilación TM y Frecuencias de Corte

Consideremos los modos TM (transversal magnético) de oscilación, con  $B_z = 0$ . Es evidente que de la Ec. (B.2.1), para la componente  $\varphi$ , se tiene:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \rho E_\varphi &= \text{cte} \\ \Rightarrow E_\varphi &= \frac{\text{cte}}{\rho}. \end{aligned}$$

Pero esta solución diverge en  $\rho = 0$ . Así

$$E_\varphi = 0.$$

Debido a las componentes paralelas  $\varphi$  y  $z$  a la superficie del cilindro y por las condiciones de frontera, podemos aplicar la continuidad tangencial de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  si conocemos  $E_\varphi$ ,  $E_z$ ,  $H_\varphi$  y  $H_z$ . Usando (B.2.2) para la componente  $\rho$ :

$$\begin{aligned} -i\mu\epsilon\omega E_\rho &= -\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \\ &= -ik_z B_\varphi. \end{aligned}$$

Entonces obtenemos

$$E_\rho = \frac{k_z}{\mu\epsilon\omega} B_\varphi.$$

Ahora escribiremos todas las componentes en términos de  $E_z$  y  $B_z$  que son las soluciones conocidas. Así, podemos encontrar  $B_\varphi$  por le Ec. (B.2.1), esto es

$$i\omega B_\varphi = ik_z E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial \rho}.$$

Sustituyendo  $E_\rho$ :

$$i\omega B_\varphi = i \frac{k_z^2}{\mu\epsilon\omega} B_\varphi - \frac{\partial E_z}{\partial \rho}.$$

Agrupando término, se tiene

$$\frac{\partial E_z}{\partial \rho} = i \left( \frac{k_z^2}{\mu\epsilon\omega} - \omega \right) B_\varphi,$$

Así

$$B_\varphi = \frac{i\mu\epsilon\omega}{\mu\epsilon\omega^2 - k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}.$$

Por lo tanto

$$B_\varphi = \frac{i\mu\epsilon\omega}{k_\perp^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}.$$

Entonces hemos encontrado  $E_\varphi = 0$ . Y por superposición,  $B_z = \mu H_z = 0$ . También sabemos que  $H_\varphi = \frac{1}{\mu} B_\varphi$ . Lo que implica

$$H_\varphi = \frac{i\epsilon\omega}{k_\perp^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}. \quad (\text{B.2.5})$$

Resolviendo la ecuación de onda para  $\vec{E}$  en  $z = 0$ , podemos obtener explícitamente  $H_\varphi$ . Sin no hay dependencia de los campos en  $\varphi$ ,

$$\left. \begin{aligned} E_z(\rho, \varphi, z) &= J_0(\gamma\rho) e^{ik_z z}, & \rho \leq R \\ E_z(\rho, \varphi, z) &= A K_0(\beta\rho) e^{ik_z z}, & \rho > R \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.2.6})$$

donde  $A$  es una constante de proporcionalidad que debemos encontrar. Así pues, de la ecuación (B.2.5):

$$\left. \begin{aligned} H_\varphi(\rho, \varphi, z) &= \frac{i\varepsilon_1\omega}{\gamma^2} \gamma \frac{d}{dx} J_0(x) e^{ik_z z}, & \rho \leq R \\ H_\varphi(\rho, \varphi, z) &= \frac{iA\varepsilon_0\omega}{-\beta^2} \beta \frac{d}{dx} K_0(x) e^{ik_z z}, & \rho > R. \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.2.7})$$

Observe que para  $\rho > R$  en (B.2.7),  $\beta^2$  tiene signo negativo en el denominador. Esto se debe a que el campo debe ser evanescente y

$$k_\perp^2 + k_z^2 = \mu\varepsilon\omega^2.$$

Esto implica que  $k_\perp \in \mathbb{C}$ . De hecho,  $k_\perp$  es puramente imaginario. Entonces

$$k_\perp^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 - k_z^2 < 0 \quad \text{if } \rho > R.$$

Así se tiene que

$$\beta^2 = k_z^2 - \mu_0\varepsilon_0\omega^2 = -k_\perp^2.$$

Por las condiciones de frontera,  $\rho = R$ . Entonces para  $\vec{E}$ :

$$J_0(\gamma R) = A K_0(\beta R).$$

Luego

$$A = \frac{J_0(\gamma R)}{K_0(\beta R)}.$$

Ahora, para  $\vec{H}$ :

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma} J'_0(\gamma R) = A \frac{\varepsilon_0}{\beta} K'_0(\beta R).$$

Sustituyendo  $A$ , tenemos

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma} J'_0(\gamma R) = -\frac{\varepsilon_0}{\beta} \frac{J_0(\gamma R)}{K_0(\beta R)} K'_0(\beta R).$$

Finalmente, dividiendo entre  $K'_0(\beta R)$  se obtiene

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma} \frac{J'_0(\gamma R)}{K'_0(\beta R)} + \frac{\varepsilon_0}{\beta} \frac{J_0(\gamma R)}{K_0(\beta R)} = 0.$$

Multiplicando por  $\beta\gamma$ , llegamos a que

$$\varepsilon_1 \beta \frac{J'_0(\gamma R)}{K'_0(\beta R)} + \varepsilon_0 \gamma \frac{J_0(\gamma R)}{K_0(\beta R)} = 0. \quad (\text{B.2.8})$$

Considerando las series de Laurent

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n,$$

se implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} &= \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x) t^n. \end{aligned}$$

Entonces tenemos una relación de recurrencia<sup>5</sup> para  $J'_n(x)$ :

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x).$$

En particular,

$$J'_0(x) = -J_1(x). \quad (\text{B.2.9})$$

Similarmente,<sup>5</sup> para  $K'_m(x)$ :

$$2K'_n(x) = -K_{n-1}(x) - K_{n+1}(x).$$

Por lo que para  $m = 0$

$$K'_0(x) = -K_1(x). \quad (\text{B.2.10})$$

Por tanto (B.2.8) viene a ser

$$\varepsilon_1 \beta \frac{J_1(\gamma R)}{K_1(\beta R)} + \varepsilon_0 \gamma \frac{J_0(\gamma R)}{K_0(\beta R)} = 0. \quad (\text{B.2.11})$$

Note que  $K_0$  y  $K_1$  son funciones que no oscilan y que no tienen ceros<sup>6</sup>. Si ahora multiplicamos (B.2.11) por  $\frac{K_0(\beta R)}{\varepsilon_0 \gamma}$  de tal modo consideremos que  $\beta \rightarrow 0$  tendremos

$$\frac{\varepsilon_1 \beta}{\varepsilon_0 \gamma} J_1(\gamma R) \frac{K_0(\beta R)}{K_1(\beta R)} + J_0(\gamma R) = 0.$$

<sup>5</sup> Arfken & Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 6a Ed.; pp. 678 y 717 (respectivamente).

<sup>6</sup> Véase Fig. 1.1.1, pág 6.

Aplicando límite:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ \frac{\varepsilon_1 \beta}{\varepsilon_0 \gamma} J_1(\gamma R) \frac{K_0(\beta R)}{K_1(\beta R)} + J_0(\gamma R) \right] = 0,$$

llegamos a que

$$J_0(\gamma R) = - \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ \frac{\varepsilon_1 \beta}{\varepsilon_0 \gamma} J_1(\gamma R) \frac{K_0(\beta R)}{K_1(\beta R)} \right].$$

Para argumentos pequeños, podemos emplear las siguientes expresiones<sup>7</sup>, donde  $\Gamma$  es la función Gamma:

$$K_0(x) \sim -\ln(x) \quad (\text{B.2.12})$$

$$K_m(x) \sim \frac{1}{2} \Gamma(m) \left[ \frac{1}{2} x \right]^{-m}, \quad m > 0 \quad (\text{B.2.13})$$

y además<sup>7</sup>

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^k \ln(x) = 0, \quad k > 0. \quad (\text{B.2.14})$$

Recordando que  $\Gamma(n+1) = n!$ , obtenemos

$$\begin{aligned} J_0(\gamma R) &= - \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ \frac{\varepsilon_1 \beta}{\varepsilon_0 \gamma} J_1(\gamma R) \frac{-\ln(\beta R)}{\frac{1}{\beta R}} \right] \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ \frac{\varepsilon_1 \beta^2 R}{\varepsilon_0 \gamma} J_1(\gamma R) \ln(\beta R) \right] \\ &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0 \gamma R} J_1(\gamma R) \lim_{\beta \rightarrow 0} [(\beta R)^2 \ln(\beta R)] = 0. \end{aligned}$$

<sup>7</sup> Abramowitz & Stegun, *Handbook of mathematical functions*, 10a Ed.; pp. 375 y 68 (respectivamente).

Por lo tanto

$$J_0(\gamma R) = 0 \quad (\text{B.2.15})$$

Además, de la Ec. (B.1.3) vemos que

$$k_z^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2.$$

Sustituyéndola en (B.1.2):

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1 - \mu_0 \varepsilon_0}.$$

Ahora al reemplazar  $\gamma$  en (B.2.15) llegamos a que

$$J_0(\omega R \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1 - \mu_0 \varepsilon_0}) = J_0(x_i) = 0,$$

donde  $x_i$  es el  $i$ -ésimo cero del modo  $m = 0$ . Esta condición nos dará las frecuencias de corte sobre la línea de luz:

$$\omega = \frac{k_z}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

Así, tenemos

$$x_i = \omega R \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1 - \mu_0 \varepsilon_0}.$$

Por lo tanto las *frecuencias de corte* están dadas por

$$\omega_i = \frac{x_i}{R \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1 - \mu_0 \varepsilon_0}}. \quad (\text{B.2.16})$$

Es sencillo observar que si consideramos  $\gamma = 0$ , tendremos  $J_1(\gamma R) = J_1(0) = 0$ . Entonces no existe alguna otra solución. Por tanto hemos encontrado de manera analítica los puntos donde nacen las relaciones de dispersión sobre la línea de luz, como puede verse en la Fig. B.2.1, donde definimos 510 nm de radio,  $\varepsilon_0 = 1$  y  $\varepsilon_1 = (1.5)^2$ .

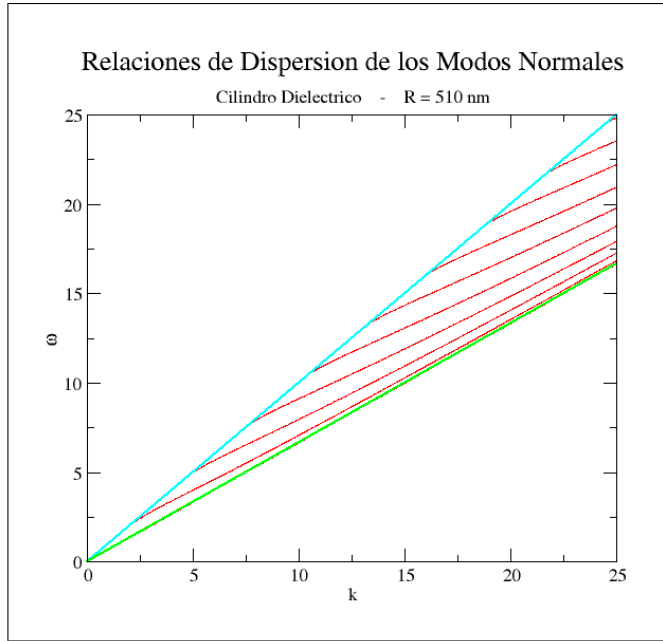


Figura B.2.1. Relaciones de dispersión TM para  $m = 0$ .

Nótese que las relaciones de dispersión, para un cilindro dieléctrico, están acotadas por las líneas

$$\omega = \frac{k_z}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (\text{línea de luz en el vacío})$$

$$\omega = \frac{k_z}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}} \quad (\text{línea del dieléctrico})$$

usando las ecuaciones (B.1.2) y (B.1.3), si  $\gamma = 0$  y  $\beta = 0$ , respectivamente. Para los modos de oscilación TE, se realiza un desarrollo analítico análogo al presentado en esta sección.



### B.3. Solución a un cilindro dieléctrico.

#### Caso general: dependencia en $\varphi$

Propongamos ahora, para el cilindro dieléctrico

$$\left. \begin{aligned} E_z(\rho, \varphi, z) &= a_m^{(1)} J_m(\gamma\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho \leq R \\ E_z(\rho, \varphi, z) &= b_m^{(1)} K_m(\beta\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho > R \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.3.1})$$

y también

$$\left. \begin{aligned} B_z(\rho, \varphi, z) &= a_m^{(2)} J_m(\gamma\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho \leq R \\ B_z(\rho, \varphi, z) &= b_m^{(2)} K_m(\beta\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho > R \end{aligned} \right\}. \quad (\text{B.3.2})$$

De las ecuaciones (C.1.3) y (C.1.5) se obtiene para el campo eléctrico

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi &= \left[ -\frac{k_z m}{\gamma^2 \rho} a_m^{(1)} J_m(\gamma\rho) - \frac{i\omega}{\gamma} a_m^{(2)} J'_m(\gamma\rho) \right] e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho \leq R \\ E_\varphi &= \left[ \frac{k_z m}{\beta^2 \rho} b_m^{(1)} K_m(\beta\rho) + \frac{i\omega}{\beta} b_m^{(2)} K'_m(\beta\rho) \right] e^{im\varphi} e^{ik_z z}. & \rho > R \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.3.3})$$

y para el campo magnético

$$\left. \begin{aligned} B_\varphi &= \left[ -\frac{k_z m}{\gamma^2 \rho} a_m^{(2)} J_m(\gamma\rho) + \frac{i\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} a_m^{(1)} J'_m(\gamma\rho) \right] e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho \leq R \\ B_\varphi &= \left[ \frac{k_z m}{\beta^2 \rho} b_m^{(2)} K_m(\beta\rho) - \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} b_m^{(1)} K'_m(\beta\rho) \right] e^{im\varphi} e^{ik_z z}. & \rho > R \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.3.4})$$

Como  $\rho = R$ , debido a las condiciones de frontera, tenemos entonces que

para  $E_z$ :

$$\sum_m a_m^{(1)} J_m(\gamma R) e^{im\varphi} = \sum_m b_m^{(1)} K_m(\beta R) e^{im\varphi},$$

para  $H_z$ :

$$\sum_m a_m^{(2)} J_m(\gamma R) e^{im\varphi} = \sum_m b_m^{(2)} K_m(\beta R) e^{im\varphi},$$

para  $E_\varphi$ :

$$\begin{aligned} \sum_m \left[ -\frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(1)} J_m(\gamma R) - \frac{i\omega}{\gamma} a_m^{(2)} J'_m(\gamma R) \right] e^{im\varphi} \\ = \sum_m \left[ \frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(1)} K_m(\beta R) + \frac{i\omega}{\beta} b_m^{(2)} K'_m(\beta R) \right] e^{im\varphi}, \end{aligned}$$

para  $H_\varphi$ :

$$\begin{aligned} \sum_m \left[ -\frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(2)} J_m(\gamma R) + \frac{i\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} a_m^{(1)} J'_m(\gamma R) \right] e^{im\varphi} \\ = \sum_m \left[ \frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(2)} K_m(\beta R) - \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} b_m^{(1)} K'_m(\beta R) \right] e^{im\varphi}. \end{aligned}$$

Si multiplicamos ambos lados de cada ecuación por  $e^{-im\varphi}$ , las integramos y después usamos la delta de Kroneker (Ec. C.1.10), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas, de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$a_m^{(1)} J_m(\gamma R) - b_m^{(1)} K_m(\beta R) = 0$$

$$a_m^{(2)} J_m(\gamma R) - b_m^{(2)} K_m(\beta R) = 0$$

$$-\frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(1)} J_m(\gamma R) - \frac{i\omega}{\gamma} a_m^{(2)} J'_m(\gamma R) - \frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(1)} K_m(\beta R) - \frac{i\omega}{\beta} b_m^{(2)} K'_m(\beta R) = 0$$

$$-\frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(2)} J_m(\gamma R) + \frac{i\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} a_m^{(1)} J'_m(\gamma R) - \frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(2)} K_m(\beta R) + \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} b_m^{(1)} K'_m(\beta R) = 0.$$

Usando la forma matricial encontremos el determinante que resuelva el sistema. Y para que exista una solución no trivial

$$X : = \det \begin{bmatrix} J_m(\gamma R) & 0 & -K_m(\beta R) & 0 \\ 0 & J_m(\gamma R) & 0 & -K_m(\beta R) \\ -\frac{k_z m}{\gamma^2 R} J_m(\gamma R) & -\frac{i\omega}{\gamma} J'_m(\gamma R) & -\frac{k_z m}{\beta^2 R} K_m(\beta R) & -\frac{i\omega}{\beta} K'_m(\beta R) \\ \frac{i\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} J'_m(\gamma R) & -\frac{k_z m}{\gamma^2 R} J_m(\gamma R) & \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} K'_m(\beta R) & -\frac{k_z m}{\beta^2 R} K_m(\beta R) \end{bmatrix} = 0.$$

Usemos la siguiente notación reducida para facilitar el álgebra:

$$\begin{cases} J_m \equiv J_m(\gamma R) \\ K_m \equiv K_m(\beta R) \\ J'_m \equiv J'_m(\gamma R) \\ K'_m \equiv K'_m(\beta R) \end{cases}$$

Operando el determinante, simplificándolo, dividiendo por  $J_m^2(\gamma R)$   $K_m^2(\beta R)$  y factorizando, obtendremos la *ecuación trascendental para los modos normales de un cilindro dieléctrico*, donde sus soluciones son las relaciones de dispersión:

$$\left[ \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} \frac{J'_m(\gamma R)}{J_m(\gamma R)} + \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} \frac{K'_m(\beta R)}{K_m(\beta R)} \right] \left[ \frac{\omega}{\gamma} \frac{J'_m(\gamma R)}{J_m(\gamma R)} + \frac{\omega}{\beta} \frac{K'_m(\beta R)}{K_m(\beta R)} \right] = \frac{k_z^2 m^2}{R^2} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2} \right)^2. \quad (\text{B.3.5})$$

Debido a las funciones de Bessel  $J_m$ ,  $K_m$  y a sus respectivas derivadas, la ecuación trascendental (B.3.5) sólo puede resolverse numéricamente. En la presente tesis,

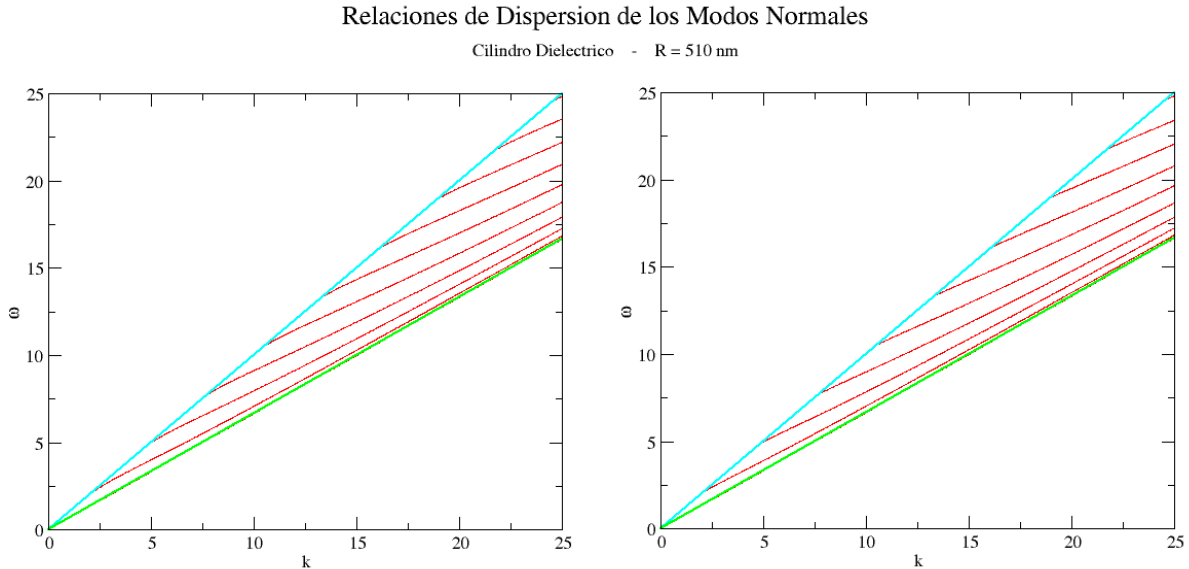
mediante la elaboración de programas computacionales, se obtuvieron las relaciones de dispersión, para la  $m$  deseada.

## B.4. Relaciones de Dispersión de los Modos Normales

Note que para  $m = 0$ , el caso más simple, la parte derecha de (B.3.5) se vuelve cero. Esto implica que cada múltiplo puede ser cero. La solución de cada uno de estos múltiplos en  $m = 0$  es el caso particular donde no hay variación azimutal y por tanto se obtienen los modos asociados al campo eléctrico para la polarización TM y TE de forma individual.

### B.4.1. Radio de 510 nm

De (B.3.5), para  $m = 0$ , con  $\varepsilon_0 = 1$  y  $\varepsilon_1 = (1.5)^2$ , se obtienen las siguientes relaciones.



*Figura B.4.1. Relaciones de dispersión cuando  $m = 0$ , para TM (izquierda) y TE (derecha)*

A continuación presentamos las relaciones de dispersión para  $m = 1, 2, 3$  (Fig. B.4.2).<sup>8</sup>

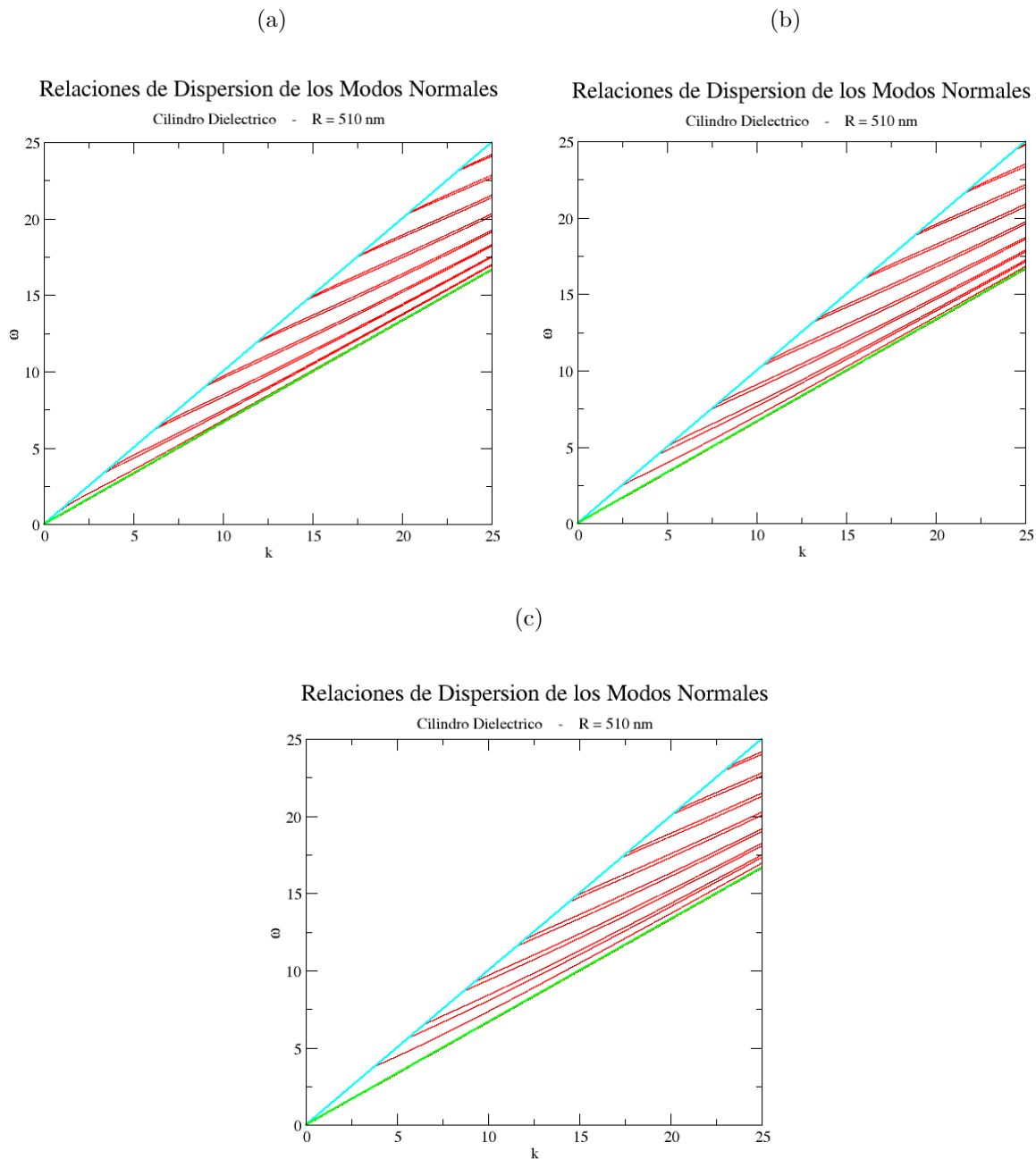


Figura B.4.2. Relaciones de dispersión para (a)  $m = 1$ , (b)  $m = 2$  y (c)  $m = 3$ .

<sup>8</sup> Observe como para  $m > 0$  las relaciones de dispersión no presentan de manera aislada las polarizaciones TM y TE, como en  $m = 0$ . Ahora se presenta una superposición de estas.

También incluimos el caso  $m = 10$  (Fig. B.4.3) para observar como las frecuencias de corte se alejan cada vez más del origen a medida que aumenta  $m$ , las cuales obedecen a la expresión (B.2.16).

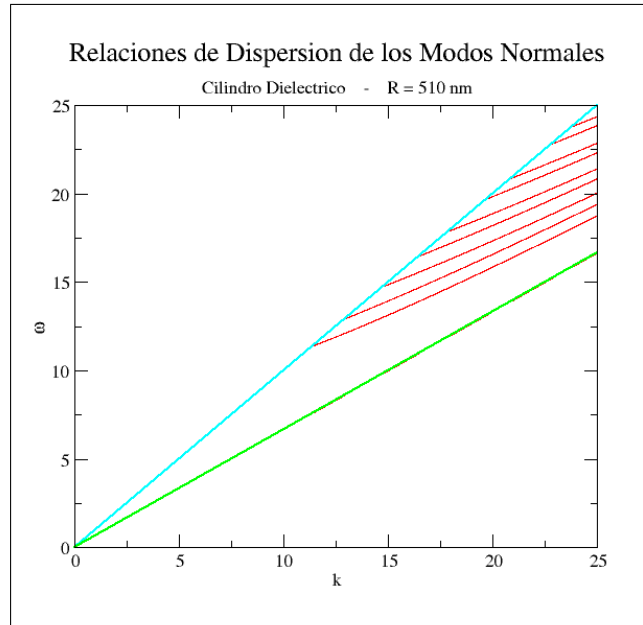


Figura B.4.3. Relaciones de dispersión para  $m = 10$ .

Algo muy importante que se debe notar cuando  $m > 0$  es la aparición de dos líneas saliendo de la misma frecuencia de corte. Estas dos líneas son las relaciones de dispersión para el campo eléctrico y magnético, a la vez. Únicamente cuando no hay dependencia en  $\varphi$ , tenemos casos individuales (Fig. B.4.1), pero al tener el caso general donde sí hay variación azimutal, se tiene una superposición de los casos TM y TE.

En todos los casos, las relaciones de dispersión están acotadas por la línea de luz en el vacío (por arriba) y por la línea de luz en el dieléctrico (por abajo).

Ahora bien, tomando algunos puntos de alguna relación de dispersión en particular, podemos obtener una nueva  $\gamma$  y  $\beta$  usando dichos puntos específicos, con el fin de graficar los modos resonantes del campo.

Primeramente mostraremos el modo del caso más simple:  $m = 0$ . El modo más básico se encuentra en la primera relación de dispersión (primer línea de abajo hacia arriba de la Fig. B.4.1 a) localizado aproximadamente en  $(k_z, \omega) = (2.158, 2.158)$ .

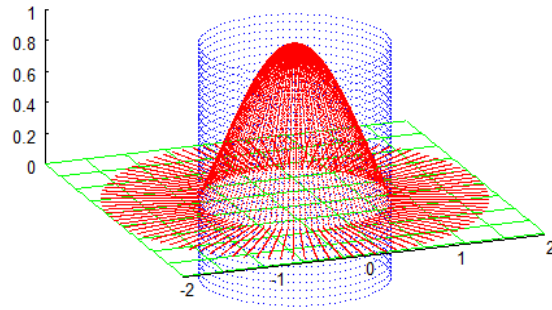


Figura B.4.4. Modos del campo eléctrico  $E_z$  de la primera relación de dispersión cuando  $z = 0$ , tomando  $m = 0$ .

También presentamos para  $m = 0$  el primer modo de la segunda y tercera relación de dispersión:  $(k_z, \omega) = (5.01, 5.0)$  y  $(k_z, \omega) = (8.1011, 8.0101)$ , respectivamente.

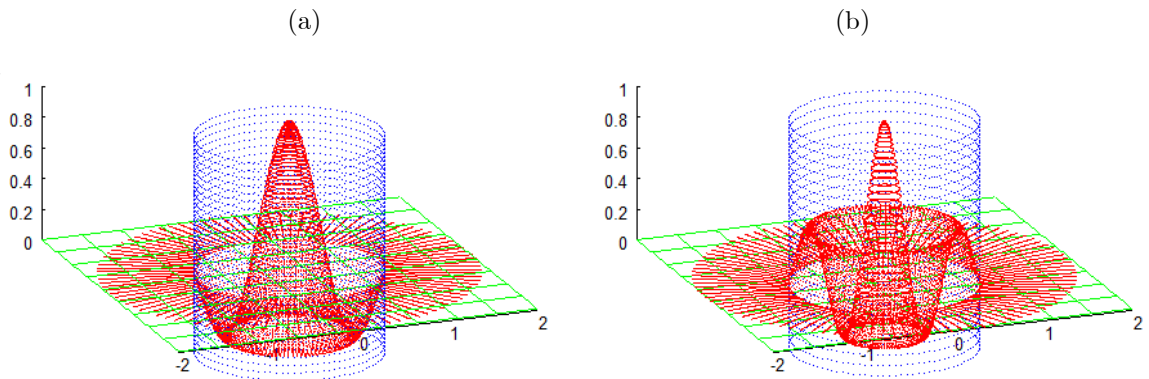
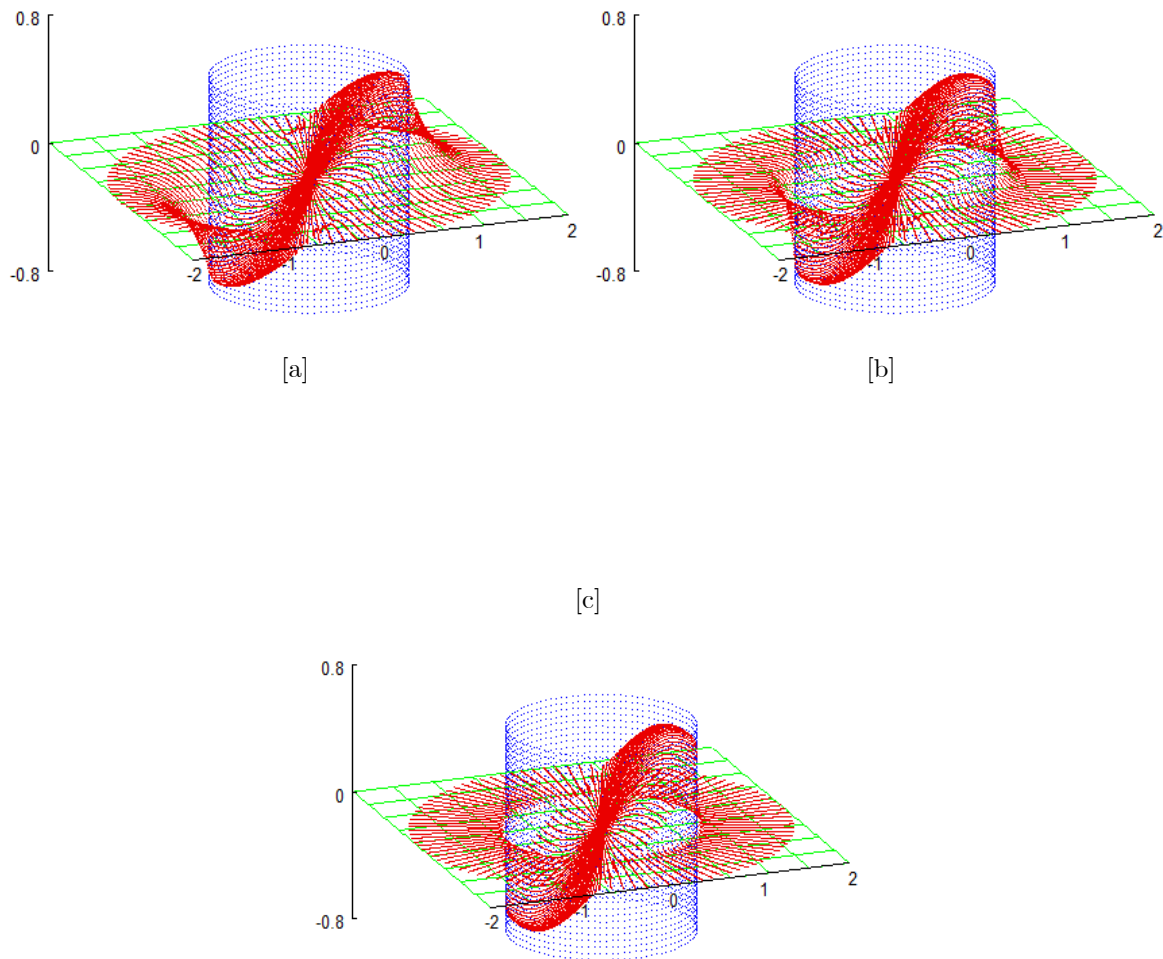


Figura B.4.5. Modos del campo eléctrico  $E_z$  de la segunda y tercera relación de dispersión cuando  $z = 0$ , tomando  $m = 0$ .

Ahora, hagamos  $m = 1$ ,  $m = 2$  y  $m = 3$  y grafiquemos los modos del campo eléctrico  $E_z$ , en  $z = 0$ .

Primeramente, tomemos  $m = 1$ . Para la primera relación de dispersión (la primer línea de abajo hacia arriba, de la Fig. B.4.2 a), tomemos los puntos [a]  $(k_z, \omega) = (5.0, 3.60)$ , [b]  $(k_z, \omega) = (20.0, 13.42)$  y [c]  $(k_z, \omega) = (100.0, 66.69)$ .



*Figura B.4.6. Modos del campo eléctrico  $E_z$  de la primera relación de dispersión cuando  $z = 0$  tomando  $m = 1$ .*



Para la segunda relación de dispersión usemos los mismos valores de  $k_z$ :  
[a]  $(k_z, \omega) = (5.0, 4.35)$ , [b]  $(k_z, \omega) = (20.0, 13.72)$  y [c]  $(k_z, \omega) = (100.0, 66.75)$ .

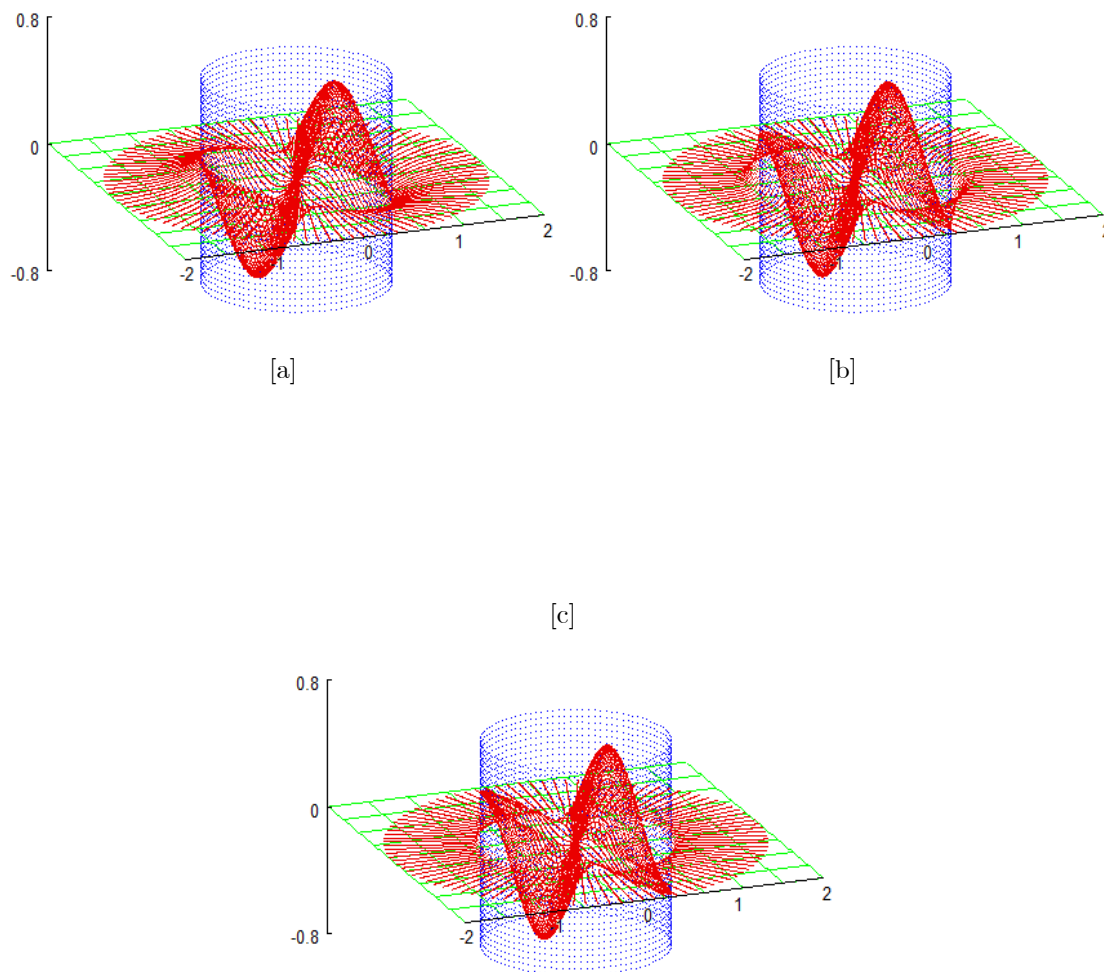
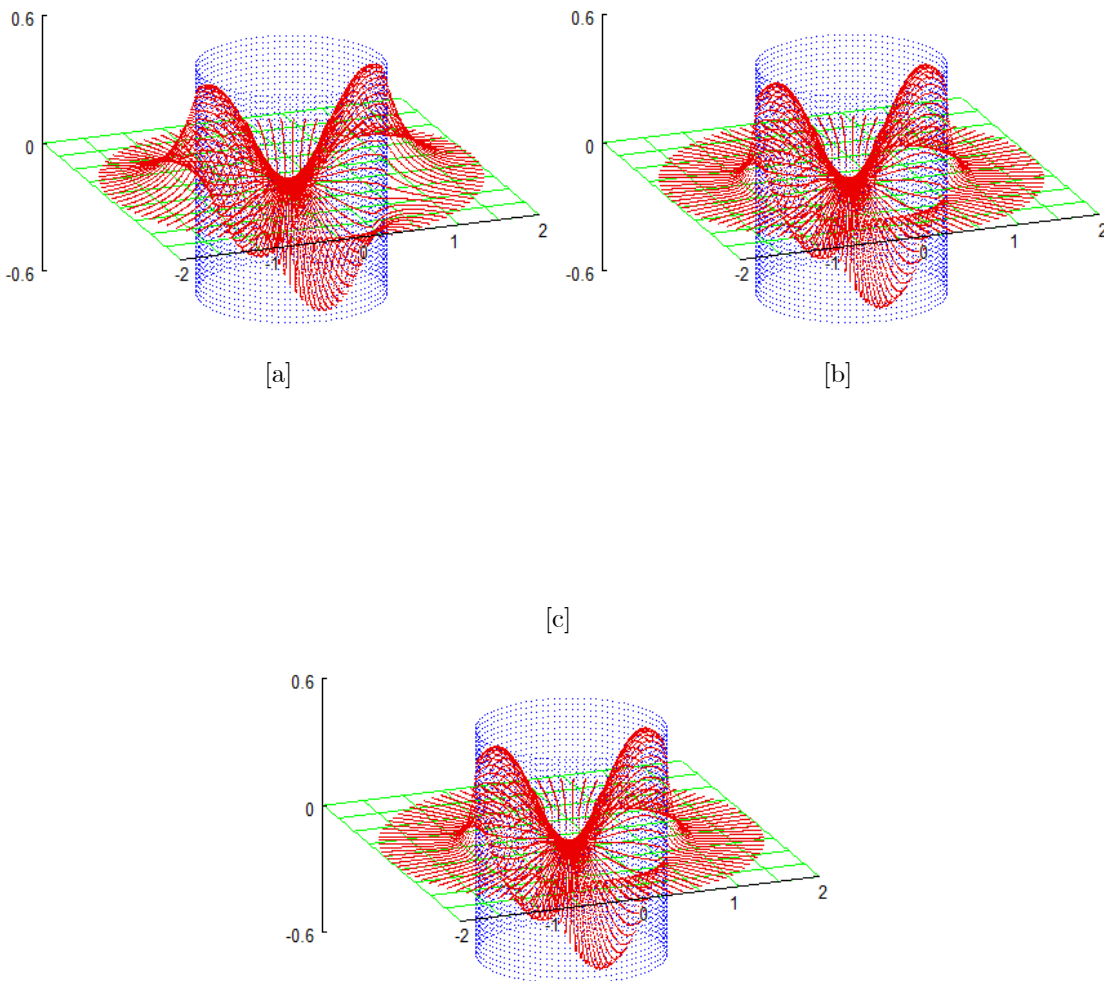


Figura B.4.7. Modos del campo eléctrico  $E_z$  de la segunda relación de dispersión cuando  $z = 0$  tomando  $m = 1$ .

Ahora, mostraremos los modos del campo eléctrico  $E_{z=0}$  para  $m = 2$ , tomando algunos puntos en su correspondiente relación de dispersión. Para la primera relación, elegimos: [a]  $(k_z, \omega) = (5.0, 3.99)$ , [b]  $(k_z, \omega) = (20.0, 13.56)$  y [c]  $(k_z, \omega) = (100.0, 66.72)$ .



*Figura B.4.8. Modos del campo eléctrico  $E_z$  de la primera relación de dispersión cuando  $z = 0$  tomando  $m = 2$ .*

Para la segunda relación de dispersión (segunda línea de abajo hacia arriba de la Fig. B.4.2 b), con los mismos valores de  $k_z$  para  $m = 2$ : [a]  $(k_z, \omega) = (5.0, 4.82)$ , [b]  $(k_z, \omega) = (20.0, 13.93)$  and [c]  $(k_z, \omega) = (100.0, 66.80)$ .

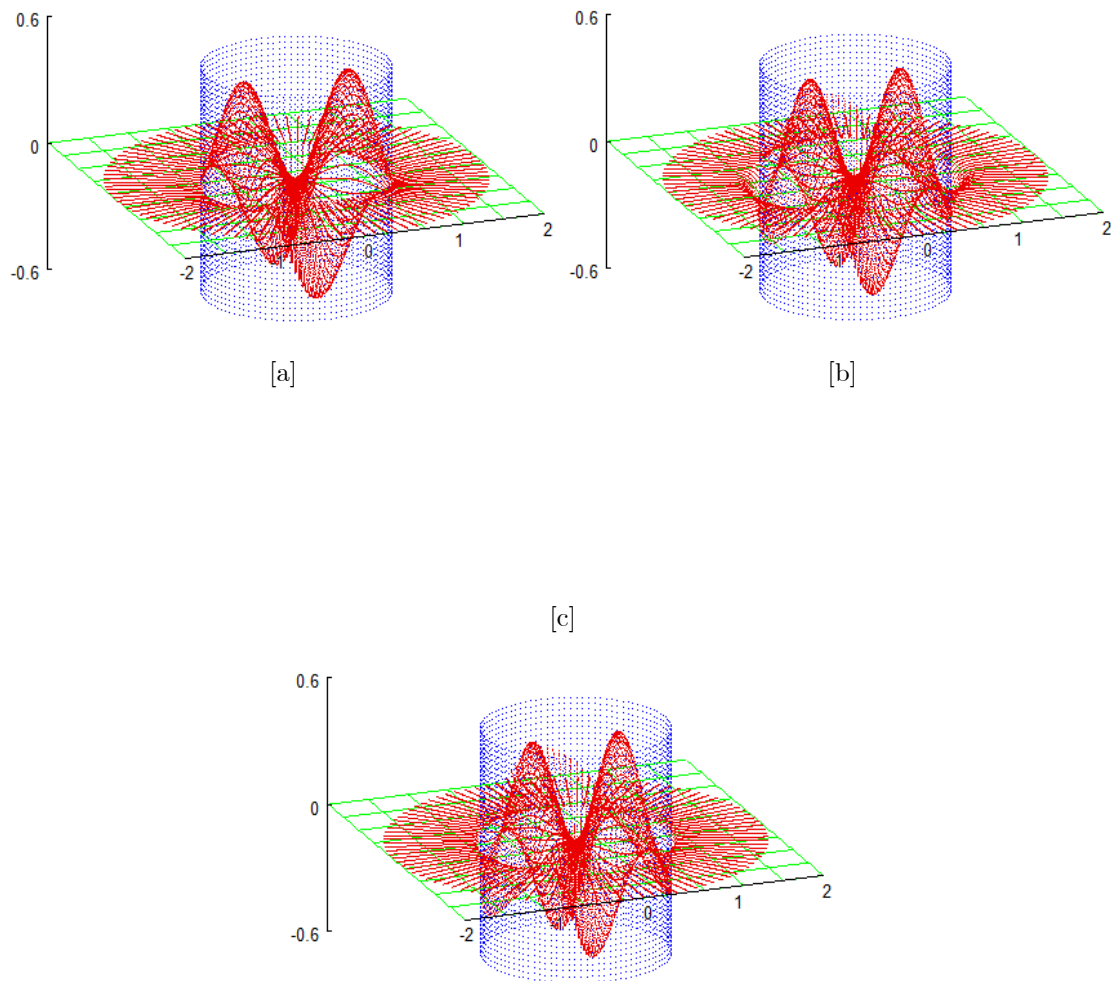


Figura B.4.9. Modos del campo eléctrico  $E_z$  de la segunda relación de dispersión cuando  $z = 0$  tomando  $m = 2$ .



Para la segunda relación de dispersión, no existe  $\omega$  para  $k_z = 5.0$ , por lo que tomaremos  $k_z = 6.0$ , sin afectar considerablemente el resultado. Entonces, los puntos son: [a]  $(k_z, \omega) = (6.0, 5.03)$ , [b]  $(k_z, \omega) = (20.0, 14.17)$  y [c]  $(k_z, \omega) = (100.0, 66.86)$ .

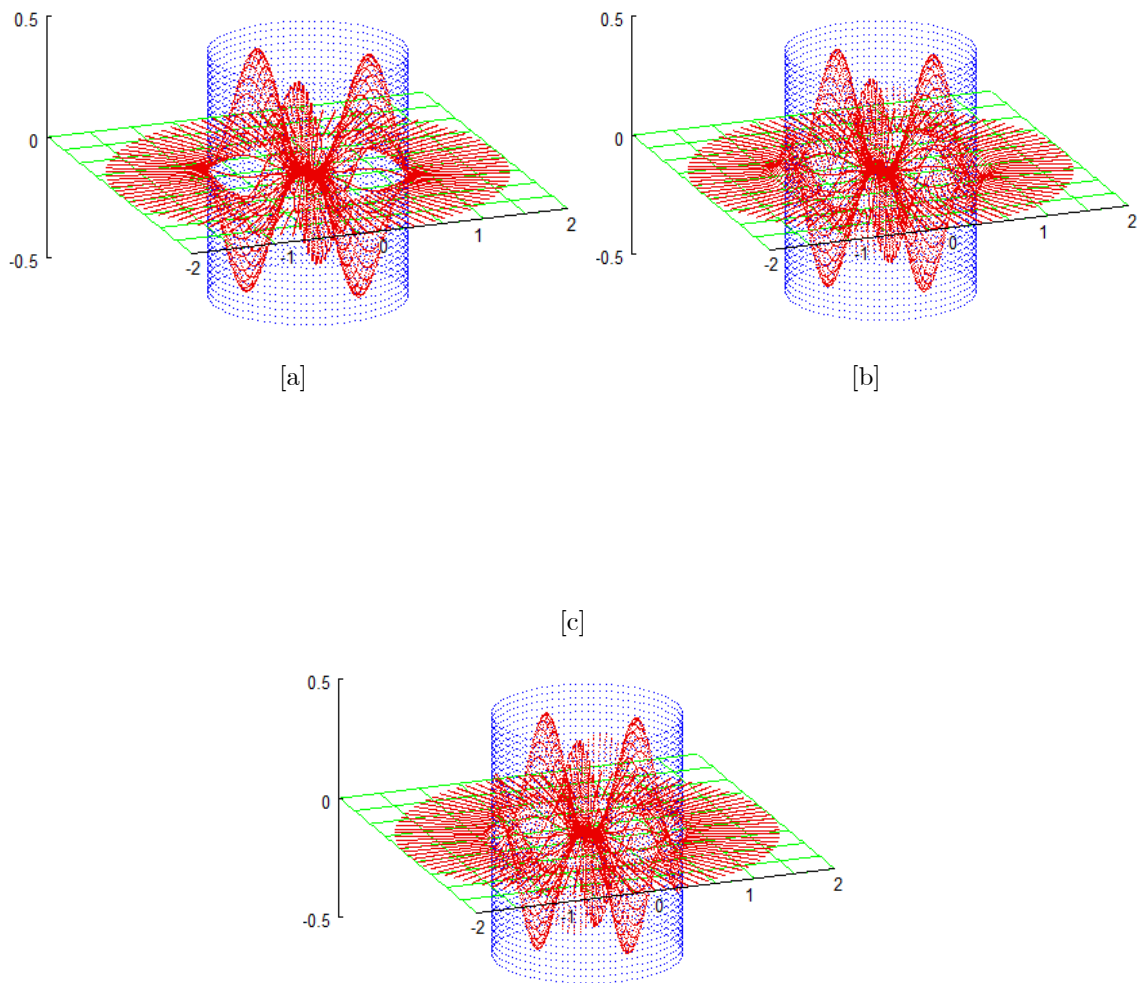
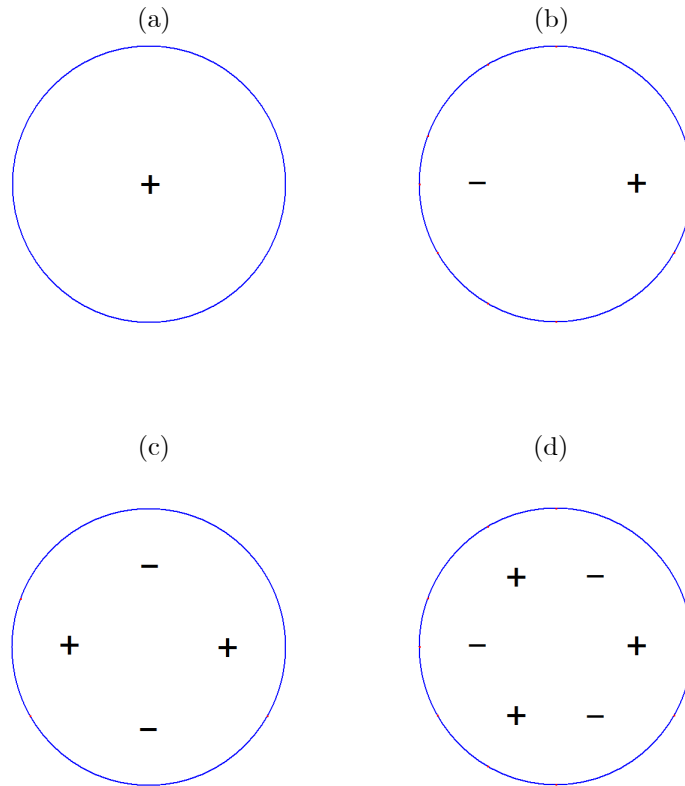


Figura B.4.11. Modos del campo eléctrico  $E_z$  de la segunda relación de dispersión cuando  $z = 0$  tomando  $m = 3$ .

Por último, presentamos un bosquejo del patrón simétrico (Fig. B.4.12) que siguen los modos del campo  $E_z$  previamente presentados, donde el signo (+) indica los máximos del modo y el signo (-) indica la ubicación sus mínimos.



*Figura B.4.12. Bosquejo de máximos y mínimos de los modos para (a)  $m = 0$ , (b)  $m = 1$ , (c)  $m = 2$ , (d)  $m = 3$ .*

Note como los máximos y mínimos se presentan completamente dentro del cilindro debido al comportamiento oscilatorio de los campos en el dieléctrico, es decir a las ondas estacionarias que hay en el interior. En el exterior los campos decaen a cero.

# Cilindro Metálico: Solución analítica de los modos.

## Caso general: dependencia en $\varphi$

---

En esta sección mostramos el desarrollo algebraico para encontrar la solución analítica de las relaciones de dispersión de los modos tanto Normales como Virtuales de un cilindro infinito de metal, aislado y de radio  $R$  con sección transversal circular y sin restricciones a lo largo del eje  $z$ , considerando variación azimutal.

### C.1. Modos Normales

Como las componentes paralelas a la superficie del cilindro son  $\varphi$  y  $z$ , por las condiciones de frontera, podemos aplicar la continuidad tangencial de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  si sabemos  $E_\varphi$ ,  $E_z$ ,  $H_\varphi$  y  $H_z$ . Entonces de la Ec. (1.2.2) se tiene

$$-i\mu\varepsilon\omega E_\varphi = ik_z B_\rho - \frac{\partial B_z}{\partial \rho}.$$

sí vemos que

$$E_\varphi = -\frac{k_z}{\mu\varepsilon\omega} B_\rho - \frac{i}{\mu\varepsilon\omega} \frac{\partial B_z}{\partial \rho}. \quad (\text{C.1.1})$$

Para expresar  $E_\varphi$  en términos de los campos, debemos conocer  $B_\rho$ . De (1.2.2)

$$i\omega B_\rho = \frac{im}{\rho} E_z - ik_z E_\varphi.$$

Entonces

$$B_\rho = \frac{m}{\omega\rho} E_z - \frac{k_z}{\omega} E_\varphi. \quad (\text{C.1.2})$$

Sustituyendo (C.1.2) in (C.1.1), tenemos

$$E_\varphi = -\frac{k_z m}{\mu\epsilon\omega^2\rho} E_z + \frac{k_z^2}{\mu\epsilon\omega^2} E_\varphi - \frac{i}{\mu\epsilon\omega} \frac{\partial B_z}{\partial\rho}.$$

Agrupando términos:

$$\left(1 - \frac{k_z^2}{\mu\epsilon\omega^2}\right) E_\varphi = -\frac{k_z m}{\mu\epsilon\omega^2\rho} E_z - \frac{i}{\mu\epsilon\omega} \frac{\partial B_z}{\partial\rho}.$$

Multiplicando por  $\mu\epsilon\omega^2$

$$(\mu\epsilon\omega^2 - k_z^2) E_\varphi = -\frac{k_z m}{\rho} E_z - i\omega \frac{\partial B_z}{\partial\rho}$$

y recordando que  $k_\perp^2 = \mu\epsilon\omega^2 - k_z^2$ , obtenemos

$$E_\varphi = -\frac{k_z m}{k_\perp^2 \rho} E_z - \frac{i\omega}{k_\perp^2} \frac{\partial B_z}{\partial\rho}. \quad (\text{C.1.3})$$

Ahora para  $H_\varphi$ , tenemos de la Ec. (1.2.2),

$$i\omega B_\varphi = ik_z E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial\rho}. \quad (\text{C.1.4})$$



Entonces

$$B_\varphi = \frac{k_z}{\omega} E_\rho + \frac{i}{\omega} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}.$$

Ahora debemos encontrar  $E_\rho$  para sustituirla en (C.1.4). De la ecuación (1.2.3)

$$-i\mu\epsilon\omega E_\rho = \frac{im}{\rho} B_z - ik_z B_\varphi.$$

Así

$$E_\rho = -\frac{m}{\mu\epsilon\omega\rho} B_z + \frac{k_z}{\mu\epsilon\omega} B_\varphi.$$

Reemplazando esta ecuación en (C.1.4) se tiene

$$B_\varphi = -\frac{k_z m}{\mu\epsilon\omega^2 \rho} B_z + \frac{k_z^2}{\mu\epsilon\omega^2} B_\varphi + \frac{i}{\omega} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}.$$

Nuevamente, al agrupar

$$\left(1 - \frac{ik_z^2}{\mu\epsilon\omega^2}\right) B_\varphi = -\frac{ik_z m}{\mu\epsilon\omega\rho} B_z - \frac{\partial E_z}{\partial \rho}.$$

Y multiplicando por  $\mu\epsilon\omega^2$ , llegamos a

$$(\mu\epsilon\omega^2 - ik_z^2) B_\varphi = -\frac{ik_z m}{\rho} B_z + i\mu\epsilon\omega \frac{\partial E_z}{\partial \rho}.$$

Por lo tanto

$$B_\varphi = -\frac{k_z m}{k_\perp^2 \rho} B_z + \frac{i\mu\epsilon\omega}{k_\perp^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}. \quad (\text{C.1.5})$$

Ahora bien, de la Ec. (1.1.17) y recordando que nuestro cilindro metálico tiene radio  $R$ , proponemos lo siguiente:

para la componente  $z$  del campo eléctrico

$$\left. \begin{aligned} E_z(\rho, \varphi, z) &= a_m^{(1)} I_m(\gamma\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho \leq R \\ E_z(\rho, \varphi, z) &= b_m^{(1)} K_m(\beta\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho > R \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.1.6})$$

y para la componente  $z$  del campo magnético, proponemos

$$\left. \begin{aligned} B_z(\rho, \varphi, z) &= a_m^{(2)} I_m(\gamma\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho \leq R \\ B_z(\rho, \varphi, z) &= b_m^{(2)} K_m(\beta\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho > R \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.1.7})$$

donde  $a_m^{(1)}$ ,  $b_m^{(1)}$ ,  $a_m^{(2)}$ ,  $b_m^{(2)}$  son nuestras incógnitas, y para resolverlas nuestro siguiente paso es obtener  $E_\varphi$  y  $B_\varphi$ . Calculemos entonces  $\frac{\partial B_z}{\partial \rho}$  y  $\frac{\partial E_z}{\partial \rho}$ , respectivamente.

Primeramente

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial \rho} &= a_m^{(2)} \gamma \frac{d}{dx} I_m(x) e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho \leq R \\ \frac{\partial B_z}{\partial \rho} &= b_m^{(2)} \beta \frac{d}{dx} K_m(x) e^{im\varphi} e^{ik_z z}. & \rho > R \end{aligned} ,$$

Si  $K'_m(x) = \frac{d}{dx} K_m(x)$  y  $I'_m(x) = \frac{d}{dx} I_m(x)$ , se implica que

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi &= \left[ \frac{k_z m}{\gamma^2 \rho} a_m^{(1)} I_m(\gamma\rho) + \frac{i\omega}{\gamma} a_m^{(2)} I'_m(\gamma\rho) \right] e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho \leq R \\ E_\varphi &= \left[ \frac{k_z m}{\beta^2 \rho} b_m^{(1)} K_m(\beta\rho) + \frac{i\omega}{\beta} b_m^{(2)} K'_m(\beta\rho) \right] e^{im\varphi} e^{ik_z z}. & \rho > R \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.1.8})$$

Y luego,

$$\frac{\partial E_z}{\partial \rho} = a_m^{(1)} \gamma \frac{d}{dx} I_m(x) e^{im\varphi} e^{ik_z z}, \quad \rho \leq R$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \rho} = b_m^{(1)} \beta \frac{d}{dx} K_m(x) e^{im\varphi} e^{ik_z z}, \quad \rho > R$$

lo que implica

$$\left. \begin{aligned} B_\varphi &= \left[ \frac{k_z m}{\gamma^2 \rho} a_m^{(2)} I_m(\gamma \rho) - \frac{i \mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} a_m^{(1)} I'_m(\gamma \rho) \right] e^{im\varphi} e^{ik_z z}, \quad \rho \leq R \\ B_\varphi &= \left[ \frac{k_z m}{\beta^2 \rho} b_m^{(2)} K_m(\beta \rho) - \frac{i \mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} b_m^{(1)} K'_m(\beta \rho) \right] e^{im\varphi} e^{ik_z z}, \quad \rho > R \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.1.9})$$

Nótese que en las ecuaciones (C.1.8) y (C.1.9) se dió un cambio de signo en todos los denominadores. Esto es debido a las definiciones de  $\beta^2$  y  $\gamma^2$ , pues los campos caen evanescentemente hacia fuera y hacia dentro. Además se tiene que  $k_\perp \in \mathbb{C}$ , de hecho  $k_\perp$  es puramente imaginario. Por lo que se tiene

$$k_\perp^2 = \mu \varepsilon \omega^2 - k_z^2 < 0.$$

Entonces

$$\gamma^2 = k_z^2 - \mu_1 \varepsilon_1 \omega^2 = -k_\perp^2 \quad \beta^2 = k_z^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 = -k_\perp^2.$$

Ahora bien, por las condiciones de frontera,  $\rho = R$ . Entonces tenemos que

para  $E_z$ :

$$\sum_m a_m^{(1)} I_m(\gamma R) e^{im\varphi} = \sum_m b_m^{(1)} K_m(\beta R) e^{im\varphi},$$

para  $H_z$ :

$$\sum_m a_m^{(2)} I_m(\gamma R) e^{im\varphi} = \sum_m b_m^{(2)} K_m(\beta R) e^{im\varphi},$$

para  $E_\varphi$ :

$$\begin{aligned} \sum_m \left[ \frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(1)} I_m(\gamma R) + \frac{i\omega}{\gamma} a_m^{(2)} I'_m(\gamma R) \right] e^{im\varphi} \\ = \sum_m \left[ \frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(1)} K_m(\beta R) + \frac{i\omega}{\beta} b_m^{(2)} K'_m(\beta R) \right] e^{im\varphi}, \end{aligned}$$

para  $H_\varphi$ :

$$\begin{aligned} \sum_m \left[ \frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(2)} I_m(\gamma R) - \frac{i\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} a_m^{(1)} I'_m(\gamma R) \right] e^{im\varphi} \\ = \sum_m \left[ \frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(2)} K_m(\beta R) - \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} b_m^{(1)} K'_m(\beta R) \right] e^{im\varphi}. \end{aligned}$$

Para simplificar las expresiones de  $E_z$ ,  $H_z$ ,  $E_\varphi$  y  $H_\varphi$ , haremos uso de las funciones ortonormales  $e^{im\varphi}$ , de tal modo se cumpla

$$\int_a^b U_m^*(x) U_n(x) dx = \delta_{mn}, \quad (\text{C.1.10})$$

donde  $\delta_{mn}$  es conocida como la *delta de Kronecker*. Así, multiplicando por  $e^{-in\varphi}$  en ambos lados de cada ecuación y después integrando, tenemos

para  $E_z$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_m a_m^{(1)} I_m(\gamma R) e^{im\varphi} e^{-in\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sum_m b_m^{(1)} K_m(\beta R) e^{im\varphi} e^{-in\varphi} d\varphi. \\ \implies a_m^{(1)} I_m(\gamma R) = b_m^{(1)} K_m(\beta R); \end{aligned}$$

para  $H_z$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_m a_m^{(2)} I_m(\gamma R) e^{im\varphi} e^{-in\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sum_m b_m^{(2)} K_m(\beta R) e^{im\varphi} e^{-in\varphi} d\varphi. \\ \implies a_m^{(2)} I_m(\gamma R) = b_m^{(2)} K_m(\beta R); \end{aligned}$$

para  $E_\varphi$ :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \sum_m \left[ \frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(1)} I_m(\gamma R) + \frac{i\omega}{\gamma} a_m^{(2)} I'_m(\gamma R) \right] e^{im\varphi} e^{-in\varphi} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_m \left[ \frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(1)} K_m(\beta R) + \frac{i\omega}{\beta} b_m^{(2)} K'_m(\beta R) \right] e^{im\varphi} e^{-in\varphi} d\varphi, \\
&\Rightarrow \frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(1)} I_m(\gamma R) + \frac{i\omega}{\gamma} a_m^{(2)} I'_m(\gamma R) \\
&= \frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(1)} K_m(\beta R) + \frac{i\omega}{\beta} b_m^{(2)} K'_m(\beta R);
\end{aligned}$$

para  $H_\varphi$ :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \sum_m \left[ \frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(2)} I_m(\gamma R) - \frac{i\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} a_m^{(1)} I'_m(\gamma R) \right] e^{im\varphi} e^{-in\varphi} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_m \left[ \frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(2)} K_m(\beta R) - \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} b_m^{(1)} K'_m(\beta R) \right] e^{im\varphi} e^{-in\varphi} d\varphi, \\
&\Rightarrow \frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(2)} I_m(\gamma R) - \frac{i\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} a_m^{(1)} I'_m(\gamma R) \\
&= \frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(2)} K_m(\beta R) - \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} b_m^{(1)} K'_m(\beta R).
\end{aligned}$$

Entonces, llegamos el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas, de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$a_m^{(1)} I_m(\gamma R) - b_m^{(1)} K_m(\beta R) = 0$$

$$a_m^{(2)} I_m(\gamma R) - b_m^{(2)} K_m(\beta R) = 0$$

$$\frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(1)} I_m(\gamma R) + \frac{i\omega}{\gamma} a_m^{(2)} I'_m(\gamma R) - \frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(1)} K_m(\beta R) - \frac{i\omega}{\beta} b_m^{(2)} K'_m(\beta R) = 0$$

$$\frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(2)} I_m(\gamma R) - \frac{i\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} a_m^{(1)} I'_m(\gamma R) - \frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(2)} K_m(\beta R) + \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} b_m^{(1)} K'_m(\beta R) = 0.$$

Para resolver este problema, podemos escribir estas ecuaciones en forma matricial y encontrar el determinante que resuelva el sistema. Esto es

$$\begin{bmatrix} I_m(\gamma R) & 0 & -K_m(\beta R) & 0 \\ 0 & I_m(\gamma R) & 0 & -K_m(\beta R) \\ \frac{k_z m}{\gamma^2 R} I_m(\gamma R) & \frac{i\omega}{\gamma} I'_m(\gamma R) & -\frac{k_z m}{\beta^2 R} K_m(\beta R) & -\frac{i\omega}{\beta} K'_m(\beta R) \\ -\frac{i\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} I'_m(\gamma R) & \frac{k_z m}{\gamma^2 R} I_m(\gamma R) & \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} K'_m(\beta R) & -\frac{k_z m}{\beta^2 R} K_m(\beta R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_m^{(1)} \\ a_m^{(2)} \\ b_m^{(1)} \\ b_m^{(2)} \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{C.1.11})$$

Para que exista una solución no trivial para el vector columna  $[a_m^{(1)}, a_m^{(2)}, b_m^{(1)}, b_m^{(2)}]$ , el determinante debe hacerse cero, i.e.,

$$X := \det \begin{bmatrix} I_m(\gamma R) & 0 & -K_m(\beta R) & 0 \\ 0 & I_m(\gamma R) & 0 & -K_m(\beta R) \\ \frac{k_z m}{\gamma^2 R} I_m(\gamma R) & \frac{i\omega}{\gamma} I'_m(\gamma R) & -\frac{k_z m}{\beta^2 R} K_m(\beta R) & -\frac{i\omega}{\beta} K'_m(\beta R) \\ -\frac{i\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} I'_m(\gamma R) & \frac{k_z m}{\gamma^2 R} I_m(\gamma R) & \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} K'_m(\beta R) & -\frac{k_z m}{\beta^2 R} K_m(\beta R) \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{C.1.12})$$

Para facilitar el álgebra, definamos la siguiente notación reducida

$$\left\{ \begin{array}{l} I_m \equiv I_m(\gamma R) \\ K_m \equiv K_m(\beta R) \\ I'_m \equiv I'_m(\gamma R) \\ K'_m \equiv K'_m(\beta R) \end{array} \right.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} X = & I_m \left\{ I_m \left( \frac{k_z^2 m^2}{\beta^4 R^2} K_m^2 - \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2}{\beta^2} K_m'^2 \right) - 0 \right. \\ & \left. - K_m \left( -\frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2}{\beta \gamma} I'_m K'_m + \frac{k_z^2 m^2}{\gamma^2 \beta^2 R^2} I_m K_m \right) \right\} - \{0\} \\ & - K_m \left\{ 0 - I_m \left( -\frac{k_z^2 m^2}{\gamma^2 \beta^2 R^2} I_m K_m + \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \omega^2}{\beta \gamma} I'_m K'_m \right) \right. \\ & \left. - K_m \left( \frac{k_z^2 m^2}{\gamma^4 R^2} I_m^2 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \omega^2}{\gamma^2} I_m'^2 \right) \right\} - \{0\}. \end{aligned}$$

Simplificando términos

$$\begin{aligned} X = & \frac{k_z^2 m^2}{R^2} I_m^2 K_m^2 \left( \frac{1}{\gamma^4} - \frac{2}{\gamma^2 \beta^2} + \frac{1}{\beta^4} \right) \\ & + \frac{\omega^2}{\beta \gamma} I_m I'_m K_m K'_m (\mu_0 \varepsilon_0 + \mu_1 \varepsilon_1) \\ & - \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \omega^2}{\gamma^2} I_m'^2 K_m^2 - \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2}{\beta^2} I_m^2 K_m'^2. \end{aligned}$$

Si dividimos por  $J_m^2(\gamma\rho)K_m^2(\beta\rho)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} X &= \frac{k_z^2 m^2}{R^2} \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2} \right)^2 \\ &+ \frac{\omega^2}{\beta\gamma} \frac{I'_m}{I_m} \frac{K'_m}{K_m} (\mu_0 \varepsilon_0 + \mu_1 \varepsilon_1) \\ &- \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \omega^2}{\gamma^2} \frac{I_m^2}{I_m^2} - \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2}{\beta^2} \frac{K_m^2}{K_m^2}. \end{aligned}$$

Al factorizar, llegamos a que

$$X = \left[ \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} \frac{I'_m}{I_m} - \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} \frac{K'_m}{K_m} \right] \left[ \frac{\omega}{\gamma} \frac{I'_m}{I_m} - \frac{\omega}{\beta} \frac{K'_m}{K_m} \right] - \frac{k_z^2 m^2}{R^2} \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2} \right)^2.$$

Para que el sistema tenga solución, debe ocurrir que  $X = 0$ . Por lo tanto obtenemos la siguiente *ecuación trascendental para los modos normales de un cilindro metálico*:

$$\left[ \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} \frac{I'_m(\gamma R)}{I_m(\gamma R)} - \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} \frac{K'_m(\beta R)}{K_m(\beta R)} \right] \left[ \frac{\omega}{\gamma} \frac{I'_m(\gamma R)}{I_m(\gamma R)} - \frac{\omega}{\beta} \frac{K'_m(\beta R)}{K_m(\beta R)} \right] = \frac{k_z^2 m^2}{R^2} \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2} \right)^2.$$

## C.2. Modos Virtuales

Por las condiciones de frontera podemos aplicar la continuidad tangencial de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ . Entonces proponemos

$$\left. \begin{aligned} E_z(\rho, \varphi, z) &= a_m^{(1)} I_m(\gamma\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho \leq R \\ E_z(\rho, \varphi, z) &= b_m^{(1)} H_m^{(1)}(\beta\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho > R \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.2.1})$$



$$\left. \begin{aligned} B_z(\rho, \varphi, z) &= a_m^{(2)} I_m(\gamma\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho \leq R \\ B_z(\rho, \varphi, z) &= b_m^{(2)} H_m^{(1)}(\beta\rho) e^{im\varphi} e^{ik_z z}. & \rho > R \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.2.2})$$

Ahora bien, de las ecuaciones de Maxwell en coordenadas cilíndricas<sup>1</sup> llegamos a las ecuaciones (C.1.3) y (C.1.5), mostradas a continuación:<sup>2</sup>

$$E_\varphi = -\frac{k_z m}{k_\perp^2 \rho} E_z - \frac{i\omega}{k_\perp^2} \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \qquad B_\varphi = -\frac{k_z m}{k_\perp^2 \rho} B_z + \frac{i\mu\epsilon\omega}{k_\perp^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}.$$

Usando las nuevas definiciones de  $\gamma^2$  y  $\beta^2$ , definidas en (2.1.1) y (2.1.2), se tiene que

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi &= \left[ \frac{k_z m}{\gamma^2 \rho} a_m^{(1)} I_m(\gamma\rho) + \frac{i\omega}{\gamma} a_m^{(2)} I_m'(\gamma\rho) \right] e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho \leq R \\ E_\varphi &= \left[ -\frac{k_z m}{\beta^2 \rho} b_m^{(1)} H_m^{(1)}(\beta\rho) - \frac{i\omega}{\beta} b_m^{(2)} H_m^{(1)'}(\beta\rho) \right] e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho > R \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.2.3})$$

y también se tiene que

$$\left. \begin{aligned} B_\varphi &= \left[ \frac{k_z m}{\gamma^2 \rho} a_m^{(2)} I_m(\gamma\rho) - \frac{i\mu_1 \epsilon_1 \omega}{\gamma} a_m^{(1)} I_m'(\gamma\rho) \right] e^{im\varphi} e^{ik_z z}, & \rho \leq R \\ B_\varphi &= \left[ -\frac{k_z m}{\beta^2 \rho} b_m^{(2)} H_m^{(1)}(\beta\rho) + \frac{i\mu_0 \epsilon_0 \omega}{\beta} b_m^{(1)} H_m^{(1)'}(\beta\rho) \right] e^{im\varphi} e^{ik_z z}. & \rho > R \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.2.4})$$

Por las condiciones de frontera tenemos que  $\rho = R$ . Así

<sup>1</sup> Consulte el Capítulo 1, pág. 7.

<sup>2</sup> Consulte el Capítulo 1, pág. 8, para ver desarrollo algebraico.

para  $E_z$ :

$$\sum_m a_m^{(1)} I_m(\gamma R) e^{im\varphi} = \sum_m b_m^{(1)} H_m^{(1)}(\beta R) e^{im\varphi},$$

para  $H_z$ :

$$\sum_m a_m^{(2)} I_m(\gamma R) e^{im\varphi} = \sum_m b_m^{(2)} H_m^{(1)}(\beta R) e^{im\varphi},$$

para  $E_\varphi$ :

$$\begin{aligned} \sum_m \left[ \frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(1)} I_m(\gamma R) + \frac{i\omega}{\gamma} a_m^{(2)} I'_m(\gamma R) \right] e^{im\varphi} \\ = \sum_m \left[ -\frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(1)} H_m^{(1)}(\beta R) - \frac{i\omega}{\beta} b_m^{(2)} H_m^{(1)' }(\beta R) \right] e^{im\varphi}, \end{aligned}$$

para  $H_\varphi$ :

$$\begin{aligned} \sum_m \left[ \frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(2)} I_m(\gamma R) - \frac{i\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} a_m^{(1)} I'_m(\gamma R) \right] e^{im\varphi} \\ = \sum_m \left[ -\frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(2)} H_m^{(1)}(\beta R) + \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} b_m^{(1)} H_m^{(1)' }(\beta R) \right] e^{im\varphi}. \end{aligned}$$

Note que el factor  $e^{ik_z z}$  puede ser eliminado ya que es el mismo en ambos lados de cilindro. No así  $e^{im\varphi}$ , ya que  $\varphi$  es distinta dentro y fuera. Si multiplicamos por  $e^{-im\varphi}$  a ambos lados de cada ecuación e integremos, y después usamos la delta de Kronecker descrita por la Ec. (C.1.10), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_m^{(1)} I_m(\gamma R) - b_m^{(1)} H_m^{(1)}(\beta R) = 0$$

$$a_m^{(2)} I_m(\gamma R) - b_m^{(2)} H_m^{(1)}(\beta R) = 0$$

$$\frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(1)} I_m(\gamma R) + \frac{i\omega}{\gamma} a_m^{(2)} I'_m(\gamma R) + \frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(1)} H_m^{(1)}(\beta R) + \frac{i\omega}{\beta} b_m^{(2)} H_m^{(1)' }(\beta R) = 0$$

$$\frac{k_z m}{\gamma^2 R} a_m^{(2)} I_m(\gamma R) - \frac{i\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} a_m^{(1)} I'_m(\gamma R) + \frac{k_z m}{\beta^2 R} b_m^{(2)} H_m^{(1)}(\beta R) - \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} b_m^{(1)} H_m^{(1)' }(\beta R) = 0.$$

Escribiendo las ecuaciones anteriores en forma matricial se tiene que

$$\begin{bmatrix}
 I_m(\gamma R) & 0 & -H_m^{(1)}(\beta R) & 0 \\
 0 & I_m(\gamma R) & 0 & -H_m^{(1)}(\beta R) \\
 \frac{k_z m}{\gamma^2 R} I_m(\gamma R) & \frac{i\omega}{\gamma} I'_m(\gamma R) & \frac{k_z m}{\beta^2 R} H_m^{(1)}(\beta R) & \frac{i\omega}{\beta} H_m^{(1)'}(\beta R) \\
 -\frac{i\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} I'_m(\gamma R) & \frac{k_z m}{\gamma^2 R} I_m(\gamma R) & -\frac{i\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} H_m^{(1)'}(\beta R) & \frac{k_z m}{\beta^2 R} H_m^{(1)}(\beta R)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_m^{(1)} \\
 a_m^{(2)} \\
 b_m^{(1)} \\
 b_m^{(2)}
 \end{bmatrix}
 = 0.$$

(C.2.5)

Simplifiquemos ahora la matriz de tal modo obtengamos una ecuación trascendental similar a la ecuación de los modos normales, mediante un determinante. Sea

$$X := \det \begin{bmatrix}
 I_m(\gamma R) & 0 & -H_m^{(1)}(\beta R) & 0 \\
 0 & I_m(\gamma R) & 0 & -H_m^{(1)}(\beta R) \\
 \frac{k_z m}{\gamma^2 R} I_m(\gamma R) & \frac{i\omega}{\gamma} I'_m(\gamma R) & \frac{k_z m}{\beta^2 R} H_m^{(1)}(\beta R) & \frac{i\omega}{\beta} H_m^{(1)'}(\beta R) \\
 -\frac{i\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} I'_m(\gamma R) & \frac{k_z m}{\gamma^2 R} I_m(\gamma R) & -\frac{i\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} H_m^{(1)'}(\beta R) & \frac{k_z m}{\beta^2 R} H_m^{(1)}(\beta R)
 \end{bmatrix}.$$

(C.2.6)

Definamos la siguiente notación reducida para facilitar el álgebra:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_m \equiv I_m(\gamma R) \\ H_m \equiv H_m^{(1)}(\beta R) \\ I'_m \equiv I'_m(\gamma R) \\ H'_m \equiv H_m^{(1)' }(\beta R). \end{array} \right.$$

Reduciendo el determinante se tiene

$$\begin{aligned} X &= I_m \left\{ I_m \left( \frac{k_z^2 m^2}{\beta^4 R^2} H_m^2 - \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2}{\beta^2} H_m'^2 \right) - 0 \right. \\ &\quad \left. - H_m \left( \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2}{\gamma \beta} I'_m H'_m - \frac{k_z^2 m^2}{\gamma^2 \beta^2 R^2} I_m H_m \right) \right\} - \{0\} \\ &= -H_m \left\{ 0 - I_m \left( \frac{k_z^2 m^2}{\gamma^2 \beta^2 R^2} I_m H_m - \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \omega^2}{\gamma \beta} I'_m H'_m \right) \right. \\ &\quad \left. - H_m \left( \frac{k_z^2 m^2}{\gamma^4 R^2} I_m^2 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \omega^2}{\gamma^2} I_m'^2 \right) \right\} - \{0\}. \end{aligned}$$

Factorizando:

$$\begin{aligned} X &= \frac{k_z^2 m^2}{R^2} I_m^2 H_m^2 \left( \frac{1}{\gamma^4} + \frac{2}{\gamma^2 \beta^2} + \frac{1}{\beta^4} \right) \\ &\quad - \frac{\omega^2}{\gamma \beta} I_m I'_m H_m H'_m (\mu_0 \varepsilon_0 + \mu_1 \varepsilon_1) \\ &\quad - \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \omega^2}{\gamma^2} I_m'^2 H_m^2 - \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2}{\beta^2} I_m^2 H_m'^2. \end{aligned}$$

Y dividiendo por  $I_m^2(\gamma\rho)H_m^{(1)2}(\beta\rho)$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{k_z^2 m^2}{R^2} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{\omega^2}{\gamma\beta} \frac{I_m'}{I_m} \frac{H_m'}{H_m} (\mu_0 \varepsilon_0 + \mu_1 \varepsilon_1) \\
 &\quad - \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \omega^2}{\gamma^2} \frac{I_m'^2}{I_m^2} - \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2}{\beta^2} \frac{H_m'^2}{H_m^2}.
 \end{aligned}$$

Al factorizar nuevamente obtenemos la *ecuación trascendental para los modos virtuales de un cilindro metálico*:

$X =$

$$\left[ \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \omega}{\gamma} \frac{I_m'(\gamma R)}{I_m(\gamma R)} + \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(\beta R) \right] \left[ \frac{\omega}{\gamma} \frac{I_m'(\gamma R)}{I_m(\gamma R)} + \frac{\omega}{\beta} \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(\beta R) \right] - \frac{k_z^2 m^2}{R^2} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2} \right)^2.$$

Como ahora deseamos solucionar modos radiativos, tenemos por tanto ondas viajeras, y como las funciones Hankel que describen estas ondas tienen argumento complejo, la solución  $X = 0$  existe para un número complejo.

Para obtener las soluciones numéricas de esta expresión, es decir, obtener las relaciones de dispersión de los modos virtuales radiativos, evitando hallar sus ceros, encontramos los máximos de una función definida como  $Y := \frac{1}{|X|}$  a través del diseño de una rutina computacional.

# Capa de Acoplamiento Perfecto (PML)

---

Al hacer una simulación computacional se tiene el problema de que al llegar la energía a la orilla del espacio de cómputo es reflejada (Fig. D.1.1). Esta reflexión no deseada interfiere con los resultados, por lo que es necesario implementar una herramienta que elimine dicha reflexión. Una de las herramientas más utilizadas para solucionar este problema es el método llamado *Perfectly Matched Layer*, PML<sup>[24]</sup>.

## D.1. Definición y Fórmulas

El método PML y sus variantes posteriores, consisten básicamente en definir una capa ficticia que tenga igual impedancia que su capa contigua para toda frecuencia y para todo ángulo. Esta capa es capaz de absorber todo lo que llegue a ella, evitando así la reflexión del campo hacia la zona de experimentación.

Es decir, la idea es tener un conjunto de capas que rodeen todo el espacio de trabajo (creado por los recursos computacionales), en nuestro caso que rodeen el espacio creado por el método FDTD para evitar reflexiones indeseadas, como puede apreciarse en la Fig. D.1.2.

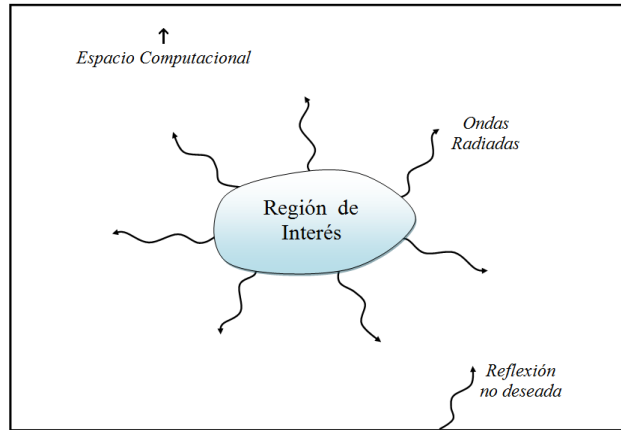


Figura D.1.1. Esquema de un problema de electrodinámica, donde algunas ondas escapan al infinito.

Para lograr estas condiciones se introducen absorción y constantes ficticias que simulan respuesta anisotrópica en  $\varepsilon$  y  $\mu$ .

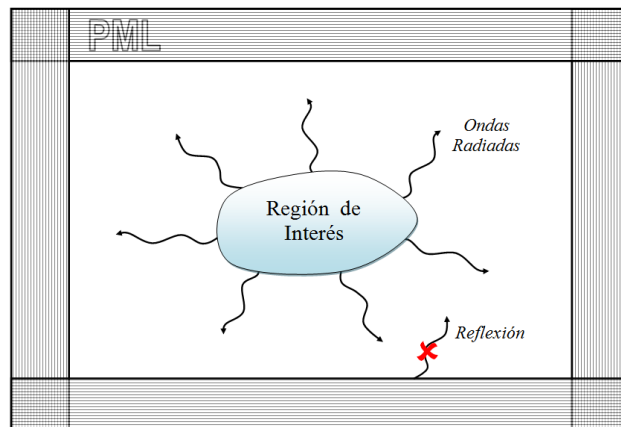


Figura D.1.2. Esquema del mismo problema, con el espacio computacional truncado por las PML.

Hay dos condiciones que se requieren para crear una PML<sup>[25]</sup>: (a) que la impedancia sea constante:

$$\eta_0 = \eta_m = \sqrt{\frac{\mu_{F_x}^*}{\varepsilon_{F_x}^*}} = 1$$

(b) y que en la dirección perpendicular a la frontera, la constante dieléctrica relativa y la permeabilidad relativa deben ser la inversa de ellas en las otras direcciones. Es decir, si vamos perpendiculares en la dirección  $x$ , entonces

$$\varepsilon_y = \frac{1}{\varepsilon_x}, \quad \varepsilon_z = \frac{1}{\varepsilon_x}$$

y también

$$\mu_y = \frac{1}{\mu_x}, \quad \mu_z = \frac{1}{\mu_x}.$$

Análogamente si vamos a otra dirección. Por otro lado, partiendo de las Ecuaciones de Maxwell

$$\frac{\partial \tilde{D}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tilde{\nabla} \times \tilde{H}$$

donde

$$\tilde{D}(\omega) = \varepsilon_r(\omega) \tilde{E}(\omega)$$

y con

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tilde{\nabla} \times \tilde{E},$$

al tomar la polarización TM en  $z$ , y la propagación en  $x$ - $y$ , tenemos que

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

$$D_z(\omega) = \varepsilon_r(\omega) E_z(\omega)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$



Si  $D_z \propto e^{-i\omega t}$  y si  $H_x, H_y \propto e^{-i\omega t}$ , entonces

$$-i\omega D_z = c \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (\text{D.1.1})$$

$$D_z(\omega) = \varepsilon_r(\omega) E_z(\omega) \quad (\text{D.1.2})$$

$$-i\omega H_x = -c \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (\text{D.1.3})$$

$$-i\omega H_y = c \frac{\partial E_z}{\partial x}. \quad (\text{D.1.4})$$

Si agregamos las constantes ficticias a las ecuaciones (D.1.1)–(D.1.4) lograremos cubrir las dos condiciones antes mencionadas para obtener PML. Entonces

$$-i\omega D_z \varepsilon_{F_z}(x) \varepsilon_{F_z}(y) = c \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

$$D_z(\omega) = \varepsilon_r(\omega) E_z(\omega)$$

$$i\omega H_x \mu_{F_x}(x) \mu_{F_x}(y) = c \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$-i\omega H_y \mu_{F_y}(x) \mu_{F_y}(y) = c \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

Supongamos que estas cantidades ficticias son complejas, de la forma

$$\varepsilon_{F_x}^* := \varepsilon_{F_m} - \frac{\sigma_{D_m}}{i\omega\varepsilon_0} \quad \text{para } m = x \text{ ó } y$$

$$\mu_{F_x}^* := \mu_{F_m} - \frac{\sigma_{H_m}}{i\omega\mu_0} \quad \text{para } m = x \text{ ó } y.$$

Ahora bien, la siguiente selección de parámetros satisface las condiciones impuestas por el inciso (b)

$$\varepsilon_{F_m} = \mu_{F_m} = 1 \qquad \frac{\sigma_{D_m}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{H_m}}{\mu_0} = \frac{\sigma_D}{\varepsilon_0}.$$

De aquí,

$$\eta_0 = \eta_m = \sqrt{\frac{\mu_{F_x}^*}{\varepsilon_{F_x}^*}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sigma(x)}{i\omega\varepsilon_0}}{1 - \frac{\sigma(x)}{i\omega\varepsilon_0}}} = 1 \qquad (\text{D.1.5})$$

lo que satisface la condición (a). Nótese que  $\sigma_D \rightarrow \sigma(x)$  para poder manipular la absorción y evitar que haya rebote. Tomemos la dirección  $x$ . Entonces

$$-i\omega D_z \varepsilon_{F_z}(x) = c \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

$$i\omega H_x \mu_{F_x}(x) = c \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$-i\omega H_y \mu_{F_y}(x) = c \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

Sustituyendo los valores de (D.1.5) se tiene

$$-i\omega D_z \left( 1 - \frac{\sigma_D(x)}{i\omega\varepsilon_0} \right) = c \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \qquad (\text{D.1.6})$$

$$i\omega H_x \left( 1 - \frac{\sigma_D(x)}{i\omega\varepsilon_0} \right)^{-1} = c \frac{\partial E_z}{\partial y} \qquad (\text{D.1.7})$$

$$-i\omega H_y \left( 1 - \frac{\sigma_D(x)}{i\omega\varepsilon_0} \right) = c \frac{\partial E_z}{\partial x}. \qquad (\text{D.1.8})$$

Nótese que sólo en la dirección  $x$  se invirtió el último término de la parte izquierda. La razón de que no haya sido en las otras direcciones es debido a que esta regla sólo aplica a las componentes que no son la dirección de propagación (en esta caso  $y$  y  $z$ ). Ahora

bien, reescribamos la Ec. (D.1.6) como

$$-i\omega D_z \left(1 - \frac{\sigma_D(x)}{i\omega\varepsilon_0}\right) = -i\omega D_z + \frac{\sigma_D(x)}{\varepsilon_0} D_z$$

lo que implica

$$-i\omega D_z \left(1 - \frac{\sigma_D(x)}{i\omega\varepsilon_0}\right) = \frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\sigma_D(x)}{\varepsilon_0} D_z. \quad (\text{D.1.9})$$

Tomando la aproximación de diferencias finitas, tenemos de (D.1.9) que

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\sigma_D(x)}{\varepsilon_0} D_z &\simeq \frac{D_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - D_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta t} + \frac{\sigma_D(i)}{\varepsilon_0} \frac{D_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) + D_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{2} \\ &= D_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) \frac{1}{\Delta t} \left[1 + \frac{\sigma_D(i)}{2\varepsilon_0} \Delta t\right] - D_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j) \frac{1}{\Delta t} \left[1 - \frac{\sigma_D(i)}{2\varepsilon_0} \Delta t\right] \end{aligned}$$

que al unir con las derivadas espaciales, y utilizando la Ec. (3.2.2):

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} c = \frac{1}{2},$$

obtenemos para la Ec. (D.1.6)

$$\begin{aligned} D_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) &= gi3(i) D_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j) + gi2(i) \left(\frac{1}{2}\right) \left[ H_y^n\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - H_y^n\left(i - \frac{1}{2}, j\right) \right. \\ &\quad \left. - H_x^n\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - H_x^n\left(i, j - \frac{1}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Los parámetros nuevos  $gi2$  y  $gi3$  están dados por

$$gi2(i) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_D(i) \Delta t}{2\varepsilon_0}} \quad gi3(i) = \frac{1 - \frac{\sigma_D(i) \Delta t}{2\varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma_D(i) \Delta t}{2\varepsilon_0}}.$$

Análogamente, para en caso de  $H_y$ , el procedimiento es casi idéntico, obteniendo de la Ec. (D.1.8)

$$H_y^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j \right) = fi3 \left( i + \frac{1}{2} \right) H_y^n \left( i + \frac{1}{2}, j \right) + fi2 \left( i + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left[ E_z^{n+\frac{1}{2}} \left( i + \frac{1}{2}, j \right) - E_z^{n+\frac{1}{2}} \left( i, j \right) \right]$$

donde

$$fi2 \left( i + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_D \left( i + \frac{1}{2} \right) \Delta t}{2\varepsilon_0}} \quad fi3 \left( i \right) = \frac{1 - \frac{\sigma_D \left( i + \frac{1}{2} \right) \Delta t}{2\varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma_D \left( i + \frac{1}{2} \right) \Delta t}{2\varepsilon_0}}.$$

Las funciones  $gi2$ ,  $gi3$ ,  $fi2$  y  $fi3$  son los parámetros de las capas artificiales PML que hacen que absorba los campos con los que esté en contacto. Fuera del espacio de las PML, los parámetros son nulos.

Y por último, la ecuación en  $H_x$  requiere un tratamiento un poco diferente debido a que debemos eliminar primero la parte inversa de la izquierda, es decir, la Ec. (D.1.7) nos queda

$$i\omega H_x \left( 1 - \frac{\sigma_D(x)}{i\omega\varepsilon_0} \right)^{-1} = c \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\sigma_D(x)}{i\omega\varepsilon_0} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right].$$

# Modelo de Drude

---

El modelo de Drude se utiliza para modelar metales con electrones libres y se basa en la aplicación de la teoría cinética a los electrones en un sólido. A continuación obtendremos su expresión a partir de la mecánica newtoniana.

## E.1. Construcción del modelo

A partir de la segunda Ley de Newton para un electrón

$$m \ddot{\vec{x}} = \sum_i \vec{f}_i = \vec{F}_{nucleo} + \vec{F}_{elec} + \vec{F}_{rozam}$$

donde  $\vec{f}_i$  son las fuerzas a las que está sometido dicho electrón, se tiene que

$$m \ddot{\vec{x}} = -m\omega_0^2 \vec{x} + q\vec{E} - \gamma m \dot{\vec{x}} \quad (\text{E.1.1})$$

siendo  $q = -e$ , la carga del electrón, y  $\gamma$  la constante fenomenológica. Luego, si

$$\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i\omega t} \quad (\text{E.1.2})$$

y si despreciamos la parte magnética, al sustituir (E.1.2) en (E.1.1) se tiene

$$-\omega^2 m \vec{x} = -m\omega_0^2 \vec{x} - e\vec{E} + i\gamma\omega \vec{x}.$$

Despejando  $\vec{x}$ , encontramos la solución a la ecuación de movimiento. Esto es

$$\vec{x} = \frac{-e\vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}. \quad (\text{E.1.3})$$

Planteando el momento dipolar  $\vec{p} = q\vec{x}$ , tenemos

$$\vec{p} = \frac{e^2\vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}.$$

Por lo tanto la polarización total  $\vec{P} = N\vec{p}$  es

$$\vec{P} = \frac{\vec{E}}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \frac{Ne^2}{m}.$$

Si ahora usamos la relación constitutiva

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

tenemos que

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \frac{\vec{E}}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \frac{Ne^2}{m} \equiv \varepsilon(\omega)\vec{E}.$$

Por lo que obtenemos una expresión de la función dieléctrica:

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}.$$

Si la frecuencia de plasma se escribe como

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \quad (\text{E.1.4})$$

entonces se tiene

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}.$$

Para bajas frecuencias  $\omega_0 = 0$  y  $\gamma \neq 0$ . Por tanto obtenemos el conocido modelo de Drude

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (\text{E.1.5})$$

---

## Apéndice F

# Solución de Integral Compleja

---

Resolveremos la integral (5.1.8):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\gamma} d\omega. \quad (\text{F.0.1})$$

Propongamos la integral compleja

$$\oint_C \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz \quad (\text{F.0.2})$$

donde  $C$  es un contorno cerrado (Fig. F.0.1) que evita el polo  $z_0 = -i\gamma$  de tal suerte podamos aplicar el Teorema Integral de Cauchy.

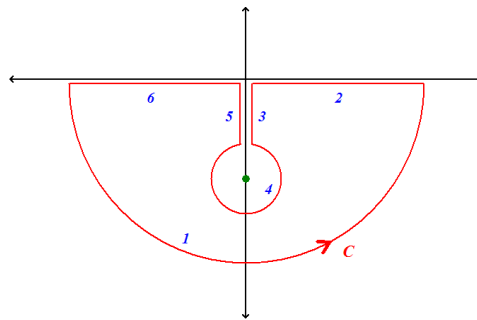


Figura F.0.1. Contorno de la integral compleja.



Recordemos primeramente que el Teorema Integral de Cauchy dice que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \text{ dentro de } C \\ 0, & z_0 \text{ fuera de } C. \end{cases}$$

Debido a nuestra propuesta de contorno, la Ec. (F.0.2) se puede expresar como

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz &= \int_{C_1} \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz + \int_{C_2} \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz + \int_{C_3} \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz \\ &+ \int_{C_4} \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz + \int_{C_5} \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz + \int_{C_6} \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz = 0. \end{aligned}$$

Nótese que los contornos  $C_6$  y  $C_2$  conforman la recta real menos un punto. Note también como la tercer integral es la inversa aditiva de la quinta. Esto implica que

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz + \int_{\infty}^0 \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\gamma} dx + \int_0^a \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz + \\ \int_{C_4} \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz + \int_a^0 \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz + \int_0^{-\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\gamma} dx = 0, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\int_{C_1} \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz + \int_{C_4} \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\gamma} dx = 0. \quad (\text{F.0.3})$$

Entonces para  $C_1$  proponemos

$$\begin{cases} z = re^{i\theta} \\ dz = ire^{i\theta} d\theta \end{cases}$$

y hagamos tender  $r \rightarrow \infty$ . Así

$$I_{C_1} := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-itre^{i\theta}}}{re^{i\theta} + i\gamma} ire^{i\theta} d\theta. \quad (\text{F.0.4})$$

Reescribamos la Ec. (F.0.4) considerando que  $\theta$  corre de  $\pi$  a  $2\pi$ , al tener sólo la mitad inferior de una circunferencia (vea: Fig. F.0.1). Consideremos también la Identidad de Euler:

$$re^{i\theta} = r \cos \theta + ir \operatorname{sen} \theta. \quad (\text{F.0.5})$$

Entonces

$$\begin{aligned} I_{C_1} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-itr \cos \theta} e^{tr \operatorname{sen} \theta}}{re^{i\theta} + i\gamma} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} i \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-itr \cos \theta} e^{tr \operatorname{sen} \theta}}{e^{i\theta} + \frac{i\gamma}{r}} e^{i\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (\text{F.0.6})$$

Recordemos que la función *seno* es negativa de  $\pi$  a  $2\pi$  y la función *coseno* es negativa de  $\pi$  a  $\frac{3\pi}{2}$  pero positiva de  $\frac{3\pi}{2}$  a  $\pi$ . Así que

$$I_{C_1} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{itr \cos \theta} e^{-tr \operatorname{sen} \theta}}{e^{i\theta} + \frac{i\gamma}{r}} e^{i\theta} d\theta + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{e^{-itr \cos \theta} e^{-tr \operatorname{sen} \theta}}{e^{i\theta} + \frac{i\gamma}{r}} e^{i\theta} d\theta.$$

Observe que las funciones  $\operatorname{sen} \theta$  y  $\cos \theta$  están acotadas entre  $[-1, 1]$  y  $\frac{i\gamma}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ . Además

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\pm itr \cos \theta} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} [-1 - i, 1 + i], \quad \text{región acotada} \\ e^{-tr \operatorname{sen} \theta} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \end{array} \right.$$

Por tanto se tiene que

$$\int_{C_1} \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz = 0. \quad (\text{F.0.7})$$

Entonces de la Ec. (F.0.3) se implica que

$$\int_{C_4} \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz = - \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\gamma} d\omega. \quad (\text{F.0.8})$$

Ahora por último, para  $C_4$

$$\begin{cases} z + i\gamma = re^{-i\theta} \\ dz = -ire^{-i\theta} d\theta. \end{cases}$$

Haciendo  $r \rightarrow 0$

$$I_{C_4} := \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-itre^{-i\theta}}}{re^{i\theta}} (-ire^{i\theta} d\theta), \quad (\text{F.0.9})$$

i.e.,

$$\begin{aligned} I_{C_4} &= -i \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-it(r \cos \theta - ir \sin \theta - i\gamma)} d\theta \\ &= -i \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-irt \cos \theta} e^{-rt \sin \theta} e^{-\gamma t} d\theta. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{cases} e^{-irt \cos \theta} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 1 \\ e^{-rt \sin \theta} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 1 \\ e^{-\gamma t} \xrightarrow{r \rightarrow 0} e^{-\gamma t} \end{cases}$$

se sigue que

$$I_{C_4} = -i \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma t} d\theta = -2\pi i e^{-\gamma t}.$$

Así

$$\int_{C_4} \frac{e^{-izt}}{z + i\gamma} dz = -2\pi i e^{-\gamma t}.$$

Por lo tanto nuestra integral queda como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\gamma} d\omega = -2\pi i e^{-\gamma t}. \quad (\text{F.0.10})$$

**Parte VII**

**BIBLIOGRAFÍA**

# Bibliografía

---

- [1] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart and I. Youngs, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4773 (1996).
- [2] C. A. Pfeiffer, E. N. Economou and K. L. Ngai, *Phys. Rev. B* **10**, 3038 (1974).
- [3] S. K. Gray and T. Kupka, *Phys. Rev. B* **68**, 045415 (2003).
- [4] C. F. Bohren and D. R. Huffman, “*Absorption and Scattering of the Light by Small Particles*”, Wiley (1998).
- [5] P. B. Johnson and R. W. Christy, *Phys. Rev. B* **6**, 4370 (1972).
- [6] D. W. Lynch and W. R. Hunter, “*Handbook of Optical Constants of Solids (edited by Edward D. Palik)*”, Academic Press (1985).
- [7] J. P. Kottmann and O. J. F. Martin, *Opt. Lett.* **26**, 1096 (2001).
- [8] J. P. Kottmann and O. J. F. Martin, *Opt. Express.* **8**, 655 (2001).
- [9] J. P. Kottmann, O. J. F. Martin, D. R. Smith and S. Schultz, *Phys. Rev. B* **64**, 235402 (2001).
- [10] K. Halterman, J.M. Elson and S. Singh, *Phys. Rev. B* **72**, 075429 (2005).
- [11] J.M. Elson, K. Halterman and S. Singh, *Phot. and Nano.* **4**, 94 (2006).
- [12] M. Y. Ng and W. C. Liu, *Appl. Phys. A* **89**, 391 (2007).

- 
- [13] S. Yin, Q. Deng, X. Luo, C. Du and Y. Zhang, *J. Appl. Phys.* **104**, 024308 (2008).
- [14] X. Ji, W. Cai and P. Zhang, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **69**, 308 (2007)
- [15] P. Yang and K. N. Liou, *J. Opt. Soc. Am. A* **13**, 2072 (1996).
- [16] K. Hasegawa, J. Nöckel and M. Deutsch, *Phys. Rev. A* **75**, 063816 (2007).
- [17] G. B. Arfken and H. J. Weber, “*Mathematical Methods for Physicists*”, 6th ed., Elsevier Academic Press (2005).
- [18] H.C. van de Hulst, “*Light scattering by small particles*”, Dover Publications (1981).
- [19] J. D. Jackson, “*Classical Electrodynamics*”, 3rd ed., Wiley (1998).
- [20] K. S. Yee, *IEEE Trans. Anten. and Prop.* **14**, 302 (1966).
- [21] E. A. Navarro, J. Segura, R. Sanchís, *Revista de Acústica* **34**, Núm. 3-4, 20 (2003).
- [22] J. Manzanares-Martínez and J. Gaspar-Armenta, *J. of Electromagn. Waves and Appl.* **21**, 2297 (2007).
- [23] D. M. Sullivan, “*Electromagnetic simulation using the FDTD method*”, IEEE Press (2000).
- [24] J. P. Berenger, *J. Comput. Phys.* **114**, 185 (1994).
- [25] Z. S. Sacks, D. M. Kingsland, R. Lee and J. F. Lee, *Trans. Anten. and Prop.* **43**, 1460 (1995).
- [26] J-W Liaw and P-T Wu, *Opt. Express.* **16**, 4945 (2008).