

**Universidad de Sonora  
División de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Investigación en Física**

**Modos Electromagnéticos en Medios Inhomogéneos Periódicos  
Bidimensionales**



**Que para obtener el grado de:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**Presenta:**

**I.E. Jesús Daniel Valenzuela Sau**

**Director:**

**Dr. Raúl García Llamas**

**Hermosillo, Sonora, octubre del 2014**

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

## **DEDICATORIA**

A mis padres; Ramón José Valenzuela Vásquez e Isabel Cristina Sau Palafox, por su apoyo incondicional durante toda mi vida.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco ampliamente:

A mi asesor de tesis; Dr. Raúl García Llamas, por sus enseñanzas y guía en la realización de este trabajo.

A profesores y personal del DIFUS.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su ayuda económica brindada.

A Dios, quien tomó forma de hombre en Cristo, y quien pagó por nuestros pecados para reconciliarnos consigo mismo y poder darnos todas las cosas. (2 Corintios 5:18-19; Juan 1:12; Juan 10:28; Mateo 6:33)

## **APROBACIÓN DEL TRABAJO**

Este trabajo fue aprobado por el comité de tesis integrado por:

Dr. Raúl García Llamas

Dr. Jorge Alberto Gaspar Armenta

Dr. Felipe Ramos Mendieta

Dr. Francisco Villa Villa

# ÍNDICE

RESUMEN.....	2
INTRODUCCIÓN.....	3
CAPÍTULOS	
1. ANÁLISIS ELECTROMAGNÉTICO PARA MEDIOS INHOMOGÉNEOS.....	6
1.1 Las ecuaciones de Maxwell.....	6
1.2 Las ecuaciones de onda.....	7
1.3 El medio inhomogéneo.....	9
1.4 La función dieléctrica.....	11
1.5 Los campos.....	11
1.6 Las ecuaciones de eigenvalores.....	12
1.6.1 Los modos TE.....	12
1.6.2 Los modos TM.....	15
2. CÁLCULO DE LOS MODOS ELECTROMAGNÉTICOS.....	16
2.1 Red rectangular con cilindros rectangulares.....	16
2.1.1 La función dieléctrica.....	18
2.1.2 Los campos.....	19
2.1.3 Los modos TE.....	20
2.1.4 Los modos TM.....	20
2.2 Red rectangular con cilindros circulares.....	21
2.3 Red triangular con cilindros circulares.....	24
2.3.1 La función dieléctrica.....	25
2.3.2 Los campos.....	29
2.3.3 Los modos TE.....	30
2.3.4 Los modos TM.....	31
3. RESULTADOS NUMÉRICOS.....	32
3.1 Las bandas fotónicas.....	32
3.1.1 Red cuadrada con cilindros cuadrados.....	33
3.1.2 Red cuadrada con cilindros circulares.....	36
3.1.3 Red triangular con cilindros circulares.....	39
3.2 Los modos electromagnéticos.....	42
3.2.1 Red cuadrada con cilindros cuadrados.....	42
3.2.2 Red cuadrada con cilindros circulares.....	45
3.2.3 Red triangular con cilindros circulares.....	47
CONCLUSIONES.....	50
BIBLIOGRAFÍA.....	51
APÉNDICE I.....	52
APÉNDICE II.....	54
APÉNDICE III.....	57
APÉNDICE IV.....	60
APÉNDICE V.....	64
APÉNDICE VI.....	70

## RESUMEN

En este trabajo, se reproducen algunos de los resultados publicados en las referencias [12] y [14], que constan de las estructuras de bandas fotónicas en medios inhomogéneos periódicos (cristales fotónicos) bidimensionales en dos tipos de red; triangular y cuadrada, y dos formas de secciones transversales; rectangular y circular. Además, se presenta la distribución de campo de algunos modos electromagnéticos que pueden soportar dichos cristales fotónicos.

A partir de las ecuaciones de Maxwell y de algunas consideraciones iniciales, se obtienen dos ecuaciones de onda; una para el campo magnético y otra para el campo eléctrico. Estas ecuaciones, determinan el comportamiento de los campos en cualquier medio inhomogéneo, pero en este trabajo solo se tratarán cristales fotónicos; que son estructuras periódicas, lo cual hace posible definir matemáticamente a estos medios para obtener una solución para los campos.

Los medios estudiados se consideran infinitos y están formados por dieléctrico con constantes dieléctricas altas y bajas que se repiten periódicamente en el plano  $x$ - $y$ , y son homogéneos en el eje  $z$ . Esta geometría permite el uso de expansiones de Fourier para los inversos de las constantes dieléctricas en las ecuaciones de onda para los campos. Además, con ayuda de la teoría de estado sólido, se definen las formas de los campos como ondas de Bloch y se desarrollan las ecuaciones de onda hasta obtener las ecuaciones de eigenvalores.

Las ecuaciones de eigenvalores; ecuaciones matriciales de dimensión infinita, se truncan y se resuelven con programación en FORTRAN hasta alcanzar la convergencia. Se comparan los resultados obtenidos con los presentados por las referencias antes mencionadas, encontrando una concordancia aceptable, para después presentar algunos de los modos electromagnéticos que tienen permitido propagarse en los medios estudiados.

## INTRODUCCIÓN

Las ondas electromagnéticas se propagan libremente en el vacío a la velocidad de la luz  $c$ , en cualquier otro medio homogéneo, éstas se propagan a una velocidad menor a  $c$ ; sin sufrir cambios en su dirección. Pero en un medio inhomogéneo, las ondas electromagnéticas no mantienen una dirección fija y son difractadas. Ahora, si el medio inhomogéneo es periódico; o un cristal fotónico, el comportamiento de las ondas electromagnéticas puede llegar a ser predecible, como se demostró hace unos pocos años.

En 1987, el profesor Eli Yablonovitch<sup>1</sup> propuso la utilización de una estructura dieléctrica inhomogénea periódica tridimensional para inhibir la emisión espontánea<sup>1</sup>. A partir de entonces, y durante la década de los noventa, hubo un marcado interés por el estudio de la propagación de ondas para encontrar bandas fotónicas prohibidas en medios inhomogéneos periódicos tridimensionales<sup>1,2,3</sup> y bidimensionales<sup>4,5,6,7,8,11,12,13,14,16</sup>, así como el estudio de modos de superficie<sup>15,17</sup> y localizados<sup>9,10</sup>.

A estos medios periódicos, se les conoce como cristales fotónicos, que básicamente están formados por materiales con constantes dieléctricas altas y bajas que se repiten de forma periódica. Más formalmente, un cristal fotónico es un material estructurado de forma tal, que su función dieléctrica varía periódicamente en el espacio.

Dichos cristales, pueden inhibir el paso de las ondas electromagnéticas dentro de espectros de frecuencias que se conocen como bandas prohibidas. La existencia de las bandas fotónicas prohibidas, abre la posibilidad a varias aplicaciones, incluyendo la inhibición de la emisión espontánea<sup>1</sup>, la localización de luz en defectos<sup>9,10</sup> y en superficies<sup>15,17</sup>. El interés en ellos, también se debe a varios fenómenos ópticos presentes como, la alta reflexión por espejos omni-direccionales y la transmisión de luz por guías de onda con pérdidas bajas. Estas aplicaciones se vuelven más útiles mientras más grande sea la banda prohibida, por lo que la búsqueda de bandas más grandes con diferentes materiales y configuraciones ha sido muy extensa.

Las primeras bandas prohibidas, se encuentran calculando la estructura de bandas fotónicas para las frecuencias más bajas de los cristales fotónicos usando el método de ondas planas. En este trabajo solo se considerarán cristales fotónicos bidimensionales, siendo inhomogéneos y periódicos en el plano  $x$ - $y$ , y homogéneos en el eje  $z$ .

Los modos electromagnéticos son otra cuestión notable en los cristales fotónicos. Estos modos, constituyen patrones de distribución de campo electromagnético dentro de los cristales fotónicos. Estos patrones pueden ser muy variados entre sí, y pueden llegar a comportarse muy diferente unos de otros. Estos modos solo aparecen fuera de las bandas prohibidas; ya que en estas bandas, las ondas electromagnéticas no pueden existir dentro de los cristales fotónicos.

Los modos electromagnéticos, se dividen en modos transversal eléctrico (TE) y transversal magnético (TM). Los modos TE, consideran al campo eléctrico oscilante en el plano  $x$ - $y$ , y al magnético en el eje  $z$  ( $H_z$ ,  $E_x$ ,  $E_y$ ). Los modos TM, consideran al campo magnético oscilante en el plano  $x$ - $y$ , y al eléctrico en el eje  $z$  ( $E_z$ ,  $H_x$ ,  $H_y$ ). Los modos graficados en el capítulo tres, muestran la intensidad de los campos en el eje  $z$ . La forma de los modos depende del vector de onda de Bloch; que varía en la primera zona de Brillouin, de la frecuencia de la onda incidente, y de la configuración del cristal fotónico. Los grupos de modos electromagnéticos forman las bandas fotónicas.

En la actualidad, existen libros enfocados exclusivamente a cristales fotónicos, como *Photonic Crystals—Molding the Flow of Light*<sup>20</sup>, donde se presentan análisis exhaustivos del estudio de los de cristales fotónicos.

En el capítulo uno, se inicia con el análisis electromagnético para medios inhomogéneos, partiendo de las ecuaciones de Maxwell para encontrar las ecuaciones de onda para los campos magnético y eléctrico. Se establece la estructura de un medio inhomogéneo tridimensional con periodicidad bidimensional; al cual se referirá como medio inhomogéneo periódico bidimensional, que puede ser en forma de red cuadrada o triangular, esta se define con el vector de posición del centro de los cilindros; los cilindros en este caso serán rectangulares y circulares. La constante dieléctrica de los cilindros será  $\epsilon_c$  y la del medio circundante  $\epsilon_e$ . Después, debido

a la periodicidad en el plano  $x$ - $y$ , la función dieléctrica se expande en series de Fourier, y los campos se proponen como ondas de Bloch, las cuales se obtienen de la multiplicación de una onda plana con una función con el mismo periodo que el medio en el que está presente. Finalmente, se sustituye la expresión para el inverso de la función dieléctrica, y las de los campos en su respectiva ecuación de onda, para desarrollar ambas ecuaciones y obtener dos ecuaciones de eigenvalores.

En el capítulo dos, las definiciones y resultados del capítulo uno se aplican a tres diferentes medios; una red cuadrada con cilindros rectangulares, una red cuadrada con cilindros circulares, y una red triangular con cilindros circulares. Para el primer caso, se define el vector de posición del centro de los cilindros con los vectores base del espacio real, para después calcular los vectores base del espacio recíproco; con los cuales, se define la expansión en series de Fourier del inverso de la constante dieléctrica, para después encontrar y resolver la ecuación para sus coeficientes (Ver apéndice III). Se definen los campos magnético y eléctrico; también con los vectores base del espacio recíproco. Finalmente, se vuelven a tomar los vectores base del espacio recíproco, y se sustituyen en las ecuaciones de eigenvalores del capítulo uno, que se resuelven integrando y simplificando, para llegar a las dos ecuaciones de eigenvalores que tienen dobles sumatorias que corren de menos infinito a más infinito. Este proceso se repite para los dos siguientes medios.

En el capítulo tres, se presentan los resultados numéricos obtenidos, que constan de las estructuras de bandas para las frecuencias más bajas obtenidas para los modos TE y TM de los tres medios, que se comparan con las presentadas por las referencias [12] y [14]. Cinco de las seis estructuras de bandas presentan bandas prohibidas. Los modos electromagnéticos se presentan finalmente, seis en total, uno para cada configuración. Los resultados se obtienen con un programa en FORTRAN, truncando las ecuaciones de eigenvalores hasta alcanzar a la convergencia.

# CAPÍTULO I

## ANÁLISIS ELECTROMAGNÉTICO PARA MEDIOS INHOMOGÉNEOS

En este capítulo, se presenta el desarrollo teórico del análisis para el cálculo de los modos electromagnéticos en un medio inhomogéneo periódico bidimensional. Los medios estudiados son homogéneos en la dirección  $z$ , e inhomogéneos periódicos, con periodo  $a$ , en el plano  $x$ - $y$ . El periodo  $a$ , abarca a la celda unitaria (CU); la porción más simple de la estructura cristalina que al repetirse reproduce todo el cristal. La CU está compuesta por dos secciones; una interna y otra externa, con constantes dieléctricas  $\epsilon_c$  y  $\epsilon_e$ ; respectivamente. Los subíndices en las constantes se refieren a *core* (corazón o núcleo) y a *envelope* (envoltura). La figura 1, muestra el corte transversal de un medio inhomogéneo periódico bidimensional.

Partimos de las ecuaciones de Maxwell macroscópicas para obtener las ecuaciones de onda de los campos eléctrico y magnético. Proponiendo la forma de la función dieléctrica y de los campos aplicados, se obtienen dos ecuaciones de eigenvalores que se resuelven numéricamente para obtener los modos transversal eléctrico (TE), y los transversal magnético (TM) que puede presentar el sistema. Este cálculo utiliza el método de ondas planas.

### 1.1 Las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell; en su forma diferencial, para un medio macroscópico en unidades SI, son

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \quad (1.4)$$

Estas ecuaciones describen el comportamiento de los campos eléctrico y magnético, que son generados por densidades de carga  $\rho$ , y densidades de corriente  $\vec{j}$ .  $\vec{D}$  es el desplazamiento

eléctrico,  $\vec{B}$  es la densidad de flujo magnético,  $\vec{E}$  es el campo eléctrico, y  $\vec{H}$  es la intensidad de campo magnético, o simplemente, campo magnético. Todos los campos son dependientes de la posición y el tiempo.

La presencia de un campo eléctrico en un material dieléctrico isotrópico de respuesta lineal, tiene el efecto descrito por la siguiente ecuación

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.5)$$

donde  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica del material. En el vacío  $\epsilon = \epsilon_0$ .

De manera similar, la siguiente ecuación describe el efecto de una densidad de flujo magnético en un medio con permeabilidad magnética  $\mu$ .

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.6)$$

La permeabilidad magnética, es el grado de magnetización que un material tiene al estar en presencia de un campo magnético. En este análisis se consideran medios no magnéticos. En el vacío  $\mu = \mu_0$ .

## 1.2 Las ecuaciones de onda

Las ecuaciones de onda; para los campos eléctrico y magnético, asociadas a cualquier medio, se derivan de las ecuaciones de Maxwell. Consideramos primero que el campo eléctrico y la densidad de flujo magnético tienen un comportamiento armónico en el tiempo, y los denotamos de la siguiente manera

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, \omega) \exp(-i\omega t) \quad (1.7)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}, \omega) \exp(-i\omega t) \quad (1.8)$$

Se considera que no hay densidad de carga presente;  $\rho = 0$ , y tampoco hay corrientes asociadas al sistema;  $\vec{j} = 0$ . El medio es no magnético, y la permitividad eléctrica; que llamaremos constante dieléctrica, solo depende de la posición. Considerando estas premisas, se

reescriben las ecuaciones de Maxwell como sigue; quedando implícita la dependencia de  $\omega$  en  $\vec{E}$  y en  $\vec{B}$

$$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (1.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = +i\omega\vec{B}(\vec{r}) \quad (1.11)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = -i\omega\varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) \quad (1.12)$$

Para obtener la ecuación para el campo magnético, primero se despeja  $-i\omega\vec{E}(\vec{r})$  de (1.12), y se aplica el rotacional a la ecuación resultante:

$$\vec{\nabla} \times \left[ \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = \vec{\nabla} \times [-i\omega\vec{E}(\vec{r})] \quad (1.13)$$

De (1.11), se sustituye y se escribe  $\vec{B}(\vec{r})$  en términos de  $\vec{H}(\vec{r})$ :

$$\vec{\nabla} \times \left[ \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = \omega^2\mu_0\vec{H}(\vec{r}) \quad (1.14)$$

Finalmente, se multiplica por  $\varepsilon_0$ , y ahora  $\varepsilon(\vec{r})$  será la constante dieléctrica relativa.

$$\vec{\nabla} \times \left[ \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}(\vec{r}) \quad (1.15)$$

La (1.15), es la ecuación de onda para el campo magnético dentro de un medio inhomogéneo; donde se usó el hecho de que  $c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$ .

Para obtener la ecuación para el campo eléctrico, se aplica el rotacional a (1.11) y se escribe la ecuación resultante en términos de  $\vec{H}(\vec{r})$ :

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})] = i\omega\mu_0\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \quad (1.16)$$

De (1.12), se sustituye y se obtiene

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})] = \omega^2 \mu_0 \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.17)$$

Se despeja  $\omega^2 \mu_0 \vec{E}(\vec{r})$ , y nuevamente se multiplica por  $\varepsilon_0$ , siendo  $\varepsilon(\vec{r})$  la constante dieléctrica relativa:

$$\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})] = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.18)$$

La (1.18), es la ecuación de onda para el campo eléctrico dentro de un medio inhomogéneo.

### 1.3 El medio inhomogéneo

Los medios inhomogéneos periódicos bidimensionales que se estudiarán, constan de cilindros infinitos de sección transversal rectangular o circular, constante dieléctrica  $\varepsilon_c$ , ordenados en forma de red cuadrada o triangular, dentro de un medio con constante dieléctrica  $\varepsilon_e$ . El periodo en todos los casos estará dado por  $a$ . Los medios serán homogéneos en el eje  $z$ . La figura 1 muestra un medio inhomogéneo periódico bidimensional, además de las polarizaciones utilizadas en los modos TE y TM.

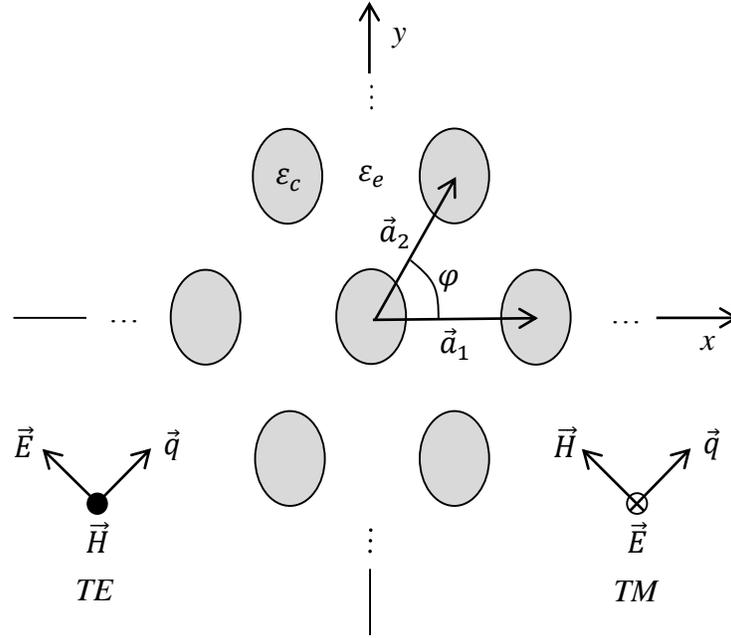


Figura 1. Corte transversal en el plano  $x$ - $y$  de un medio inhomogéneo con periodo  $a$ , que consta de un conjunto de cilindros de sección transversal elíptica y de longitud infinita, con constante dieléctrica  $\epsilon_c$ , en un medio con una constante dieléctrica  $\epsilon_e$ . El sistema es homogéneo en el eje  $z$ . Se muestran las dos polarizaciones utilizadas en las esquinas inferiores.

El centro de cada cilindro está dado por

$$\vec{r}_{m,n} = \vec{a}_1 m + \vec{a}_2 n \quad (1.19)$$

con  $m$  y  $n$  números enteros, y donde  $\vec{a}_1$  y  $\vec{a}_2$  son dos vectores no colineales que se expanden de la siguiente manera:

$$\vec{a}_j = a_{jx} \hat{i} + a_{jy} \hat{j} \quad (1.20)$$

Los valores de las componentes  $a_{jx}$  y  $a_{jy}$ , dependen de la red estudiada;  $j = 1, 2$ . Además,  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  son dos vectores unitarios en la direcciones “ $x$ ” y “ $y$ ”; respectivamente, y son mutuamente perpendiculares, con la propiedad  $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ .

La ubicación del centro de los cilindros en el espacio recíproco (Ver Apéndice II) está dada por

$$\vec{g}_{k,l} = k\vec{g}_1 + l\vec{g}_2 \quad (1.21)$$

con  $k$  y  $l$  números enteros, y donde  $\vec{g}_1$  y  $\vec{g}_2$  son los vectores base del espacio recíproco. Estos últimos satisfacen la siguiente relación

$$\vec{g}_j \cdot \vec{a}_k = 2\pi\delta_{j,k} \quad (1.22)$$

Los vectores  $\vec{g}_j$ , son los vectores base del espacio recíproco.

#### 1.4 La función dieléctrica

Para resolver las ecuaciones (1.15) y (1.18), primero se expande el inverso de la constante dieléctrica en series de Fourier (Ver Apéndice I), obteniendo

$$\frac{1}{\varepsilon_2(x, y)} = \sum_{n=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} \exp[i(\vec{g}_1 m + \vec{g}_2 n) \cdot \vec{r}] \quad (1.23)$$

con  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ , y donde los vectores  $\vec{g}_1$  y  $\vec{g}_2$  dependen de la forma del espacio recíproco (Ver Apéndice II), y por lo tanto de la forma del espacio real.

Los coeficientes  $[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n}$  están determinados por la forma de la CU, por lo que su cálculo de postergará al capítulo dos de este trabajo.

#### 1.5 Los campos

Al igual que en el punto anterior, se deben definir matemáticamente las formas de los campos magnético y eléctrico.

Debido a que los medios que se estudiarán son periódicos, se pueden expresar los campos como ondas de Bloch. El teorema de Bloch-Floquet, establece que una onda de Bloch se obtiene de la multiplicación de una onda plana con una función periódica con la misma periodicidad del medio en el que se desplaza. Como función periódica se toma la forma de la función dieléctrica. Los campos quedan de la siguiente manera

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{k} h_{m,n} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp[i(\vec{g}_1 m + \vec{g}_2 n) \cdot \vec{r}] \quad (1.24)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{k} e_{m,n} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp[i(\vec{g}_1 m + \vec{g}_2 n) \cdot \vec{r}] \quad (1.25)$$

donde  $\vec{q} = q_x \hat{i} + q_y \hat{j}$  es el vector de onda de Bloch que varía en la primera zona de Brillouin; (Ver Apéndice II). Los campos solo oscilan en el eje z, en concordancia con las polarizaciones estudiadas.

## 1.6 Las ecuaciones de eigenvalores

Una ecuación de eigenvalores, es una ecuación que iguala a un operador que actúa sobre una función (eigenfunción), con la misma función, multiplicada por una constante (eigenvalor). En este caso, el operador es una matriz, a la cual se le asocian tantos vectores (eigenvectores) como el orden de la matriz. A su vez, cada eigenvector tiene asociado un eigenvalor correspondiente. Al resolver estas ecuaciones, se calculan las estructuras de bandas, al igual que las intensidades de los campos. Cada tipo de red; cuadrada o triangular, tiene dos ecuaciones de eigenvalores; una para los modos TE y otra para los modos TM, con los campos  $(H_z, E_x, E_y)$  y  $(E_z, H_x, H_y)$ ; respectivamente.

### 1.6.1 Los modos TE

Para obtener la ecuación de eigenvalores de los modos TE, se resuelve la ecuación (1.15) por partes, sustituyendo en ella (1.23) y (1.24). Primero se aplica el rotacional del campo magnético.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = i \sum_m \sum_n h_{m,n} \left\{ \hat{i} \frac{\partial}{\partial y} [(\vec{q} + \vec{g}_1 m + \vec{g}_2 n) \cdot \vec{r}] \right. \\ \left. - \hat{j} \frac{\partial}{\partial x} [(\vec{q} + \vec{g}_1 m + \vec{g}_2 n) \cdot \vec{r}] \right\} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp[i(\vec{g}_1 m + \vec{g}_2 n) \cdot \vec{r}] \end{aligned} \quad (1.26)$$

Se multiplica (1.23); la expansión de  $1/\varepsilon(\vec{r})$ , por (1.26), y se obtiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon_2(x, y)} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \\
&= i \sum_{m'} \sum_{n'} \sum_m \sum_n [\varepsilon_2^{-1}]_{m', n'} h_{m, n} \left\{ \hat{i} \frac{\partial}{\partial y} [(\vec{q} + \vec{g}_1 m + \vec{g}_2 n) \cdot \vec{r}] \right. \\
&\quad \left. - \hat{j} \frac{\partial}{\partial x} [(\vec{q} + \vec{g}_1 m + \vec{g}_2 n) \cdot \vec{r}] \right\} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp\{i[\vec{g}_1(m + m') \\
&\quad + \vec{g}_2(n + n')] \cdot \vec{r}\}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Se aplica el rotacional a la ecuación (1.27), y se llega a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
& \vec{\nabla} \times \left[ \frac{1}{\varepsilon_2(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) \right] \\
&= \hat{k} \sum_{m'} \sum_{n'} \sum_m \sum_n [\varepsilon_2^{-1}]_{m', n'} h_{m, n} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \{[\vec{q} + \vec{g}_1(m' + m) + \vec{g}_2(n' + n)] \right. \\
&\quad \cdot \vec{r}\} \frac{\partial}{\partial x} [(\vec{q} + \vec{g}_1 m + \vec{g}_2 n) \cdot \vec{r}] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \{[\vec{q} + \vec{g}_1(m' + m) + \vec{g}_2(n' + n)] \cdot \vec{r}\} \frac{\partial}{\partial y} [(\vec{q} + \vec{g}_1 m + \vec{g}_2 n) \\
&\quad \cdot \vec{r}] \rangle \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp\{i[\vec{g}_1(m' + m) + \vec{g}_2(n' + n)] \cdot \vec{r}\}
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Se sustituye (1.28) y (1.24) en (1.15), y se obtiene

$$\begin{aligned}
& \hat{k} \sum_{m''} \sum_{n''} \sum_{m'} \sum_{n'} [\varepsilon_2^{-1}]_{m'', n''} h_{m', n'} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \{[\vec{q} + \vec{g}_1(m'' + m') + \vec{g}_2(n'' + n')] \right. \\
&\quad \cdot \vec{r}\} \frac{\partial}{\partial x} [(\vec{q} + \vec{g}_1 m' + \vec{g}_2 n') \cdot \vec{r}] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \{[\vec{q} + \vec{g}_1(m'' + m') + \vec{g}_2(n'' + n')] \cdot \vec{r}\} \frac{\partial}{\partial y} [(\vec{q} + \vec{g}_1 m' + \vec{g}_2 n') \\
&\quad \cdot \vec{r}] \rangle \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp\{i[\vec{g}_1(m'' + m') + \vec{g}_2(n'' + n')] \cdot \vec{r}\} \\
&= \frac{\omega^2}{c^2} \hat{k} \sum_{m'} \sum_{n'} h_{m', n'} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp[i(\vec{g}_1 m' + \vec{g}_2 n') \cdot \vec{r}]
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Se multiplica (1.29) por  $[1/\exp(i\vec{q} \cdot \vec{r})] \cdot \hat{k}$ , y derivando se obtiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{m''} \sum_{n''} \sum_{m'} \sum_{n'} [\varepsilon_2^{-1}]_{m'',n''} h_{m',n'} \langle \{ [\vec{q} + \vec{g}_1(m'' + m') + \vec{g}_2(n'' + n')] \\
& \quad \cdot \hat{i} \} [(\vec{q} + \vec{g}_1 m' + \vec{g}_2 n') \cdot \hat{i}] \\
& \quad + \{ [\vec{q} + \vec{g}_1(m'' + m') + \vec{g}_2(n'' + n')] \cdot \hat{j} \} [(\vec{q} + \vec{g}_1 m' + \vec{g}_2 n') \\
& \quad \cdot \hat{j}] \rangle \exp\{i[\vec{g}_1(m'' + m') + \vec{g}_2(n'' + n')] \cdot \vec{r}\} \\
& = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{m'} \sum_{n'} h_{m',n'} \exp[i(\vec{g}_1 m' + \vec{g}_2 n') \cdot \vec{r}]
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Utilizando la propiedad de ortogonalidad de las funciones de Fourier, se multiplica por  $\exp[-i(\vec{g}_1 m + \vec{g}_2 n) \cdot \vec{r}] dx dy$ , y se indica doble integración, para tener

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m''} \sum_{n''} \sum_{m'} \sum_{n'} [\varepsilon_2^{-1}]_{m'',n''} h_{m',n'} \langle \{ [\vec{q} + \vec{g}_1(m'' + m') + \vec{g}_2(n'' + n')] \\
& \quad \cdot \hat{i} \} [(\vec{q} + \vec{g}_1 m' + \vec{g}_2 n') \cdot \hat{i}] \\
& \quad + \{ [\vec{q} + \vec{g}_1(m'' + m') + \vec{g}_2(n'' + n')] \cdot \hat{j} \} [(\vec{q} + \vec{g}_1 m' + \vec{g}_2 n') \\
& \quad \cdot \hat{j}] \rangle \exp\{i[\vec{g}_1(m'' + m' - m) + \vec{g}_2(n'' + n' - n)] \cdot \vec{r}\} dx dy \\
& = \frac{\omega^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m'} \sum_{n'} h_{m',n'} \exp\{i[\vec{g}_1(m' - m) + \vec{g}_2(n' - n)] \cdot \vec{r}\} dx dy
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Para integrar apropiadamente, se deben conocer los vectores  $\vec{g}_1$  y  $\vec{g}_2$ . Se integra aprovechando la propiedad de ortogonalidad de las funciones de Fourier, y se simplifica para llegar a la siguiente ecuación de eigenvalores para los modos TE

$$\begin{aligned}
& \sum_{m'} \sum_{n'} [\varepsilon_2^{-1}]_{m-m',n-n'} \{ [(q_x + \vec{g}_1 m + \vec{g}_2 n) \cdot \hat{i}] [(\vec{q} + \vec{g}_1 m' + \vec{g}_2 n') \cdot \hat{i}] \\
& \quad + [(\vec{q} + \vec{g}_1 m + \vec{g}_2 n) \cdot \hat{j}] [(\vec{q} + \vec{g}_1 m' + \vec{g}_2 n') \cdot \hat{j}] \} h_{m',n'} = \frac{\omega^2}{c^2} h_{m,n}
\end{aligned} \tag{1.32}$$

En el capítulo dos, se calcularán las ecuaciones de eigenvalores específicas conociendo la forma exacta de los vectores de la red recíproca para cada red estudiada.

### 1.6.2 Los modos TM

Se sustituyen (1.23) y (1.25) en (1.18), y siguiendo un procedimiento análogo a la sección anterior, llegamos a la siguiente ecuación de eigenvalores para los modos TM

$$\sum_{m'} \sum_{n'} [\varepsilon_2^{-1}]_{m-m', n-n'} \{[(\vec{q} + \vec{g}_1 m' + \vec{g}_2 n') \cdot \hat{i}][(\vec{q} + \vec{g}_1 m' + \vec{g}_2 n') \cdot \hat{i}] + [(\vec{q} + \vec{g}_1 m' + \vec{g}_2 n') \cdot \hat{j}][(\vec{q} + \vec{g}_1 m' + \vec{g}_2 n') \cdot \hat{j}]\} e_{m', n'} = \frac{\omega^2}{c^2} e_{m, n} \quad (1.33)$$

En este capítulo, se usaron las ondas de Bloch y la expansión de Fourier del inverso de la constante dieléctrica para obtener dos ecuaciones de eigenvalores para los modos TE y TM. En el capítulo siguiente se abordarán algunos casos particulares.

## CAPÍTULO II

### CÁLCULO DE LOS MODOS ELECTROMAGNÉTICOS

En este capítulo, se profundizará en el análisis al conocer las características específicas de los tres medios estudiados, para llegar a obtener las expansiones de Fourier de las funciones dieléctricas y las ecuaciones de eigenvalores para modos TE y modos TM para cada medio. Se hará uso de un método numérico para resolver las ecuaciones de los coeficientes de Fourier de las funciones dieléctricas de dos medios con cilindros de sección transversal circular.

#### 2.1 Red rectangular con cilindros rectangulares

El primer medio infinito periódico estudiado para calcular los modos electromagnéticos (EM), consta de cilindros rectangulares, infinitos, con constante dieléctrica  $\epsilon_c$ , ordenados en una red cuadrada dentro de un medio con constante dieléctrica  $\epsilon_e$ . Como se muestra en la figura 2, la posición central de los cilindros está dada por  $\vec{r}_{m,n} = \vec{a}_1 m + \vec{a}_2 n$ , donde  $m$  y  $n$  son números enteros.

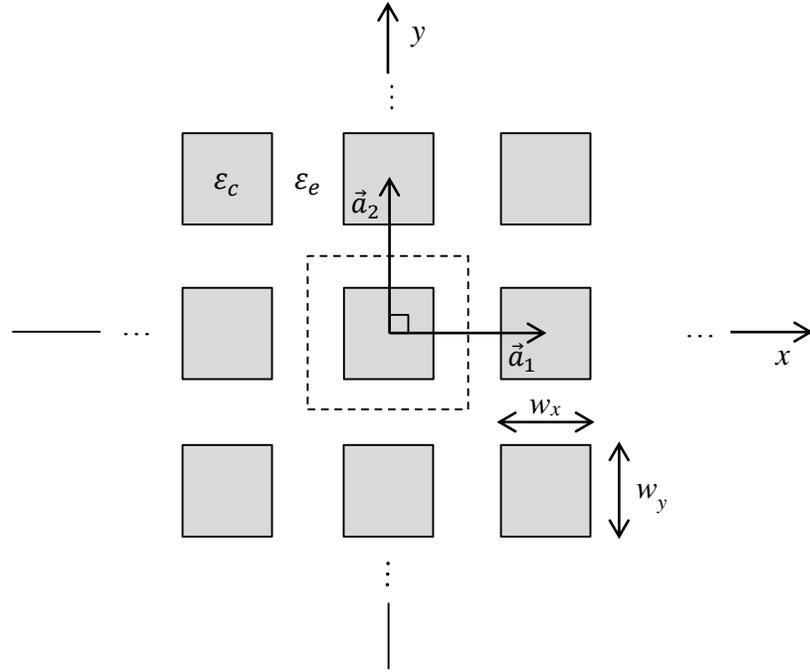


Figura 2. Corte transversal en el plano  $x$ - $y$  de un conjunto de cilindros rectangulares de área  $w_x$  por  $w_y$ , con constante dieléctrica  $\epsilon_c$ , ordenados en una red cuadrada en un medio con constante dieléctrica  $\epsilon_e$ . La CU está delimitada por el recuadro punteado. El sistema es homogéneo en el eje  $z$ .

Para esta red, los vectores  $\vec{a}_1$  y  $\vec{a}_2$  están dados por

$$\vec{a}_1 = a_x \hat{i} \quad (2.1)$$

$$\vec{a}_2 = a_y \hat{j} \quad (2.2)$$

donde  $a_x = a$  y  $a_y = a$ .

La ubicación del centro de los cilindros en el espacio recíproco está dada por (1.21), y sustituyendo (2.1) y (2.2) en (1.22), se llega a

$$\vec{g}_1 = \frac{2\pi}{a_x} \hat{i} \quad (2.3)$$

$$\vec{g}_2 = \frac{2\pi}{a_y} \hat{j} \quad (2.4)$$

(Ver Apéndice II).

### 2.1.1 La función dieléctrica

En el capítulo uno, en la ecuación (1.23), se expandió el inverso de la función dieléctrica para un medio inhomogéneo periódico bidimensional. Para tener la función específica para este primer medio, se sustituyen (2.3) y (2.4) en (1.23), y se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{1}{\varepsilon_2(x, y)} = \sum_{n=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} \exp\left(i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) \quad (2.5)$$

donde  $m$  y  $n$  son números enteros.

Para obtener la ecuación de los coeficientes  $[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n}$ , se utiliza la propiedad de ortogonalidad de las funciones de Fourier en (2.5). Se multiplica (2.5) por  $\exp(-i 2\pi m'x/a_x)\exp(-i 2\pi n'y/a_y)dx dy$ , y se indica doble integración; siendo los límites de las integrales los de la CU.

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{a_x}{2}}^{\frac{a_x}{2}} \int_{-\frac{a_y}{2}}^{\frac{a_y}{2}} \frac{1}{\varepsilon_2(x, y)} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} m'x\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} n'y\right) dx dy \\ &= \int_{-\frac{a_x}{2}}^{\frac{a_x}{2}} \int_{-\frac{a_y}{2}}^{\frac{a_y}{2}} \sum_{n=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} \exp\left[i \frac{2\pi}{a_x} (m - m')x\right] \exp\left[i \frac{2\pi}{a_y} (n - n')y\right] dx dy \end{aligned} \quad (2.6)$$

Se integra (2.6) para obtener la ecuación de los coeficientes  $[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n}$ :

$$[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} = \frac{1}{a_x a_y} \int_{-\frac{a_x}{2}}^{\frac{a_x}{2}} \int_{-\frac{a_y}{2}}^{\frac{a_y}{2}} \frac{1}{\varepsilon_2(x, y)} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \quad (2.7)$$

Para resolver (2.7), y tener la expresión explícita de los coeficientes  $[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n}$ , se descomponen las integrales en rectángulos conforme a la celda unitaria y los valores de las constantes dieléctricas;  $\varepsilon_c$  y  $\varepsilon_e$  (Ver Apéndice III). La figura 3 muestra la CU en línea punteada.

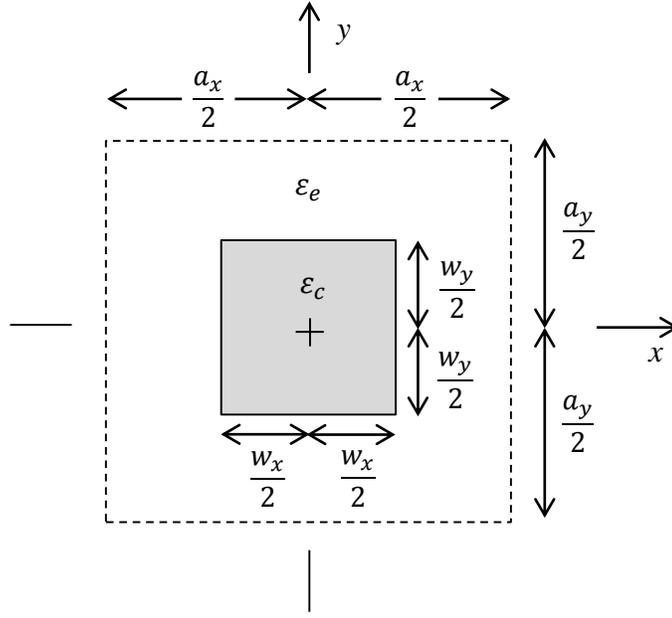


Figura 3. Detalle de CU; la cuál es contenida en el periodo del medio inhomogéneo. La parte interna o *core* tiene una constante dieléctrica  $\epsilon_c$ ; mientras que la parte externa tiene una constante dieléctrica  $\epsilon_e$ .

Los coeficientes  $[\epsilon_2^{-1}]_{m,n}$  para esta configuración, después de realizar el proceso de integración, están dados por la siguiente ecuación.

$$[\epsilon_2^{-1}]_{m,n} = \frac{1}{\epsilon_e} \frac{\sin(\pi m)}{\pi m} \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} + \left( \frac{1}{\epsilon_c} - \frac{1}{\epsilon_e} \right) \frac{\sin(\pi m w_x / a_x)}{\pi m} \frac{\sin(\pi n w_y / a_y)}{\pi n} \quad (2.8)$$

### 2.1.2 Los campos

En el capítulo uno, en las ecuaciones (1.24) y (1.25), se definieron los campos magnético y eléctrico; respectivamente. Para tener las expresiones específicas de los campos para este primer medio, se sustituyen (2.3) y (2.4) en (1.24) y en (1.25), y se obtienen

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{k} h_{m,n} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp\left(i \frac{2\pi}{a_x} m x\right) \exp\left(i \frac{2\pi}{a_y} n y\right) \quad (2.9)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{k} e_{m,n} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp\left(i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) \quad (2.10)$$

donde  $\vec{q}$  es el vector de onda de Bloch que varía en la primera zona de Brillouin; (Ver Apéndice II).

### 2.1.3 Los modos TE

En el capítulo uno, se obtuvo la ecuación (1.32), a partir de la cual se obtendrán las ecuaciones de eigenvalores para los modos TE de este trabajo. Se sustituyen (2.3) y (2.4) en (1.32) para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{m'} \sum_{n'} [\varepsilon_2^{-1}]_{m-m', n-n'} & \left\{ \left[ \left( \vec{q} + \frac{2\pi\hat{i}}{a_x} m + \frac{2\pi\hat{j}}{a_y} n \right) \cdot \hat{i} \right] \left[ \left( \vec{q} + \frac{2\pi\hat{i}}{a_x} m' + \frac{2\pi\hat{j}}{a_y} n' \right) \cdot \hat{i} \right] \right. \\ & \left. + \left[ \left( \vec{q} + \frac{2\pi\hat{i}}{a_x} m + \frac{2\pi\hat{j}}{a_y} n \right) \cdot \hat{j} \right] \left[ \left( \vec{q} + \frac{2\pi\hat{i}}{a_x} m' + \frac{2\pi\hat{j}}{a_y} n' \right) \cdot \hat{j} \right] \right\} h_{m',n'} \\ & = \frac{\omega^2}{c^2} h_{m,n} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Se aplican los productos punto, obteniéndose

$$\begin{aligned} \sum_{m'} \sum_{n'} [\varepsilon_2^{-1}]_{m-m', n-n'} & \left\{ \left( q_x + \frac{2\pi}{a_x} m \right) \left( q_x + \frac{2\pi}{a_x} m' \right) \right. \\ & \left. + \left( q_y + \frac{2\pi}{a_y} n \right) \left( q_y + \frac{2\pi}{a_y} n' \right) \right\} h_{m',n'} = \frac{\omega^2}{c^2} h_{m,n} \end{aligned} \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12), es la ecuación de eigenvalores para encontrar los modos TE de un medio inhomogéneo periódico bidimensional, que en este caso consta de cilindros de sección transversal cuadrada con constante dieléctrica  $\varepsilon_c$  en un medio con constante dieléctrica  $\varepsilon_e$ . Esta ecuación se resuelve numéricamente con un programa en FORTRAN.

### 2.1.4 Los modos TM

Sustituyendo (2.3) y (2.4) en (1.33), y realizando los productos punto, se llega a la siguiente ecuación de eigenvalores para los modos TM:

$$\sum_{m'} \sum_{n'} [\varepsilon_2^{-1}]_{m-m', n-n'} \left\{ \left( q_x + \frac{2\pi}{a_x} m' \right) \left( q_x + \frac{2\pi}{a_x} m' \right) + \left( q_y + \frac{2\pi}{a_y} n' \right) \left( q_y + \frac{2\pi}{a_y} n' \right) \right\} e_{m', n'} = \frac{\omega^2}{c^2} e_{m, n} \quad (2.13)$$

## 2.2 Red rectangular con cilindros circulares

El segundo medio infinito periódico estudiado para calcular los modos EM, consta de cilindros circulares, infinitos, con constante dieléctrica  $\varepsilon_c$ , ordenados en una red cuadrada dentro de un medio con constante dieléctrica  $\varepsilon_e$ . Como se muestra en la figura 4, la posición central de los cilindros está dada por  $\vec{r}_{m,n} = \vec{a}_1 m + \vec{a}_2 n$ , donde  $m$  y  $n$  son números enteros.

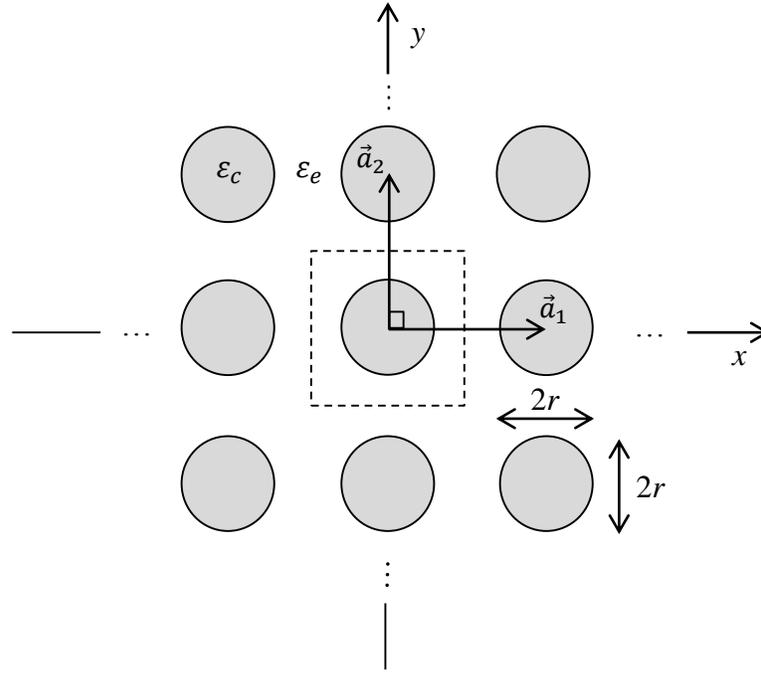


Figura 4. Corte transversal en el plano  $x$ - $y$  de un conjunto de cilindros circulares de radio  $r$ , con constante dieléctrica  $\varepsilon_c$ , ordenados en una red cuadrada en un medio con constante dieléctrica  $\varepsilon_e$ . La CU está delimitada por el recuadro punteado. El sistema es homogéneo en el eje  $z$ .

Todas las ecuaciones y vectores del primer medio, se aplican a este segundo medio; por tratarse de redes cuadradas, a excepción de la ecuación (2.8), que es la ecuación explícita de los coeficientes  $[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n}$ , los cuales dependen principalmente de la geométrica de la CU.

Para encontrar la expresión explícita de los coeficientes  $[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n}$  para este segundo medio, se parte nuevamente de la ecuación (2.7) y se descomponen las integrales conforme a la celda unitaria y se hace una aproximación al círculo (Ver Apéndice IV). La figura 5 muestra la CU en detalle.

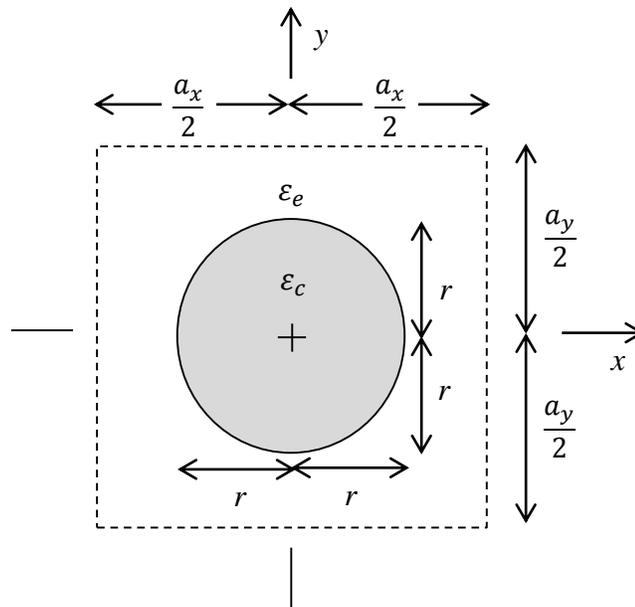


Figura 5. Detalle de CU con *core* circular de radio  $r$ ; la cuál es contenida en el periodo  $a$  del medio inhomogéneo. La parte interna o *core* tiene una constante dieléctrica  $\varepsilon_c$ , mientras que la parte externa tiene una constante dieléctrica  $\varepsilon_e$ .

Los coeficientes  $[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n}$  para esta configuración están dados por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} = & \frac{1}{\varepsilon_e} \left[ \frac{\sin(\pi m) \sin(\pi n)}{\pi m \pi n} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_x} mr\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a_x} nr\right)}{\pi m \pi n} \right] \\
& + \left[ \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_x} m \frac{15}{16} r\right)}{\pi m} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_x} mr\right)}{\pi m} \right] \left\{ -\frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_y} nr\right)}{\pi n} \right. \\
& \left. + \left( \frac{1}{\varepsilon_e} - \frac{1}{\varepsilon_c} \right) \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_y} n \frac{\sqrt{63}}{32} r\right)}{\pi n} \right\} \\
& + \left[ \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_x} m \frac{14}{16} r\right)}{\pi m} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_x} m \frac{15}{16} r\right)}{\pi m} \right] \left\{ -\frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_y} nr\right)}{\pi n} \right. \\
& \left. + \left( \frac{1}{\varepsilon_e} - \frac{1}{\varepsilon_c} \right) \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_y} n \frac{\sqrt{183}}{32} r\right)}{\pi n} \right\} \\
& + \left[ \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_x} m \frac{13}{16} r\right)}{\pi m} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_x} m \frac{14}{16} r\right)}{\pi m} \right] \left\{ -\frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_y} nr\right)}{\pi n} \right. \\
& \left. + \left( \frac{1}{\varepsilon_e} - \frac{1}{\varepsilon_c} \right) \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_y} n \frac{\sqrt{295}}{32} r\right)}{\pi n} \right\} + \dots \\
& + \left[ -\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_x} m \frac{1}{16} r\right)}{\pi m} \right] \left\{ -\frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_y} nr\right)}{\pi n} \right. \\
& \left. + \left( \frac{1}{\varepsilon_e} - \frac{1}{\varepsilon_c} \right) \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a_y} n \frac{\sqrt{1023}}{32} r\right)}{\pi n} \right\}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

### 2.3 Red triangular con cilindros circulares

El tercer medio estudiado para calcular los modos EM, consta de cilindros circulares, infinitos, con constante dieléctrica  $\epsilon_c$ , ordenados en una red triangular dentro de un medio con constante dieléctrica  $\epsilon_e$ . Como se muestra en la figura 6, la posición central de los cilindros está dada por  $\vec{r}_{m,n} = \vec{a}_1 m + \vec{a}_2 n$ , donde  $m$  y  $n$  son números enteros. El área de la CU está dada por  $|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|$ .

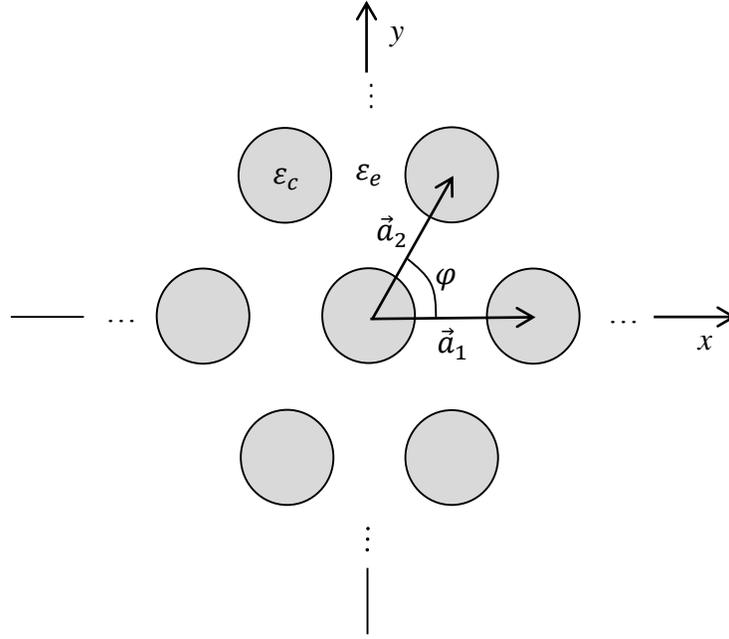


Figura 6. Corte transversal en el plano  $x$ - $y$  de un conjunto de cilindros circulares con constante dieléctrica  $\epsilon_c$ , ordenados en una red triangular en un medio con constante dieléctrica  $\epsilon_e$ . El sistema es homogéneo en el eje  $z$ . Para la red triangular  $\varphi$  es igual a 60 grados.

Para esta última red, los vectores  $\vec{a}_1$  y  $\vec{a}_2$  están dados por

$$\vec{a}_1 = a \hat{i} \quad (2.15)$$

$$\vec{a}_2 = a \cos \varphi \hat{i} + a \sin \varphi \hat{j} \quad (2.16)$$

donde  $\varphi$  es igual a 60 grados.

La ubicación del centro de los cilindros en el espacio recíproco está dada por (1.21), y sustituyendo (2.15) y (2.16) en (1.22), se llega a que

$$\vec{g}_1 = \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (\sin \varphi \hat{i} - \cos \varphi \hat{j}) \quad (2.17)$$

$$\vec{g}_2 = \frac{2\pi}{a \sin \varphi} \hat{j} \quad (2.18)$$

(Ver Apéndice II).

### 2.3.1 La función dieléctrica

En el capítulo uno, en la ecuación (1.23), se definió la función dieléctrica para un medio inhomogéneo periódico bidimensional. Para tener la función específica para este tercer medio, se sustituyen (2.17) y (2.18) en (1.23), y se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{\varepsilon_2(x, y)} = \sum_{n=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} \exp\left(i \frac{2\pi}{a} mx\right) \exp\left[i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n - \cos \varphi m)y\right] \quad (2.19)$$

donde  $m$  y  $n$  son números enteros.

Para obtener la ecuación de los coeficientes  $[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n}$ , se utiliza la propiedad de ortogonalidad de las funciones de Fourier. Se multiplica (2.19) por  $\exp(-i 2\pi m'x/a) \exp[-i 2\pi(n' - \cos \varphi m')y/a \sin \varphi]$   $dx dy$ , y se indica doble integración; siendo los límites de las integrales los de la CU. Debido a que la CU en este caso es hexagonal; y no cuadrada, los límites de las integrales se escribirán en forma general:

$$\begin{aligned} & \int_{-CU_x}^{+CU_x} \int_{-CU_y}^{+CU_y} \frac{1}{\varepsilon_2(x, y)} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a} m'x\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n' - \cos \varphi m')y\right] dx dy \\ &= \int_{-CU_x}^{+CU_x} \int_{-CU_y}^{-CU_y} \sum_{n=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} \exp\left[i \frac{2\pi}{a} (m \right. \\ & \quad \left. - m')x\right] \exp\left\{i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} [(n - \cos \varphi m) - (n' - \cos \varphi m')]y\right\} dx dy \end{aligned} \quad (2.20)$$

Se realizan las integrales de (2.20) para obtener

$$\int_{-CUx}^{+CUx} \int_{-CUy}^{+CUy} \frac{1}{\varepsilon_2(x, y)} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a} m'x\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n' - \cos \varphi m')y\right] dx dy \quad (2.21)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} a \delta_{m,m'} a \sin \varphi \delta_{n-\cos \varphi m, n'-\cos \varphi m'}$$

Se aplican las deltas de Kronecker a (2.21) para llegar a

$$[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} = \frac{1}{a^2 \sin \varphi} \int_{-CUx}^{+CUx} \int_{-CUy}^{+CUy} \frac{1}{\varepsilon_2(x, y)} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a} mx\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n - \cos \varphi m)y\right] dx dy \quad (2.22)$$

donde  $\varphi = 60^\circ$ .

Para resolver (2.22), y tener la expresión explícita de los coeficientes  $[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n}$ , se descomponen las integrales en rectángulos conforme a la celda unitaria y los valores de las constantes dieléctricas  $\varepsilon_c$  y  $\varepsilon_e$  (Ver Apéndice V). La figura 7 muestra la CU en detalle.

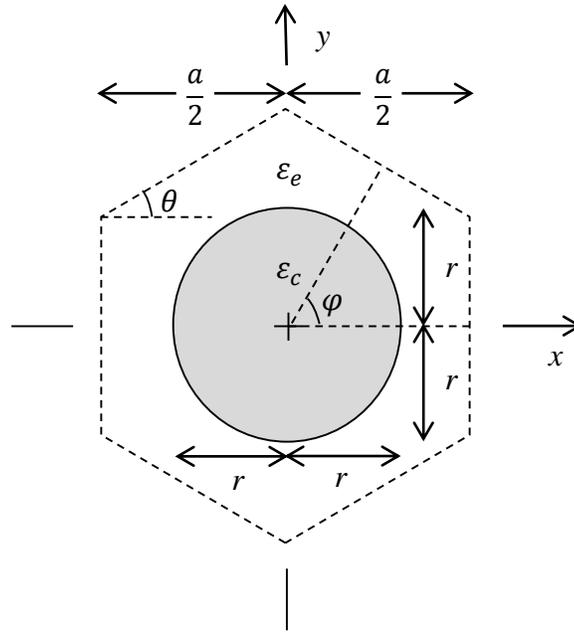


Figura 7. Detalle de CU hexagonal con *core* circular; la cuál es contenida en el periodo  $a$  del medio inhomogéneo. La parte interna o *core* tiene una constante dieléctrica  $\epsilon_c$ ; mientras que la parte externa tiene una constante dieléctrica  $\epsilon_e$ .  $\varphi$  es igual a 60 grados, y  $\theta$  es igual a 30 grados.

Los coeficientes  $[\epsilon_2^{-1}]_{m,n}$  para esta configuración, están dados por la ecuación (2.23), que se muestra en dos partes por las ecuaciones (2.23a) y (2.23b), que se presentan a continuación.

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} = & \left[ \frac{\sin(\pi m)}{\pi m} - \frac{\sin\left(\pi m \frac{63}{64}\right)}{\pi m} \right] \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\sin 60} \left(\frac{m}{2} - n\right) \left(1 + \frac{1}{128}\right) \tan 30\right]}{\pi \left(\frac{m}{2} - n\right)} \\
& + \left[ \frac{\sin\left(\pi m \frac{63}{64}\right)}{\pi m} \right. \\
& \left. - \frac{\sin\left(\pi m \frac{62}{64}\right)}{\pi m} \right] \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\sin 60} \left(\frac{m}{2} - n\right) \left(1 + \frac{3}{128}\right) \tan 30\right]}{\pi \left(\frac{m}{2} - n\right)} \\
& + \left[ \frac{\sin\left(\pi m \frac{62}{64}\right)}{\pi m} \right. \\
& \left. - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a} mr\right)}{\pi m} \right] \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\sin 60} \left(\frac{m}{2} - n\right) \left(1 + \frac{5}{128}\right) \tan 30\right]}{\pi \left(\frac{m}{2} - n\right)} \\
& + \left[ \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a} mr\right)}{\pi m} \right. \\
& \left. - \frac{\sin\left(\pi m \frac{61}{64}\right)}{\pi m} \right] \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\sin 60} \left(\frac{m}{2} - n\right) \left(1 + \frac{5}{128}\right) \tan 30\right]}{\pi \left(\frac{m}{2} - n\right)} \\
& + \left(\frac{1}{\varepsilon_c} - \frac{1}{\varepsilon_e}\right) \frac{\sin\left\{\frac{2\pi}{a \sin 60} \left(\frac{m}{2} - n\right) \left[r^2 - \left(\frac{r}{2} + \frac{61}{256} a\right)^2\right]^{1/2}\right\}}{\pi \left(\frac{m}{2} - n\right)} \\
& + \left[ \frac{\sin\left(\pi m \frac{61}{64}\right)}{\pi m} \right. \\
& \left. - \frac{\sin\left(\pi m \frac{60}{64}\right)}{\pi m} \right] \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\sin 60} \left(\frac{m}{2} - n\right) \left(1 + \frac{7}{128}\right) \tan 30\right]}{\pi \left(\frac{m}{2} - n\right)} \\
& + \left(\frac{1}{\varepsilon_c} - \frac{1}{\varepsilon_e}\right) \frac{\sin\left\{\frac{2\pi}{a \sin 60} \left(\frac{m}{2} - n\right) \left[r^2 - \left(\frac{121}{256} a\right)^2\right]^{1/2}\right\}}{\pi \left(\frac{m}{2} - n\right)} +
\end{aligned} \tag{2.23a}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\sin\left(\pi m \frac{60}{64}\right)}{\pi m} - \frac{\sin\left(\pi m \frac{59}{64}\right)}{\pi m} \right] \left\langle \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\sin 60} \left(\frac{m}{2} - n\right) \left(1 + \frac{9}{128}\right) \tan 30\right]}{\pi \left(\frac{m}{2} - n\right)} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{\varepsilon_c} - \frac{1}{\varepsilon_e}\right) \frac{\sin\left\{\frac{2\pi}{a \sin 60} \left(\frac{m}{2} - n\right) \left[r^2 - \left(\frac{119}{256} a\right)^2\right]^{1/2}\right\}}{\pi \left(\frac{m}{2} - n\right)} \right\rangle \\
& \quad + \left[ \frac{\sin\left(\pi m \frac{59}{64}\right)}{\pi m} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\sin\left(\pi m \frac{58}{64}\right)}{\pi m} \right] \left\langle \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\sin 60} \left(\frac{m}{2} - n\right) \left(1 + \frac{11}{128}\right) \tan 30\right]}{\pi \left(\frac{m}{2} - n\right)} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{\varepsilon_c} - \frac{1}{\varepsilon_e}\right) \frac{\sin\left\{\frac{2\pi}{a \sin 60} \left(\frac{m}{2} - n\right) \left[r^2 - \left(\frac{117}{256} a\right)^2\right]^{1/2}\right\}}{\pi \left(\frac{m}{2} - n\right)} \right\rangle + \dots \\
& \quad + \left[ \frac{\sin\left(\pi m \frac{1}{64}\right)}{\pi m} - 0 \right] \left\langle \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\sin 60} \left(\frac{m}{2} - n\right) \left(1 + \frac{127}{128}\right) \tan 30\right]}{\pi \left(\frac{m}{2} - n\right)} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{\varepsilon_c} - \frac{1}{\varepsilon_e}\right) \frac{\sin\left\{\frac{2\pi}{a \sin 60} \left(\frac{m}{2} - n\right) \left[r^2 - \left(\frac{1}{256} a\right)^2\right]^{1/2}\right\}}{\pi \left(\frac{m}{2} - n\right)} \right\rangle
\end{aligned} \tag{2.23b}$$

### 2.3.2 Los campos

En el capítulo uno, en las ecuaciones (1.24) y (1.25), se definieron los campos magnético y eléctrico; respectivamente. Para tener las expresiones específicas de los campos para este primer medio, se sustituyen (2.17) y (2.18) en (1.24) y en (1.25), y se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{k} h_{m,n} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp\left(i \frac{2\pi}{a} mx\right) \exp\left[i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n - m \cos \varphi) y\right] \quad (2.24)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{k} e_{m,n} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \exp\left(i \frac{2\pi}{a} mx\right) \exp\left[i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n - m \cos \varphi) y\right] \quad (2.25)$$

Con  $\varphi = 60$ , y donde  $\vec{q}$  es el vector de onda de Bloch que varía en la primera zona de Brillouin; (Ver Apéndice II).

### 2.3.3 Los modos TE

En el capítulo uno, se obtuvo la ecuación (1.32), a partir de la cual se obtendrán las ecuaciones de eigenvalores para los modos TE. Se sustituyen (2.17) y (2.18) en (1.32), para obtener

$$\begin{aligned} & \sum_{m'} \sum_{n'} [\varepsilon_2^{-1}]_{m-m', n-n'} \left\{ \left[ \vec{q} + \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (\sin \varphi \hat{i} - \cos \varphi \hat{j}) m + \frac{2\pi}{a \sin \varphi} \hat{j} n \right] \right. \\ & \quad \cdot \hat{i} \left\{ \left[ \vec{q} + \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (\sin \varphi \hat{i} - \cos \varphi \hat{j}) m' + \frac{2\pi}{a \sin \varphi} \hat{j} n' \right] \cdot \hat{i} \right\} \\ & \quad + \left[ \vec{q} + \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (\sin \varphi \hat{i} - \cos \varphi \hat{j}) m + \frac{2\pi}{a \sin \varphi} \hat{j} n \right] \\ & \quad \cdot \hat{j} \left\{ \left[ \vec{q} + \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (\sin \varphi \hat{i} - \cos \varphi \hat{j}) m' + \frac{2\pi}{a \sin \varphi} \hat{j} n' \right] \cdot \hat{j} \right\} \Big\} h_{m', n'} \\ & = \frac{\omega^2}{c^2} h_{m, n} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Se aplican los productos punto a la ecuación (2.26), obteniendo

$$\begin{aligned} & \sum_{m'} \sum_{n'} [\varepsilon_2^{-1}]_{m-m', n-n'} \left\{ \left[ q_x + \frac{2\pi}{a} m \right] \left( q_x + \frac{2\pi}{a} m' \right) \right. \\ & \quad + \left[ q_y - \frac{2\pi}{a \sin \varphi} m \cos \varphi + \frac{2\pi}{a \sin \varphi} n \right] \left( q_y - \frac{2\pi}{a \sin \varphi} \cos \varphi m' \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{2\pi}{a \sin \varphi} n' \right) \right\} h_{m', n'} = \frac{\omega^2}{c^2} h_{m, n} \end{aligned} \quad (2.27)$$

La ecuación (2.27), es la ecuación de eigenvalores para encontrar los modos TE de un medio inhomogéneo periódico bidimensional, que en este caso consta de cilindros de sección

transversal circular, ordenados en una red triangular, con constante dieléctrica  $\epsilon_c$ , en un medio con constante dieléctrica  $\epsilon_e$ . Esta ecuación se resuelve numéricamente con un programa en FORTRAN. Si el ángulo  $\varphi$  es igual a 90 grados, (2.27) llega a ser (2.12).

#### 2.3.4 Los modos TM

Sustituyendo (2.17) y (2.18) en (1.33), y aplicando los productos punto, se llega a la siguiente ecuación de eigenvalores para los modos TM

$$\begin{aligned} \sum_{m'} \sum_{n'} [\epsilon_2^{-1}]_{m-m', n-n'} & \left\{ \left[ q_x + \frac{2\pi}{a} m' \right] \left( q_x + \frac{2\pi}{a} m' \right) \right. \\ & + \left[ q_y - \frac{2\pi}{a \sin \varphi} m' \cos \varphi + \frac{2\pi}{a \sin \varphi} n' \right] \left( q_y - \frac{2\pi}{a \sin \varphi} m' \cos \varphi \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\pi}{a \sin \varphi} n' \right) \right\} e_{m', n'} = \frac{\omega^2}{c^2} e_{m, n} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nuevamente, si el ángulo  $\varphi$  es igual a 90 grados, (2.28) llega a ser (2.13).

En este capítulo, se encontraron las expresiones para los coeficientes de los inversos de las constantes dieléctricas, las expresiones para los campos, y las ecuaciones de eigenvalores para las redes cuadrada y triangular para los modos TE y TM.

## CAPÍTULO III

### RESULTADOS NUMÉRICOS

En el capítulo uno, se expusieron los fundamentos teóricos necesarios sobre los cuales se basa el estudio de los cristales fotónicos. Mientras que en el capítulo dos, se profundizó en el análisis al conocer las características específicas de los tres medios estudiados, para llegar a obtener las expansiones de Fourier y ecuaciones de eigenvalores para cada medio. En este capítulo tres, se presentan las estructuras de bandas fotónicas para las redes cuadradas comparándolas con las de la referencia [14], y para la red triangular comparándolas con las de la referencia [12]. Se presentan también algunos de los modos que pueden soportar los tres medios estudiados.

Para obtener los resultados numéricos, las ecuaciones de eigenvalores para los tres medios; que tienen sumatorias dobles que corren de menos infinito a más infinito, debieron ser truncadas. Cada ecuación de eigenvalores genera una matriz, cuyo orden depende del corrimiento de las sumatorias. Se alcanzó convergencia en los resultados para matrices de orden 2209; para unos casos, y de orden 2401; para otros.

También se consideró la convergencia en las aproximaciones a los círculos de las CUs en el cálculo de los coeficientes  $[\epsilon_2^{-1}]_{m,n}$  (Ver apéndices IV y V), para encontrar las estructuras de bandas fotónicas en las frecuencias más bajas.

#### 3.1 Las bandas fotónicas

Las bandas fotónicas, son bandas de frecuencias, las cuales pueden ser permitidas o prohibidas. Las bandas permitidas; como su nombre lo indica, son las bandas que permiten la transmisión de las ondas electromagnéticas dentro del cristal fotónico, de tal manera que aparecen los modos electromagnéticos. Por otro lado, las bandas prohibidas, son las bandas que inhabilitan la transmisión de las ondas electromagnéticas dentro del cristal fotónico, por lo que los modos electromagnéticos no existen dentro de estas bandas. A continuación se presentan las estructuras de bandas fotónicas de los tres medios estudiados.

### 3.1.1 Red cuadrada con cilindros cuadrados

Este primer medio, se trata de un dieléctrico ( $\epsilon_e = 8.9$ ) en todo el espacio, con cilindros cuadrados infinitos de vacío ( $\epsilon_c = 1.0$ ) en forma de red cuadrada (Ver figura 2). La periodicidad del medio está dada por  $a_x$  y  $a_y$  en el plano  $x$ - $y$ ; las cuales se fijan a un valor  $a$ . La sección transversal de los cilindros cuadrados tiene dimensiones  $w_x = 0.84a$ , y  $w_y = 0.84a$ . La figura 8 muestra la estructura de bandas fotónicas para los modos TE calculada con un programa en FORTRAN que resuelve la ecuación de eigenvalores (2.12).

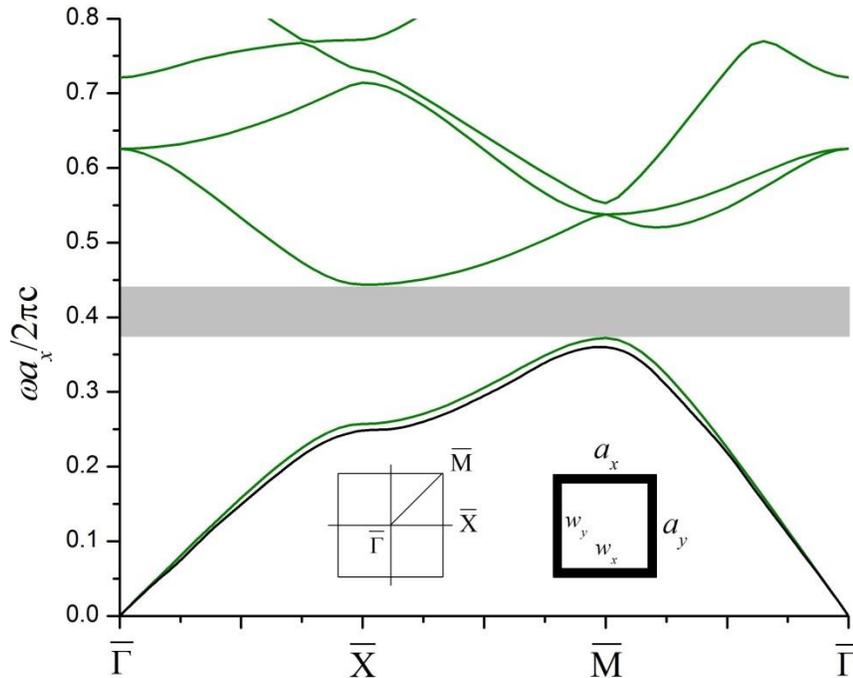


Figura 8. Estructura de bandas fotónicas para una red cuadrada de cilindros cuadrados de vacío ( $\epsilon_c = 1$ ), dentro de un material dieléctrico ( $\epsilon_e = 8.9$ ). Las curvas sólidas en color verde representan los modos TE, con los campos según  $(H_z, E_x, E_y)$ , mientras que las curvas negras representan los modos TE calculados en la referencia [14]. La estructura de bandas se dibuja a partir de la variación del vector de onda de Bloch en la primera zona de Brillouin.  $\bar{\Gamma}$ ,  $\bar{X}$ , y  $\bar{M}$ , son puntos en el espacio recíproco; como se muestra en el recuadro del lado izquierdo. En el recuadro derecho se muestra la CU de lados iguales  $a_x$  y  $a_y$ , la parte negra representa el dieléctrico y la blanca el vacío de dimensiones  $w_x$  por  $w_y$ . La fracción de llenado es 0.7056. La primera banda prohibida se ilustra como un rectángulo gris.

Se aprecia en la figura 8, que no hay una concordancia total entre los dos resultados. Después de investigar y analizar los datos, se encontró que el óxido de Aluminio ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) tiene una constante dieléctrica relativa de 9.8 aproximadamente, para longitudes de ondas infinitas hasta los 76.92  $\mu\text{m}$ ; esto es desde los 0 Hz hasta los 3.9 THz, aproximadamente. Desde 76.92  $\mu\text{m}$  a longitudes de onda menores, la constante dieléctrica del material se vuelve muy errática (Ver referencia 19). Este material fue el utilizado en el experimento realizado en la referencia [11], cuyos resultados teóricos son reproducidos por la referencia [14]. Por lo que se concluyó, que esta falta de concordancia se debe a una discrepancia en el valor de la constante dieléctrica. Cuando se corre el programa con  $\epsilon_e = 9.8$ , los resultados concuerdan perfectamente (Ver Apéndice VI).

Los modos TM se calculan a partir de la ecuación (2.13), y su estructura de bandas se presenta en la figura 9, presentando una discordancia muy similar a la anterior.

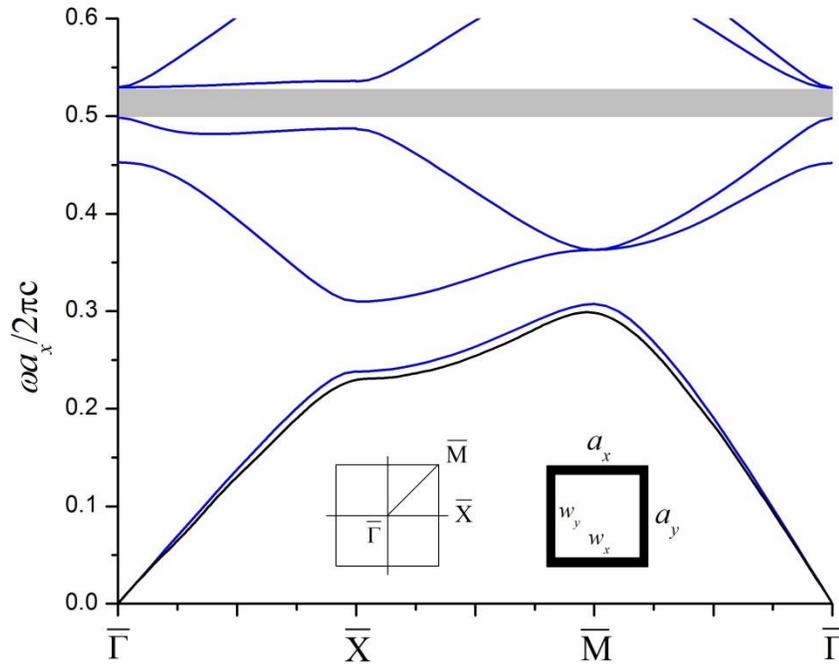


Figura 9. Estructura de bandas fotónicas para una red cuadrada de cilindros cuadrados de vacío ( $\epsilon_c = 1$ ), dentro de un material dieléctrico ( $\epsilon_e = 8.9$ ). Las curvas sólidas en color azul representan los modos TM, con los campos según  $(E_z, H_x, H_y)$ , mientras que las curvas negras representan los modos TM calculados en la referencia [14]. La estructura de bandas se dibuja a partir de la variación del vector de onda de Bloch en la primera zona de Brillouin.  $\bar{\Gamma}$ ,  $\bar{X}$ , y  $\bar{M}$ , son puntos en el espacio recíproco; como se muestra en el recuadro del lado izquierdo. En el recuadro derecho se muestra la CU de lados iguales  $a_x$  y  $a_y$ , la parte negra representa el dieléctrico y la blanca el vacío de dimensiones  $w_x$  por  $w_y$ . Los lados del cuadrado de dieléctrico en la CU miden  $0.84a$ . La fracción de llenado es 0.7056. La primera banda prohibida se ilustra como un rectángulo gris.

Al comparar las estructuras de bandas de las figuras 8 y 9, se aprecia cierta similitud entre las primeras tres curvas; que son obtenidas a partir de los primeros tres eigenvalores de las ecuaciones matriciales (2.12) y (2.13). Pero de la cuarta curva en adelante, las líneas cambian significativamente. Las bandas fotónicas prohibidas se ubican en diferente parte del espectro y son de diferente anchura espectral.

### 3.1.2 Red cuadrada con cilindros circulares

El segundo medio, se trata de cilindros circulares infinitos de dieléctrico ( $\epsilon_c = 8.9$ ) ordenados en vacío ( $\epsilon_e = 1.0$ ) en forma de red cuadrada (Ver figura 4). La periodicidad del medio está dada por  $a_x$  y  $a_y$  en el plano  $x$ - $y$ ; las cuales se fijan a un valor  $a$ . La sección transversal de los cilindros circulares tiene un radio de  $0.2a$ . Estos parámetros corresponden al experimento realizado en la referencia [11], cuyos resultados teóricos están siendo comparados con los de este trabajo a través de la referencia [14]. La figura 10 muestra la estructura de bandas fotónicas para los modos TE calculada con un programa en FORTRAN que resuelve la ecuación de eigenvalores (2.12).

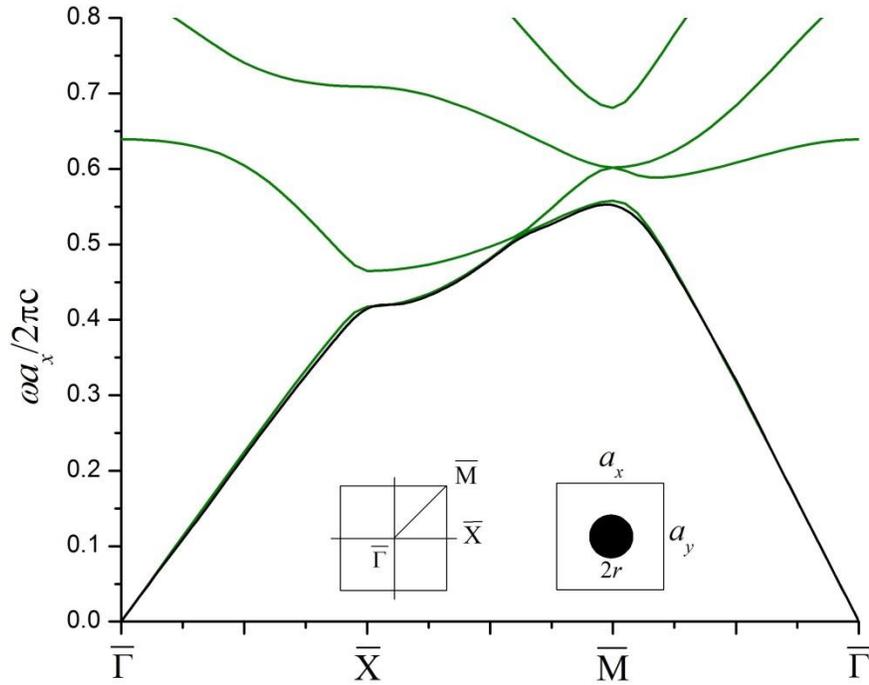


Figura 10. Estructura de bandas fotónicas para una red cuadrada de cilindros circulares de dieléctrico ( $\epsilon_c = 8.9$ ), dentro de vacío ( $\epsilon_e = 1.0$ ). Las curvas sólidas en color verde representan los modos TE, con los campos según  $(H_z, E_x, E_y)$ , mientras que las curvas negras representan los modos TE calculados en la referencia [14]. La estructura de bandas se dibuja a partir de la variación del vector de onda de Bloch en la primera zona de Brillouin.  $\bar{\Gamma}$ ,  $\bar{X}$ , y  $\bar{M}$ , son puntos en el espacio recíproco; como se muestra en el recuadro del lado izquierdo. En el recuadro del lado derecho se muestra la CU de lados iguales  $a_x$  y  $a_y$ , la parte negra representa el dieléctrico circular de radio  $r$  y la blanca el vacío. El radio del cilindro de dieléctrico es  $0.2a$ . La fracción de llenado es 0.1256. No existe una banda prohibida para las primeras frecuencias para este medio para los modos TE.

Notoriamente, en este segundo medio, la concordancia entre los resultados de la referencia [14], y los presentados aquí, son excelentes. A su vez, los resultados presentados por la referencia [14]; para esta configuración de cristal fotónico, reproducen los resultados teóricos presentados por la referencia [11]. Esto muestra que el método que se utilizó en este trabajo, es confiable para encontrar; con buena exactitud, las primeras bandas fotónicas.

Los modos TM se calculan a partir de la ecuación (2.13), y su estructura de bandas se presenta en la figura 11.

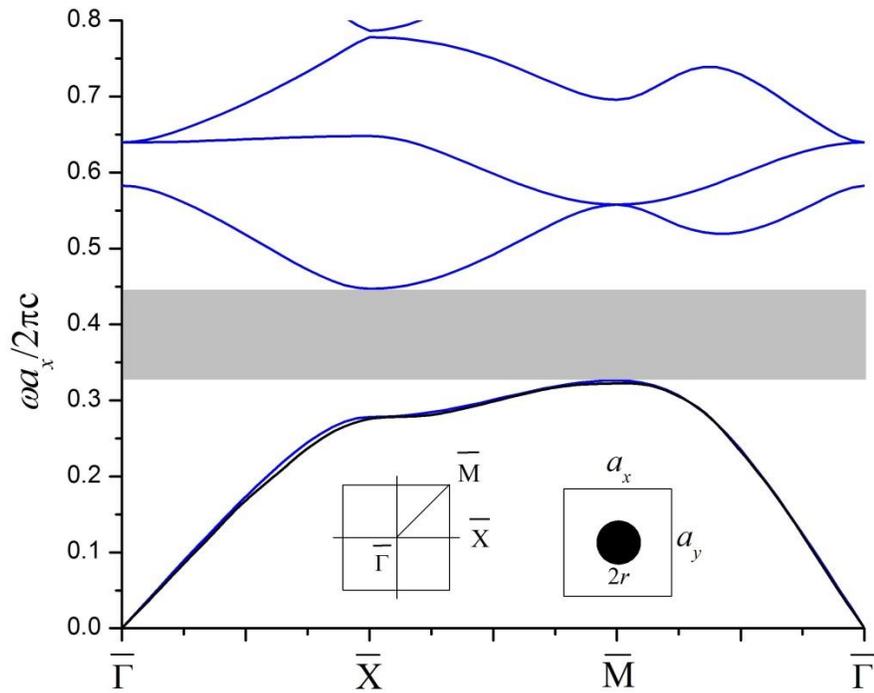


Figura 11. Estructura de bandas fotónicas para una red cuadrada de cilindros circulares de dieléctrico ( $\epsilon_c = 8.9$ ), dentro de vacío ( $\epsilon_e = 1.0$ ). Las curvas sólidas en color azul representan los modos TM, con los campos según  $(E_z, H_x, H_y)$ , mientras que las curvas negras representan los modos TM calculados en la referencia [14]. La estructura de bandas se dibuja a partir de la variación del vector de onda de Bloch en la primera zona de Brillouin.  $\bar{\Gamma}$ ,  $\bar{X}$ , y  $\bar{M}$ , son puntos en el espacio recíproco; como se muestra en el recuadro del lado izquierdo. En el recuadro del lado derecho se muestra la CU de lados iguales  $a_x$  y  $a_y$ , la parte negra representa el dieléctrico de radio  $r$  y la blanca el vacío. El radio del cilindro de dieléctrico es  $0.2a$ . La fracción de llenado es  $0.1256$ . La primera banda prohibida se ilustra como un rectángulo gris.

Nuevamente, como se aprecia en la figura 11, hay una excelente concordancia entre los dos resultados. Es notable que la estructura de bandas para los modos TE no presente ninguna banda prohibida para las primeras frecuencias, mientras que para los modos TM si existe una banda prohibida de tamaño considerable.

### 3.1.3 Red triangular con cilindros circulares

El tercer y último medio, se trata de cilindros circulares infinitos de vacío ( $\epsilon_c = 1.0$ ) en un dieléctrico ( $\epsilon_e = 13.0$ ), ordenados en forma de red triangular (Ver figura 6). La periodicidad del medio está dada por  $a$  en el plano  $x$ - $y$ . La sección transversal de los cilindros circulares tiene un radio de  $0.48a$ . Estos parámetros corresponden a los de la referencia [12]. La figura 12 muestra la estructura de bandas fotónicas para los modos TE calculada con un programa en FORTRAN que resuelve la ecuación de eigenvalores (2.27).

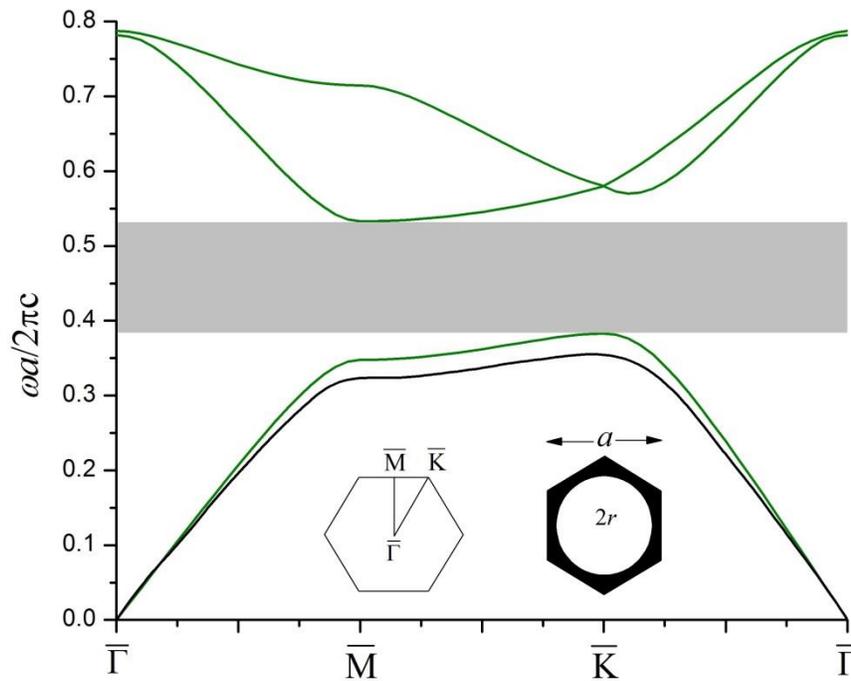


Figura 12. Estructura de bandas fotónicas para una red triangular de cilindros circulares de vacío ( $\epsilon_c = 1.0$ ), dentro de dieléctrico ( $\epsilon_e = 13.0$ ). Las curvas sólidas en color verde representan los modos TE, con los campos según  $(H_z, E_x, E_y)$ , mientras que las curvas negras representan los modos TE calculados en la referencia [12]. La estructura de bandas se dibuja a partir de la variación del vector de onda de Bloch en la primera zona de Brillouin.  $\bar{\Gamma}$ ,  $\bar{M}$ , y  $\bar{K}$  son puntos en el espacio recíproco; como se muestra en el recuadro del lado izquierdo. En el recuadro del lado derecho se muestra la CU en forma de hexágono, la parte negra representa el dieléctrico y la blanca el vacío circular de radio  $r$ . El radio del cilindro de dieléctrico es  $0.48a$ . La fracción de llenado es 0.8358. La primera banda prohibida se ilustra como un rectángulo gris.

En este tercer medio, la concordancia entre los resultados de este trabajo y los publicados por la referencia [12], es menor que en el primer medio. La referencia [12], presenta resultados teóricos y experimentales de un cristal fotónico con las mismas características y parámetros que presenta este tercer medio. Calculan las estructuras de bandas para las frecuencias más bajas en ambos modos, y después diseñan un experimento para comprobar sus resultados teóricos. Dados los parámetros de su experimento, teóricamente esperaban una banda prohibida entre los 12.3 y 14.6GHz, y experimentalmente la obtienen entre los 13 y 15.5GHz, teniendo un concordancia de 94.4% en promedio para los límites inferior y superior de la banda. Con los resultados de este trabajo, se pronosticaría una banda entre los 12.72 y 15.28GHz, teniendo una concordancia de 98.21%. Con esto se demuestra la eficacia del método numérico utilizado para resolver las ecuaciones de los coeficientes de los inversos de las funciones dieléctricas. Para este caso específico, la CU fue dividida en 128 partes sobre el eje  $x$  (Ver Apéndice V).

Los modos TM se calculan a partir de la ecuación (2.28), y su estructura de bandas se presenta en la figura 13.

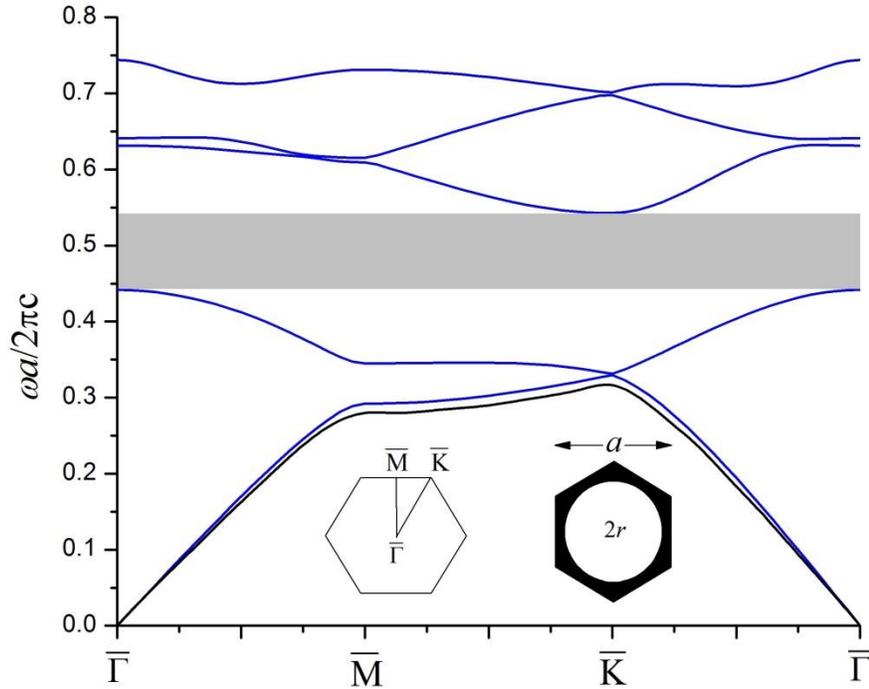


Figura 13. Estructura de bandas fotónicas para una red triangular de cilindros circulares de vacío ( $\epsilon_c = 1.0$ ), dentro de dieléctrico ( $\epsilon_e = 13.0$ ). Las curvas sólidas en color azul representan los modos TM, con los campos según  $(E_z, H_x, H_y)$ , mientras que las curvas negras representan los modos TM calculados en la referencia [12]. La estructura de bandas se dibuja a partir de la variación del vector de onda de Bloch en la primera zona de Brillouin.  $\bar{\Gamma}$ ,  $\bar{M}$ , y  $\bar{K}$  son puntos en el espacio recíproco; como se muestra en el recuadro del lado izquierdo. En el recuadro del lado derecho se muestra la CU en forma de hexágono, la parte negra representa el dieléctrico de radio  $r$  y la blanca el vacío. El radio del cilindro de dieléctrico es  $0.48a$ . La fracción de llenado es  $0.8358$ . La primera banda prohibida se ilustra como un rectángulo gris.

En este último medio, las dos polarizaciones presentan bandas prohibidas, siendo la de los modos TE la más grande.

## 3.2 Los modos electromagnéticos

Los modos electromagnéticos, son las formas en que se comportan las ondas electromagnéticas en un medio dado. Dentro de los cristales fotónicos, los modos existen únicamente fuera de las bandas prohibidas. Para visualizar los modos en una celda unitaria y sus vecindades con las otras celdas, se calcula el módulo cuadrado del campo magnético; para los modos TE, y el módulo cuadrado del campo eléctrico; para los modos TM. Como se verá a continuación, los modos pueden ser muy diferentes unos de otros en diseño y comportamiento. En las figuras presentadas a continuación, los colores azules intensos indican baja intensidad de campo, los colores verdes indican una intensidad media, y los colores rojos intensos, indican la mayor intensidad de campo.

### 3.2.1 Red cuadrada con cilindros cuadrados

El primer modo presentado pertenece al primer medio estudiado en modos TE. Este se grafica calculando el módulo cuadrado de la ecuación (2.9); esto es, la ecuación del campo magnético para un arreglo de cilindros ordenados en forma de red cuadrada. La figura 14, muestra uno de los modos que puede soportar el primer medio estudiado. El valor del vector de onda de Bloch del campo magnético está entre  $\bar{\Gamma}$  y  $\bar{M}$ ; según el espacio recíproco, su valor exacto se denota en sus componentes en el eje  $x$  y el eje  $y$  en la figura 14.

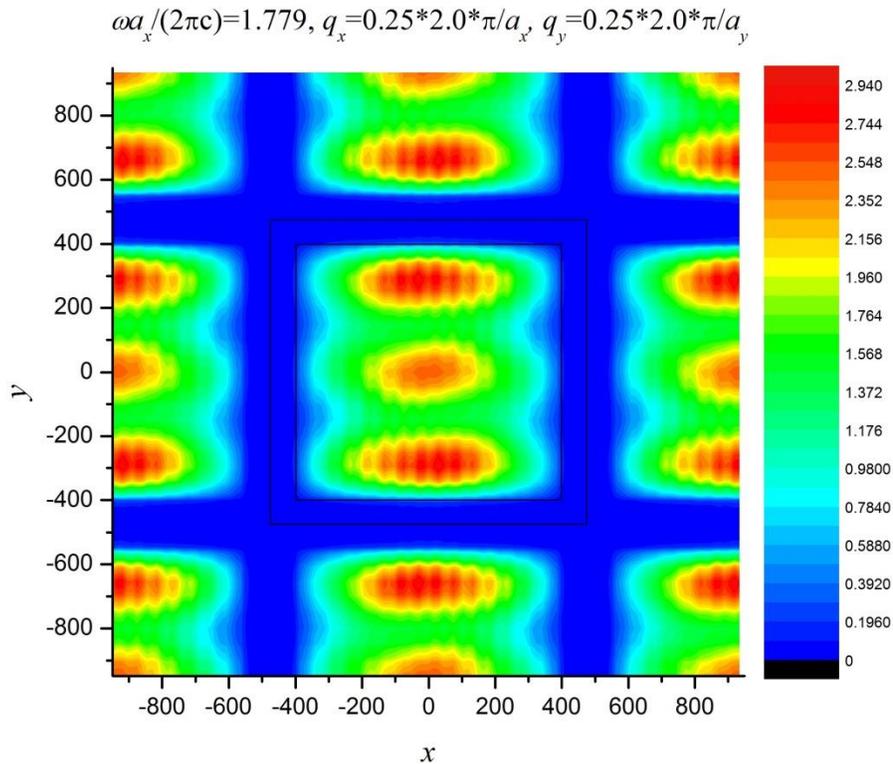


Figura 14. Módulo cuadrado del campo magnético, en unidades arbitrarias, en un corte transversal, en una red cuadrada de cilindros infinitos cuadrados de vacío ( $\epsilon_c = 1$ ) dentro de un dieléctrico ( $\epsilon_e = 8.9$ ). Se considera el campo eléctrico perpendicular a los cilindros y el campo magnético paralelo; ( $H_z, E_x, E_y$ ). Los parámetros para este modo son  $\omega a_x / 2\pi c = 1.779$ ,  $q_x = 0.25 * (2\pi / a_x)$ , y  $q_y = 0.25 * (2\pi / a_y)$ . La fracción de llenado de la CU es de 0.7056. La CU se dibuja con líneas negras.

Este primer modo, muestra tres áreas de mayor intensidad dentro del cilindro de vacío. Estas tres áreas se alinean en un eje vertical, siendo las extremas las de mayor intensidad. Estas dos áreas extremas parecen ser una la imagen espejo de la otra, como si se desplazaran en sentidos opuestos. El campo magnético es prácticamente inexistente en el dieléctrico que rodea el cilindro.

El segundo modo, corresponde a los modos TM, también del primer medio. Este se grafica calculando el módulo cuadrado de la ecuación (2.10); esto es, la ecuación del campo

eléctrico para un arreglo de cilindros ordenados en forma de red cuadrada. La figura 15, muestra uno de los modos que puede soportar el primer medio estudiado. El valor del vector de onda de Bloch del campo magnético está entre  $\bar{X}$  y  $\bar{M}$ ; según el espacio recíproco, su valor exacto se denota en sus componentes en el eje  $x$  y el eje  $y$  en la figura 15.

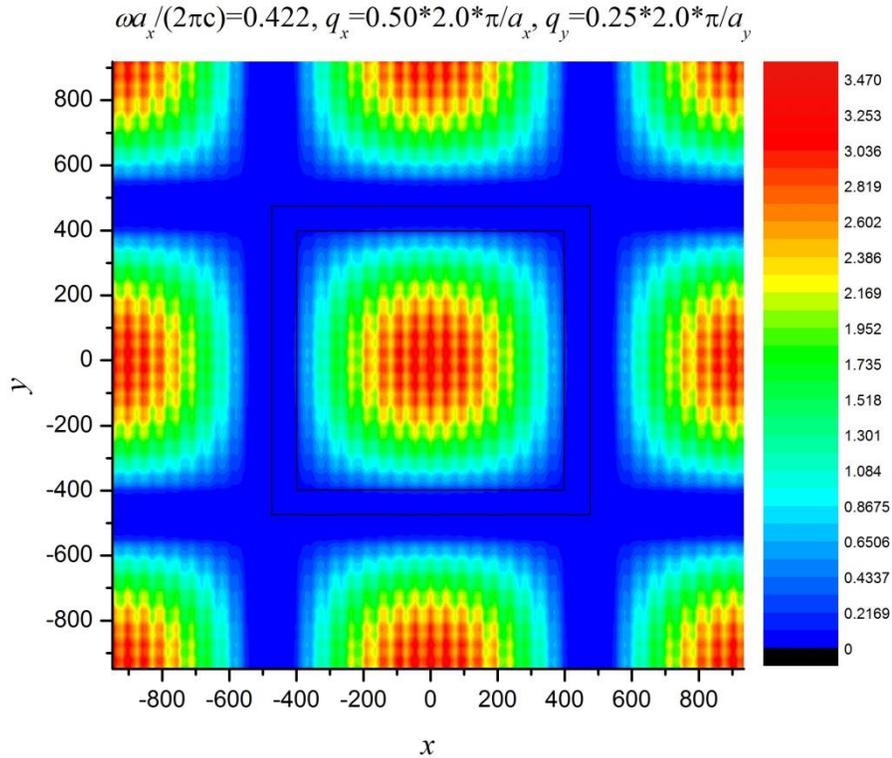


Figura 15. Módulo cuadrado del campo eléctrico, en unidades arbitrarias, en un corte transversal, en una red cuadrada de cilindros infinitos cuadrados de vacío ( $\epsilon_c = 1$ ) dentro de un dieléctrico ( $\epsilon_e = 8.9$ ). Se considera el campo magnético perpendicular a los cilindros y el campo eléctrico paralelo; ( $E_z, H_x, H_y$ ). Los parámetros para este modo son  $\omega a_x / 2\pi c = 0.402$ ,  $q_x = 0.50 * (2\pi / a_x)$ , y  $q_y = 0.25 * (2\pi / a_y)$ . La fracción de llenado de la CU es de 0.7056. La CU se dibuja con líneas negras.

Este modo, forma un patrón de intensidad tipo malla que se hace más intenso conforme se avanza al centro de la celda unitaria. Al igual que en el primer modo, el campo es nulo en el dieléctrico.

### 3.2.2 Red cuadrada con cilindros circulares

El tercer modo presentado pertenece al segundo medio estudiado en modos TE. Este se grafica calculando el módulo cuadrado de la ecuación (2.9); esto es, la ecuación del campo magnético para un arreglo de cilindros ordenados en forma de red cuadrada. La figura 16, muestra uno de los modos que puede soportar el segundo medio estudiado. El valor del vector de onda de Bloch del campo magnético está entre  $\bar{\Gamma}$  y  $\bar{X}$ ; según el espacio recíproco, su valor exacto se denota en sus componentes en el eje  $x$  y el eje  $y$  en la figura 16.

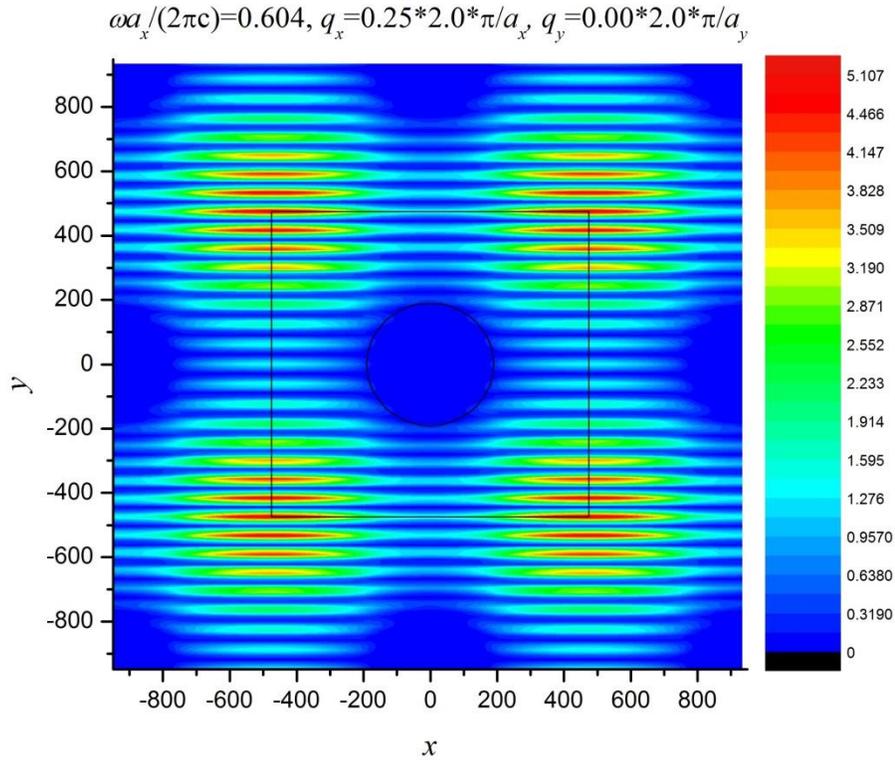


Figura 16. Módulo cuadrado del campo magnético, en unidades arbitrarias, en un corte transversal, en una red cuadrada de cilindros infinitos circulares de dieléctrico ( $\epsilon_c = 8.9$ ) dentro de vacío ( $\epsilon_e = 1.0$ ). Se considera el campo eléctrico perpendicular a los cilindros y el campo magnético paralelo; ( $H_z, E_x, E_y$ ). Los parámetros para este modo son  $\omega a_x / 2\pi c = 0.604$ ,  $q_x = 0.25 * (2\pi / a_x)$ , y  $q_y = 0.00 * (2\pi / a_y)$ . La fracción de llenado de la CU es de 0.1256. La CU se dibuja con líneas negras.

En este tercer modo, se aprecian líneas de intensidad horizontales que se hacen más intensas en las esquinas de las celdas unitarias, mientras que los cilindros circulares de dieléctrico tienen la menor intensidad de campo magnético.

El cuarto modo presentado pertenece al segundo medio estudiado en modos TM. Este se grafica calculando el módulo cuadrado de la ecuación (2.10); esto es, la ecuación del campo eléctrico para un arreglo de cilindros ordenados en forma de red cuadrada. La figura 17, muestra uno de los modos que puede soportar el segundo medio estudiado. El valor del vector de onda de Bloch del campo eléctrico está entre  $\bar{X}$  y  $\bar{M}$ ; según el espacio recíproco, su valor exacto se denota en sus componentes en el eje  $x$  y el eje  $y$  en la figura 17.

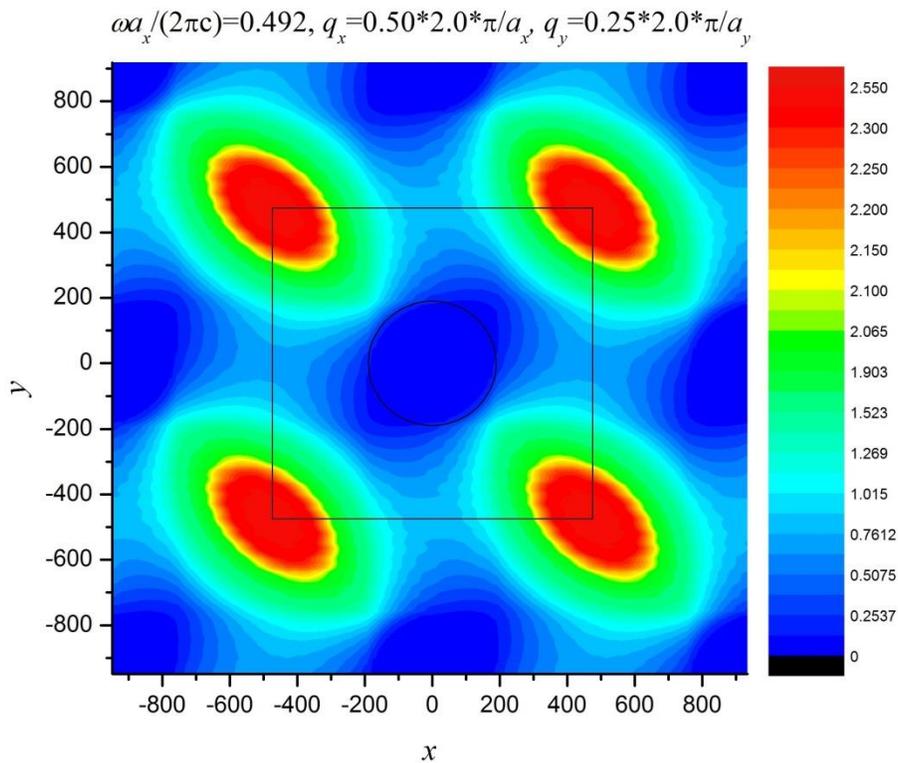


Figura 17. Módulo cuadrado del campo eléctrico, en unidades arbitrarias, en un corte transversal, en una red cuadrada de cilindros infinitos circulares de dieléctrico ( $\epsilon_c = 8.9$ ) dentro de vacío ( $\epsilon_e = 1.0$ ). Se considera el campo magnético perpendicular a los cilindros y el campo eléctrico paralelo; ( $E_z, H_x, H_y$ ). Los parámetros para este modo son  $\omega a_x / 2\pi c = 0.492, q_x = 0.50 * (2\pi / a_x)$ , y  $q_y = 0.25 * (2\pi / a_y)$ . La fracción de llenado de la CU es de 0.1256. La CU se dibuja con líneas negras.

La intensidad del campo eléctrico en este modo, forma fuertes y grandes áreas de intensidad casi uniforme de forma elíptica, dentro de elipses más grandes de intensidad considerablemente menor. Estas áreas de intensidad se ubican en las esquinas de las celdas unitarias donde hay vacío.

### **3.2.3 Red triangular con cilindros circulares**

El quinto modo presentado pertenece al tercer medio estudiado en modos TE. Este se grafica calculando el módulo cuadrado de la ecuación (2.24); esto es, la ecuación del campo magnético para un arreglo de cilindros ordenados en forma de red triangular. La figura 18, muestra uno de los modos que puede soportar el tercer medio estudiado. El valor del vector de onda de Bloch del campo magnético está entre  $\bar{\Gamma}$  y  $\bar{M}$ ; según el espacio recíproco, su valor exacto se denota en sus componentes en el eje  $x$  y el eje  $y$  en la figura 18.

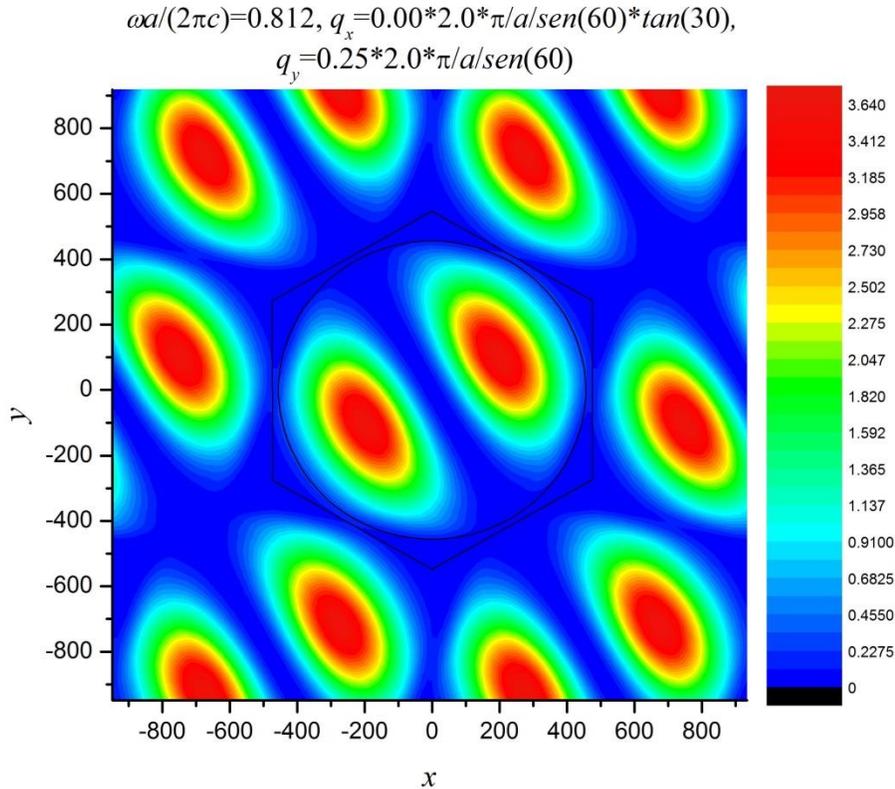


Figura 18. Módulo cuadrado del campo magnético, en unidades arbitrarias, en un corte transversal, en una red triangular de cilindros infinitos circulares de vacío ( $\epsilon_c = 1$ ) dentro de un dieléctrico ( $\epsilon_e = 13.0$ ). Se considera el campo eléctrico perpendicular a los cilindros y el campo magnético paralelo; ( $H_z, E_x, E_y$ ). Los parámetros para este modo son  $\omega a / 2\pi c = 0.812$ ,  $q_x = 0.00 * 2.0 * \pi / a / \sin(60) * \tan(30)$ , y  $q_y = 0.25 * 2.0 * \pi / a / \sin(60)$ . La fracción de llenado de la CU es de 0.8358. La CU se dibuja con líneas negras.

La intensidad del campo magnético, forma en este caso, dos áreas de fuerte intensidad en el círculo de vacío de la celda unitaria. Estas áreas de intensidad, están formadas por un área de intensidad alta, rodeada de un área de intensidad media en forma semi-elíptica.

El sexto modo presentado pertenece al tercer medio estudiado en modos TM. Este se grafica calculando el módulo cuadrado de la ecuación (2.25); esto es, la ecuación del campo eléctrico para un arreglo de cilindros ordenados en forma de red triangular. La figura 19, muestra uno de los modos que puede soportar el tercer medio estudiado. El valor del vector de onda

Bloch del campo eléctrico está entre  $\bar{\Gamma}$  y  $\bar{K}$ ; según el espacio recíproco, su valor exacto se denota en sus componentes en el eje  $x$  y el eje  $y$  en la figura 19.

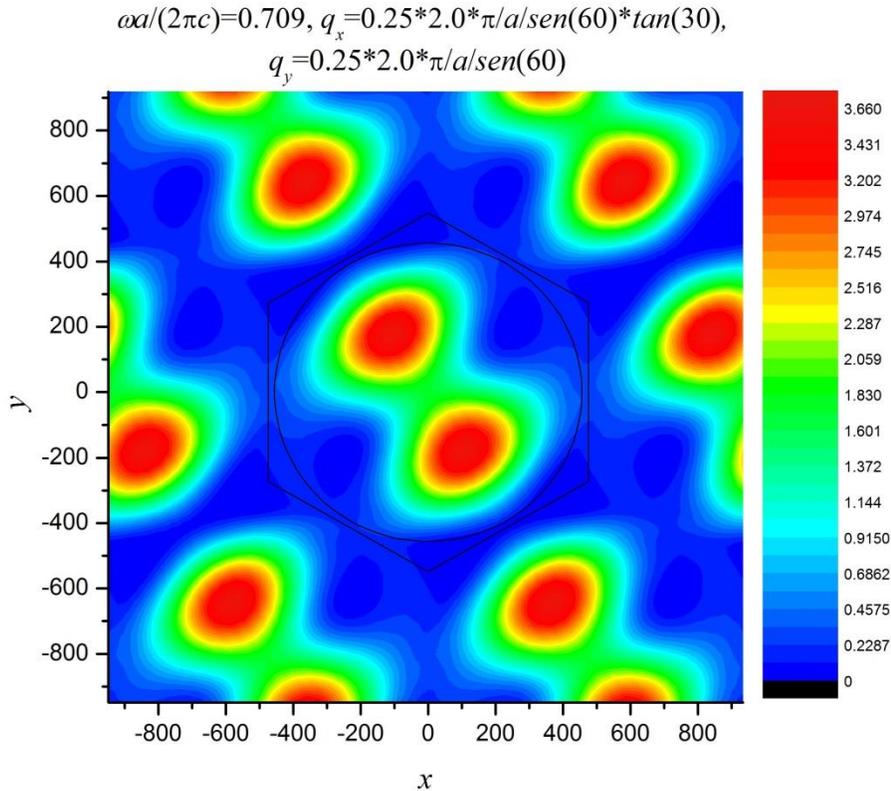


Figura 19. Módulo cuadrado del campo eléctrico, en unidades arbitrarias, en un corte transversal, en una red triangular de cilindros infinitos circulares de vacío ( $\epsilon_c = 1$ ) dentro de un dieléctrico ( $\epsilon_e = 13.0$ ). Se considera el campo magnético perpendicular a los cilindros y el campo eléctrico paralelo; ( $E_z, H_x, H_y$ ). Los parámetros para este modo son  $\omega a / 2\pi c = 0.709$ ,  $q_x = 0.25 * 2.0 * \pi / a / \sin(60) * \tan(30)$ , y  $q_y = 0.25 * 2.0 * \pi / a / \sin(60)$ . La fracción de llenado de la CU es de 0.8358. La CU se dibuja con líneas negras.

Este modo, presenta dos áreas de intensidad muy similares a las del modo anterior, pero en este caso las áreas se tocan y el eje que las une es perpendicular al anterior.

## CONCLUSIONES

Se calcularon las estructuras de bandas fotónicas de tres cristales fotónicos y se compararon los resultados obtenidos con los de las referencias [12] y [14], obteniendo buenos resultados. Se observó que todas las configuraciones presentan bandas prohibidas para las frecuencias más bajas, tanto para modos TE como TM; excepto la red cuadrada con cilindros circulares, que no presentó ninguna banda prohibida para los modos TE para las primeras frecuencias. Se graficó un modo electromagnético TE, y uno TM, para cada cristal fotónico calculando los módulos cuadrados de los campos magnético y eléctrico para la celda unitaria y sus cercanías.

Para las bandas prohibidas, se encontró que su tamaño y ubicación en el espectro son muy sensibles a pequeños cambios en la fracción de llenado y también a cambios en las constantes dieléctricas. La sección transversal de los cilindros en la CU, influye grandemente en la aparición o no de las bandas prohibidas.

En los modos presentados, se mostró que los campos pueden formar áreas bien definidas de mayor intensidad en el dieléctrico menor; en este caso vacío, así como ser prácticamente nulos en el dieléctrico mayor.

El método numérico utilizado para cilindros circulares en red cuadrada y triangular, se basó en expandir la integral de superficie de los coeficientes del inverso de la función dieléctrica, dividiendo la celda unitaria en rectángulos verticales, hasta alcanzar la convergencia en la estructura de bandas. Para alcanzar la convergencia en los modos electromagnéticos se requiere una mayor aproximación que para las bandas. El método es eficaz, siempre y cuando la aproximación sea suficiente, y puede ser utilizado para cualquier forma transversal de cilindro; forma elíptica (ver figura 1), hexagonal, triangular, bi-circular (dos círculos), etc.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Eli Yablonovitch “Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics” *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2059 (1987)
2. Eli Yablonovitch and T. J. Gmitter “Photonic Band Structure: The Face-Centered-Cubic Case” *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1950 (1989)
3. K. M. Ho, C. T. Chan, and C. M. Soukoulis “Existence of a photonic band gap in periodic dielectric structures” *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3152 (1990)
4. Plihal, M., A. Shambrook, A. A. Maradudin, and P. Sheng “Two dimensional photonic band structures” *Opt. Commun.* **80**, 199 (1991)
5. P. R. Villeneuve and M. Piché “Photonic band gaps of transverse-electric modes in two-dimensionally periodic media” *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 1296 (1991)
6. L. S. McCall and P. M. Platzman “Microwave Propagation in Two-Dimensional Dielectric Lattices” *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2017 (1991)
7. Plihal, M. and A. A. Maradudin “Photonic Band Structures of Two Dimensional Systems: The Triangular Lattice” *Phys. Rev. B* **44**, 8565 (1991)
8. R. D. Meade, K. M. Brommer, A. M. Rappe, and J. D. Joannopoulos “Electromagnetic Bloch waves at the surface of a photonic crystal” *Phys. Rev. B* **44**, 10961 (1991)
9. E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, R. D. Meade, K. D. Brommer, A. M. Rappe, and J. D. Joannopoulos “Donor and acceptor modes in photonic band structure” *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3380 (1991)
10. R. D. Meade, K. D. Brommer, A. M. Rappe, J. D. Joannopoulos “Photonic bound states in periodic dielectric materials” *Phys. Rev. B* **44**, 13772 (1991)
11. W. M. Robertson, G. Arjavalingam, R. D. Meade, K. M. Brommer, A. M. Rappe, and J. D. Joannopoulos “Measurement of Photonic Band Structure in a Two-Dimensional Periodic Dielectric Array” *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2023 (1992)
12. R. D. Meade, K. M. Brommer, A. M. Rappe, and J. D. Joannopoulos “Existence of a photonic band gap in two dimensions” *Appl. Phys. Lett.* **61**, (1992)
13. A. A. Maradudin and A. R. McGurn “Photonic Band Structure of a Truncated Two Dimensional Periodic Dielectric Medium” *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 307 (1993)
14. R. D. Meade, A. M. Rappe, K. M. Brommer, and J. D. Joannopoulos “Nature of the photonic band gap: some insights from a field analysis” *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 328 (1993)
15. W. M. Robertson, G. Arjavalingam, R. D. Meade, K. M. Brommer, A. M. Rappe, and J. D. Joannopoulos “Observation of surface photons on periodic dielectric arrays” *Opt. Lett.* **18**, 528 (1993)
16. R. D. Meade, K. M. Brommer, A. M. Rappe, and J. D. Joannopoulos and O. L. Alerhand “Accurate theoretical analysis of photonic band-gap materials” *Phys. Rev. B* **48**, 8434 (1993)
17. F. Ramos-Mendieta and P. Halevi “Surface electromagnetic waves in two-dimensional photonic crystals: Effect of the position of the surface plane” *Phys. Rev. B* **59**, 15112 (1999)
18. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. Second Edition. Mary L. Boas. Página 313
19. *Handbook of Optical Constants of Solids III*. Edward D. Palik. Páginas 760-780
20. *Photonic Crystals - Molding the Flow of Light*. Second Edition. John D. Joannopoulos, Steven G. Johnson, Joshua N. Winn, Robert D. Meade
21. [http://es.wikipedia.org/wiki/Cristal\\_fotónico](http://es.wikipedia.org/wiki/Cristal_fotónico)

## APÉNDICE I

### SERIES DE FOURIER

Una serie de Fourier, es una serie infinita que converge a una función periódica. Dicho de otra forma, una serie de Fourier es una manera de representar una función periódica como una combinación de ondas senoidales simples; es decir, esta descompone cualquier función periódica en la suma de un conjunto de funciones oscilantes simples, esto es senos y cosenos (o, equivalentemente, exponenciales complejos).

Una función es periódica si repite sus valores en intervalos regulares o periodos, entonces se cumple que

$$f(x) = f(x + a) \quad (\text{I.1})$$

donde  $a$  es el periodo. Esto se debe cumplir para toda  $x$ .

Para que una función periódica pueda representarse como una serie de Fourier, debe cumplir las condiciones de Dirichlet<sup>18</sup>:

- Debe ser absolutamente integrable sobre un periodo.
- Debe tener un número finito de extremos en cualquier intervalo dado; esto es, debe tener un número finito de máximos y mínimos en ese intervalo.
- Debe tener un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo dado; sin embargo, la discontinuidad no puede ser infinita.
- Debe ser finita.

Si se satisfacen las condiciones de Dirichlet, la serie de Fourier de una función  $f(x)$  con periodo  $a$ , se puede escribir como

$$f(x) = b_0 + 2 \sum_n b_n \cos\left(\frac{2\pi}{a} nx\right) + c_n \sin\left(\frac{2\pi}{a} nx\right) \quad (\text{I.2})$$

donde  $b_n$  y  $c_n$  son los coeficientes de la serie de Fourier de la función  $f(x)$ .

Las series de Fourier se pueden expresar en notación compleja utilizando la identidad de Euler;

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{I.3})$$

donde  $i$  es la unidad imaginaria. De esta manera, la serie de Fourier en notación compleja es

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n \exp\left(+i \frac{2\pi}{a} nx\right) \quad (\text{I.4})$$

donde los coeficientes  $f_n$  están dados por

$$f_n = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} F(x) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a} nx\right) \quad (\text{I.5})$$

Para los casos de los inversos de las constantes dieléctricas de este trabajo (red cuadrada o triangular); que son funciones periódicas en dos dimensiones, las series de Fourier de dichas funciones deben tener la forma

$$F(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_{m,n} \exp\left[+i(\vec{b}_1 m + \vec{b}_2 n) \cdot \vec{r}\right] \quad (\text{I.6})$$

donde  $f_{m,n}$  son los coeficientes,  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ , y  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$  son los vectores de la red recíproca (Ver Apéndice II).

Para este trabajo de tesis se cumple que

$$f_{m,n} = \frac{1}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \iint F(x, y) \exp\left[-i(\vec{b}_1 m + \vec{b}_2 n) \cdot \vec{r}\right] \quad (\text{I.7})$$

donde  $\vec{a}_1$  y  $\vec{a}_2$  son los vectores base del espacio real.

## APÉNDICE II

### ZONA DE BRILLOUIN

La zona de Brillouin es una celda en el espacio recíproco. El espacio recíproco (red recíproca), es la transformada de Fourier de la función de onda espacial del espacio real (red real). La importancia de la zona de Brillouin se debe a que se pueden encontrar las soluciones para los cristales fotónicos variando el vector de onda de Bloch en la primera zona de Brillouin (desde el origen, hasta cubrir medio periodo de la zona).

Para delimitar la zona de Brillouin, se deben encontrar los vectores base del espacio recíproco, estos se encuentran a partir de los vectores base del espacio real. Uno de los puntos en el espacio recíproco se designa como el origen; la primera zona de Brillouin estará centrada en ese punto (Este punto como origen no tiene una relevancia especial, ya que las características de este punto se repiten infinitamente según la periodicidad del medio en el espacio).

Los vectores base del espacio recíproco se encuentran con la ecuación

$$\vec{g}_j \cdot \vec{a}_k = 2\pi\delta_{j,k} \quad (\text{II.1})$$

donde  $\vec{a}_k$  es un vector base del espacio real, y  $\vec{g}_j$  es un vector base del espacio recíproco.  
 $j, k = 1, 2$ .

Para una red cuadrada bidimensional, los vectores base del espacio real son

$$\vec{a}_1 = a\hat{i} \quad (\text{II.2})$$

$$\vec{a}_2 = a\hat{j} \quad (\text{II.3})$$

Si los vectores  $\vec{g}_1$  y  $\vec{g}_2$  son los vectores base del espacio recíproco, de la ecuación (II.1), se calculan sus componentes desarrollando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$g_{1x}a_{1x} + g_{1y}a_{1y} = 2\pi \quad (\text{II.4})$$

$$g_{1x}a_{2x} + g_{1y}a_{2y} = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$g_{2x}a_{1x} + g_{2y}a_{1y} = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$g_{2x}a_{2x} + g_{2y}a_{2y} = 2\pi \quad (\text{II.7})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (II.4-II.7), tenemos que los vectores base del espacio recíproco para una red cuadrada bidimensional, son

$$\vec{g}_1 = \frac{2\pi}{a} \hat{i} \quad (\text{II.8})$$

$$\vec{g}_2 = \frac{2\pi}{a} \hat{j} \quad (\text{II.9})$$

Por lo tanto, la primera zona de Brillouin abarca desde  $-\frac{\pi}{a}$  hasta  $+\frac{\pi}{a}$ ; en el eje  $x$ , y de  $-\frac{\pi}{a}$  hasta  $+\frac{\pi}{a}$ ; en el eje  $y$ . La figura II.a, muestra la primera zona de Brillouin, y la variación del vector de onda de Bloch  $\vec{q}$  para la red cuadrada bidimensional.

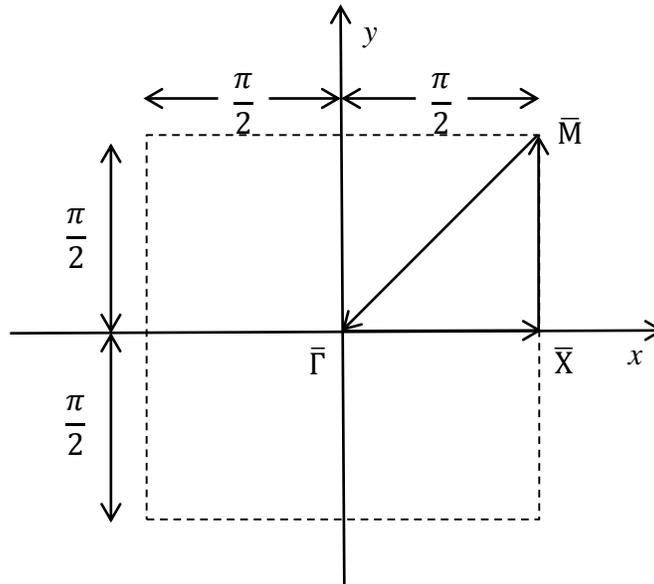


Figura II.a. Primera zona de Brillouin de una red cuadrada, mostrando la variación del vector de onda de Bloch  $\vec{q}$ , empezando en el origen  $\bar{\Gamma}$ , luego a  $\bar{X}$ , después a  $\bar{M}$ , y finalmente de regreso a  $\bar{\Gamma}$ .

Para el caso de una red triangular bidimensional, los vectores base en el espacio real son

$$\vec{a}_1 = a\hat{i} \quad (\text{II.10})$$

$$\vec{a}_2 = a \cos \varphi \hat{i} + a \sin \varphi \hat{j} \quad (\text{II.11})$$

donde  $\varphi = 60^\circ$  (para una red cuadrada  $\varphi = 90^\circ$ ).

Siguiendo el procedimiento anterior, se llega a que los vectores base del espacio recíproco son

$$\vec{g}_1 = \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (\sin \varphi \hat{i} - \cos \varphi \hat{j}) \quad (\text{II.12})$$

$$\vec{g}_2 = \frac{2\pi}{a \sin \varphi} \hat{j} \quad (\text{II.13})$$

La figura II.b muestra la primera zona de Brillouin, y la variación del vector de onda de Bloch  $\vec{q}$  para la red triangular bidimensional.

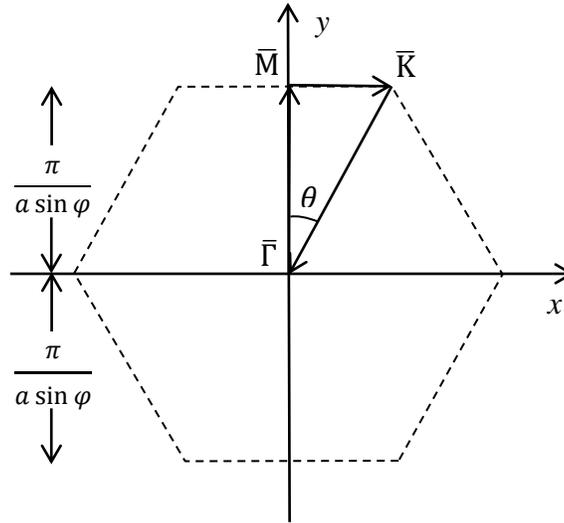


Figura II.b. Primera zona de Brillouin de una red triangular, mostrando la variación del vector de onda de Bloch  $\vec{q}$ , empezando en el origen  $\bar{\Gamma}$ , luego a  $\bar{M}$ , después a  $\bar{K}$ , y finalmente de regreso a  $\bar{\Gamma}$ .  $\varphi = 60^\circ$ .  $\theta = 30^\circ$ .

## APÉNDICE III

### LOS COEFICIENTES $[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n}$ (CORE CUADRADO)

Para resolver la ecuación (2.7), esta se descompone en una suma (en este caso de cinco términos) que abarque toda la celda unitaria; según los límites de las integrales de (2.7).

$$[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} = \frac{1}{a_x} \frac{1}{a_y} \int_{-\frac{a_x}{2}}^{\frac{a_x}{2}} \int_{-\frac{a_y}{2}}^{\frac{a_y}{2}} \frac{1}{\varepsilon_2(x,y)} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \quad (2.7)$$

La siguiente ecuación muestra la suma de cinco términos que es equivalente a (2.7).

$$\begin{aligned} [\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} = & \frac{1}{a_x} \frac{1}{a_y} \left[ \int_{-\frac{a_x}{2}}^{+\frac{a_x}{2}} \int_{-\frac{a_y}{2}}^{+\frac{w_y}{2}} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \right. \\ & + \int_{-\frac{a_x}{2}}^{-\frac{w_x}{2}} \int_{-\frac{w_y}{2}}^{+\frac{w_y}{2}} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \\ & + \int_{-\frac{w_x}{2}}^{+\frac{w_x}{2}} \int_{-\frac{w_y}{2}}^{+\frac{w_y}{2}} \frac{1}{\varepsilon_c} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \\ & + \int_{+\frac{w_x}{2}}^{+\frac{a_x}{2}} \int_{-\frac{w_y}{2}}^{+\frac{w_y}{2}} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \\ & \left. + \int_{-\frac{a_x}{2}}^{-\frac{w_x}{2}} \int_{+\frac{w_y}{2}}^{+\frac{a_y}{2}} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \right] \quad (III.1) \end{aligned}$$

Resolviendo las integrales de (III.1), se tiene

$$\begin{aligned}
 [\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} = & \frac{1}{a_x} \frac{1}{a_y} \left[ \frac{1}{\varepsilon_e} i \frac{a_x}{2\pi m} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \Big|_{-\frac{a_x}{2}}^{+\frac{a_x}{2}} i \frac{a_y}{2\pi n} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} my\right) \Big|_{-\frac{a_y}{2}}^{+\frac{w_y}{2}} \right. \\
 & + \frac{1}{\varepsilon_e} i \frac{a_x}{2\pi m} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \Big|_{-\frac{a_x}{2}}^{+\frac{w_x}{2}} i \frac{a_y}{2\pi n} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} my\right) \Big|_{-\frac{w_y}{2}}^{+\frac{w_y}{2}} \\
 & + \frac{1}{\varepsilon_c} i \frac{a_x}{2\pi m} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \Big|_{-\frac{w_x}{2}}^{+\frac{w_x}{2}} i \frac{a_y}{2\pi n} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} my\right) \Big|_{-\frac{w_y}{2}}^{+\frac{w_y}{2}} \\
 & + \frac{1}{\varepsilon_e} i \frac{a_x}{2\pi m} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \Big|_{+\frac{w_x}{2}}^{+\frac{a_x}{2}} i \frac{a_y}{2\pi n} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} my\right) \Big|_{-\frac{w_y}{2}}^{+\frac{w_y}{2}} \\
 & \left. + \frac{1}{\varepsilon_e} i \frac{a_x}{2\pi m} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \Big|_{-\frac{a_x}{2}}^{+\frac{a_x}{2}} i \frac{a_y}{2\pi n} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} my\right) \Big|_{+\frac{w_y}{2}}^{+\frac{a_y}{2}} \right]
 \end{aligned} \tag{III.2}$$

Aplicando los límites de (III.2), se obtiene

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} = & \frac{i^2}{4\pi^2 mn} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_e} \left[ \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} m \frac{a_x}{2}\right) - \exp\left(+i \frac{2\pi}{a_x} m \frac{a_x}{2}\right) \right] \left[ \exp\left(+i \frac{2\pi}{a_x} m \frac{w_y}{2}\right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \exp\left(+i \frac{2\pi}{a_y} m \frac{a_y}{2}\right) \right] \right. \\
& + \frac{1}{\varepsilon_e} \left[ \exp\left(+i \frac{2\pi}{a_x} m \frac{w_x}{2}\right) - \exp\left(+i \frac{2\pi}{a_x} m \frac{a_x}{2}\right) \right] \left[ \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} m \frac{w_y}{2}\right) \right. \\
& \left. - \exp\left(+i \frac{2\pi}{a_y} m \frac{w_y}{2}\right) \right] \\
& + \frac{1}{\varepsilon_c} \left[ \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} m \frac{w_x}{2}\right) - \exp\left(+i \frac{2\pi}{a_x} m \frac{w_x}{2}\right) \right] \left[ \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} m \frac{w_y}{2}\right) \right. \\
& \left. - \exp\left(+i \frac{2\pi}{a_y} m \frac{w_y}{2}\right) \right] \\
& + \frac{1}{\varepsilon_e} \left[ \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} m \frac{a_x}{2}\right) - \exp\left(+i \frac{2\pi}{a_x} m \frac{w_x}{2}\right) \right] \left[ \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} m \frac{w_y}{2}\right) \right. \\
& \left. - \exp\left(+i \frac{2\pi}{a_y} m \frac{w_y}{2}\right) \right] \\
& + \frac{1}{\varepsilon_e} \left[ \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} m \frac{a_x}{2}\right) - \exp\left(+i \frac{2\pi}{a_x} m \frac{a_x}{2}\right) \right] \left[ \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} m \frac{a_y}{2}\right) \right. \\
& \left. - \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} m \frac{w_y}{2}\right) \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{III.3}$$

Simplificando (III.3):

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} = & \frac{i^2}{4\pi^2 mn} \left\langle -\frac{1}{\varepsilon_e} 2i \sin(\pi m) \left[ 2i \sin\left(\pi n \frac{w_y}{a_y}\right) - 2i \sin(\pi n) \right] \right. \\
& \left. - 2i \sin\left(\pi n \frac{w_y}{a_y}\right) \left\{ \frac{1}{\varepsilon_e} \left[ 2i \sin\left(\pi m \frac{w_x}{a_x}\right) - 2i \sin(\pi m) \right] \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\varepsilon_c} 2i \sin\left(\pi m \frac{w_x}{a_x}\right) \right\} \right\rangle
\end{aligned} \tag{III.4}$$

Finalmente se llega a:

$$[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} = \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\sin(\pi m)}{\pi m} \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} + \left( \frac{1}{\varepsilon_c} - \frac{1}{\varepsilon_e} \right) \frac{\sin\left(\pi m \frac{w_x}{a_x}\right)}{\pi m} \frac{\sin\left(\pi n \frac{w_y}{a_y}\right)}{\pi n} \tag{III.5}$$

## APÉNDICE IV

### LOS COEFICIENTES $[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n}$ (CORE CIRCULAR)

Al igual que en el apéndice III, se parte de la ecuación (2.7). Esta se descompone en una suma que abarque toda la celda unitaria (Ver figura 5); según los límites de las integrales de (2.7). Se delimita al círculo en un cuadrado, para después hacer una aproximación al círculo dividiéndolo en 32 partes iguales sobre el eje  $x$ .

$$[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} = \frac{1}{a_x} \frac{1}{a_y} \int_{-\frac{a_x}{2}}^{\frac{a_x}{2}} \int_{-\frac{a_y}{2}}^{\frac{a_y}{2}} \frac{1}{\varepsilon_2(x,y)} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \quad (2.7)$$

La figura IV.a muestra en que forma fue dividida la celda unitaria. Se muestra el círculo dividido en ocho partes, aunque fue necesario dividirlo en 32 partes en el cálculo final para una buena aproximación al círculo.

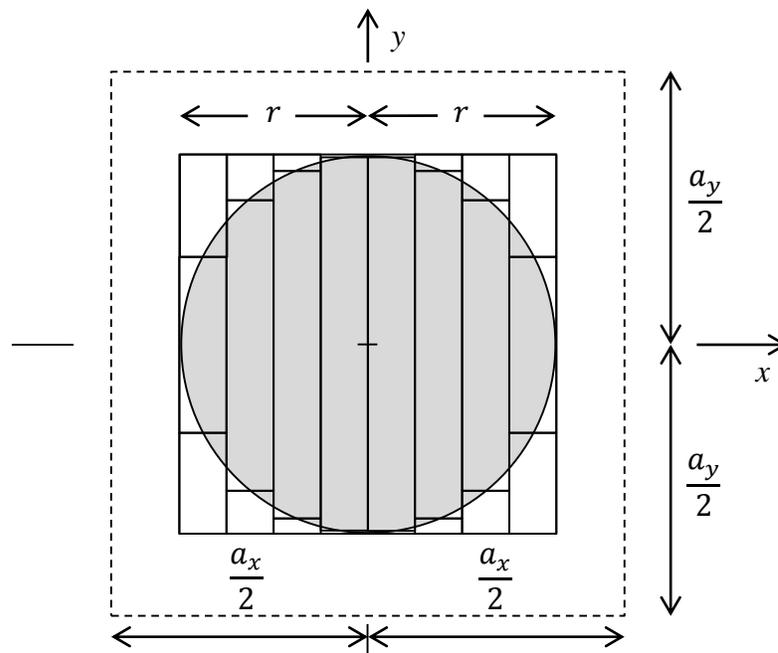


Figura IV.a. Detalle de aproximación a la CU cuadrada con *core* circular de radio  $r$ ; la cuál es contenida en el periodo  $a$  del medio inhomogéneo. La parte interna o *core* tiene una constante dieléctrica  $\epsilon_c$ ; mientras que la parte externa tiene una constante dieléctrica  $\epsilon_e$ .

La ecuación (IV.1) se separa en dos partes en las siguientes dos ecuaciones; (IV.1a) y (IV.1b), esta es una aproximación a (2.7).

$$\begin{aligned}
[\epsilon_2^{-1}]_{m,n} = & \frac{1}{a_x} \frac{1}{a_y} \left[ \int_{-\frac{a_x}{2}}^{+\frac{a_x}{2}} \int_{-\frac{a_y}{2}}^{-r} \frac{1}{\epsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \right. \\
& + \int_{-\frac{a_x}{2}}^{-r} \int_{-r}^{+r} \frac{1}{\epsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \\
& + \int_{+r}^{+\frac{a_x}{2}} \int_{-r}^{+r} \frac{1}{\epsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \\
& \left. + \int_{-\frac{a_x}{2}}^{+\frac{a_x}{2}} \int_{+r}^{+\frac{a_y}{2}} \frac{1}{\epsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \right] +
\end{aligned} \tag{IV.1a}$$

Las cuatro integrales de la ecuación (IV.1a), representan el área entre el cuadrado que delimita al círculo y los límites de la celda unitaria. La siguiente ecuación (IV.1b), representa las secciones rectangulares que conforman el círculo y el cuadrado que lo delimita.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a_x} \frac{1}{a_y} \left[ \int_{-r}^{-\frac{15}{16}r} \int_{-\frac{\sqrt{63}}{32}r}^{+\frac{\sqrt{63}}{32}r} \frac{1}{\varepsilon_c} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \right. \\
& + \int_{-r}^{-\frac{15}{16}r} \int_{+\frac{\sqrt{63}}{32}r}^{+r} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \\
& + \int_{-r}^{-\frac{15}{16}r} \int_{-r}^{-\frac{\sqrt{63}}{32}r} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \\
& + \int_{-\frac{15}{16}r}^{-\frac{14}{16}r} \int_{-\frac{\sqrt{183}}{32}r}^{+\frac{\sqrt{183}}{32}r} \frac{1}{\varepsilon_c} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \\
& + \int_{-\frac{15}{16}r}^{-\frac{14}{16}r} \int_{+\frac{\sqrt{183}}{32}r}^{+r} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \\
& + \int_{-\frac{15}{16}r}^{-\frac{14}{16}r} \int_{-r}^{-\frac{\sqrt{183}}{32}r} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \\
& + \int_{-\frac{14}{16}r}^{-\frac{13}{16}r} \int_{-\frac{\sqrt{295}}{32}r}^{+\frac{\sqrt{295}}{32}r} \frac{1}{\varepsilon_c} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \\
& + \int_{-\frac{14}{16}r}^{-\frac{13}{16}r} \int_{+\frac{\sqrt{295}}{32}r}^{+r} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy \\
& + \left. \int_{-\frac{14}{16}r}^{-\frac{13}{16}r} \int_{-r}^{-\frac{\sqrt{295}}{32}r} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_y} ny\right) dx dy + \dots \right] \tag{IV.1b}
\end{aligned}$$

En la ecuación (IV.1b), cada tres términos corresponden a una sección del círculo delimitado por el cuadrado. El primer término de cada tres corresponde al círculo, con constante dieléctrica  $\epsilon_c$ , mientras que los dos siguientes corresponden a las áreas entre el círculo y el cuadrado que lo delimita, con constante dieléctrica  $\epsilon_e$ . Por falta de espacio, solo se incluyeron las tres primeras secciones de 32 en total.

Resolviendo las integrales de (IV.1), desarrollando y simplificando, se llega a la ecuación (2.14), la expresión explícita de los coeficientes  $[\epsilon_2^{-1}]_{m,n}$  para una red cuadrada con cilindros circulares.

## APÉNDICE V

### LOS COEFICIENTES $[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n}$ (RED TRIANGULAR)

Para resolver (2.22), se descomponen las integrales en rectángulos verticales conforme a la CU (Ver figura 7) y los valores de las constantes dieléctricas  $\varepsilon_c$  y  $\varepsilon_e$ . La CU se divide en 128 partes iguales sobre el eje  $x$ . El radio de los cilindros circulares para la red triangular, se fijará en  $r = 0.48a$ ; en concordancia con los parámetros definidos por la referencia [12].

$$[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} = \frac{1}{a^2 \sin \varphi} \int_{-CUx}^{+CUx} \int_{-CUy}^{+CUy} \frac{1}{\varepsilon_2(x,y)} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a} mx\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n - \cos \varphi m)y\right] dx dy \quad (2.22)$$

La figura V.a muestra en que forma fue dividida la celda unitaria. Se muestra la celda unitaria dividida en ocho partes principales sobre el eje  $x$ , aunque en el cálculo final, fue necesario dividirla en 128 partes para una buena aproximación a la celda unitaria hexagonal con *core* circular.

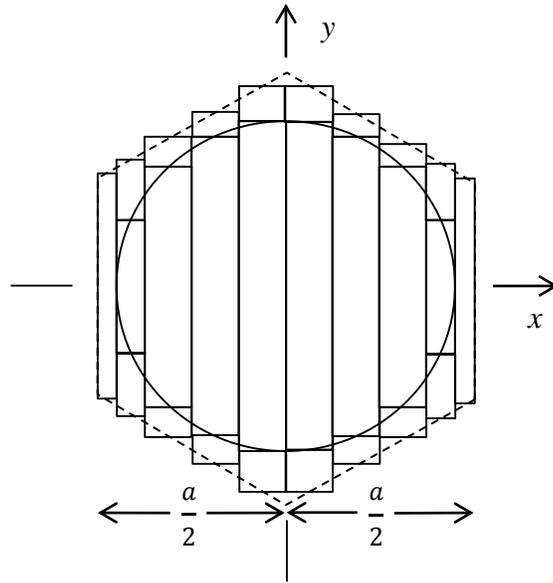


Figura V.a. Detalle de aproximación a la CU hexagonal con *core* circular de radio  $r$ ; la cuál es contenida en el periodo  $a$  del medio inhomogéneo. La parte interna o *core* tiene una constante dieléctrica  $\epsilon_c$ ; mientras que la parte externa tiene una constante dieléctrica  $\epsilon_e$ .

En la figura V.a, se aprecia como los rectángulos externos tienen una división extra, esto es debido al ajuste que se hace para coincidir con el radio del círculo.

La ecuación (V.1), se separa en cuatro partes en las siguientes cuatro ecuaciones; (V.1a), (V.1b), (V.1c), y (V.1d). Esta es una aproximación a (2.22).

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n} = \frac{1}{a^2 \sin \varphi} & \left\{ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\left[\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{256}\right) \tan \theta\right]}^{\left[-\frac{a}{2} \left(\frac{63}{64}\right) + \left[\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{256}\right) \tan \theta\right]\right]} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n \right. \\
& - \cos \varphi m)y] dx dy \\
& + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\left[\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{256}\right) \tan \theta\right]}^{\left[-\frac{a}{2} \left(\frac{62}{64}\right) + \left[\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{256}\right) \tan \theta\right]\right]} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n \right. \\
& - \cos \varphi m)y] dx dy \\
& + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\left[\left(\frac{a}{2} + \frac{5a}{256}\right) \tan \theta\right]}^{\left[-\frac{a}{2} \left(\frac{62}{64}\right) + \left[\left(\frac{a}{2} + \frac{5a}{256}\right) \tan \theta\right]\right]} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n \right. \\
& - \cos \varphi m)y] dx dy \\
& + \int_{-r}^r \int_{-\left[r^2 - \left(\frac{r}{2} + \frac{61a}{256}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}^{\left[r^2 - \left(\frac{r}{2} + \frac{61a}{256}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\varepsilon_c} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n \right. \\
& - \cos \varphi m)y] dx dy \\
& + \int_{-r}^r \int_{-\left[r^2 - \left(\frac{r}{2} + \frac{61a}{256}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}^{\left[r^2 - \left(\frac{r}{2} + \frac{61a}{256}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n \right. \\
& - \cos \varphi m)y] dx dy \left. \right\} +
\end{aligned} \tag{V.1a}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a^2 \sin \varphi} \left\{ \int_{-r}^{-\frac{a}{2}(\frac{61}{64})} \int_{-[(\frac{a}{2}+\frac{5a}{256})\tan \theta]}^{-[r^2-(\frac{r}{2}+\frac{61a}{256})^2]^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_x}mx\right) \exp\left[-i\frac{2\pi}{a \sin \varphi}(n \right. \\
& \quad \left. - \cos \varphi m)y\right] dx dy \\
& + \int_{-\frac{a}{2}(\frac{61}{64})}^{-\frac{a}{2}(\frac{60}{64})} \int_{-[r^2-(\frac{121a}{256})^2]^{\frac{1}{2}}}^{+[r^2-(\frac{121a}{256})^2]^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\varepsilon_c} \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_x}mx\right) \exp\left[-i\frac{2\pi}{a \sin \varphi}(n \right. \\
& \quad \left. - \cos \varphi m)y\right] dx dy \\
& + + \int_{-\frac{a}{2}(\frac{61}{64})}^{-\frac{a}{2}(\frac{60}{64})} \int_{+[r^2-(\frac{121a}{256})^2]^{\frac{1}{2}}}^{+[(\frac{a}{2}+\frac{7a}{256})\tan \theta]} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_x}mx\right) \exp\left[-i\frac{2\pi}{a \sin \varphi}(n \right. \\
& \quad \left. - \cos \varphi m)y\right] dx dy \\
& + \int_{-\frac{a}{2}(\frac{61}{64})}^{-\frac{a}{2}(\frac{60}{64})} \int_{-[(\frac{a}{2}+\frac{7a}{256})\tan \theta]}^{-[r^2-(\frac{121a}{256})^2]^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i\frac{2\pi}{a_x}mx\right) \exp\left[-i\frac{2\pi}{a \sin \varphi}(n \right. \\
& \quad \left. - \cos \varphi m)y\right] dx dy \left. \right\} +
\end{aligned} \tag{V.1b}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a^2 \sin \varphi} \left\{ \int_{-\frac{a}{2}(\frac{60}{64})}^{-\frac{a}{2}(\frac{59}{64})} \int_{-\left[r^2 - \left(\frac{119a}{256}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}^{\left[r^2 - \left(\frac{119a}{256}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\varepsilon_c} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n \right. \\
& \quad \left. - \cos \varphi m)y\right] dx dy \\
& + \int_{-\frac{a}{2}(\frac{60}{64})}^{-\frac{a}{2}(\frac{59}{64})} \int_{\left[r^2 - \left(\frac{119a}{256}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}^{\left[\left(\frac{a}{2} + \frac{9a}{256}\right) \tan \theta\right]} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n \right. \\
& \quad \left. - \cos \varphi m)y\right] dx dy \\
& + \int_{-\frac{a}{2}(\frac{60}{64})}^{-\frac{a}{2}(\frac{59}{64})} \int_{-\left[\left(\frac{a}{2} + \frac{9a}{256}\right) \tan \theta\right]}^{\left[r^2 - \left(\frac{119a}{256}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n \right. \\
& \quad \left. - \cos \varphi m)y\right] dx dy \\
& + \int_{-\frac{a}{2}(\frac{59}{64})}^{-\frac{a}{2}(\frac{58}{64})} \int_{-\left[r^2 - \left(\frac{117a}{256}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}^{\left[r^2 - \left(\frac{117a}{256}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\varepsilon_c} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n \right. \\
& \quad \left. - \cos \varphi m)y\right] dx dy \\
& + \int_{-\frac{a}{2}(\frac{59}{64})}^{-\frac{a}{2}(\frac{58}{64})} \int_{\left[r^2 - \left(\frac{117a}{256}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}^{\left[\left(\frac{a}{2} + \frac{11a}{256}\right) \tan \theta\right]} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n \right. \\
& \quad \left. - \cos \varphi m)y\right] dx dy \left. \right\} +
\end{aligned} \tag{V.1c}$$

$$\frac{1}{a^2 \sin \varphi} \left\{ \int_{-\frac{a}{2}(\frac{58}{64})}^{-\frac{a}{2}(\frac{58}{64})} \int_{-\left[r^2 - \left(\frac{117a}{256}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}^{-\left[r^2 - \left(\frac{117a}{256}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\varepsilon_e} \exp\left(-i \frac{2\pi}{a_x} mx\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{a \sin \varphi} (n - \cos \varphi m)y\right] dx dy + \dots \right\} \quad (\text{V.1d})$$

La suma en la ecuación (V.1), consta de 372 términos, por lo que no es práctico incluirlos todos. Se necesitó de esta aproximación para alcanzar la convergencia en los resultados.

Resolviendo las integrales de (V.1), desarrollando y simplificando, se llega a la ecuación (2.23), la expresión explícita de los coeficientes  $[\varepsilon_2^{-1}]_{m,n}$  para una red triangular con cilindros circulares.

## APÉNDICE VI

### ESTRUCTURAS DE BANDAS ( $\epsilon_e = 9.8$ )

Se considera un conjunto de cilindros infinitos de vacío ( $\epsilon_c = 1.0$ ), de sección transversal cuadrada, ordenados en forma de red cuadrada dentro de un dieléctrico ( $\epsilon_e = 9.8$ ). La periodicidad del medio está dada por  $a$ . La sección transversal de los cilindros cuadrados tiene dimensiones  $w_x = 0.84a$ , y  $w_y = 0.84a$ . La figura VI.a, muestra la estructura de bandas para los modos TE, de dicho cristal fotónico.

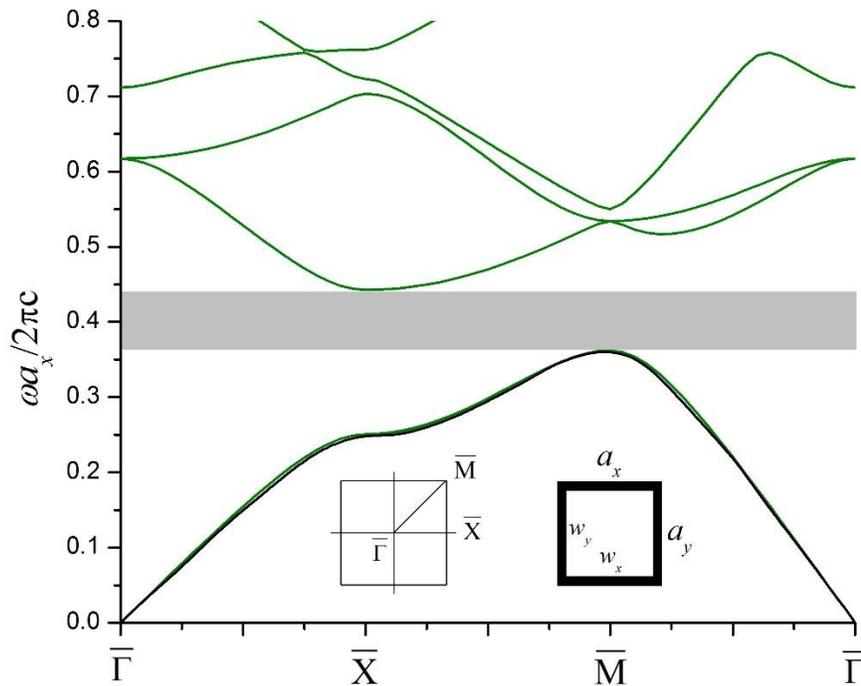


Figura VI.a. Estructura de bandas fotónicas para una red cuadrada de cilindros cuadrados de vacío ( $\epsilon_c = 1$ ), dentro de un material dieléctrico ( $\epsilon_e = 9.8$ ). Las curvas sólidas en color verde representan los modos TE, con los campos según  $(H_z, E_x, E_y)$ , mientras que las curvas negras representan los modos TE calculados en la referencia [14]. La estructura de bandas se dibuja a partir de la variación del vector de onda de Bloch en la primera zona de Brillouin.  $\bar{\Gamma}$ ,  $\bar{X}$ , y  $\bar{M}$ , son puntos en el espacio recíproco; como se muestra en el recuadro del lado izquierdo. En el recuadro derecho se muestra la CU de lados iguales  $a_x$  y  $a_y$ , la parte negra representa el dieléctrico y la blanca el vacío de dimensiones  $w_x$  por  $w_y$ . La fracción

de llenado es 0.7056. La primera banda prohibida se ilustra como un rectángulo gris.

La estructura de bandas para los modos TM se presenta en la figura VI.b.

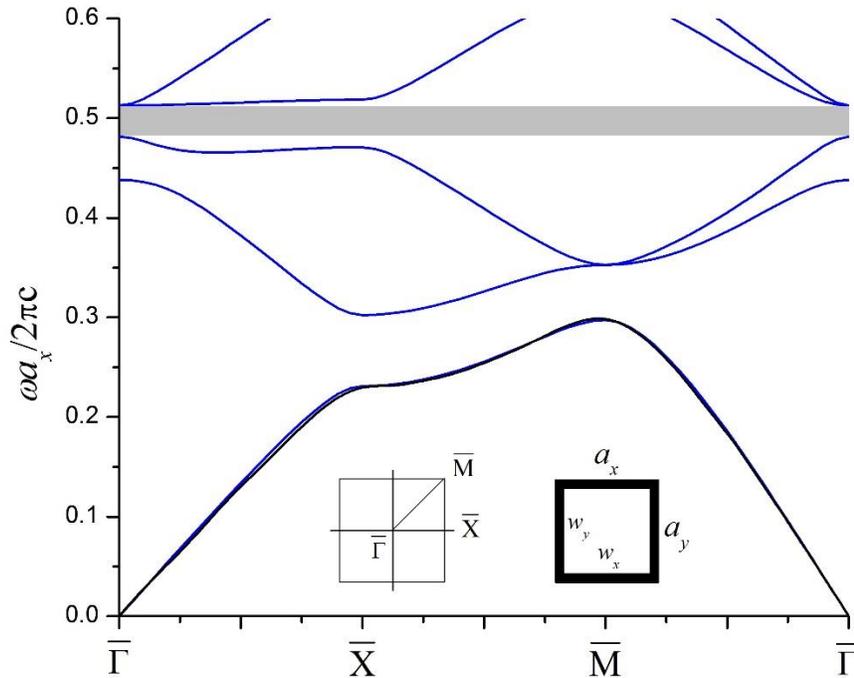


Figura VI.b. Estructura de bandas fotónicas para una red cuadrada de cilindros cuadrados de vacío ( $\epsilon_c = 1$ ), dentro de un material dieléctrico ( $\epsilon_e = 9.8$ ). Las curvas sólidas en color azul representan los modos TM, con los campos según  $(E_z, H_x, H_y)$ , mientras que las curvas negras representan los modos TM calculados en la referencia [14]. La estructura de bandas se dibuja a partir de la variación del vector de onda de Bloch en la primera zona de Brillouin.  $\bar{\Gamma}$ ,  $\bar{X}$ , y  $\bar{M}$ , son puntos en el espacio recíproco; como se muestra en el recuadro del lado izquierdo. En el recuadro derecho se muestra la CU de lados iguales  $a_x$  y  $a_y$ , la parte negra representa el dieléctrico y la blanca el vacío de dimensiones  $w_x$  por  $w_y$ . Los lados del cuadrado de dieléctrico en la CU miden  $0.84a$ . La fracción de llenado es 0.7056. La primera banda prohibida se ilustra como un rectángulo gris.

Las figuras VI.a y VI.b, muestran un excelente acuerdo entre las estructuras de bandas calculadas en este trabajo con las presentadas por la referencia [14].