UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Departamento de Matemáticas

Actividades didácticas para promover el aprendizaje de la suma vectorial con coordenadas cartesianas

Tesis que presenta:
Miryam Ramona Zepeda Cota

Para obtener el grado de:
Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Director de tesis:
M.C Manuel Alfredo Urrea Bernal

Hermosillo, Sonora a Septiembre del 2012

AGRADECIMIENTOS

Primeramente agradezco a Dios y a mis padres, Humberto Zepeda Martínez (✞) y Guadalupe Cota de Zepeda, que siempre han estado conmigo, en las buenas y en las malas, y que me han sabido guiar por el mejor de los caminos. Hoy este logro se lo debo a ellos ya que con su cariño, confianza y amor estuvieron pendientes de cada uno de mis pasos; ellos que han sido unos pilares en los que me he apoyado para llegar a lo que hoy he hecho y lo que me falta por realizar. Simplemente hoy les puedo decir gracias, ya que sin ustedes no hubiera podido lograr todo lo que hasta ahora he realizado, en especial estos últimos años a mi madre, a mi padre aun que ya no esté con migo, fue y sigue siendo una luz en mi camino, muchas gracias.

También quiero agradecer a mi esposo Francisco Ayala Villaescusa por estar con migo y apoyarme en todo momento, a mi hija Myldred Ivonne por todos los momentos de ausencia y a mis hermanas Griselda y Fernanda, con los que he compartido la mayor parte de mi vida y han sido los segundos pilares al igual que mi esposo; ellos que me han dedicado un poco de su espacio, cariño y todos los momentos que compartimos juntos tanto buenos como malos, agradables como chuscos, en fin, a ustedes también muchas gracias.

A M.C. Manuel Alfredo Urrea Bernal director de este proyecto, ya que sin él no hubiera podido llevar a cabo este gran proyecto de actividades didácticas para promover el aprendizaje de la suma vectorial con coordenadas cartesianas. De la misma forma agradezco a la Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos y a M.C. Maricela Armenta Castro por el apoyo brindado en la revisión del trabajo y de todos los consejos que fueron de gran ayuda tanto para el trabajo como para mi crecimiento personal.

Basta decir que este proyecto fue gratificante para mi, fue una experiencia muy buena que no olvidare, en especial por el trabajo con los estudiantes y compañeros con los que tuve la oportunidad de convivir. A cada uno muchas gracias.

ÍNDICE

Capítulo 3. La propuesta: Secuencia de actividades didácticas

Capítulo 4. Análisis de la implementación de la propuesta

Introducción

En Matemática Educativa se estudia la problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y para el estudio de dicha problemática se tienen diferentes estrategias de acercamiento a esos procesos. Una de las vertientes más fuertes es la investigación que se realiza sobre distintas fenomenologías, la cual puede arrojar resultados para ser considerados en otras investigaciones o para ser utilizados en el diseño de estrategias didácticas; es decir, se tiene la posibilidad de utilizar los resultados de investigación en la práctica de los docentes de matemáticas.

Respecto a la práctica docente los resultados de las investigaciones se pueden reflejar en materiales para el trabajo de los estudiantes, materiales de apoyo para los docentes y/o materiales para la capacitación y actualización de los docentes.

Este trabajo se enfoca al diseño de una secuencia de actividades orientada a apoyar el trabajo docente, con el propósito de promover el aprendizaje de la suma de vectores en estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora, dicho tema se aborda en el curso de Geometría Analítica.

Para este diseño se ha considerado como marco teórico los sistemas de representación semiótica que propone Raymond Duval, planteando situaciones en las que se ponen en juego los diferentes registros de representación, así como las correspondientes transformaciones entre ellos.

Mediante esta secuencia de actividades didácticas se pretende promover en los estudiantes el desarrollo de habilidades tales como: reconocimiento y tratamiento del objeto matemático en cada uno de los sistemas de representación, conversión del objeto de un sistema de representación a otro y capacidad de utilización y adaptación de conocimientos previos para la construcción de nuevos conocimientos.

El trabajo fue organizado para su realización en cuatro fases: revisión bibliográfica, diseño de la secuencia de actividades, puesta en escena y análisis y conclusiones. Dichas fases fueron llevadas a cabo en un periodo aproximado de dos años.

El documento se compone de cuatro capítulos y un último apartado en el que se presentan las conclusiones, mismos que se describen a continuación.

En el primer Capítulo se presenta la problemática general que da origen a este trabajo, exponiendo algunos elementos de justificación, como son los factores que influyen en la problemática del aprendizaje así como los índices de reprobación y diferentes tipos de evaluación a las que son sometidos los estudiantes que aspiran a ingresar a las carreras de Ingeniería de la Universidad de Sonora; además, se destaca la importancia de los vectores como objeto matemático, se presentan algunos resultados de investigaciones tanto de las dificultades presentadas por los estudiantes al trabajar con este objeto, así como algunas propuestas didácticas reportadas por otros investigadores. En este Capítulo también se presenta el objetivo general del trabajo.

El segundo Capítulo corresponde a las referencias teóricas y aspectos metodológicos, en él se incluyen algunos puntos de vista sobre representaciones, así como las ideas principales de la teoría de representaciones semióticas (Duval, 1999), la cual sirve de apoyo principal para el diseño de las actividades. Se describen los tipos de representaciones utilizados en el estudio de la suma vectorial, así como las características de los tratamientos y las conversiones presentes entre los distintos registros. Además de incluir la importancia de la incorporación del uso de tecnología, de la misma manera en este Capítulo se incluyen algunos aspectos metodológicos en los que se detallan las fases que se realizaron para el desarrollo del trabajo.

El Capítulo tres corresponde a la propuesta, en la que se incluyen los objetivos y los aspectos que se consideraron para el diseño de la secuencia de actividades didácticas, además se presenta la descripción de cada una de las actividades didácticas que integran la propuesta, en dicha descripción se hace énfasis en lo que se espera obtener por parte del estudiante, así como la forma en que deberá ser abordad por los estudiantes.

En el Capítulo cuatro se describe el análisis de la implementación de la propuesta, se detallan además las condiciones en las que se realizó la puesta en escena de la secuencia de actividades, con la cual se analizó la pertinencia de la propuesta y se observaron algunas dificultades de aprendizaje.

En el último apartado se presentan las conclusiones obtenidas en el trabajo, los aspectos que se contemplan en este apartado son: Dificultades en el proceso de diseño de la secuencia de actividades didácticas, dificultades que presentaron los estudiantes en las primeras actividades, logros de los objetivos planteados, experiencias en la estrategia de diseño y aplicación de la secuencia de actividades y posibles líneas de trabajo que permitan en futuros diseños o investigaciones enriquecer los resultados aquí obtenidos

Capítulo 1

Elementos de Justificación, Problemática y Objetivo

La problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en general, y en particular de temas relacionados con Geometría Analítica, se puede abordar atendiendo diversos factores y/o causas, entre los que podemos identificar los siguientes: formación didáctica de los docentes, inadecuadas propuestas didácticas, estrategias de evaluación no apropiadas, saturación de materias, falta de hábitos de estudio, problemas psicológicos, sociales y económicos, además de la propia naturaleza del conocimiento matemático que está en juego, por mencionar algunos.

En los apartados que siguen, retomaremos algunos de los elementos que acabamos de mencionar, con la finalidad de ampliarlos en términos del trabajo que aquí se presenta.

1.1 Factores que influyen en la problemática del aprendizaje de las matemáticas

Un hecho conocido en el ambiente educativo es el relacionado con la problemática del aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles, el cual se traduce en altos índices de reprobación, en particular en estudiantes del nivel medio superior y de los primeros semestres del nivel superior, este último sector de estudiantes es de nuestro interés por ser a quienes está dirigida la propuesta que se reporta en el trabajo. Las causas que pueden estar incidiendo sobre esta problemática, como ya lo mencionamos, son de diferente naturaleza, por ejemplo:

- Exceso de información en los programas de estudio, que deben ser cubiertos por los profesores en periodos demasiado cortos.
- Los métodos y estrategias de enseñanza que utilizan (son fundamentalmente centrados en el trabajo del profesor como expositor de contenidos y técnicas).

- La falta de orientación vocacional, que hace que los estudiantes no conozcan las carreras en las que se inscriben.
- Factores correlativos (Psicomotores, intelectuales y/o emocionales, entre otros).

Brito y Amado (2007), realizaron una investigación en la que se tenía el propósito de tener un juicio más preciso sobre las causas de reprobación en matemáticas que presentan los estudiantes en el nivel superior desde la perspectiva del personal docente. Para recopilar la información del profesorado, se aplicó un cuestionario el cual contenía 11 preguntas y fue dividido en tres apartados: sobre el programa de la materia, sobre las actividades de aprendizaje y enseñanza y sobre causas de reprobación. La muestra se constituyó por 56 profesores de tiempo completo y medio tiempo que en ese momento impartían cátedra en ingeniería.

A continuación se presenta el cuestionario dividido en los diferentes apartados.

1.- ¿Considera que es adecuado el número de horas por semana para cubrir todos los temas del programa, en el semestre?

2.- ¿Los temas del programa son los adecuados?

3.- ¿Los temas del programa son actualizados?

4.- Los requisitos que debe cubrir el alumno para cursar la asignatura ¿son los necesarios?

5.- ¿Cuál es, en su opinión, el horario más óptimo para impartir la asignatura?

6.- ¿Cuál es el máximo número de alumnos por grupo, que considera, se deben tener para lograr un mejor aprovechamiento?

En la Figura 1.1 se muestran los resultados correspondientes a estas primeras seis preguntas.

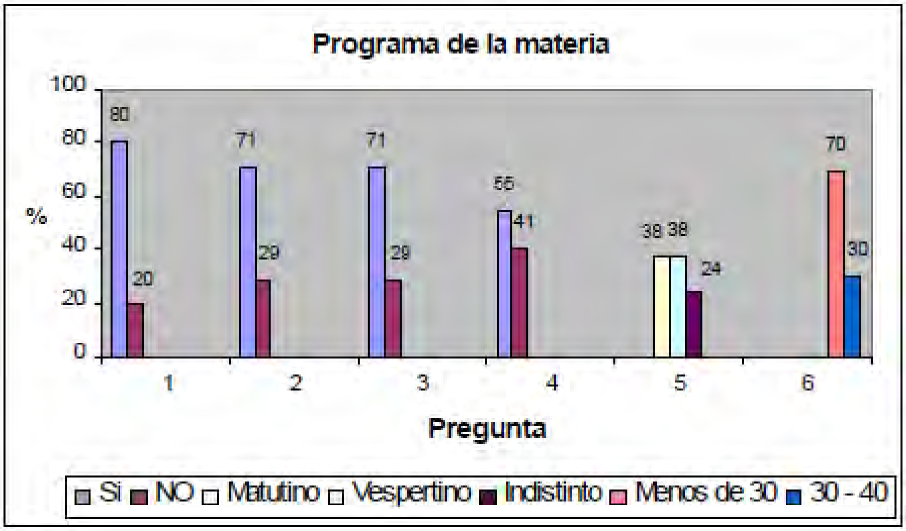


Figura 1.1

A continuación se presenta el segundo bloque de preguntas, de la siete a la diez.

7.- ¿Qué medios audiovisuales utiliza con frecuencia para lograr un mejor aprovechamiento de sus alumnos?

( ) Software ( ) acetatos ( ) presentaciones en power point

( ) Gráficas ( ) pizarrón

8.- ¿Qué estrategias de enseñanza utiliza para lograr un aprendizaje significativo en sus alumnos?

9.- ¿Qué modelos de enseñanza utiliza durante el semestre para impartir su cátedra?

10.- ¿Qué actividades extraescolares realiza para ejercitar los temas vistos en clase?

( ) Ejercicios sobre el tema ( ) Problemas de razonamiento

( ) Investigación bibliográfica

En la figura 1.2 se muestran los resultados correspondientes al segundo bloque de preguntas (de la pregunta 7 a la pregunta 9).

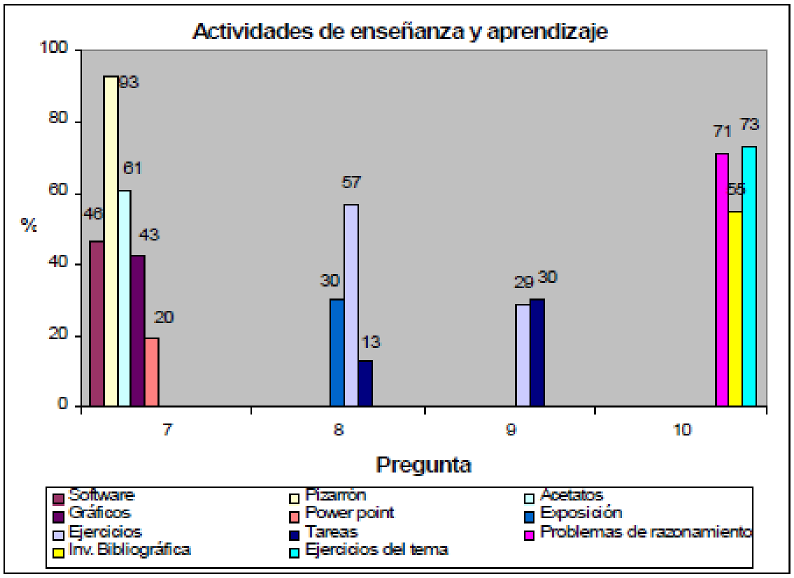


Figura 1.2

Por último se presenta el tercer bloque de preguntas.

11.- Considera que el índice de reprobación es debido a:

( ) Deficiencias en: Aritmética ____ Álgebra ____ Trigonometría ____ Geometría Analítica ____

( ) Falta de hábitos de estudios

( ) Dificultad para el razonamiento de problemas

( ) Deficiencia en la lecto – escritura

( ) Falta de habilidad matemática

( ) Problemas de conducta

( ) Problemas emocionales

( ) Falta de tiempo para estudiar por cuestiones de trabajo

( ) Problemas económicos.

Los resultados del último bloque de preguntas se presentan en la figura 1,3

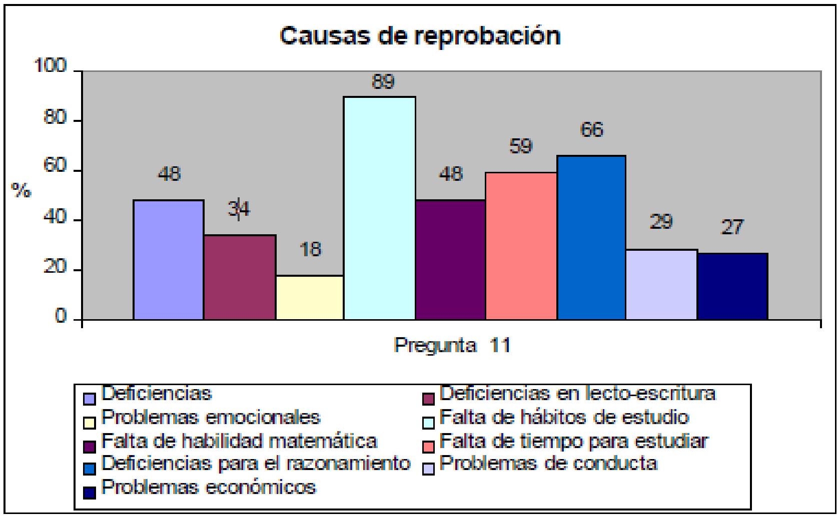


Figura 1.3

Estos resultados nos permiten tener un panorama del punto de vista de los profesores respecto de las causas que pudieran estar influyendo en los problemas de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería, por una parte se pueden identificar los recursos y estrategias que los profesores implementan y por otra los motivos por los que ellos creen que los estudiantes reprueban.

Por ejemplo, en la pregunta ocho donde se les cuestiona sobre las estrategias utilizadas para lograr un aprendizaje significativo el 57 % de los profesores recurren a los ejercicios, el 30% a la exposición y el 13 % a las tareas, lo que deja ver una estrategia muy pobre para el logro de aprendizajes significativos, ya que ponen de manifiesto una estrategia de enseñanza en la que se da prioridad a la memorización de definiciones, procedimientos, símbolos y operaciones (suma, resta división, multiplicación, etc.); los aspectos procedimentales y algorítmicos que deben aprender los estudiantes por lo regular se les presentan en clase, mediante una exposición, sin los contextos apropiados que les permitan dar significado a lo que hacen; es decir, no se toma en cuenta en la planeación de la clase la selección de los mejores contextos en los que se pude explotar la riqueza del objeto matemático que se quiere desarrollar. Lo anterior, por lo regular, crea un ambiente en el que los aspectos procedimentales y/o algorítmicos se conviertan en ejercicios rutinarios para los estudiantes, quienes por lo regular no alcanzan a construir significativamente dichas operaciones y terminan por no poder aplicarlas en situaciones concretas que se les presentan.

Los elementos señalados en los párrafos anteriores pueden ser factores que estén influyendo en nuestro sistema educativo, en el que se presentan graves deficiencias en los aprendizajes relacionados con el conocimiento matemático, ya que los estudiantes no le ven sentido a muchas de las cosas que se les pretende enseñar, y por lo tanto no desarrollan el gusto por seguir estudiando en áreas donde las matemáticas son una herramienta fundamental como por ejemplo carreras de Ingeniería o de Ciencias Exactas.

Como ejemplo de esta situación tenemos el caso de la Universidad de Sonora en la que la cantidad de aspirantes que solicitan ingresar a carreras de las área de Ciencias Sociales, Ciencias Biológicas y de la Salud y Humanidades y Bellas Artes rebasan con mucho a los aspirantes a carreras de las áreas de Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales. En la Tabla 1.1, se muestra la cantidad de aspirantes para el semestre 2011-2, por cada una de las Divisiones que tiene la Universidad de Sonora.

Número de aspirantes por división en la Universidad de Sonora 2011-2	
División	*Número de Aspirantes.*
Ciencias Biológicas y de la Salud.	4,647
Ciencias Económicas y Administrativas.	2,719
Ciencias Exactas y Naturales.	635
Ciencias Sociales.	4,193
Humanidades y Bellas Artes.	2,038
División de Ingeniería.	2,360

Tabla 1.1

En nuestra propuesta de secuencia de actividades didácticas se pretende promover el aprendizaje significativo de los estudiantes a través de la resolución de problemas en un ambiente de trabajo colaborativo, donde ellos son considerados como un elemento activo. Consideramos que este tipo de trabajo puede contribuir a que los estudiantes desarrollen habilidades que les permita comunicar, argumentar y construir estrategias para la búsqueda de soluciones a problemas matemáticos o extramatemáticos.

1.2 ENLACE, EXHCOBA e índices de reprobación en los cursos de Álgebra y Geometría Analítica

En lo que respecta a las evaluaciones, los resultados publicados por la Secretaría de Educación Pública (SEP) con respecto a la más reciente aplicación de La Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE 2011).

ENLACE es una prueba del Sistema Educativo Nacional que es diseñada y aplicada anualmente por la SEP a estudiantes que cursan tanto la educación básica como la educación media superior; en este último nivel educativo se aplica desde hace cuatro años. En el 2011 se aplicó a 912,878 estudiantes de 12,755 escuelas tanto de carácter público, federal y estatal, como en los planteles particulares con reconocimiento oficial por la SEP o por las Secretarías de Educación de las entidades federativas.

En Educación Media Superior ENLACE tiene el propósito de conocer en qué medida los estudiantes son capaces de poner en práctica las habilidades que han desarrollado, en situaciones del mundo real. ENLACE evalúa el desempeño de los estudiantes que se encuentran en el último grado de bachillerato en dos campos disciplinares: Comunicación (Comprensión Lectora) y Matemáticas.

ENLACE (2011) define el campo disciplinar:

> *La capacidad para identificar, interpretar, aplicar, sintetizar y evaluar matemáticamente su entorno, haciendo uso de su creatividad y de un*

pensamiento lógico y crítico que le permita solucionar problemas cuantitativos, con diferentes herramientas matemáticas.

Los resultados obtenidos por dicha prueba son caracterizados en distintos niveles de dominio, que son Insuficiente, Elemental, Bueno y Excelente. Para el campo disciplinar de Matemáticas, los resultados se mostrarán con base en estos niveles. Es importante considerar que cada nivel de dominio expresa que los alumnos demostraron tener los conocimientos correspondientes a ese nivel y los conocimientos de los niveles anteriores. La descripción de lo que debe realizar un estudiante de acuerdo al nivel en el que es ubicado se presenta en la tabla 1.2:

Nivel de dominio	Matemáticas (definiciones validadas)
INSUFICIENTE	Eres capaz de resolver problemas simples donde la tarea se presenta directamente. Efectúas operaciones básicas con números enteros. Ejecutas operaciones aritméticas con signos de agrupación. Encuentras equivalencias entre fracciones simples. Resuelves problemas que requieren la identificación de figuras planas y tridimensionales, así como las partes que las conforman. Localizas puntos en un plano y/o determinas sus coordenadas. Encuentras relaciones gráficas o algebraicas sencillas entre dos variables y realizas cálculos con base en ello.
ELEMENTAL	Resuelves problemas relativos a porcentajes. Realizas operaciones básicas con fracciones. Sabes utilizar fórmulas y convertir unidades. Ordenas series de números. Describes el comportamiento de sucesiones numéricas y la relación entre ellas. Enuncias en lenguaje común una expresión algebraica y viceversa. Resuelves problemas geométricos bidimensionales y tridimensionales simples que involucran distintos elementos de una figura. Construyes figuras tridimensionales a partir de otras. Resuelves sistemas de ecuaciones lineales.
BUENO	Identificas la combinación de operaciones y procedimientos necesarios para resolver un problema. Traduces una relación lineal que se presenta de manera gráfica, a una expresión algebraica y viceversa. Determinas la solución de problemas que involucran unidades físicas. Realizas cálculos complicados con razones y proporciones. Aplicas el concepto de mínimo común múltiplo o máximo común divisor para resolver situaciones de la vida real. Calculas áreas y perímetros de composiciones geométricas simples. Identificas la gráfica y la expresión de relaciones cuadráticas con una o dos variables. Realizas inferencias acerca de una variable si conoces el valor de otra con la que guarda relación directa o indirecta. Resuelves ecuaciones cuadráticas con una incógnita que solucionan problemas reales.
EXCELENTE	Realizas diferentes procedimientos matemáticos y los integras para resolver problemas de la vida real, tales como conversiones, ecuaciones, análisis de gráficas y tablas, entre otros. Efectúas conversiones y estimaciones para resolver problemas reales. Identificas la gráfica de una recta a partir de condiciones dadas. Utilizas el teorema de Pitágoras para solucionar problemas geométricos. Resuelves problemas de mayor complejidad que implican el manejo de figuras, tanto planas como tridimensionales, y las propiedades geométricas de figuras incompletas. Puedes realizar cálculos a partir de dos funciones lineales o cuadráticas que se muestran de manera independiente y mediante distintas representaciones (numéricas, textuales, gráficas, entre otras).

Tabla 1.2: Definiciones válidas para el nivel de dominio

En lo que respecta al desempeño en Matemáticas en México, sólo el 8% de los estudiantes se agrupan en los niveles de excelencia, 16.7% ese encuentra en el nivel bueno, el 40.7% de los estudiantes en los niveles elementales y el resto que corresponde al 31.1% se encuentra en el nivel considerado como insuficiente. En particular entre las entidades federativas del país, Sonora tiene un 9.7% de estudiantes en los niveles de excelencia un 17.5% en los niveles buenos, 38.1 % en el nivel elemental y por último el 34.7% en el nivel insuficiente.

Lo anterior nos da una idea de la situación en la que se encuentra nuestro sistema educativo, tanto nacional como estatal, en lo que respecta a matemáticas. Y más específicamente, nos brinda un panorama de las condiciones en las que los jóvenes ingresan a las Universidades.

La información que se puede tener de los resultados que brindan evaluaciones externas como ENLACE, se pude complementar con las evaluaciones que aplican las instituciones de nivel superior para los aspirantes a ingresar a alguna de las opciones que ofrece la institución educativa. En el caso de la Universidad de Sonora se aplica el Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos (EXHCOBA) para evaluar a todos los aspirantes a ingresar a alguna de sus licenciaturas y seleccionarlos en base a sus resultados. El examen EXHCOBA se ha venido aplicando desde 1994, cuando se utilizó por primera vez para regular el ingreso. Se declara que tiene el propósito de diagnosticar las habilidades y conocimientos básicos de los estudiantes que egresan del bachillerato y pronosticar el éxito escolar del aspirante universitario.

Básicamente el examen se elaboró con la idea de medir el grado en que el estudiante comprende los conceptos escolares básicos (primaria, secundaria y bachillerato) y maneja las habilidades que le permiten integrar nuevos conocimientos (universitarios). El examen EXHCOBA cuenta con 190 reactivos de opción múltiple, dividido en dos secciones: la primera formada por 130 en las que se evalúan seis áreas: 30 preguntas de habilidades verbales, 30 de habilidades cuantitativas, 15 de español, 15 de matemáticas, 20 de ciencias sociales y 20 de ciencias naturales; las dos primeras áreas evalúan la educación a nivel primaria, mientras que las restantes evalúan las de nivel secundaria. La segunda sección está diseñada para áreas de conocimiento especializadas y está compuesta por tres disciplinas relacionadas con la carrera elegida (20 preguntas para cada disciplina): económico-administrativo, químico-biológicas, ingeniería, físico-matemático, humanidades y ciencias sociales.

Ya que este trabajo está orientado a estudiantes del área de Ingeniería sólo serán analizados los resultados correspondientes a los aspirantes a ingresar a la carrera de Ingeniería Civil, durante el ciclo escolar 2010-2 en lo relacionado con las habilidades cuantitativas y habilidades matemáticas, ya que es la información más actualizada a la que tuvimos acceso.

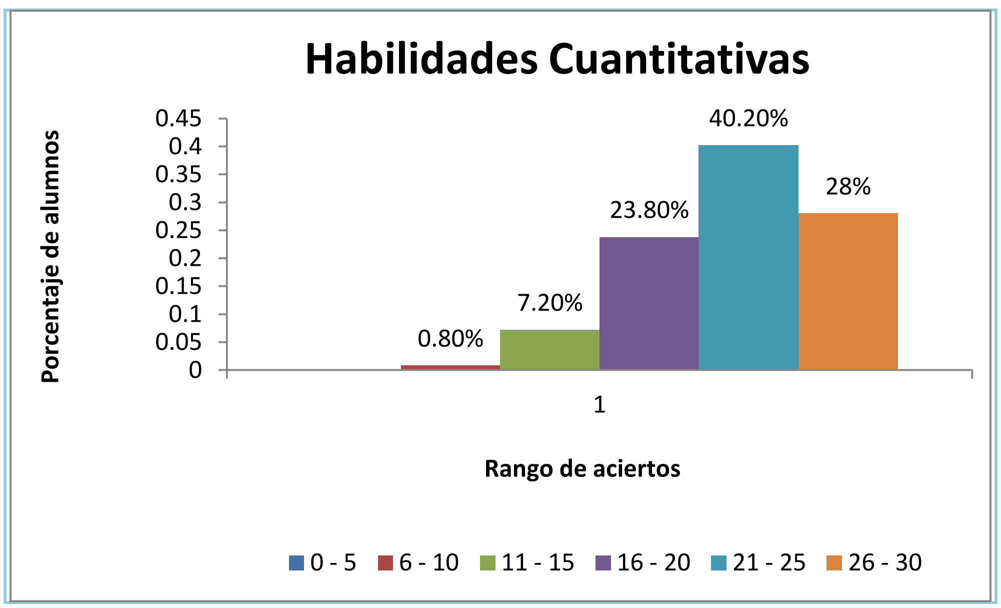


Figura 1.4

Como podemos observar en la Figura 1.4 están registrados los porcentajes de aspirantes que contestaron correctamente los reactivos correspondientes a las habilidades cuantitativas, que fueron agrupados de cinco en cinco es decir los aspirantes que tuvieron desde cero a cinco aciertos de seis a diez aciertos, de 11 a 15 aciertos etc.

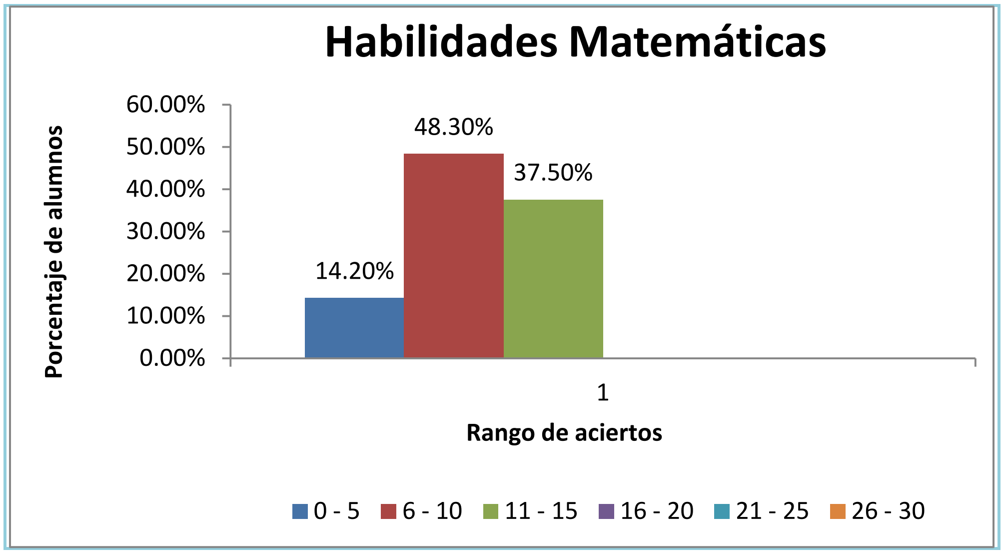


Figura 1.5

En la Figura 1.5 están registrados los porcentajes de los aspirantes que contestaron de manera correcta los reactivos correspondientes a las habilidades matemáticas, como se puede observar ninguno tuvo más de 15 aciertos.

Otra información que consideramos fundamental conocer, aunque sea de manera general, es la proporción de estudiantes que reprueban el curso de Geometría Analítica y/o Álgebra por semestre, ya que es en estas asignaturas donde aparece el tema de vectores, a continuación se presentan algunos resultados de estudiantes inscritos en la carrera de Ingeniería Civil en los que se muestran algunos índices de reprobación de los primeros dos semestres en las materias mencionadas, dicha información fue proporcionada por la Dirección de Planeación de la Universidad de Sonora.

En la figura 1.6 se presentan los índices de reprobación de los estudiantes de primer ingreso que cursan la materia de Álgebra y Geometría Analítica.

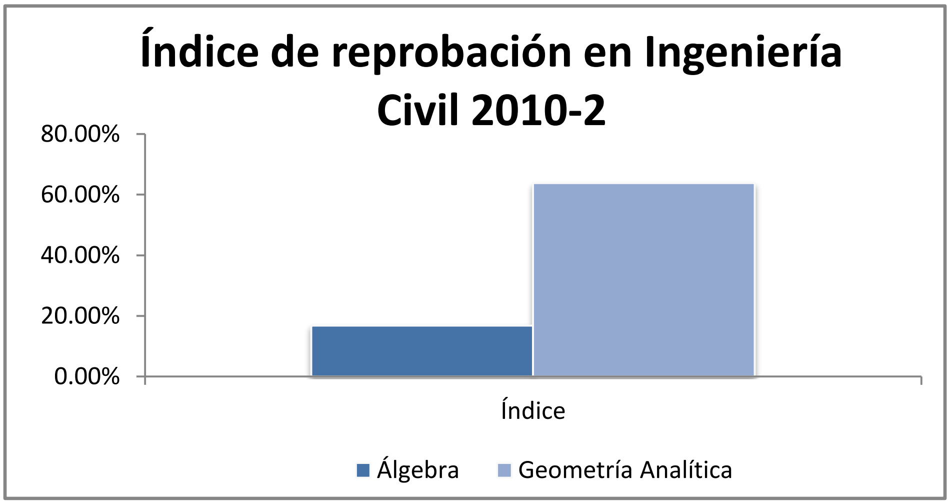


Figura 1.6: Índice de reprobación en Ingeniería

En este apartado se presentan algunos aspectos de tres tipos de evaluaciones:

La primera evaluación corresponde a la prueba ENLACE, cuyos resultados nos permiten tener un panorama general de las características que tienen los estudiantes, que ingresan al nivel superior, respecto de sus habilidades y conocimientos matemáticos, esto nos brinda elementos para el diseño y planeación de las actividades didácticas que se deberán implementar con los estudiantes que ingresan a la Universidad de Sonora. En nuestro trabajo nos permite identificar y establecer los requisitos académicos específicos mínimos que deben tener los estudiantes que trabarán en el curso de Geometría Analítica (primer semestre en algunas y segundo semestre en otras).

Otra evaluación corresponde al examen EXHCOBA cuyos resultados proporcionan información valiosa de los estudiantes, semanas antes de ingresar a la Universidad, en lo que respecta a las habilidades cuantitativas y matemáticas que ha desarrollado a lo largo de su vida académica en los niveles previos, lo cual también brinda elementos que nos permiten enriquecer el conocimiento del perfil del estudiante con el que trabajares en los cursos de los primeros semestres de la carrera de ingeniería.

En lo que respecta al último tipo de evaluación, de los cursos de Álgebra y Geometría Analítica, incluyen los índices de reprobación durante un semestre, en particular el elevado índice de reprobación en los cursos de Geometría Analítica jugó un papel fundamental en la elección de la asignatura donde se implementarían las actividades, con el propósito de promover alternativas de enseñanza que promuevan aprendizajes significativos que contribuyan a modificar los viejos modelos didácticos en los que se promueve la idea de que la matemática escolar debe tener una estructura rígida y alejada de los problemas que enfrenta la sociedad.

Se centró la atención en el tema de Vectores, entre otras cosas por ser en el curso de Geometría Analítica donde se consideran por primera vez como objetos de estudio y no sólo como una herramienta para ser aplicados en cierto tipo de situaciones, por cierto en la mayoría de los casos de manera mecánica y meramente en el contexto de cálculos aritméticos de números reales.

1.3 Dificultades en el aprendizaje de los vectores

En una revisión de la literatura de la disciplina, Matemática Educativa, encontramos algunos reportes de investigación que informan sobre algunas dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con vectores. Citamos como ejemplo los trabajos de investigación realizados por Mosquera (2005), en los que pretende que el proceso de aprendizaje en los estudiantes propicie la significación a los conceptos básicos de vector y no de una simple recepción de conocimiento.

Dicho trabajo parte de una serie de actividades que están acompañadas de una selección de lecturas (material complementario) y utilizando, en ocasiones, la computadora para la realización de dichas actividades. En su desarrollo se identificaron las dificultades siguientes:

- Las inconsistencias de los estudiantes para relacionar la representación polar para identificar vectores anclados en el origen.

- Las dificultades que se presentan cuando a los alumnos se les proporciona el sentido de los vectores pues en su mayoría lo ignoran para realizar la suma.

Soto (2005) realizó un estudio con alumnos universitarios, con el propósito de detectar dificultades de aprendizaje relacionadas con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales. Las dificultades fueron observadas y estudiadas en dos ambientes distintos:

El primer ambiente consistió en el trabajo individual a lápiz y papel. Participaron dos estudiantes, con una serie de catorce problemas sobre situaciones de vectores. El segundo en sesiones de enseñanza con un grupo de 36 estudiantes, en un ambiente computacional diseñado con el software de geometría Cabri Géomètre, en la que los estudiantes realizaron una serie de 17 actividades y éstas se trabajaron en pareja.

Las principales dificultades se observaron al:

- Expresar un vector como combinación lineal de otros dos vectores.
- Identificar vectores colineales o coplanares.
- Identificar conjuntos de vectores linealmente dependientes.
- Representar el vector cero en el registro gráfico.

En investigaciones realizadas por García y González (2006), con el propósito de promover el entendimiento conceptual de algunas cantidades físicas como fuerza, tensión y velocidad, se realizó una exploración de los problemas de orden cognitivo que los estudiantes presentan a través de la enseñanza tradicional.

En dicho trabajo se presentan resultados de una investigación acerca de la comprensión por parte del estudiante de la operación suma entre vectores, en la cual se utilizaron dos fuentes de datos para evaluar a los estudiantes, ambas con preguntas individuales, siendo la primer fuente una entrevista personal con los alumnos y la segunda una serie de ejercicios en las que se les solicita responder individualmente por escrito.

La investigación se realizó con estudiantes de ingeniería y los resultados arrojan que los estudiantes no desarrollan un aprendizaje significativo de la naturaleza vectorial. Algunos estudiantes consideran que la suma de dos desplazamientos tiene una magnitud igual a la suma de las magnitudes de los desplazamientos individuales, aún cuando los dos desplazamientos sean en distinta dirección.

Dicha investigación muestra las dificultades que fueron detectadas y caracterizadas durante el proceso de aprendizaje al implementar actividades, en un contexto extramatemático, que promueven la operación de suma de vectores. Las dificultades más importantes que se identificaron son las siguientes:

- Uso incorrecto del Teorema de Pitágoras: aparentemente muchos estudiantes no reconocen que el Teorema de Pitágoras se puede utilizar para triángulos rectángulos únicamente. Cerca del 50% de los estudiantes quienes contestaron incorrectamente tuvieron esta dificultad en el procedimiento.

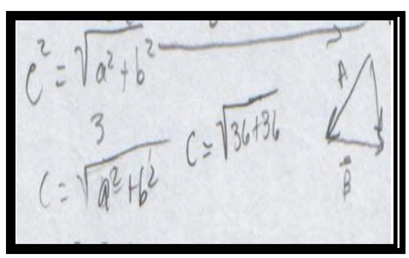


Figura 1.7

- Suma incorrecta de vectores utilizando algún método mal empleado: en el primer ejemplo se hace un mal uso del método del paralelogramo pues algunos estudiantes colocaron los puntos iniciales de los vectores cuando los sumaron gráficamente, y para obtener el vector resultante colocaron los puntos finales de ambos vectores. Cerca del 16% de los estudiantes utilizaron dicho método de manera incorrecta.

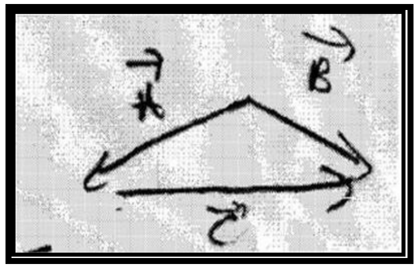


Figura 1.8

Otro ejemplo se presentó con el método del polígono. Aproximadamente el 15% de los estudiantes lo utilizaron de manera incorrecta, para representar el vector suma + conectaron el punto final del segundo vector con el punto inicial del primer vector, en esa dirección, es decir representaban el vector – ( ).

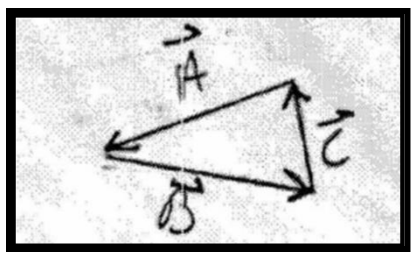


Figura 1.9

- Suma de vectores como escalares: algunos estudiantes trataron a los vectores como escalares y sumaron las magnitudes de éstos, cerca del 38% de los estudiantes contestaron de manera incorrecta.

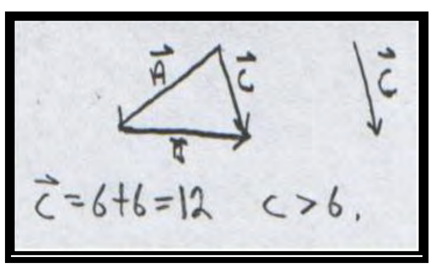


Figura 1.10

Romero (2010) realizó una investigación haciendo uso de la teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval como marco teórica para identificar las limitaciones de los registros de representación que presentaron estudiantes inscritos en el curso de Álgebra Lineal de la Universidad de Sonora, con un total de 20 alumnos de los cuales 17 pertenecían a la carrera de Licenciatura en Física y tres a la Licenciatura en Matemáticas. Se realizaron en total doce sesiones de trabajo de una hora, basadas en ambientes dinámicos creados con GeoGebra.

En dicha investigación se obtuvo como resultado que los estudiantes presentan dificultades para poder representar el vector cero, pues no puede graficar una flecha de longitud nula, y en ocasiones esto lleva a los estudiantes a negar la existencia de tal vector, o dudan de él.

Otra de las dificultades que mostraron los estudiantes, al parecer debido a las limitaciones del registro gráfico, se presentó cuando se tenía la igualdad de al menos dos vectores, pues resultó complicado para algunos de ellos poder graficar o distinguir dos vectores con la misma dirección y longitud ya que en la gráfica aparecen sobrepuestos.

Figura 1.11

Las dificultades detectadas en investigaciones previas son de gran importancia para nuestro trabajo ya que nos brinda elementos de partida para que nuestro diseño coadyuve a generar ambientes de aprendizaje que proporcione al estudiante la oportunidad de tener experiencias ricas que le permitan atender dichas dificultades sobre el tema de vectores y así enriquecer sus significados.

1.4 Propuestas didácticas sobre vectores

Como ya ha sido mencionado, varios investigadores han puesto atención en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los vectores y ofrecen propuestas didácticas para su enseñanza, en dichas investigaciones se busca una mayor profundización en la comprensión de dichos objetos matemáticos.

Por ejemplo, la propuesta para el estudio de vectores para estudiantes universitarios dada por Katz (2010) consiste en promover en el alumno la comprensión de los significados y no la memorización, para lo cual sugiere se promueva activamente la participación en clase por parte de los alumnos y considera de gran importancia el trabajo en equipo, sin embargo su técnica sigue siendo la tradicional, partiendo de una clase donde proporciona datos históricos, definiciones con su respectivo ejemplo para posteriormente aplicar un problema y algunos de éstos con posibilidad de acceder a Internet.

Katz menciona que es de gran importancia que durante las actividades el estudiante se apropie de las definiciones, de las representaciones simbólicas, que pueda enunciar claramente las propiedades y comprenda significativamente las demostraciones, estableciendo relaciones entre los diferentes conceptos y procedimientos.

Otra de las propuestas analizadas para la enseñanza de los vectores en el plano, para estudiantes universitarios fue realizada por González (2004). Se hizo con la finalidad de enseñar vectores y aplicar la suma de éstos por medio del método del paralelogramo y el triángulo como una manera de representar gráficamente a los vectores y de esta manera lograr una mayor comprensión del tema, buscando la creatividad, participación y el interés del estudiante. Dicha propuesta está dividida en tres partes:

- La primera consiste en una clase expositiva de vectores y sus características.

- La segunda parte consiste en el uso de papel milimétrico para la elaboración de las representaciones gráficas en el plano cartesiano de los vectores y sus aplicaciones en la suma.
- Y por último acceso directo a Internet con el uso de un software educativo (puramente geométrico), como forma interactiva e ilustrada para motivar a los estudiantes para una mejor comprensión del tema.

La propuesta realizada por Urrea (1990) para estudiantes universitarios con respecto a la enseñanza de la Geometría Analítica, la cual gira en torno a la resolución de problemas y su diseño se divide en dos etapas:

- Etapa uno: corresponde a la resolución de problemas entre los estudiantes y el profesor, destacando que la participación de este último es sólo de mediador, siendo los estudiantes quienes responden al problema. De esta manera se promueve la participación de los estudiantes al generar que expongan sus puntos de vista.
- Etapa dos: corresponde a la discusión de los problemas la cual es trabajada en equipos ya que esto permite que el estudiante no se distraiga y participe activamente durante las clases.

La propuesta realizada por Romero (2010) para estudiantes universitarios basada en ambientes dinámicos creados con GeoGebra, con el objetivo de construir un significado gráfico para las transformaciones lineales en la que se consideran de gran importancia tres aspectos:

- El registro de representación en el que se inicia el estudio de algún objeto matemático, ya que éste puede afectar el nivel de comprensión.
- El uso del registro gráfico permite la creación de un ambiente enriquecedor.

- Los ambientes dinámicos diseñados con GeoGebra pueden facilitar a los estudiantes la observación y comprensión de las propiedades gráficas mediante la manipulación directa en pantalla.

Otro punto importante en esta propuesta es el papel que juega el profesor, ya que su participación es sólo de mediador, permitiendo que los alumnos participen y construyan dichos significados y no sean simples receptores de información.

La información que se obtiene de este tipo de investigaciones, donde se presentan propuestas para tratar el tema de vectores, son de gran utilidad ya que nos permiten tener un referente a partir del cual podemos integrar en nuestra propuesta los aspectos que consideremos positivos de ellas; así como no incluir aquellos aspectos que consideremos que no promueven el aprendizaje colaborativo de los estudiantes y el aprendizaje significativo de los objetos matemáticos en cuestión.

1.5 Los Lineamientos Curriculares de la Universidad de Sonora y presencia curricular de los vectores

Desde el año 2002 el Colegio Académico de la Universidad de Sonora aprobó los Lineamientos Generales para el Modelo Curricular de la Institución; en dicho documento encontramos:

> *"... como propósito central sentar las bases para construir un modelo curricular donde la enseñanza se desarrolle en función al aprendizaje que realiza el alumno. De esta manera, el objetivo estratégico de las políticas académicas es la generación de un estudiante con nuevo perfil, con sentido de actualización y actitud de auto aprendizaje, capaz, competente, proclive a la interdisciplinariedad y al trabajo en equipo, responsable, consciente de sus deberes y exigentes en compartir actitudes, habilidades y conocimientos cada vez mas certificados y acreditados."*

Desde entonces, los planes y programas de la Universidad de Sonora se han venido modificando. En el caso específico de la carrera de Ingeniería Civil fue en diciembre del 2004 que se aprobó la reforma curricular vigente tratando de ajustarla a los Lineamientos. En el planteamiento que se presenta en el Plan de Estudios de Ingeniería Civil (2004), se pretende que los estudiantes:

- Alcancen un nivel sobresaliente en el dominio de los principios de las Matemáticas, hecho que les dará la oportunidad de adquirir cierta destreza para comprender un lenguaje suficiente que les permita avanzar hacia niveles superiores en el desarrollo de modelos.
- Posean una especial dedicación por el estudio de las Leyes de la Física Clásica, disciplina sobre la cual se fundamenta la mayoría de los principios sobre los cuales se desarrolla el diseño y la construcción de obras de Ingeniería.
- Desarrollen un especial talento analítico. Usualmente, en la formación de Ingenieros se utiliza una buena dosis de problemas de la más diversa índole que el estudiante tendrá que resolver.

En muchas situaciones de la vida profesional de la Ingeniería Civil se trabaja con cantidades físicas, algunas de ellas están determinadas completamente por su magnitud (medida) expresada en alguna unidad conveniente según su naturaleza. Estas cantidades se denominan escalares, por ejemplo: la longitud, el área, el volumen, la temperatura, el tiempo, la masa, etc. Sin embargo otras cantidades físicas requieren para su determinación exacta que se añada una dirección a su magnitud, dichas cantidades se llaman vectores. Hay algunos casos familiares que tienen esta característica, por ejemplo, en el contexto de la Física el desplazamiento que se definen como el cambio de posición cuya magnitud se determina por la distancia que hay entre el punto de partida o inicial y el punto de llegada o punto final, y la dirección y sentido está determinada desde el punto de partida hacia el punto de llegada; la velocidad, que se determina por la rapidez en el que un objeto recorre una distancia en un determinado tiempo desde el punto de partida hacia el punto de llegada; y, la aceleración, que se determina por la rapidez de la velocidad.

En la Ingeniería Civil, los vectores se usan, por ejemplo, para saber cómo se comportan los materiales sólidos que se utilizan en las estructuras con respecto a fuerzas externas como la tensión, la compresión, etc. Ya que los materiales sólidos responden a dichas fuerzas con una deformación incluso hasta una falla. También se utilizan para resolver problemas de Estática (de composición de fuerzas, por ejemplo las fuerzas que actúan sobre un puente o un edificio).

En Ingeniería Civil el tema de vectores aparece por primera vez en el programa de Álgebra, asignatura que se cursa durante el primer semestre, sin embargo, debido al exceso de contenidos y al poco tiempo asignado para el tema de vectores (5 horas) que resultan insuficientes, la mayoría de los maestros opta por darle prioridad o otros temas, otro aspecto importante a destacar, es el señalado por algunos profesores que imparten la materia de Álgebra, en el sentido de que el tema de vectores no se atiende a profundidad ya que es un tema que también está incluido en el programa de la materia de Geometría Analítica (que es un curso posterior del segundo semestre). En el curso de Álgebra los vectores son tratados, generalmente, dentro del tema de las matrices o para expresar soluciones de un sistema de ecuaciones lineales; cabe mencionar que dentro de dicho curso, también se estudian los números complejos y se utiliza la representación gráfica de los vectores para representar este objeto matemático. En ambos casos los vectores son utilizados como una herramienta para promover la construcción de otros objetos matemáticos y no como un objeto de estudio propio.

Dentro de la asignatura de Física (segundo semestre), se emplean para resolver cierto tipo de problemas, siendo hasta en el curso de Geometría Analítica, materia también del segundo semestre de la carrera de Ingeniería Civil, en el que el estudiante tiene la oportunidad de estudiar los vectores como objetos matemáticos.

Es por ello, que estudiaremos algunos problemas en el contexto de la mecánica con el propósito de propiciar un acercamiento intuitivo del estudiante en el manejo de la representación geométrica del vector como herramienta fundamental en la modelación y solución de los problemas propios del área.

Los lineamiento generales de la Universidad de Sonora y el plan de estudios de la carrera de Ingeniería Civil nos permiten centrar nuestra atención en aquellos aspectos que declara como fundamentales en la formación de los egresados, lo cual nos brinda elementos para el diseño de la estrategia didáctica que incluye nuestra propuesta. Por ejemplo en la propuesta se promueve el trabajo activo del estudiantes como algo fundamental para la construcción del conocimiento, el trabajo colaborativo a través del cual se espera que el estudiante desarrolle las habilidades de comunicación, argumentación, refutación, independencia, toma de decisiones, etc.

1.6 Objetivo general del trabajo

Con base en las consideraciones anteriores y tomando en cuenta que este trabajo está ubicado en la categoría de desarrollo docente, se presentan a continuación el objetivo general del trabajo de tesis.

- Diseñar una secuencia de actividades didácticas que promueva en los estudiantes la construcción de la suma de vectores en el plano cartesiano y algunas de sus propiedades.

El propósito fundamental del diseño es promover en los estudiantes de Ingeniería la coordinación entre los diferentes registros de representación de la suma de vectores. En las primeras actividades se parte de su representación polar, que es la que se presenta comúnmente en las situaciones extra matemáticas, para posteriormente pasar a la representación cartesiana y viceversa. La secuencia didáctica está enfocada en la suma de vectores.

Es importante considerar que para poder alcanzar el objetivo general de este trabajo de tesis debemos alcanzar, a su vez, los siguientes

Objetivos específicos:

- Identificar situaciones en el contexto de la ingeniería civil y/o de la física en la que la suma vectorial es la herramienta que permite resolverlas.
- Plantear en las situaciones seleccionadas una serie de preguntas cuya respuesta involucre la representación aritmética o gráfica de la suma vectorial, así como las propiedades conmutativa y asociativa.
- Integrar actividades que promuevan sistemáticamente el desarrollo del objeto matemático suma vectorial, así como las propiedades conmutativa y asociativa.

Una vez planteada la problemática que pretendemos abordar e identificado el objetivo del trabajo, en el siguiente capítulo abordaremos lo relacionado con los aspectos teóricos que tomaremos en cuenta para el diseño de la secuencia de actividades didácticas.

Capítulo 2

Referentes teóricos y aspectos metodológicos

En este capítulo se plantean los elementos teóricos en los que se fundamenta la propuesta de actividades didácticas y su implementación en el aula. En la primer sección haremos mención de algunos trabajos en los que se hace hincapié de la importancia que tienen las representaciones en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en la segunda presentamos las consideraciones teóricas específicas que se utilizan para el trabajo, en la tercera se presentan algunos aspectos sobre la ventaja de utilizar tecnología computacional en algunas de las actividades y en el último apartado se presentan las consideraciones metodológicas.

2.1 Antecedentes teóricos

Muchos investigadores han puesto su interés en el uso de las representaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje, como herramienta importante en el proceso de comprensión de los contenidos matemáticos.

Dörfler (1991) explica los procesos de abstracción, generalización y simbolización (representación) que intervienen en la formación de los conceptos matemáticos de la siguiente manera: El punto de partida es una acción o un "sistema de acciones" que pueden ser materiales (realizar una acción) imaginadas (imaginarse mentalmente la acción) o simbólicas (pensar mentalmente con palabras que tenemos que realizar la acción). El objeto y el significado de éste están determinados por la atención que las personas ponen sobre determinadas relaciones entre los elementos que intervienen en las acciones.

En las representaciones hay cierta regularidad cuando las acciones son repetidas, estas regularidades son conocidas como "invariantes de las acciones", los invariantes necesitan un sistema de símbolos para poder ser representados, estos símbolos sólo sirven para representar o describir los elementos de la acción. Dicho proceso cuando encuentra relaciones invariantes y las describe simbólicamente recibe el nombre de "proceso de abstracción constructiva". Esto quiere decir que determinadas propiedades y relaciones son señaladas y la atención se enfoca sobre ellas. Por los cual gana un cierto grado de independencia respecto de los objetos, la abstracción contractiva produce un resultado que aparece a partir de la acción y que gana sentido y existencia a partir de ella.

En la mayoría de los casos, los elementos de las acciones pueden ser sustituidos por otros elementos sin que esto afecte los sistemas de acciones ni tampoco su descripción simbólica, este hecho establece que los símbolos que son utilizados para representar los invariantes de las acciones tengan un referente cada vez más amplio. Este proceso recibe el nombre de "generalización extensiva". La sustitución inicial de los elementos de la acción se hace por elementos muy parecidos, pero posteriormente los objetos pueden ser sustituidos por otros con poco parecido con los de la situación inicial, es decir presentan la propiedad de poder ser sustituidos por objetos diferentes.

Kaput (1992): *"considero la <<representación>> como la <<representación>> de una experiencia por otra".* Considera que la capacidad que tienen las personas de trabajar con procesos y objetos se basa en la interacción de dos fuentes de organización de su mundo de experiencias:

1. Las estructuras mentales con las que organiza su mundo de experiencia.
2. Su habilidad para utilizar medios materiales con los que organiza su mundo de experiencia.

Kaput considera que el mundo de experiencias de las personas está dividido en dos: las experiencias materiales que son observables y las experiencias mentales que son hipotéticas, pero a su vez éstas son inseparables por lo que interactúan en conjunto en los proceso de representación. Tal como se muestra en la Figura 2.1

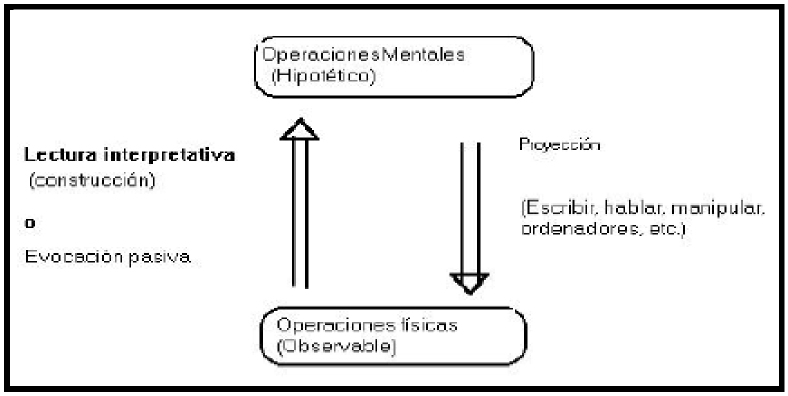


Figura 2.1

Por su parte Tall (1996) explica el papel de la visualización y la representación como herramientas mediadoras en el proceso de abstracción y en los procesos cognitivos movilizados por los objetos matemáticos, para lo cual desarrolla los tres tipos de sistemas de representaciones propuestos por Bruner adaptándolas en cuatro de la manera siguiente:

1. *Representaciones enactivas:* son acciones humanas que dan la sensación de cambio.
2. *Representaciones numéricas y simbólicas:* son representaciones que pueden ser manipuladas manualmente o con computadora.
3. *Representaciones visuales:* son las que pueden ser producidas manualmente de manera aproximada o más precisamente, con ordenadores dinámicos.
4. *Representaciones formales:* son representaciones que dependen de definiciones y pruebas.

Tall consideró que las representaciones propuestas por Bruner son al mismo tiempo visuales y simbólicas por lo cual el amplió la clasificación con una nueva categoría: *"Una combinación de 2 y 3 conectando las representaciones simbólicas y gráficas"*, Tall considera que las representaciones tienen un gran poder para comprimir información.

Castro (1997) señala:

> *"Dado que los conceptos son puramente mentales y no hay forma de observarlos directamente, es necesario un medio visible que permita el acceso a los productos de la mente. Las representaciones son un medio visible que está conectado a una idea, que es su significado".*

Como la característica de las ideas es ser invisibles, se hace necesario un registro que permita la comunicación de tal manera que esto nos permita interactuar con las demás personas y enriquecer el significado inicial que se tenía.

Cox (1999) clasifica a las representaciones en dos tipos: representaciones privadas y representaciones públicas (para comunicación con otros). Según él las representaciones privadas son menos ricas semánticamente, dispersas y sólo parcialmente externalizadas. En contraste, las representaciones públicas se construyen a través de procesos de cognición compartida que implican cambios entre participantes. Es decir, en la construcción se involucran las interacciones entre representaciones internas y externas de los individuos enriqueciendo el significado. De esta forma las representaciones públicas en comparación con las de carácter privado son enriquecidas semánticamente, mejor conformadas y más convencionales.

Romero (2000) establece que es por medio de las actividades asociadas a los sistemas de representación que se consigue la comprensión de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes.

> *"Se ha producido comprensión por parte de un sujeto cuando éste manifieste que ha enriquecido sus redes internas de conocimiento, este enriquecimiento se manifiesta a través de los sistemas de representación y mediante las actividades asociadas a los mismos".*

Desde esta perspectiva, es importante que los estudiantes logren relacionar o coordinar diferentes representaciones. Por lo que es importante considerar que el contenido de una representación nunca definirá completamente al objeto representado.

Con relación a las múltiples representaciones Keller y Hirsch (1998), mencionan algunos de sus beneficios potenciales:

1. Proporcionar múltiples ideas de un concepto.
2. Atención selectiva y de énfasis en diferentes aspectos de conceptos complejos.
3. Facilita la vinculación de las representaciones cognitivas.

Los puntos de vista que se mencionaron con anterioridad reconocen la importancia de las representaciones en los procesos de enseñanza de las matemáticas, y consideran a las representaciones como una herramienta que permite en cierta forma conocer los procesos de conceptualización de los estudiantes. Se menciona que en cierta forma se asume que existe una interacción entre las representaciones semióticas y las mentales (internas), pero que no necesariamente las representaciones semióticas son manifestaciones de las representaciones mentales de un individuo, aunque nos pueden dar una idea de lo que ha representado internamente el individuo.

2.2 Consideraciones teóricas

Para el desarrollo de este trabajo asumiremos como referente teórico la teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval (1999) por la importancia que le da al manejo de distintos registros de representación y a la relación que existe entre el aprendizaje y el uso de dichos registros de representación, pues los considera fundamentales para la comprensión de los objetos matemáticos. Otro aspecto que es considerado por Duval (1997) es: "*no hay noesis sin semiosis, es decir, es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad de la noesis*".

Es importante resaltar que según Duval, el uso o manejo de diferentes registros de representación semiótica de un mismo objeto aumenta la comprensión de las personas, es importante que en este proceso se pueda diferenciar lo que es la semiosis (aprehensión o producción de una representación) de la noesis (aprehensión conceptual de un objeto). Por lo que es importante reconocer por un lado, que la aprehensión de los objetos matemáticos es una aprehensión conceptual y por otro lado, no puede haber una conceptualización del objeto matemático sin la aprehensión primeramente de las representaciones semióticas.

2.2.1 Registros de representación semióticas

Duval (1998) define a las representaciones como:

> *"Producciones construidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema semiótico que tiene sus propias limitaciones de significancia y funcionamiento".*

Duval señala que las representaciones semióticas están asociadas a sistemas semióticos, los cuales no necesariamente cumplen sólo una función de comunicación, sino que además es la forma que tenemos de acceder y adquirir conocimiento. A su vez sostiene que un sistema semiótico es un registro de representación semiótica si permite que se cumplan tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis las cuales son:

1. ***Formación***: tiene el propósito de identificar y reconocer las representaciones de algún objeto en un sistema determinado. Debe cumplir con unas reglas de conformidad, por razones de comunicación y transformación de representaciones. Estas reglas permiten identificar una representación como un elemento de un sistema semiótico determinado.

2. ***Tratamiento:*** es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada. La función que cumple dentro del sistema semiótico está asociado a la ganancia de información.
3. ***Conversión:*** es la transformación de la representación en una representación de otro registro conservando una parte o bien la totalidad del contenido de la representación, pero al mismo tiempo da otra significación al objeto representado. Esta condición hace que la conversión sea una transformación externa al registro de partida.

Duval señala que es muy importante no confundir el objeto con sus distintas representaciones porque con el paso del tiempo puede llegar a convertirse en un obstáculo cognitivo.

El saber diferenciar entre el objeto y sus diferentes representaciones es una parte importante para el aprendizaje ya que las representaciones son fundamentales para la actividad cognitiva del pensamiento y para fines de comunicación.

Los procesos de la semiosis (aprehensión o producción de una representación) y de la noesis (aprehensión o construcción conceptual de un objeto) son indispensables. Ya que no puede haber conceptualización del objeto matemático sin la aprehensión de las representaciones semióticas.

Los objetos matemáticos tienen la peculiaridad de poder ser representados en distintas formas de representación semiótica, como es el caso de los vectores, éstos se pueden representar en forma: gráfica, algebraica, numérica, o bien en lengua natural en forma de enunciado.

Duval menciona que el movilizarse entre varios registros facilita la distinción entre los objetos matemáticos y sus representaciones. Además considera el papel de las representaciones semióticas como de gran importancia para el aprendizaje de las matemáticas.

Los registros utilizados generalmente para representar los objetos matemáticos que intervienen en el tema de vectores son: el registro en lenguaje natural, el registro algebraico, el registro numérico y el registro gráfico. En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos.

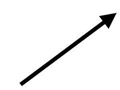
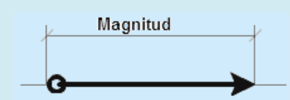
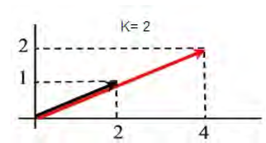
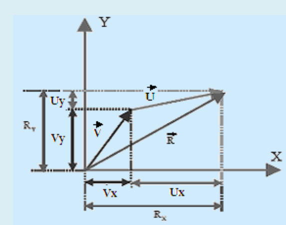
Objeto que puede ser representado	**Representaciones**			
	Registro en Lenguaje Natural	**Registro Algebraico**	**Registro Numérico**	**Registro Gráfico**
Vector	Un vector es un objeto con magnitud, dirección y sentido		(2,1)	
Magnitud	La magnitud de un vector es la medida de su longitud	| |	=	
Producto de un vector por un escalar	El producto de un vector por un escalar es el vector que se obtiene de multiplicar el escalar por cada una de las componentes del vector	k = *k* *(k*	Con k=2, =2 y =1 k =(2(2),2(1)) k =(4,2)	
Suma de vectores	La suma de vectores es el vector que se obtiene de sumar las componentes respectivas de los vectores	= =( )	***Con:*** **=1 y =2** **=2 y =2** **=(1+2,2+2)** **=(3,4)**	

Tabla 2.1: Representación de objetos matemáticos en distintos registro

De las tres actividades cognitivas la *formación* de las representaciones semióticas consiste en seleccionar un conjunto de signos dentro de un sistema semiótico de acuerdo con las posibilidades de representación del propio registro, para que representen las características propias del objeto. De esta manera la representación construida reemplaza la imagen del objeto al hacerla presente cada vez que se necesite.

Se forman representaciones semióticas cuando se asignan nombres a los objetos, cuando se catalogan relaciones o propiedades, Duval (1993) menciona también que representaciones primitivas se pueden articular para formar representaciones más complejas como frases, imágenes, esquemas, tablas, etc. Un ejemplo de la formación de una representación se muestra en la Figura 3.2

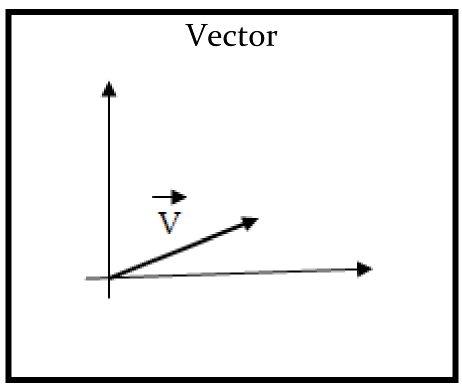


Figura 2.2

Con respecto a las actividades cognitivas, por ejemplo, en el *tratamiento,* hay cambios que dependen del registro que se esté utilizando, por lo que los tratamientos son de naturaleza distinta, de la misma manera el registro seleccionado puede influir en la realización del tratamiento haciéndolo más o menos complejo.

En el caso de la suma de dos vectores, cuando el tratamiento se realiza en el registro gráfico (método del polígono), lo que se hace es trasladar el punto inicial de uno de los vectores sobre el punto final del otro y el vector resultante se obtiene trazando el vector que va desde el punto inicial del primer vector hasta el punto final del segundo, mientras que la suma algebraica consiste en sumar las componentes correspondientes de cada vector obteniendo así el vector resultante. En la Tabla 2.2 podemos observar, en la columna de la derecha, el tratamiento que se hace en tres registros de representación al realizar la suma de dos vectores.

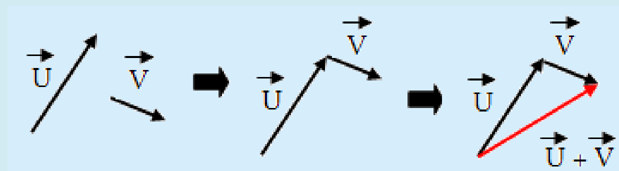
Tipo de registro	Tratamiento
Registro Gráfico	
Registro Algebraico	$\vec{U}=(U_1,U_2)$ $\vec{V}=(V_1,V_2)$ $\vec{U}+\vec{V}=[(U_1,U_2)+(V_1,V_2)]$ $\vec{U}+\vec{V}=(U_1+V_1,U_2+V_2)$
Registro Numérico	$\vec{U}=(4,6)$ $\vec{V}=(2,4)$ $\vec{U}+\vec{V}=(4+2,6+4)$ $\vec{U}+\vec{V}=(6,10)$

Tabla 2.2: Tratamiento sobre la suma de vectores

Cuando se lleva a cabo la operación de tratamiento sobre una representación, se le transforma en otra representación, que está construida utilizando el mismo sistema semiótico. La operación de tratamiento por lo general se realiza cuando se quiere dar respuesta a una pregunta, solucionar un problema, por ejemplo al calcular tratamos de manera interna representaciones semióticas construidas en el registro de la escritura numérica, entre otras. También está presente el tratamiento cuando se transforma una expresión lingüística en otra.

Cuando se lleva a cabo un tratamiento en una representación semiótica se aplican sobre ella determinadas reglas, la aplicación de estas reglas hace que la nueva representación aunque construida en el mismo registro que la representación de partida brinda nuevas posibilidades creativas. En el siguiente ejemplo se observan los tratamientos que se realizan cuando se calcula la magnitud de un vector, dichos tratamientos fueron realizados en el registro numérico.

Las coordenadas rectangulares de un vector resultante son:
$X = 4.59$ Km. y $Y = 1.5$ Km. *¿Cuál es la magnitud de este vector?*
Para poder calcular la magnitud del vector hacemos uso del teorema de Pitágoras, pues tenemos un triángulo rectángulo y conocemos el tamaño de sus catetos, entonces:

$| \quad |^2 = a^2 + b^2$

$| \quad |^2 = (4.59)^2 + (1.50)^2$

$| \quad ^2 = 21.06 + 2.25$

$| = 23.31$ por lo tanto $| \quad | = 4.48$

Entonces de lo anterior tenemos que la magnitud del vector resultante es de 4.48 Km.

De las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis, con frecuencia la menos atendida en el proceso de enseñanza es la *conversión* ya que se considera automática desde el momento en que se pueden formar representaciones en diferentes registros; sin embargo, este acción requiere de una coordinación interna de los diferentes sistemas de representación, que ha de ser construida por el estudiante, sin que dicha coordinación de representaciones diferentes le signifiquen objetos diferentes.

Duval menciona que la conversión de las representaciones semióticas forma la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la mayoría de los estudiantes. Entre algunos aspectos que dificultan la conversión se menciona la comprensión de un contenido restringido algunas veces a la representación en que se aprendió, la falta de coordinación entre los registros, o el desconocimiento de alguno de los dos registros de representación.

Vale la pena mencionar que no existen reglas de conversión que permitan hacer el paso de un registro a otro, por lo cual puede resultar difícil su realización. Duval menciona que:

> *"La comprensión de algo, sea un texto o una imagen, moviliza ya sea actividades de conversión y de formación, o bien las tres actividades cognitivas"* (1999).

Sin embargo, Duval (1999) afirma que en la enseñanza generalmente se favorece el trabajo relacionado solamente con los tratamientos dejando de lado los procesos que implican la conversión.

Además la conversión involucra una buena comprensión del objeto en estudio ya que en muchos de los casos la representación de registros diferentes no presenta necesariamente los mismos aspectos de un mismo contenido. Consideramos también que el poder estar cambiando de un registro a otro permite la construcción de un mejor conocimiento pues se ve expresado de diferentes maneras un mismo objeto; como lo menciona Duval.

> *"La conversión sería el resultado de la comprensión conceptual y cualquier problema con ésta sería indicativo de conceptos erróneos".*

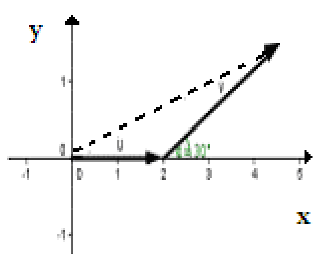
Duval considera que lo primero que importa para la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos.

A continuación, en el siguiente recuadro, se muestra un ejemplo en el que el estudiante requiere realizar una conversión para resolver la situación planteada, en dicha situación la información se proporciona en el registro de la lengua natural, dicha conversión puede hacerse a diferentes registros de representación, por ejemplo alguien pude optar por transformar la información hacia el registro gráfico y otro puede transformarla hacia el registro numérico. En ambos casos puede ser que el sujeto esté buscando tener una mejor interpretación de la información o bien diseñar una estrategias para resolver el problema. Además, es posible que una vez que se hace la primera conversión, por ejemplo al registro gráfico, se tenga la necesidad de trasladarse a otro tipo de registro como el numérico para realizar los cálculos correspondientes para resolver el problema planteado.

Una constructora está reparando la carretera Bahía de Kino-Hermosillo y la persona encargada de supervisar la obra debe visitar dos puntos de la carretera para supervisar los avances. La base de operaciones está en Bahía de Kino, que es el punto de donde sale a hacer el recorrido, el supervisor debe realizar dos desplazamientos: el primero es de 2 Km. hacia el este y el segundo de 3 Km. con una dirección de 30° EN.

1. **Encontrar la magnitud del desplazamiento total realizado por el supervisor.**

Opción 1



Opción 2

Segundo desplazamiento

Función coseno para determinar *x*:

=

$x = 3$ ( ), $x = 3\,(0.87)$

$x = 2.61$

Función seno para determinar *y*:

=

$y = 3$ (, $y = 3(0.5)$

$y = 1.5$

Para calcular la magnitud del desplazamiento:

magnitud del desplazamiento total = 4.85 Km

En particular la conversión del enunciado de un problema en una representación gráfica, puede facilitar una mejor retroalimentación de la información en los estudiantes, además una de las características de esta representación es que permite generar estrategias para buscar resolver la situación a partir de la información que se proporciona.

2.2.2 Ventajas de tener varios registros de representación

El uso de varios registros de representación parece característico del pensamiento humano que comparado con la inteligencia animal y la inteligencia artificial, estos hacen sólo uso de un sistema de representación para su funcionamiento.

Se plantean tres razones para el uso de distintos registros de representación en el funcionamiento del pensamiento humano:

1. ***Los costos de tratamiento:*** esta primera razón está relacionada con la economía de tratamiento, es decir, el que existan diferentes registros brinda la posibilidad de poder usar un registro en lugar de otro, con la intención de que los tratamientos que se realicen en dicho registro seleccionado sea más poderosos y más económicos, por ejemplo, cuando tiene que realizarse una suma de vectores resulta más económico realizar los tratamientos en el registro en coordenadas cartesianas que en el registro en coordenadas polares.
2. ***Las limitaciones representativas específicas de cada registro:*** esta razón tiene que ver con la complementariedad de los registros, es decir, dependerán del registro seleccionado los elementos significativos o información del objeto, Duval lo menciona así: *"toda representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que ella representa"*. Por ejemplo, puede resultar más enriquecedor y brinda posibilidades en la búsqueda de estrategias el considerar la suma de vectores en una representación gráfica que proporcionadas en lenguaje natural.
3. ***La coordinación necesaria de una diferenciación entre representante y representado:*** es decir, para que una representación funcione verdaderamente como una representación, es necesario que no se confunda

el objeto con su representación, por lo que es importante que se cumplan dos condiciones; que existan al menos dos sistemas semióticos diferentes para la representación del objeto y que los estudiantes sean capaces de convertir una representación de un sistema en forma rápida y espontánea, lo que Duval reconoce como coordinación entre registros de representación.

Esta última razón no se considera relevante por otros porque parte de una hipótesis "*Si se selecciona bien el registro de representación, sus representaciones son suficientes para permitir la comprensión del contenido conceptual representado*" por lo que la conversión no debiera de provocar dificultades, pero hay que reconocer que puede ser válido para aquellos que tengan un buen manejo de la disciplina, pero no para personas que se encuentren en un proceso de aprendizaje. Por lo que bajo esta hipótesis no se permite reconocer que la falta de conversiones puede ser causa importante de dificultades o fracasos.

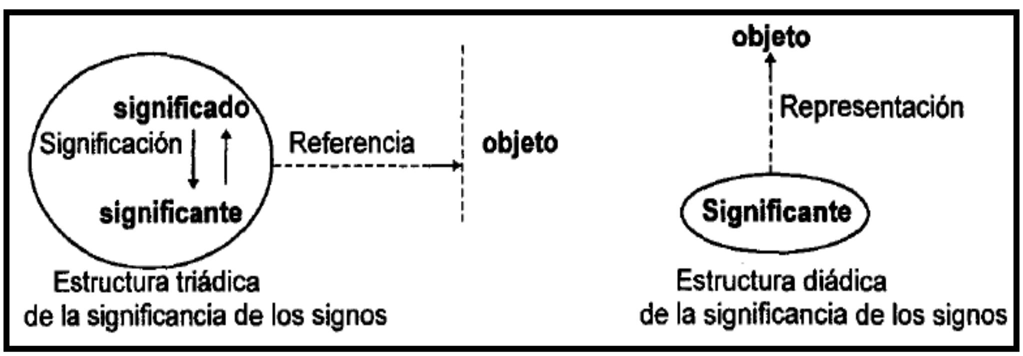


Figura 2.3: Estructura de la significancia de los signos

En la Figura 3.3 se ve la oposición entre dos tipos de signos. Los de la estructura triádica, como los signos lingüísticos o las figuras, la relación con un objeto depende de una relación de significación, por otro lado la relación con el objeto no es asegurable sino en el nivel de discurso o interpretación. Los signos de estructura diádica, tales como ciertas nociones matemáticas no tienen significación y están construidas por una relación establecida por un objeto. La significancia se postula como si la operación de conversión de un registro en otro parece evidente.

Existe una segunda hipótesis sobre cómo se consigue la conceptualización de los objetos matemáticos en los estudiantes: "la comprensión (integradora) de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión". La figura 3.4 nos muestra dicho proceso.

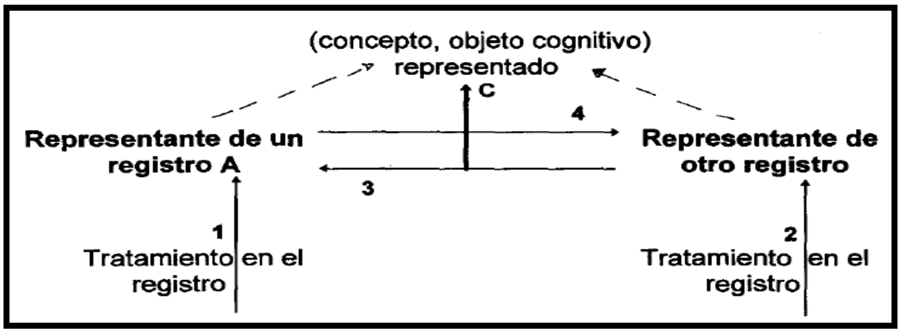


Figura 2.4: Estructura de la representación en función de la conceptualización

Las flechas 1 y 2 indican los tratamientos propios de cada registro; la 3 y 4 indican las conversiones de un registro a otro; la flecha C indica la comprensión integradora de una representación y presupone una coordinación de dos registros; las flechas punteadas indican la diferencia entre representante y representado.

A pesar del manejo de diferentes registros (algebraico, gráfico y numérico) en la enseñanza de la suma vectorial, no se da de manera espontánea la coordinación entre estos registros, ya que los alumnos en muchas ocasiones no identifican el mismo objeto entre sus diferentes representaciones, lo que es mencionado por Duval como *"encasillamiento de los registros de representación"* lo que quiere decir que comúnmente se trabaja con registros de forma separada sin hacer ningún tipo de conversión entre ellos. Se sabe que la conversión favorece la coordinación entre registros, pero la ausencia de ésta no impide toda comprensión, otro de los puntos importantes a considerar cuando se trabaja con los registros por separado es que no da posibilidades de contrarrestar los resultados obtenidos con otro registro.

El encasillamiento que se da en los distintos registros de representación se puede explicar también en términos de la *incongruencia* entre los registros debido a la diferencia semiótica que puede existir entre ellos. Cuando existe congruencia entre los registros de partida y de llegada la conversión se muestra casi inmediata, y en ocasiones puede parecer una codificación.

Se debe reconocer que la coordinación no se da por sí sola, por la falta de reglas de conversión que puede darse entre los registros, lo cual se observa desde los procesos de enseñanza, cuando se introducen distintos registros y no necesariamente se da la coordinación. Por lo que es importante que durante el proceso de aprendizaje se considere la relación que existe entre la noesis y la semiosis, proporcionándoles tarea a los estudiantes que les permitan hacer conciencia de manera más general de la importancia de la coordinación entre los diferentes registros.

2.2.3 Los registros de representación y la coordinación entre ellos en el estudio de la suma de vectores.

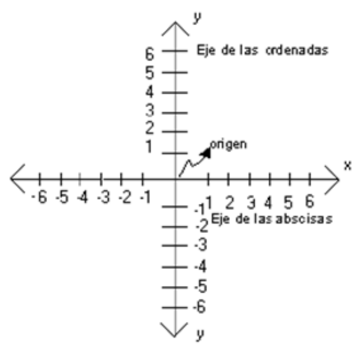
Como ya se ha mencionado con anterioridad, en el estudio de la suma de vectores los registros comúnmente usados son el registro gráfico, algebraico, numérico y el lenguaje natural, pero normalmente no son utilizados para promover la coordinación entre diferentes registros de representación. En este trabajo los registros de representación son utilizados con el propósito de promover el tratamiento y la conversión entre ellos, con la intención de que los estudiantes enriquezcan el significado del objeto matemático que se estudia.

A continuación se presenta la manera en que en este trabajo se utilizan los registros de representación gráfico, numérico y algebraico, además de las ventajas del uso de software de geometría dinámico (GeoGebra).

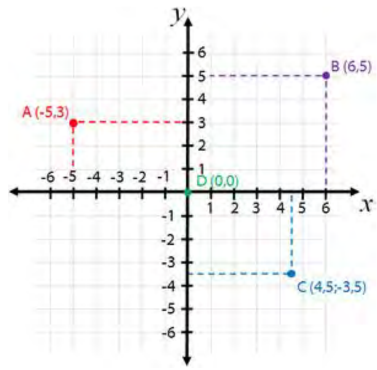
2.2.3.1 Registro gráfico

El registro gráfico es utilizado para representar a los vectores y la suma de éstos tanto en su representación polar como en su representación cartesiana, en ambos casos el registro gráfico es utilizado para: representar objetos, realizar tratamientos y realizar conversiones. Entre los objetos que se representan encontramos:

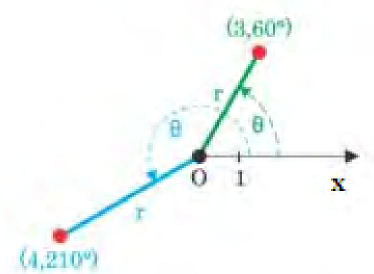
- El plano cartesiano: está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical, que se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o de las equis (x), y la vertical, eje de las ordenadas o de las yes, (y); el punto donde se cortan recibe el nombre de origen.



- Las coordenadas de los puntos ubicados en un plano cartesiano siempre se escriben en el mismo orden: la dirección horizontal primero y después la vertical , a dicha representación llamamos par ordenado y los números van entre paréntesis separados por una coma. Cuando x (la primera coordenada) aumenta, el punto se mueve a la derecha y si disminuye, el punto se mueve a la izquierda. Cuando y (la segunda coordenada) aumenta, el punto se mueve hacia arriba y si disminuye, el punto va hacia abajo.



- El sistema de coordenadas polares es un sistema de coordenadas bidimensional en el cual cada punto o posición del plano se determina por un ángulo y una distancia. Donde el ángulo está medido a partir del eje de las equis con una dirección contraria a las manecillas del reloj, mientras que la distancia está medida a partir del punto inicial del vector hasta el punto final.



- Vectores, segmento que tienen magnitud, dirección y sentido al mismo tiempo. En el caso particular del vector cero, debido a las restricciones del registro grafico para representar vectores, es representado por la intersección de los ejes.
- Figuras geométricas, principalmente los triángulos rectángulos, que son formados por el vector y sus componentes (horizontal y vertical).
- Los tratamientos principales que se llevan a cabo en el registro gráfico son los de mover o trasladar los vectores proporcionados para poder reacomodarlos de tal manera que les permita realizar la suma de éstos.

Las conversiones que el registro gráfico involucra son realizadas principalmente por tres razones:

1. Facilita la articulación con otros registros como es el caso del registro algebraico.
2. Debido a que el registro gráfico es no discursivo, es necesario hacer uso de otro registro para decir cosas acerca de las representaciones que se tienen en el registro grafico.
3. Limitado manejo operativo de los objetos representados.

2.2.3.2 Registro de la lengua natural

El registro de la lengua natural es utilizado en la secuencia, principalmente para proporcionar la información de las situaciones y explicar: diferencias entre objetos, aclarar alguna duda que se presente durante la resolución de dicha secuencia (por falta de claridad en una instrucción o imagen). A diferencia del registro gráfico, en el registro en lenguaje natural no se busca desarrollar en los estudiantes algún tratamiento específico, aunque es común observar tratamientos como, argumentaciones, descripciones, comentarios, etc.

El registro en lenguaje natural también es utilizado por los estudiantes cuando se les pide que realicen algunas explicaciones de algunos procedimientos que han utilizado, o bien cuando los estudiantes realizan alguna interpretación de un gráfico o imagen proporcionada. Es importante mencionar que en el registro de la lengua natural en ocasiones se hace uso del registro algebraico o numérico (una mezcla de ambas), sin dar prioridad a alguna de las representaciones utilizadas.

2.2.3.3 Registro Álgebraico

El registro algebraico es utilizado para representar a los vectores por medio de literales como cuando éste no es conocido o representa a cualquier vector con ciertas características, o bien cuando se quiere representar la operación entre dos vectores cualquiera, por ejemplo la suma de alguno de ellos como o .

El registro algebraico también es utilizado por los estudiantes cuando indican con que vectores están trabajando es decir por medio de la literal y al realizar la suma de dos vectores cualquiera con la intención de que los estudiantes logren generalizar la suma y/o sus propiedades.

2.2.3.4 Registro Numérico

El registro numérico es utilizado cuando se presentan situaciones concretas en las que se tiene que resolver un problema particular, los estudiantes deben recurrir a este registro para poder hacer los cálculos a partir de la información que se les proporciona en el problema para poder buscar la respuesta al problema.

Algunos ejemplos de estas operaciones en el registro numérico son:

1. Tratamientos: suma de componentes rectangulares de dos vectores que se suman para obtener las coordenadas rectangulares del vector suma.
2. Conversión: a partir de las coordenadas polares obtener las coordenadas rectangulares; es decir, a partir de la magnitud y el ángulo de un vector obtener las coordenadas horizontal y vertical o viceversa.

2.3 Incorporación y uso de tecnología

Hoy en día los medios tecnológicos son esenciales para la sociedad en general y para la construcción del conocimiento matemático en particular. La búsqueda, selección, interpretación y organización de la información son aspectos fundamentales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de todas las áreas de conocimiento, particularmente en el caso de las Matemáticas, la reflexión, la comprensión de situaciones y el razonamiento, entre otros aspectos importantes.

La enseñanza es una actividad compleja, y a través de la historia el hombre ha experimentado diversos métodos y procedimientos con el propósito de mejorar tanto la enseñanza como el aprendizaje.

Actualmente existen investigadores en educación matemática que se han interesado en buscar alternativas que resuelvan los problemas que involucran los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a través de las nuevas tecnologías que pueden emplearse en el sistema educativo de tres maneras distintas: como objeto de aprendizaje, como medio para aprender y como apoyo al aprendizaje.

Un ejemplo de las nuevas tecnologías son los software que pueden ser útiles al profesor y al estudiante para enriquecer en forma significativa el proceso de adquisición del conocimiento matemático.

La tecnología (computadora) va más lejos que sólo hacer más fácil o rápido lo que nosotros ya hacemos, permitiendo además representaciones múltiples de un concepto matemático, y se espera que tenga implicaciones radicales tanto en los métodos como en los propósitos de la educación matemática.

La comprensión de un objeto matemático consiste en un proceso continuo y progresivo donde los estudiantes adquieren y relacionan los distintos elementos. Otra componente tiene que ver con la manera como puede usarse la computadora en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Pea (1987) sostiene que la inteligencia no es una cualidad de la mente sola, sino un producto de la relación entre estructuras mentales y herramientas del intelecto proporcionados por la cultura, como es el caso de las computadoras.

Para Pea (1987), *"una herramienta cognitiva es cualquier medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente en el pensamiento, el aprendizaje y las actividades de resolución de problemas"*. En particular, en el caso de las computadoras forman una extraordinaria y potente herramienta cognitiva para aprender a pensar matemáticamente con ellas se pueden operar, no sólo números, sino también símbolos. Permiten además, almacenar y manipular símbolos dinámicos e interacciones con los usuarios en tiempo real.

Las computadoras son vistas por lo general como amplificadoras de las capacidades humanas (metáfora amplificadora), desde esta perspectiva, son consideradas herramientas con las que se pueden hacer tareas de forma más rápida y precisa. Otra perspectiva consiste en ver a las computadoras como herramientas cognitivas, y si éstas son usadas de manera correcta no sólo permiten amplificar las capacidades humanas, sino que tienen la capacidad de promover cambios estructurales en el sistema cognitivo de los estudiantes (metáfora reorganizadora) por medio de una reorganización y transformación de las actividades que los estudiantes realizan (Pea, 1987).

Apoyado en estas ideas, Dörfler (1993) propone un marco conceptual sobre el uso de la computadora en la educación matemática e identifica algunas maneras en las que una herramienta computacional puede generar cambios en la actividad mental de los estudiantes:

- *Cambio de las actividades a un nivel cognitivo más alto (meta-nivel).* Las computadoras apoyan acciones de un nivel cognitivo más alto por medio de la simplificación de procesos complejos por medio de entidades que son fácilmente manipulables.
- *Cambio de objetos con los que se realizan las actividades.* El uso de tecnología permite un cambio en los objetos con los que se trabaja, por ejemplo el uso de software permite trabajar con diversas representaciones de un objeto, en las que se puede estudiar su efecto en otros objetos con los que se encuentre ligados. Esta capacidad del software conlleva un cambio en el enfoque de atención a un nivel cognitivo más alto.

- *Enfoca las actividades en transformación y análisis de representaciones.* La computadora ofrece una gran variedad de elementos gráficos, numéricos y simbólicos para la construcción y manipulación de representaciones, permitiendo procesos cognitivos de resolución de problemas que dependen de la manipulación de dichas representaciones.
- *Apoya la cognición situada y resolución de problemas.* El diseñar actividades de interés para el estudiante en las computadoras permite el modelado de citaciones concretas y datos reales.

2.4 Consideraciones Metodológicas

En este apartado se describe la metodología que se implementó para llevar a cabo el presente trabajo, la estrategia metodológica consiste de cuatro fases mismas que se describen a continuación:

Fase 1: Revisión bibliográfica

Como primera fase del proyecto se planteó la revisión bibliográfica, acción que se realizó a través de distintas fuentes, como: documentos de Internet, tesis de grado, artículos de revistas, programa del curso de Geometría Analítica de la Universidad de Sonora, resultados de investigaciones y propuestas de enseñanza. Estos últimos referentes a proyectos en los cuales se involucra el diseño de propuestas para la enseñanza y aprendizaje de los vectores, dando preferencia al análisis de aquellos orientados a la enseñanza de la suma vectorial y que estuviesen dirigidos a estudiantes del nivel medio superior. Un aspecto central en esta parte del trabajo fue la revisión de artículos en los que se presentan los elementos teóricos que son adoptados para el diseño de la propuesta (Teoría de las Representaciones Semióticas), así como reportes de tesis o artículos que presentan diseños de estrategias didácticas fundamentadas en los elementos de esta teoría.

Los propósitos de esta etapa son:

- Tener una idea panorámica de las investigaciones con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la suma de vectores, y conocer el tipo de propuestas didácticas que han sido realizadas por otros investigadores; además, considerar los resultados que ellos han obtenido al llevar sus propuestas al aula. Esta información resultó fundamental al momento de realizar nuestro propio diseño.
- Establecer el soporte teórico para fundamentar la secuencia didáctica.

Fase 2: Diseño de la secuencia de actividades

En esta fase nos centramos en el diseño de actividades para integrar una secuencia didáctica, actividades a través de las cuales se espera promover dos aspectos en el estudiante, por una parte el desarrollo del contenido relacionado con la suma vectorial en coordenadas cartesianas, contemplado en el programa del curso de Geometría Analítica; así como las características que deben tener los futuros ingenieros civiles tal como se señala en los planes de estudio de la carrera.

Además del programa de del curso y de los planes de estudio de la carrera, otros punto de partida para el diseño de las actividades es la información que se obtiene de la revisión de Lineamientos Curriculares de la Universidad de Sonora y los referentes teóricos, en los primeros se hace énfasis en promover en el estudiante un perfil con sentido de actuación, auto aprendizaje, proclive a la interdisciplinariedad y al trabajo en equipo, aspectos que deberán verse reflejados en las actividades. Por ejemplo, un propósito del trabajo es promover la actividad en equipo de los estudiantes, por tal motivo se tiene interés en obtener los registros del trabajo de ellos, tanto individual como en equipo, esto deberá reflejarse en las hojas de trabajo que integren las actividades.

3: Puesta en escena

Para la puesta en escena de la secuencia de actividades didácticas se implementó en un curso de Geometría Analítica con un grupo de 40 estudiantes de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora que cursan el segundo semestre. Para realizar el análisis se selecciona a 15 estudiantes, para hacer la selección de estos estudiantes se utilizaron los siguientes criterios:

1. Asistieron a todas las sesiones de trabajo.
2. Tienen todas las actividades realizadas.
3. Las respuestas son legibles.
4. Presentan sus respuestas del trabajo individual y sus respuestas del trabajo en equipo (no corrigen las respuestas que generan en el trabajo individual después de trabajar en equipo).

Como responsables de la puesta en escena participan dos sujetos, uno como responsable de la implementación (profesor) y el otro como responsable de la observación del proceso (observador):

El profesor del curso responsable de la conducción de las actividades conoce la secuencia, los objetivos y la estrategia de conducción, dicha estrategia organiza tanto el trabajo del profesor como del estudiante, en un primer momento se promueve el trabajo individual, posteriormente el trabajo en equipo y finalmente el trabajo grupal, en este último en ocasiones se presentan a debate las estrategias y/o resultados de las actividades propuestas y en otras ocasiones es donde se realiza la institucionalización de los objetos de estudio que se ponen en juego.

El observador tiene la tarea de llevar el registro del comportamiento y la participación de los estudiantes con relación a las actividades de la secuencia didáctica, para ellos se auxilia de una hoja de registro integrada por los aspectos más relevantes en los que debe centrar su trabajo (Anexo 1).

El trabajo de implementación y observación se realizó en 12 sesiones de una hora cada una en el aula de trabajo normal asignada para el curso, la cual cuenta con cañón de proyección.

Fase 4: Análisis de la puesta en escena

La última fase del proyecto consiste en el análisis del trabajo de los estudiantes al realizar las actividades, dicho análisis se centra en la revisión de las hojas de trabajo y de las participaciones que tienen los estudiantes en el salón de clase en los diferentes momentos de la estrategia didáctica. Finalmente, a partir del análisis que se realiza del trabajo de los estudiantes con las actividades se obtienen varios tipos de conclusiones, por una parte las relacionadas con lo que logran hacer los estudiantes respecto a los propósitos declarados en las actividades, por otra las conclusiones referentes a los ajustes que debemos hacer a las actividades (claridad en las indicaciones, claridad en lo que se pregunta, ajustes en la estructura, etc.) y por último las relacionadas con lo que se puede modificar en el proyecto para enriquecer futuros trabajos en esta dirección.

Capítulo 3

La propuesta: Secuencia de actividades didácticas

En este capítulo se presenta la secuencia de actividades didácticas, en primer término los objetivos, tanto generales como específicos, posteriormente los aspectos que fueron tomados en cuenta para su diseño y, finalmente, las características y descripción de cada una de las actividades didácticas que integran la secuencia. Se detalla cada una de las preguntas o indicaciones que se les hacen a los estudiantes expresando su propósito y lo que se espera que el estudiante realice.

3.1 Objetivos

El objetivo general de la secuencia de actividades didácticas es:

- Promover en los estudiantes la construcción de la suma de vectores en el plano cartesiano y algunas de sus propiedades.

Este objetivo se logrará en la medida que los estudiantes a quienes está dirigida la propuesta, sean capaces de lograr los siguientes objetivos específicos:

- Diferenciar las cantidades vectoriales de las escalares.
- Identificar e interpretar los elementos que definen un vector.
- Representar gráfica, algebraica y numéricamente la información, proporcionada en una situación donde se involucra la suma vectorial.
- Realizar la conversión de la representación polar de los vectores a la representación cartesiana.
- Realizar los tratamientos correspondientes en el registro numérico (suma de componentes).
- Realizar la conversión de la representación cartesiana a la representación polar.

- Interpretar verbalmente o por escrito la información, de una situación donde está involucrada la suma vectorial, que se proporcione a través de una representación gráfica, algebraica y numérica.
- Realizar operaciones con vectores combinando métodos gráficos y numéricos.

El desarrollo de estos objetivos se logrará en la medida en que la secuencia de actividades didácticas promuevan una activación adecuada de los estudiantes, lo cual deberá lograrse mediante las estrategias didácticas propuestas.

3.2 Aspectos considerados para el diseño de las actividades

Partiendo de que las actividades didácticas, no sólo deben de cumplir con el programa de la materia (Geometría Analítica), sino que además deben presentan situaciones que propician que el estudiante ponga en juego sus conocimientos previos.

Se asume también que los estudiantes deben tener un papel activo para poder estimular un aprendizaje más rico del significado del objeto matemático que se pretende promover; para ello un elemento que se considera fundamental es estimular el aprendizaje a partir de la resolución de problemas. Por lo que las actividades diseñadas giran en torno a la resolución de problemas, cuya resolución está organizada en tres momentos diferentes: trabajo individual, trabajo en equipo y discusión grupal, ya que de esa manera se crean ambientes de aprendizaje que permiten la formación de sujetos independientes, críticos, además adquieren diferentes formas de pensar, hábitos de perseverancia, curiosidad y confianza en situaciones no familiares o extramatemáticas.

El planteamiento de un problema en los estudiantes implica encontrar un camino que no se conoce de antemano, es decir construir una estrategia para encontrar la solución. Para ello se requiere tener conocimientos previos y habilidades, a través de ello se construyen nuevos conocimientos matemáticos.

Cada actividad que conforma la secuencia didáctica se caracteriza por que propicia que los estudiantes:

- Activen la propia capacidad mental.
- Ejerciten su creatividad.
- Reflexionen sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorar conscientemente.
- Adquieran confianza en sí mismos y respeten las opiniones de los demás.
- Aprendan a argumentar y contra-argumentar.

Iniciar la actividad de aprendizaje del estudiante con un problema no es sólo con el propósito de ubicar el contenido matemático en un contexto extramatemático o no, como motivador, sino que es fundamental el trabajo que él desarrolla para diseñar la estrategia que le permita resolver el problema; además es fundamental que el estudiante identifique que la o las respuestas que ha obtenido sean apropiadas para la situación planteada.

En el diseño de la secuencia de actividades didácticas se hace énfasis en los diferentes registros de representación que se utilizan para representar a los vectores, partiendo de su representación polar, que es la que se presenta comúnmente en las situaciones extra matemáticas. Por ejemplo, en los problemas de Física por lo regular se trabaja con desplazamientos, velocidades y fuerzas en los que sus características son proporcionadas por la magnitud, la dirección y sentido; pero para resolverlos se requiere hacer la conversión de dicho registro al registro de coordenadas cartesianas, por lo que los problemas serán planteados para que el estudiante desarrolle la habilidad de transformar los problemas de vectores (registro verbal, registro numérico), en otro (gráfico) donde la solución involucre triángulos rectángulos y por ello sea posible poner en juego el uso del teorema de Pitágoras.

Las actividades son presentadas en hojas de trabajo en las que se procura plantear situaciones en el contexto de Física o de Ingeniería, promoviendo siempre en primer momento las representaciones gráficas de los vectores. Como es de interés conocer las estrategias de los estudiantes, tanto en su trabajo individual como en su trabajo en equipo, las hojas de trabajo se diseñaron de tal manera que cuentan con dos espacios del mismo tamaño, uno de ellos (la parte izquierda de la hoja) está dedicado a la actividad individual y el otro (la parte derecha) al registro de la actividad en equipo (ver Anexo 2).

En dos de las actividades se incorpora el uso de tecnología computacional, en este caso particular se recurre al software GeoGebra. Una de las razones para utilizar este software se debe a que cumple con algunas de las condiciones que menciona Duval para el aprendizaje de las matemáticas, como la doble percepción de los objetos, ya que cada objeto matemático puede aparecer en una misma pantalla con al menos dos registros de representación (gráfico, numérico, analítico o lengua natural). De esta forma, se establece una permanente conexión entre diferentes registros de representación, lo cual puede ser explotado en las actividades para promover la coordinación entre ellos.

En las actividades se trabaja de manera simultánea la representación gráfica y la representación numérica, pues es importante para el estudiante que desde el comienzo, se acostumbre a visualizar las variaciones que se originan en una de esas representaciones cuando se interactúa en la otra (metáfora reorganizadora), es decir el software nos permite visualizar y manipular el objeto matemático de una manera más interactiva, además de permitir observar más registros de representación simultáneamente del mismo objeto (representación de coordenadas polares y representación de coordenadas cartesianas), de esta manera el estudiante tendrá más experiencias que le permitirán identificar la naturaleza y variabilidad del objeto matemático que se está estudiando, pero si en determinados momentos o debido a una actividad se considera necesario ocultar una de las representaciones para favorecer la atención en el comportamiento del objeto en otro registro de representación, este software brinda la posibilidad de hacerlo.

Por otra parte el tipo de preguntas que se presentan al estudiante al estar trabajando con el software GeoGebra brindar al estudiante la posibilidad de explorar con ambientes en los cuales puede analizar, conjeturar, verificar conjeturas y generalizar, privilegiando así, la actividad del alumno como medio para promover su aprendizaje.

3.3 Estrategia didáctica para implementar las actividades

La estrategia didáctica para la aplicación de cada una de las actividades que forman la secuencia está planeada para realizarse en tres momentos:

- En el primero el estudiante deberá trabajar de manera individual, en este momento el estudiante tendrá la oportunidad de poner en juego sus conocimientos y habilidades a la hora de enfrentar una situación problema.
- En el segundo el estudiante deberá trabajar en equipo, en este momento tendrán la oportunidad de apoyarse en las sugerencias y observar las diferentes estrategias propuestas por sus compañeros de equipo. Todos los integrantes del equipo tendrán la oportunidad de verbalizar las estrategias que utilizaron así como los resultados obtenidos, escuchar los argumentos de otros compañeros, comparar sus resultados y estrategias, refutar en caso de que no se esté de acuerdo con sus compañeros o corregir sus estrategias o resultados cuando se considere que es lo apropiado.
- Por último se generará una discusión grupal que consiste en compartir los puntos de vista o la manera en la que los distintos equipos dieron solución a la actividad, lo cual resulta muy enriquecedor para los estudiantes porque tienen de nuevo la oportunidad de poner en juego habilidades como comunicar verbalmente sus estrategias, contrastar con

las expresadas por sus compañeros, refutar aquellos aspectos que considere no son correctos y enriquecer sus conocimientos a partir del intercambio de resultados y estrategias.

En la siguiente tabla se describe el tipo de trabajo del alumno, los beneficios que dicho trabajo aporta y también las desventajas que implica, también se incluye el trabajo del profesor en cada una de los momentos.

Momentos del trabajo del estudiante y correspondientes acciones del profesor			
Momentos del Trabajo del Estudiante	**Beneficios**	**Desventajas**	**Trabajo del profesor**
Individual 	Es el primer acercamiento del estudiante con el problema, cada estudiante trabaja a su propio ritmo, están seguros acerca de las herramientas y conocimientos que utiliza pues nadie lo contradice, puede utilizar sus estilos preferidos de aprendizaje concibiendo el tipo de registro que más se le facilita.	Los estudiantes no obtienen el beneficio de aprender de sus compañeros y trabajar con sus compañeros.	Es el momento en que el profesor puede: Identificar si el estudiante tiene los conocimientos previos para abordar la situación planteada. Acercarse con los estudiantes que no logran entender lo que se les pregunta y replantear los cuestionamientos o las indicaciones que se le hacen. Intervenir a solicitud del estudiante, por lo regular haciendo nuevos cuestionamientos que le permitan al estudiante reflexionar sobre los conocimientos o ideas que está poniendo en juego en la actividad.

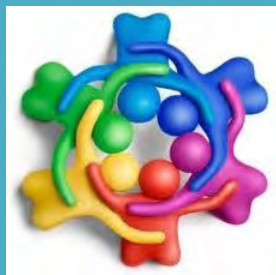
Equipo 	Los estudiantes tienen la oportunidad de trabajar con sus compañeros y aprender de sus compañeros. Los estudiantes con dificultades pueden aprender de los demás integrantes del equipo Los estudiantes tienen la oportunidad de presentar sus estrategias ante grupos pequeños de compañeros, así como desarrollar habilidades para argumentar y contra argumentar. .	Los grupos deben ser seleccionados cuidadosamente para asegurar que los estudiantes pueden trabajar de forma productiva, no todos los estudiantes son capaces de trabajar a su máximo potencial en esta situación.	En este momento el profesor: Realiza trabajo de observador en los diferentes equipos. Interviene cuando lo considera necesario o a solicitud de los integrantes del equipo, ya sea a través de dar otras instrucciones que permitan enriquecer el ambiente de la actividad o bien replantear las preguntas o indicaciones de la misma. Detectar a los estudiantes o equipos que sería conveniente que presentaran al grupo sus estrategias y resultados que obtuvieron al resolver la actividad. Identificar las dificultades que se presentan de manera generalizada, en cuyo caso en ocasiones es conveniente solicitar suspender el trabajo en equipo para generar una discusión grupal del punto en cuestión, para posteriormente regresar al trabajo en equipo.
Grupo 	El trabajo en grupo proporciona más oportunidades para la práctica, además desarrollan habilidades como comunicar verbalmente sus estrategias. Además los estudiantes tienen la oportunidad de escuchar distintos puntos de vista así como otros argumentos y estrategias.	La evaluación del progreso del estudiante puede ser un reto ya que aunque estén trabajando en equipo o en grupo la evaluación se realiza de manera individual.	En este momento por lo regular hay dos acciones que realiza el profesor: Si es necesario proponer al estudiante o equipo que deberá presentar al grupo sus estrategias y resultados. Orientar la discusión de los estudiantes respecto a las estrategias y resultados obtenidos. De ser necesario centrar la atención en los puntos específicos que interesa discutir. Resaltar los aspectos o características fundamentales del objeto u objetos matemáticos que se pretende institucionalizar.

Tabla 3.1 Tipo de trabajo realizado por los estudiantes y por el profesor

Es importante resaltar que en el transcurso de la actividad el profesor sólo interviene, en caso de ser necesario, para reorientar el trabajo de los estudiantes. Esto lo hace, por lo general, con preguntas que parten de alguna afirmación o pregunta hecha por los estudiantes; la intención de dichas preguntas es provocar la confrontación de las ideas expresadas, de tal forma que se refuerce lo manifestado por el alumno, o se reformule por el camino adecuado. En todo momento el profesor deberá estar atento para observar la actitud del estudiante al trabajar individualmente, en equipo o en grupo.

Otra parte importante del trabajo del profesor se realiza en la etapa final de cada actividad con la institucionalización, que es un momento en el que se establecen relaciones entre las producciones de los estudiantes y el saber cultural que toma como referencia la institución. La institucionalización es un momento donde el estudiante, a partir de lo construido en las distintas fases de la actividad, tiene la oportunidad de aclarar aspectos importantes que contribuyan al enriquecimiento del significado del objeto de estudio como parte del saber matemático.

3.4 Descripción de las actividades

Las actividades didácticas están organizadas en pequeños bloques, en cada uno de ellos se centra la atención en alguno o algunos de los objetivos que se declaran para la secuencia; además, en ellos se presentan variantes con respecto a los otros bloques, por ejemplo en la forma en que se presentan los vectores, en lo que se solicita, el uso o no de apoyo tecnológico computacional, etc.

En la siguiente tabla se presenta una pequeña descripción de cada uno de los bloques en que está organizada la secuencia de actividades.

Descripción de las actividades por bloques		
Bloque	**Actividades que forman el bloque**	**Descripción**
Bloque 1	Actividad 1 Actividad 2	Es el primer acercamiento que los estudiantes tienen con el objeto matemático vector y en especifico con la suma de éstos, en estas dos actividades el estudiante trabaja con vectores unidireccionales, además se promueven los principales elementos que definen un vector (magnitud, dirección y sentido), así como su representación gráfica y la correspondiente representación gráfica de la suma de vectores (tanto el procedimiento para realizarla como del vector que resulta de la suma). También en estas actividades se reconoce la diferencia que existe entre el recorrido y el desplazamiento, además de resaltar la importancia que tiene el sentido de los vectores al momento de realizar la suma. Otro aspecto que se pretende pongan en juego los estudiantes es lo relativo a la diferencia que existe entre cantidades escalares y los vectores.
Bloque 2	Actividad 3 Actividad 4	En este bloque los estudiantes trabajan por primera vez con vectores que no son unidireccionales, por lo que se verán en la necesidad de realizar conversiones partiendo de las coordenadas polares hacia las coordenadas cartesianas, para poder llegar a obtener la magnitud y el ángulo que determina la dirección del desplazamiento total se deben realizar tratamiento en el registro numérico (para obtener las componentes del vector es necesario trabajar con la funciones trigonométricas y con el teorema de Pitágoras). En las situaciones que se plantean en estas actividades las componentes de los vectores (horizontal y vertical) representan los catetos de un triángulo rectángulo (en estas actividades se cuestiona el por qué los triángulos que se forman son rectángulos) y la hipotenusa representa la magnitud del vector suma (desplazamiento total).También en estas actividades se vuelve a retomar la discusión en la que se pone en juego la diferencia que hay entre el recorrido y el desplazamiento. En estas dos actividades también se plantean situaciones en las que se suman vectores que no son paralelos a los ejes (horizontal y vertical), en cuyo caso no se forman de manera directa triángulos rectángulos, por ello es necesario que los estudiantes construyan triángulos rectángulos (tratamiento en el registro gráfico) en los que la hipotenusa represente al desplazamiento total.
Bloque 3	Actividad 5	Es la primera actividad donde el estudiante parte de una representación gráfica en la que los vectores (fuerzas) que intervienen inician en el mismo punto, lo que los lleva a cuestionarse por el orden en que deben colocarse los vectores para realizar la suma en el registro gráfico, esta situación propicia la discusión respecto de la importancia o no del orden que deben tener los vectores en la suma. En este sentido señalamos que los estudiantes tienen un primer acercamiento a las propiedades asociativa y conmutativa. También en esta situación se les cuestiona sobre las características que debe tener un vector que neutralice el efecto de las fuerzas actuando sobre una partícula, en cuyo caso se pretende que el estudiante identifique las características que debe cumplir el inverso aditivo.
Bloque 4	Actividad 6 Actividad 7	En este bloque de actividades se trabaja con el software GeoGebra, por lo que el estudiante tienen la oportunidad de explorar el comportamiento del objeto matemático en distintos registros de representación (visualiza las variaciones de manera simultánea), además se promueve la coordinación entre los distintos registros de representación, y con el apoyo del software el estudiante puede conjeturar que los vectores cumplen tanto con la propiedad conmutativa como con la propiedad asociativa.

Bloque 5	Actividad 8	En estas dos últimas actividades se trabajó por primera vez en contextos puramente matemáticos, particularmente en la actividad 8 es donde se plantean cuestionamientos orientados a que el estudiante reflexione sobre la estrategia que ha utilizado para resolver las situaciones que se le han propuesto en la secuencia de actividades, uno de los propósito es ver si es capaz de definir la suma de vectores a partir de coordenadas cartesianas.
	Actividad 9	Y en la actividad 9 se espera que el estudiante sea capaz de poner en juego las estrategias y procedimientos desarrollados en las primeras actividades de la secuencia (transformación de coordenadas: de polares a cartesianas y viceversa, así como realizar la suma vectorial a partir de coordenadas cartesianas). Por lo que estas dos actividades nos permiten cerrar la secuencia poniendo en juego los conocimientos matemáticos construidos.

Tabla 3.2 Descripción de las actividades

3.4.1 Actividad 1

En esta primera actividad se espera que los estudiantes puedan aplicar los conocimientos que tienen de las operaciones con números reales, ubicación de puntos en el plano cartesiano y la representación gráfica de la suma vectorial, para el logro de los siguientes:

Objetivos:

- Obtener las características (magnitud, ángulo que determina la dirección y el sentido) de un desplazamiento total que se produce a partir de desplazamientos unidireccionales.
- Identificar la diferencia entre recorrido y desplazamiento.

Materiales:

- Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- Lápiz.

Tiempo estimado:

- 30 minutos.

Actividad 1:

Un autobús va hacia el Norte (90° EN), desde su punto de partida se desplaza 1 Km. antes de realizar la primera parada, después se desplaza 3 Km. antes de realizar una segunda parada, desde la segunda parada hasta su destino final se desplaza otros 4 Km.

1. **¿A qué distancia se encuentra de su punto de partida el autobús al momento de realizar la segunda parada?**

   La pregunta uno tiene el propósito de que los estudiantes realicen una serie de transformaciones en el mismo registro (tratamientos) que les permitan dar respuesta a esta pregunta. Además tiene la intención de que el estudiante identifique, gráficamente, que la suma de dos desplazamientos se determina colocando el punto inicial del segundo desplazamiento en el punto final del primero.

   Se espera también que algunos estudiantes realicen una conversión del registro numérico al registro gráfico con la intención de poder aplicar la definición gráfica de la suma de vectores.

2. **¿Cuál es la distancia total que recorrió el autobús de su punto de partida hasta su destino?**

   El propósito de esta pregunta es generar una discusión entre los estudiantes alrededor de sí ellos pueden decir cuál fue el recorrido que realizó el autobús, ya que la información que se les proporciona está dada en términos de los desplazamientos. Se pretende que se discuta la diferencia que hay entre recorrido o trayectoria y desplazamiento.

3. **¿Cuál fue el desplazamiento total de una persona que subió en la primera parada y terminó el recorrido?**

Al igual que en la pregunta uno, en ésta se tiene el propósito de que los estudiantes realicen una serie de transformaciones en el mismo registro (tratamientos) que les permitan dar respuesta a esta pregunta. Además tiene la intención de que el estudiante identifique, gráficamente, que la suma de dos desplazamientos se determina colocando el punto inicial del segundo desplazamiento en el punto final del primero.

Se espera también que algunos estudiantes realicen una conversión del registro numérico al registro gráfico con la intención de poder aplicar la definición gráfica de la suma de vectores.

4. **Elabora un diagrama que muestre el desplazamiento total de la persona que subió en la primera parada y que llegó hasta la tercera parada del autobús.**

El objetivo en este punto es que los estudiantes expresen dichos desplazamientos de manera gráfica (conversión) y de esa forma observen una misma información expresada de manera distinta. Además, una de las características de la representación gráfica es que permite generar estrategias para buscar resolver la situación a partir de la información que se proporciona de manera numérica.

Además es importante mencionar que si el estudiante requiere regresar al registro numérico para dar respuesta a la pregunta en caso de ser necesario, lo haga por medio de una conversión.

5. **¿Cuál es la magnitud del desplazamiento total del autobús?**

El objetivo de esta pregunta consiste en que el estudiante tenga la oportunidad de comparar la diferencia que hay entre el desplazamiento y el recorrido, pregunta que se hace con anterioridad; además, se espera que el estudiante realice tratamientos (al realizar cálculos con la información proporcionada en *coordenadas polares para obtener coordenadas cartesianas) para obtener el resultado.*

6. **¿Cuál es la dirección del desplazamiento total del autobús?**

   El objetivo de esta pregunta es que el estudiante se dé cuenta que para identificar un vector no es suficiente con que proporcione información sobre qué tanto (magnitud) se desplazó, en este caso el autobús, sino que tiene que agregar una dirección (sentido) que le especifique en dónde terminó el recorrido.

7. **Elabora un diagrama que muestre el desplazamiento total del autobús.**

El objetivo de esta pregunta es igual que el de la cuarta pregunta.

3.4.2 Actividad 2

En esta segunda actividad se espera que los estudiantes puedan aplicar los conocimientos que tienen de las operaciones con números reales, el concepto de vector y la representación gráfica de la suma vectorial, para lograr el siguiente:

Objetivo:

- Identificar la dirección y el sentido de la resultante de la suma de vectores.

Materiales:

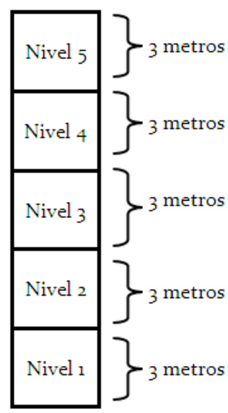
- Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- Lápiz.

Tiempo estimado:

- 30 minutos.

Actividad 2:

Se está realizando una construcción de un edificio de cinco niveles (la planta baja es el primer nivel), el cual se encuentra en la etapa de colocación de ladrillo, dicha etapa se lleva a cabo en los cinco niveles a la vez, por lo que se hace uso de un elevador mecánico para transportar el material con mayor facilidad. Al iniciar las labores en un día de trabajo, el elevador, que se encuentra en el primer nivel, debe surtir material al tercer nivel, siendo éste su primer desplazamiento del día, estando en el tercer nivel recibió un aviso de que el material se había acabado en el quinto nivel por lo que su segundo desplazamiento fue hacia ese punto, el siguiente y último movimiento fue hacia el segundo nivel para recoger un material sobrante.



1. **¿Cuál es la magnitud del desplazamiento total del elevador una vez realizados los tres movimientos?**

   El objetivo de esta pregunta al igual que en la tercera, es que los estudiantes se familiaricen con la suma de vectores que están dados en diferente sentido, además de realizar una serie de tratamientos y/o conversiones que le permitirán dar respuesta a la pregunta.

2. **Elabora un diagrama que muestre todos los desplazamientos hechos por el elevador en el que se represente el vector resultante al realizar los tres desplazamientos.**

En este punto se tiene el propósito de que el estudiante haga una conversión de los datos proporcionados y que a la vez le brinde herramientas que lo ayuden en la toma de decisiones, que le sirvan para dar respuesta a las preguntas.

3. **¿Cuál es la magnitud de los dos últimos desplazamientos?**

   Al igual que en la pregunta uno el objetivo de esta pregunta, es que los estudiantes se familiaricen con la suma de vectores que están dados en diferente sentido, además de realizar una serie de tratamientos y/o conversiones que le permitirán dar respuesta a la pregunta.

4. **¿Cuál es la dirección y el sentido de la resultante de los dos últimos desplazamientos?**

   El objetivo de esta pregunta es que durante el debate que se realice de manera grupal se discutan cuales son las características que definen la dirección y el sentido de un vector.

5. **¿Cuál es la dirección y el sentido de la resultante de la suma de los desplazamientos realizados por el elevador?**

   Al igual que en la pregunta anterior el objetivo de la quinta pregunta es resaltar las características que definen la dirección y el sentido de un vector.

3.4.3 Actividad 3

Objetivos:

El objetivo general de esta tercera actividad es que los estudiantes puedan aplicar, además de los conocimientos que tienen de las operaciones con números reales y de la representación gráfica de la suma vectorial, el Teorema de Pitágoras y funciones trigonométricas para:

- Identificar la diferencia entre recorrido y desplazamiento
- Identificar que, no en todos los casos, la magnitud de la suma de vectores es igual a la suma de las magnitudes de los vectores.

Materiales:

- Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- Lápiz.
- Calculadora.

Tiempo estimado

- 40 minutos.

Actividad 3:

Una constructora está reparando la carretera Bahía Kino-Hermosillo y la persona encargada de supervisar la obra debe visitar dos puntos de la carretera para supervisar los avances. La base de operaciones está en Bahía de Kino, que es el punto de donde sale a hacer el recorrido, el supervisor debe realizar dos desplazamientos:

Primer caso: El primero es de 4.5 Km. hacia el este y el segundo de 2 Km. hacia el norte.

Segundo caso: El primero es de 2 Km. hacia el este y el segundo de 3 Km. con una dirección de 30° EN.

Para cada uno de los casos anteriores realiza lo siguiente:

1. **Haz un bosquejo mostrando los desplazamientos realizados por el supervisor.**

El propósito de este punto es que el estudiante exprese la información proporcionada en otro registro, en este caso el gráfico. Que si bien no le dará la respuesta a la actividad si puede conducir al estudiante a profundizar en las características de la situación que está planteando.

2. **Describe el recorrido total realizado.**

La intención en este punto es la de presentar a los estudiantes una nueva experiencia, en una situación donde los vectores no son unidireccionales, para discutir el hecho de que un desplazamiento puede ser producto de muchos recorridos. Se espera que el estudiante pueda decir en cada uno de los casos, si el recorrido es único o no y por qué.

3. **Describe gráficamente cual es el desplazamiento total.**

El objetivo de este punto es que los estudiantes expresen dichos desplazamientos en el registro gráfico que les permitan darse una idea de cómo poder diseñar una estrategia para solucionarlo y de cierta manera para darse cuenta si conocen uno o varios métodos gráficos para realizar la suma de vectores.

4. **¿Cuál es la magnitud del desplazamiento total que realizó el supervisor?**

Las preguntas cuatro y cinco tienen como objetivo promover en los estudiantes la transformación de representaciones dentro del mismo registro (tratamiento) y la transformación entre representaciones que pertenecen a diferentes registros (conversión), en el contexto del problema que están resolviendo.

5. **¿Cuál es el ángulo que determina la dirección y sentido del desplazamiento total que realizó el supervisor?**

3.4.4 Actividad 4

Objetivo:

El objetivo de esta cuarta actividad es que los estudiantes puedan aplicar los conocimientos que hasta ahora tienen de la suma de vectores, y sus propiedades para:

- Identificar la dirección y el sentido del vector suma.
- Identificar la importancia que el sentido de los vectores tiene al momento de realizar la suma de los vectores.

Materiales:

- Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- Lápiz.
- Calculadora.

Tiempo estimado:

- 30 minutos.

Actividad 4:

Una persona realiza tres desplazamientos para llegar de su casa a su centro de trabajo, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Desplazamiento	Magnitud	Ángulo EN[1]
Primero	1 Km.	30°
Segundo	3 Km.	45°
Tercero	2 Km.	130°

[1] Ángulo que determina la dirección y el sentido del desplazamiento

1.- ¿Cuál es la magnitud y el ángulo que determina la dirección y el sentido del desplazamiento total cuando realiza los dos primeros desplazamientos?

En esta pregunta al igual que en la siguiente se espera que algunos estudiantes interpreten la información proporcionada y hagan una conversión al representarla de manera gráfica, para que esta representación les ayude en la búsqueda de estrategias para la solución del problema.

Además de hacer uso de las funciones trigonométricas para aplicar una serie de tratamientos y conversiones que le permitirán dar respuesta a dichas preguntas.

2.- ¿Cuál es la magnitud y el ángulo que determina la dirección y el sentido del desplazamiento total desde que sale de su casa hasta que llega al trabajo?

Al igual que en la pregunta anterior se espera que algunos estudiantes interpreten la información proporcionada y hagan una conversión al representarla de manera gráfica la información que se les proporciona, para que esta representación les ayude en la búsqueda de estrategias para la solución del problema.

Además de hacer uso de las funciones trigonométricas para aplicar una serie de tratamientos y conversiones que le permitirán dar respuesta a dichas preguntas.

3.- Si la persona realiza un cuarto desplazamiento para trasladarse de su centro de trabajo al hospital y el desplazamiento total de su casa al hospital es de 9 Km. con un ángulo de 120° EN, ¿cuáles son las características del cuarto desplazamiento?

El objetivo de este punto es que los estudiantes se den cuenta de que aplicando la suma o ciertas operaciones (propiedades) se puede obtener un vector, es decir que hay vectores a los que puede aplicar la suma de éstos y sus propiedades para generarlo como una combinación lineal de otro.

3.4.5 Actividad 5

Objetivo:

El objetivo de esta quinta actividad es que los estudiantes puedan aplicar los conocimientos que hasta ahora tienen de la suma de vectores, para:

- Trabajar o extraer información dada gráficamente.
- Identificar la propiedad asociativa de la suma de vectores.
- Identificar la propiedad conmutativa de la suma de vectores.
- Identificar e interpretar el vector inverso aditivo.

Materiales:

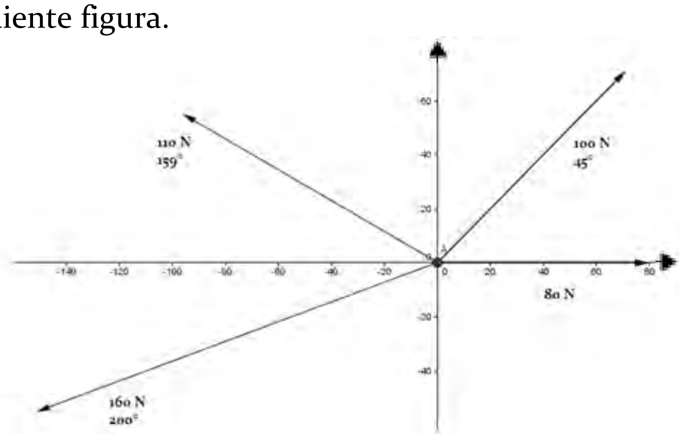
- Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- Lápiz.
- Calculadora.

Tiempo estimado:

- 40 minutos.

Actividad 5:

Cuatro fuerzas actúan sobre una partícula, que se ubica en el punto O, tal como se muestra en la siguiente figura.



1.- ¿Cuál es la magnitud de la fuerza total que está recibiendo la partícula?

El propósito de esta pregunta es que en un primer momento el estudiante sea capaz de interpretar la información proporcionada en un registro gráfico para posteriormente realizar una serie de conversiones que le permitan cambiar del registro en coordenadas polares a coordenadas cartesianas para que de esa manera los tratamientos que se realicen en dicho registro sean más económicos.

2.- Si la partícula pudiera moverse, ¿en qué dirección saldría disparada?

El objetivo de esta pregunta es que el estudiante relacione que al sumar todas las fuerzas y obtenga el vector resultante éste le dará la información necesaria para poder responder, pero para esto tendrá que realizar una serie de tratamientos y conversiones (al realizar transformaciones dentro del mismo registro y al cambiar de un registro a otro).

3.- ¿Todos tus compañeros de equipo sumaron en el mismo orden las fuerzas para obtener el vector resultante?

Se espera que durante el tercer momento de la actividad que consiste en el debate de manera grupal se llegue a destacar que no importa el orden en que se utilicen los vectores en la suma (propiedad conmutativa); además que tampoco importa la manera en que se asocien las parejas de vectores para realizar la suma (propiedad asociativa), pues es muy probable que no todos los estudiantes hayan ordenado de la misma manera los vectores para realizar la suma.

4.- En caso de que alguno de tus compañeros lo haya realizado en distinto orden, ¿qué resultado obtuvo?

El objetivo de esta pregunta al igual que la siguiente es simplemente para comparar resultados y el orden que seleccionaron para realizar la suma de los vectores

5.- ¿Cómo es el resultado que tu compañero obtuvo comparado con el que obtuviste?

Al igual que en la pregunta anterior el objetivo de esta es para que los estudiantes comparen resultados y el orden que seleccionaron para realizar la suma de los vectores

6.- ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza resultante si las fuerzas se suman manteniendo el siguiente orden 160 N, 100 N, 80 N y 110 N?

En caso de que sus compañeros de equipo hayan realizado la suma de vectores en el mismo orden, esta pregunta tiene la intención de hacer aparecer las propiedades asociativa y conmutativa.

7.- Si queremos que la partícula permanezca sin moverse al aplicarle una quinta fuerza, ¿cuál deberán ser la magnitud y dirección de la quinta fuerza? Justifica tu respuesta.

La intención de esta pregunta es que el estudiante identifique la existencia del inverso aditivo y que se haga una discusión en torno a las características y propiedades que éste posee.

3.4.6 Actividad 6

Objetivo:

El objetivo general de las actividades seis y siete es el de complementar la actividad cinco para que por medio del software (GeoGebra) el estudiante pueda explorar teniendo la oportunidad de analizar, conjeturar, verificar conjeturas y generalizar, así como descubrir la existencia de ciertas propiedades que tiene la suma de vectores en este caso la propiedad asociativa y la propiedad conmutativa. Además de promover en el estudiante más experiencias que le permitan identificar la naturaleza y comportamiento del objeto matemático que se está estudiando.

Materiales:

- Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- Lápiz.
- Calculadora.
- Computadora.

Tiempo estimado:

- 40 minutos.

Actividad 6 GeoGebra: *Suma de dos vectores*

1. Activa la casilla de los vectores y .
2. Activa la casilla de coordenadas polares de los vectores y .
3. Calcula las coordenadas cartesianas de los dos vectores y llena la siguiente tabla.

Vectores	Coordenadas polares	Coordenadas cartesianas

4. Activa la casilla suma geométrica de .
5. Calcula la magnitud y el ángulo (que determina la dirección y el sentido) del vector .
6. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas del vector ?

   Activa la casilla suma geométrica de .

7. Calcula la magnitud y el ángulo (que determina la dirección y el sentido) del vector .
8. Calcula las coordenadas cartesianas del vector .

9. ¿Cómo son las coordenadas cartesianas correspondientes de los vectores y ?

10. Activa las casillas de coordenadas polares de los vectores y , ¿cómo son las coordenadas polares del vector respecto a las del vector ?

11. Con el mouse mantén presionado el clic izquierdo y arrastra el punto final del vector (en otro momento hacer lo mismo con el punto final del vector), detener el mouse en tres momentos y registrar en cada caso la magnitud y el ángulo correspondiente en la siguiente tabla:

	Caso I		**Caso II**		**Caso III**	
Vectores	**Magnitud**	**Ángulo**	**Magnitud**	**Ángulo**	**Magnitud**	**Ángulo**

12. Para cada uno de los casos anteriores calcula las coordenadas cartesianas del vector y del vector y coloca la información correspondiente en la siguiente tabla.

	Coordenadas cartesianas	
Casos		
Caso I		
Caso II		
Caso III		

13. ¿Para cualquier par de vectores sucederá lo mismo? Argumenta tu respuesta.

14. ¿Con qué propiedad de los números reales se relaciona este comportamiento de los vectores respecto a la suma?

3.4.7 Actividad 7

Objetivo:

El objetivo general de esta actividad al igual que la seis es el de complementar la actividad cinco para que por medio del software (GeoGebra) el estudiante pueda explorar teniendo la oportunidad de analizar, conjeturar, verificar conjeturas y generalizar así como descubrir la existencia de ciertas propiedades con las que cuenta la suma de vectores en este caso la propiedad asociativa y la propiedad conmutativa.

Además de promover en el estudiante más experiencias que le permitirán identificar la naturaleza y comportamiento del objeto matemático que se está estudiando.

Materiales:

- Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- Lápiz.
- Calculadora.
- Computadora.

Tiempo estimado:

- 45 minutos.

Actividad 7 GeoGebra: S*uma de tres vectores*

1. Activa la casilla de los vectores .
2. Activa la casilla de coordenadas polares de los vectores .
3. Calcula las coordenadas cartesianas de los tres vectores y llena la siguiente tabla.

Vectores	Coordenadas polares	Coordenadas cartesianas

4. Activa la casilla suma de y después activa la casilla de suma geométrica de .
5. Calcula la magnitud y el ángulo (que determina la dirección y el sentido) del vector .
6. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas del vector ?
7. Activa la casilla suma de y después activa la casilla suma geométrica de .
8. Calcula la magnitud y el ángulo (que determina la dirección y el sentido) del vector .
9. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas del vector ?
10. ¿Cómo son las coordenadas cartesianas correspondientes de los vectores y ?
11. Activa las casillas X y Y que corresponden a las coordenadas polares de los vectores y , ¿cómo son las coordenadas polares del vector respecto a las del vector ?
12. Con el mouse mantén presionado el clic izquierdo y arrastra el punto final del vector (en otro momento hacer lo mismo con el punto final del vector), detener el mouse en tres momentos y registrar en cada caso la magnitud y el ángulo correspondiente en la siguiente tabla:

	Caso I		**Caso II**		**Caso III**	
Vectores	**Magnitud**	**Dirección**	**Magnitud**	**Dirección**	**Magnitud**	**Dirección**

13. Para cada uno de los casos anteriores calcula las coordenadas cartesianas de los vectores y coloca la información correspondiente en la siguiente tabla.

	Resultante de la suma	
Casos		
Caso I		
Caso II		
Caso III		

14. ¿Para cualquier terna de vectores sucederá lo mismo? Argumenta tu respuesta
15. ¿Con qué propiedad de los números reales se relaciona este comportamiento de los vectores respecto a la suma?

3.4.8 Actividad 8

"*Características de los vectores*"

Objetivo:

El objetivo general de esta octava actividad llamada características de los vectores, es que los estudiantes reflexionen respecto a la estrategia general utilizada para resolver las situaciones planteadas previamente. A través de dicha reflexión se espera que los estudiantes pongan en juego los conocimientos desarrollados a lo largo de la *resolución de las actividades, particularmente en lo que respecta a la necesidad de transformar las coordenadas polares (es la información que se proporciona de los vectores) en coordenadas rectangulares, para posteriormente construir las coordenadas rectangulares de los vectores suma y de esa manera poder encontrar la magnitud y ángulo que determina la dirección y el sentido de dicho vector (desplazamiento total o fuerza resultante).*

Materiales:

- Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- Lápiz.
- Calculadora.

Tiempo estimado:

- 40 minutos.

Actividad 8

1) ¿Cómo están dadas las características de los vectores involucrados en los problemas planteados en las primeras cinco actividades?
2) Describe la estrategia que utilizaste para resolver los problemas planteados en las actividades 1,2, 3, 4 y 5.
3) ¿Por qué crees que funciona la estrategia utilizada?
4) Si se conoce la magnitud y la dirección de un vector, ¿cómo le haces para encontrar las componentes horizontal y vertical?
5) Si tienes las componentes horizontal y vertical, ¿cómo le haces para encontrar la magnitud y la dirección del vector?

Nota:

Cuando un vector está expresado en términos de su magnitud y el ángulo que determina su dirección, diremos que está expresado en coordenadas polares.

Cuando un vector está expresado en términos de sus componentes horizontal y vertical, diremos que está expresado en coordenadas cartesianas o rectangulares.

6) ¿Cómo le hiciste en todos los casos para obtener la componente horizontal y vertical del desplazamiento total o de la fuerza resultante?
7) Si tienes los vectores ¿cuáles son las coordenadas rectangulares del vector ? ¿Por qué?

3.4.9 Actividad 9

"*Ubicando vectores*"

Objetivo:

El objetivo general de la novena actividad es que los estudiantes trabajan por primera vez con vectores en contextos puramente matemáticos, se espera que puedan aplicar la estrategia general para transformar las coordenadas polares a rectangulares y viceversa.

Materiales:

- Hoja de trabajo (proporcionada por el maestro).
- Lápiz.
- Calculadora.

Tiempo estimado:

- ♦ 40 minutos.

Actividad 9

1. Dados los vectores = (12 u, 30°), = (6 u, 130°), = (4u, 240°) y = (15 u, 290°), determina las coordenadas rectangulares de los siguientes vectores:

a) b)

c) d)

e) f)

g) h)

2. Encuentra las coordenadas polares de los ocho vectores que obtuviste en el inciso anterior (1.)

Capítulo 4

Análisis de la implementación de la propuesta

A continuación se presentan los resultados de la puesta en escena de las nueve actividades didácticas sobre suma de vectores, dos de ellas se realizaron en ambientes dinámicos creados con GeoGebra. se realizó con 40 estudiantes de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora, inscritos en el curso de Geometría Analítica, de ellos se seleccionaran 15 para hacer el análisis de las actividades que resolvieron.

En total se realizaron 13 sesiones de trabajo con una duración de una hora, a los estudiantes se les entregó en cada sesión una hoja de trabajo que contenía una de las actividades programadas, que básicamente consiste en la situación que se les propone trabajar y las instrucciones para hacerlo.

4.1 Resultados de la puesta en escena

Como se mencionó con anterioridad, la estrategia de implementación de la secuencia de actividad se dividió en tres partes: la primera se trabajó de manera individual, después en equipo y por último se realizó un debate grupal.

4.1.1 Actividad 1

En la primera actividad los estudiantes trabajan por primera vez con el objeto matemático vector y de manera específica con la suma de estos, por lo que es importante para darnos cuenta que tanto saben acerca de los vectores y de la manera en que se trabaja con ellos. En la Figura 4.1 se observan algunas de las respuestas que proporcionaron los estudiantes para la primera pregunta.

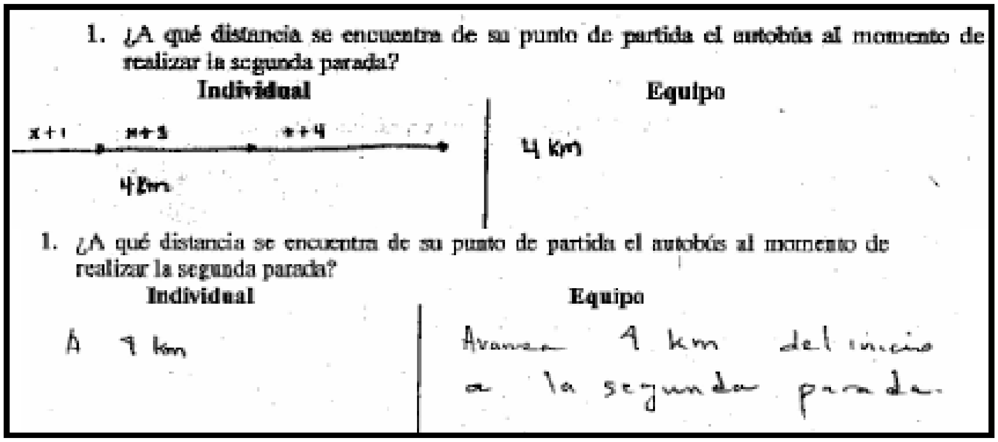
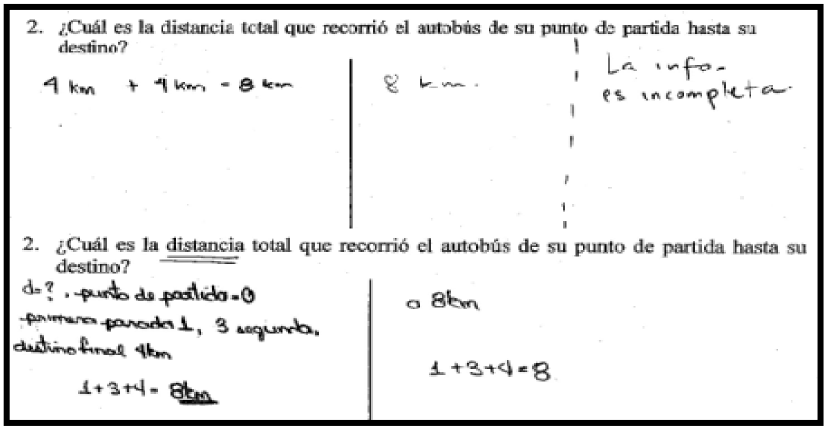


Figura 4.1: Algunas respuestas dadas por los estudiantes para la primera pregunta

Como se puede observar, hay estudiantes que recurren al registro gráfico para la suma de los desplazamientos como apoyo en la búsqueda de soluciones, aunque en este caso se observa en la respuesta del primer estudiante que no sitúa ningún sistema de referencia y aunque los desplazamientos son realizados en dirección Norte su representación está de manera horizontal (comúnmente identificada con dirección Este).

Otros estudiantes sólo interpretaron el enunciado y dieron su respuesta de manera numérica sin dar alguna explicación, cuando llegó el momento de trabajo en equipo compararon sus respuestas entre ellos y se promovió la justificación del por qué de la solución propuesta.

Con respecto a la pregunta número dos el 100% de los estudiantes contestó de manera incorrecta pues no lograron identificar la diferencia entre lo que es el recorrido y el desplazamiento, algunos ejemplos de sus respuestas se muestran en la Figura 4.2



2. ¿Cuál es la distancia total que recorrió el autobús de su punto de partida hasta su destino?

4 km + 4 km = 8 km

8 km.

La info. es incompleta.

2. ¿Cuál es la distancia total que recorrió el autobús de su punto de partida hasta su destino?

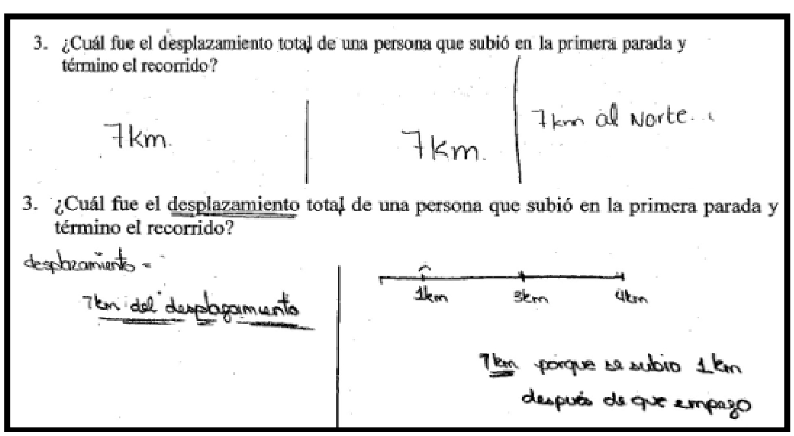
d=? . punto de partida = 0
primera parada 1, 3 segunda,
destino final 4km
1+3+4 = 8km

o 8km
1+3+4=8

Figura 4.2: Respuestas de los estudiantes para la segunda pregunta

Aunque la información que se les proporcionaba a los estudiantes estaba en términos de los desplazamientos, ellos sumaron las magnitudes de éstos. Cuando se trabajó en equipo todos coincidieron con la respuesta y dijeron que eran 8 Km., siendo hasta la discusión grupal donde se le propone hacer una serie de acciones y al plantearles algunos cuestionamientos por parte del profesor que los alumnos se dieron cuenta de que estaban equivocados y que tanto los desplazamientos como el recorrido eran objetos diferentes, por lo que se concluyó que la información con la que contaban era insuficiente para poder dar una respuesta numérica.

En cuanto la pregunta numero tres la mayoría de los estudiantes contestó sin ninguna complicación en el registro numérico, hubo algunos estudiantes que se apoyaron en el registro gráfico para sumar los desplazamientos, como se observa en la Figura 4.3



3. ¿Cuál fue el desplazamiento total de una persona que subió en la primera parada y término el recorrido?

7km.

7km.

7km al Norte.

3. ¿Cuál fue el desplazamiento total de una persona que subió en la primera parada y término el recorrido?

desplazamiento =
7km del desplazamiento

7km porque se subio 1km después de que empezo

Figura 4.3: respuestas para la tercer pregunta de la primera actividad

También se puede observar en las respuestas de los estudiantes que no todos tomaron en cuenta las dos características del desplazamiento total, magnitud y dirección (sentido), por lo que más adelante en la pregunta número seis se retomó y discutió qué tan necesario era considerar ambas características.

En el inciso cuatro se pide que elaboraran un diagrama que mostrara los desplazamientos hechos por el autobús a partir de la primera parada hasta el destino final. Como se observa en la Figura 4.4 la mayoría de los estudiantes al trabajar de manera individual hicieron su diagrama sin ningún sistema de referencia e incluso sin la presencia de vectores que indicaran los desplazamientos proporcionados, en algunos casos cuando se trabajó en equipo se consideró necesaria la presencia de un sistema de referencia para indicar en qué dirección se desplazaba el autobús.

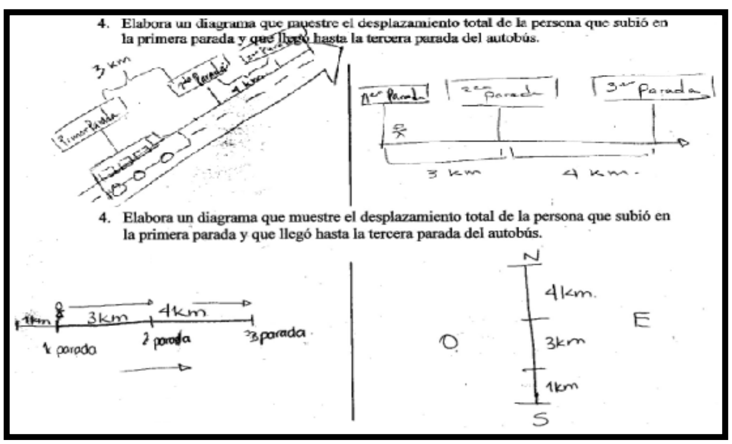


Figura 4.4: Respuestas correspondientes a la pregunta cuatro de la primera actividad

Con la pregunta número cinco se esperaba que el estudiante lograra darse cuenta que el desplazamiento es distinto que el recorrido, pero no se logró pues todos los estudiantes contestaron en ambas preguntas que para los dos casos era de 8 Km. Como se mencionó anteriormente fue hasta el debate y con esa serie de preguntas guiadas por el profesor que se logró dicha distinción.

Los estudiantes para dar respuesta a este reactivo realizaron una serie de tratamientos, en este caso como los desplazamientos son en la misma dirección y sentido los tratamientos consistieron en sumar las magnitudes de los desplazamientos (1Km. + 3Km. + 4Km. = 8Km.) en el registro numérico para dar respuesta a dicha pregunta. Los estudiantes no presentaron ninguna dificultad para resolver dicha pregunta estando de acuerdo con la respuesta dada por los compañeros en las tres etapas de la implementación (trabajo individual, trabajo en equipo y debate grupal).

En la pregunta número seis la mayoría de los estudiantes respondió de Sur a Norte e incluso de abajo para arriba, también hubo estudiantes que contestaron como en la segunda respuesta de la figura, 90° del Este al Norte, a pesar de que se les había explicado al principio de la actividad que como convención los ángulos siempre estarían medidos del Este hacia el Norte (EN) por lo que era suficiente con que pusieran el ángulo en este caso 90° o bien hacia el Norte solamente, pero en el debate de manera grupal se aclararon las dudas quedando claro que bastaba con proporcionar el ángulo y con ese dato se tendría tanto la dirección como el sentido.

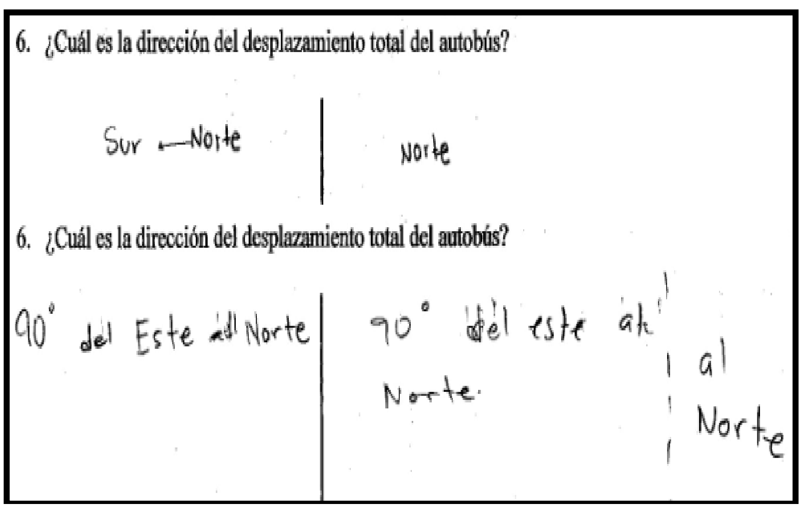


Figura 4.5: Respuestas de los estudiantes para el sexto reactivo

Durante la discusión los alumnos acordaron que no bastaba con decir qué tanto se había desplazado el autobús sino que era importante agregar una dirección (sentido) para que se especificara en dónde se terminó el desplazamiento (haciendo que ese punto fuera único); además, también se aclararon algunas dudas que surgieron durante la resolución de la pregunta número tres.

En la pregunta número siete se les pedía a los estudiantes que realizaran un diagrama que mostrara el desplazamiento total del autobús, por lo que este reactivo no causó conflicto alguno, al igual que en casos anteriores donde se pedía o incluso donde los estudiantes hicieron uso del registro gráfico como apoyo, en la mayoría de los casos no se hace uso de un sistema de referencia. Pero durante el debate se acordó necesaria la presencia de éste por los motivos que ya se mencionaron anteriormente.

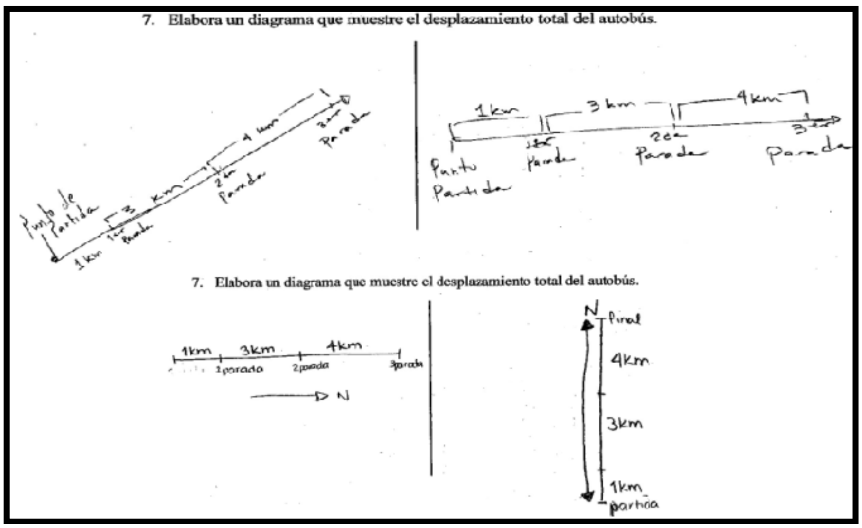


Figura 4.6: Diagramas elaborados por los estudiantes de manera individual (lado izquierdo) y por equipo (lado derecho) correspondientes a la pregunta siete

De manera general la participación de los estudiantes fue buena, durante el trabajo individual los estudiantes presentaron algunas dudas que en algunos casos fueron resueltas durante el trabajo en equipo, con las opiniones de los integrantes y al mostrar las estrategias que utilizaron para resolver el problema. En algunos casos fue hasta el debate grupal donde aclararon dudas, ya que era un tercer acercamiento con la situación planteada cuando los distintos equipos presentaron la manera de cómo lo resolvieron, el acuerdo al que llegaron entre ellos y el argumento de por qué llegaron a ese acuerdo.

En el caso particular de la pregunta número dos en el que los estudiantes no alcanzaban a percibir la diferencia entre recorrido y desplazamiento, fue necesaria la intervención del maestro para reorientar la actividad por medio de una serie de instrucciones y preguntas que los hizo darse cuenta de la diferencia que existía entre estos dos objetos.

4.1.2 Actividad 2

La actividad número dos causó confusión en los estudiantes porque parte de la información estaba proporcionada en una imagen en la que se indicaba que cada nivel era de 3 metros, la confusión se presentó cuando algunos estudiantes consideraron que para subir a un tercer nivel había que subir 9 metros, pues no consideraban que el primer nivel correspondía a la planta baja y que subir a un tercer nivel tendría una magnitud de 6 metros, por lo que muchos estudiantes presentaron ese tipo de errores como se muestra en la Figura 4.7

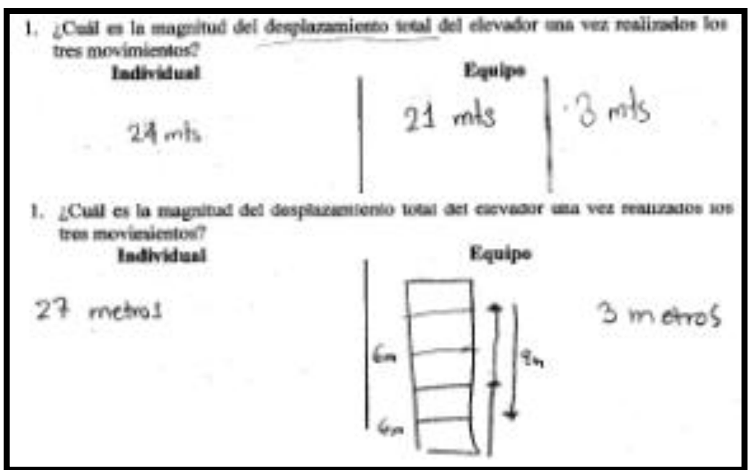


Figura 4.7: Respuestas dadas por los estudiantes correspondientes al primer reactivo de la segunda actividad

Como se puede observar en los dos ejemplos de respuestas dada por los estudiantes en un primer momento (trabajo individual) su respuesta es partiendo de que el nivel uno se encuentra a tres metros de altura, y al igual que la mayoría de los estudiantes realizaron una serie de tratamientos (dichos tratamientos se realizaron en el registro numérico) que le permitieron dar respuesta a la pregunta.

Los tratamientos en este caso al igual que en la primera actividad como los desplazamientos son unidireccionales, sólo bastaba con sumar las magnitudes de los desplazamientos considerando también el sentido que estos tuvieran (6m+6m+ (-9m)=3m.) pero algunos estudiantes ignoraron que el último desplazamiento tiene un sentido diferente a los dos primeros. Por lo que los lleva a dar una respuesta errónea. (6m+6m+9m=21m.)

En algunos casos cuando se trabajó en equipo corrigieron la magnitud de los desplazamientos considerando que el primer nivel correspondía a la planta baja.

En la mayoría de los casos fue en la discusión grupal que se dieron cuenta de que los desplazamientos eran en distinto sentido y que eso impedía que sólo sumaran las magnitudes de los desplazamientos. Los estudiantes acordaron que bastaba con restar el último desplazamiento por estar todos en la misma dirección.

Con respecto a la pregunta número dos en la que se les pedía que elaboraran un diagrama que mostrara todos los desplazamientos hechos por el elevador e incluyeran el vector resultante de los tres desplazamientos, la mayoría no graficó el vector resultante. En algunos casos se unió con una línea el inicio de los desplazamientos con el punto final del último desplazamiento pero no se puede saber si en verdad esa era su idea o bien del punto final del último desplazamiento hacia el inicio, pues no se agregó ninguna flecha que nos indicara el sentido del vector resultante.

Este tipo de respuestas se observa en las representaciones dadas por los estudiantes con respecto a la pregunta en la Figura 4.8

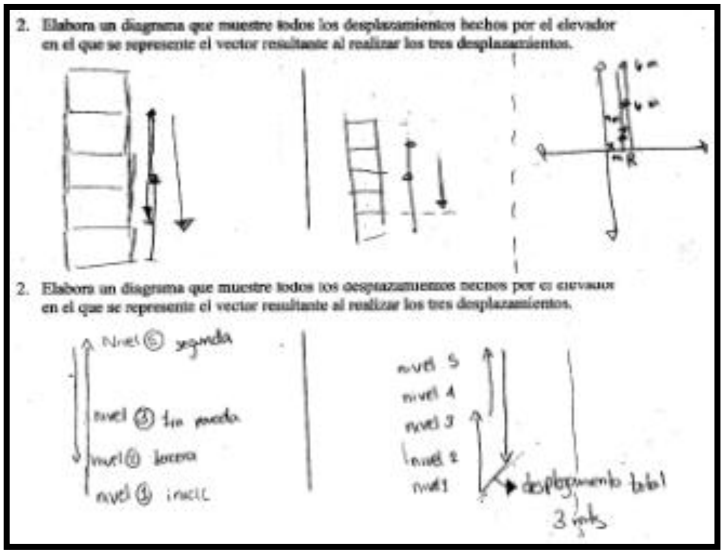


Figura 4.8: Elaboración de diagramas por parte de algunos estudiantes correspondientes al reactivo 2 en sus dos etapas (trabajo individual y por equipo)

Fueron muy pocos los estudiantes que incluyeron en su registro gráfico un sistema de referencia y el vector resultante con su sentido de manera correcta, lo cual corrigieron una vez que los diferentes equipos presentaron, en el debate, las diferentes estrategias que ellos utilizaron para resolver el problema planteado en la actividad.

Con respecto a la pregunta número tres en la que se les pedía a los estudiantes que dieran la magnitud de los dos últimos desplazamientos, al igual que en la pregunta uno se ignoró el sentido de uno de los desplazamientos para realizar la suma, en otros casos se daba las magnitudes de los dos desplazamientos por separado.

Como se observa en la Figura 4.9 en muchas de las respuestas dadas por los estudiantes se incluía un signo negativo para indicar la magnitud del desplazamiento, en la minoría de los casos se aclaró durante el trabajo en equipo, pero la mayoría de los estudiantes se percataron que los desplazamientos no pueden tener una magnitud negativa hasta el debate grupal.

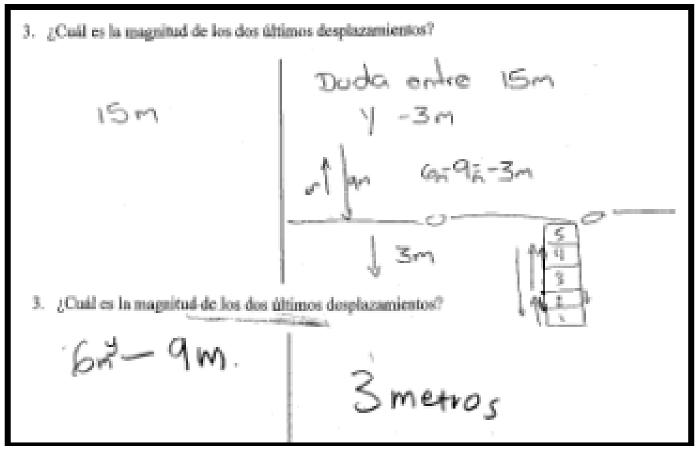


Figura 4.9: Respuestas dadas por dos estudiantes para la tercer pregunta

En las preguntas cuatro y cinco se pedía que calcularan la dirección y el sentido de la resultante en dos momentos diferentes, el primero correspondiente a los dos últimos desplazamientos y en la pregunta cinco al desplazamiento total.

En la pregunta número cuatro en algunos casos se daba la información por separado, es decir proporcionaban tanto la magnitud como la dirección de los dos desplazamientos, pero durante el debate se aclaró que los datos que se pedían correspondían a la resultante de ambos desplazamientos por lo que los estudiantes respondieron en su mayoría de manera correcta.

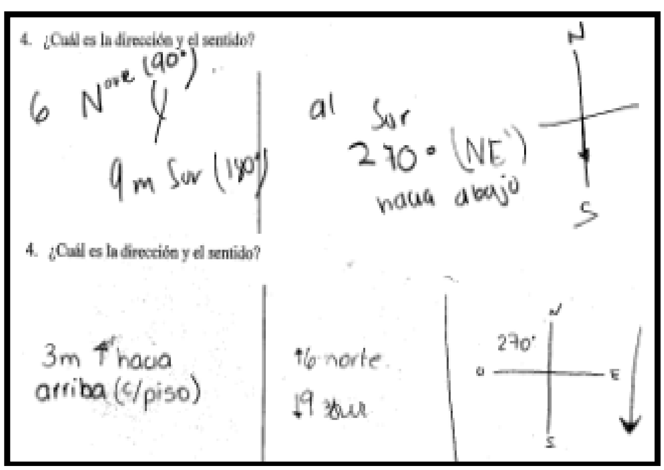


Figura 4.10: Respuestas de dos estudiantes tanto en su trabajo individual como por equipo

Con respecto a la pregunta número cinco los estudiantes presentaron algunas dificultades para indicar cuál era el sentido de la resultante, pues no estaban seguros si era sentido Norte o Sur. Como se observa en las respuestas (hacia abajo o hacia arriba).

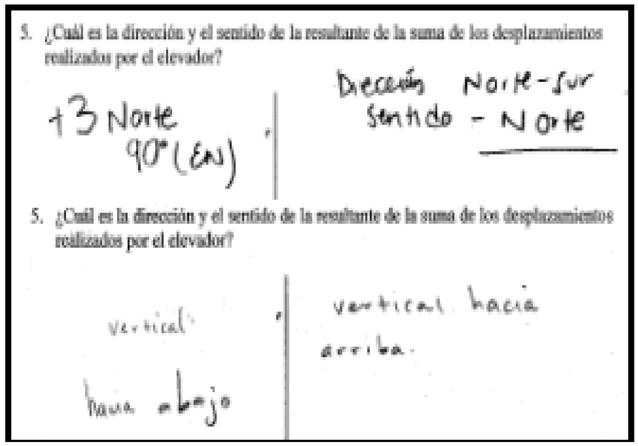


Figura 4.11: respuesta correspondiente a la pregunta cinco

Durante la aplicación de la segunda actividad los estudiantes estuvieron participando de manera frecuente, durante el trabajo individual los estudiantes presentaron algunas dudas que en algunos casos fueron resultas durante el trabajo en equipo, o bien durante el debate en el que los distintos equipos expusieron la forma en cómo lo resolvieron y al acuerdo al que llegaron entre ellos, así como los argumentos que les permitió llegar a dichos acuerdos.

En esta segunda actividad la mayoría de las dificultades surgieron en torno al sentido de los desplazamientos, pues en algunos casos se ignoraba para realizar la suma de éstos obteniendo una respuesta errónea o bien al momento de graficar el vector resultante se olvidaban de que se realiza a partir del punto inicial del primer desplazamiento hasta el punto final del último desplazamiento (por lo que presentan dificultades para indicar el sentido del vector resultante).

4.1.3 Actividad 3

En la situación que se plantea en la actividad número tres se le proporciona a los estudiantes los desplazamientos que hace una persona encargada de supervisar una obra de construcción (reparación de la carretera Bahía de Kino- Hermosillo) en dos casos diferentes:

Primer caso: el primer desplazamiento es de 4.5 Km. hacia el Este y el segundo de 2Km. hacia el Norte.

Segundo caso: el primer desplazamiento es de 2Km. hacia el Este y el segundo de 3Km. con una dirección de 30° EN.

En el primer inciso se les pide a los estudiantes que realicen un bosquejo mostrando los desplazamientos hechos por el supervisor, por lo que esta pregunta no causó ningún conflicto pues los estudiantes interpretaron de manera correcta la información proporcionada de manera escrita e hicieron una conversión hacia el registro gráfico, aunque es importante señalar que al igual que en casos anteriores algunos estudiantes realizaron una representación gráfica sin considerar explícitamente un sistema de referencia, como se observa en las Figura número 6.12 correspondiente a esta actividad. De la misma manera cuando grafican los desplazamientos del supervisor correspondientes al caso dos, algunos estudiantes sólo hacen explícita la magnitud en la representación gráfica pero no indican el ángulo del segundo desplazamiento aunque éste se les proporciona.

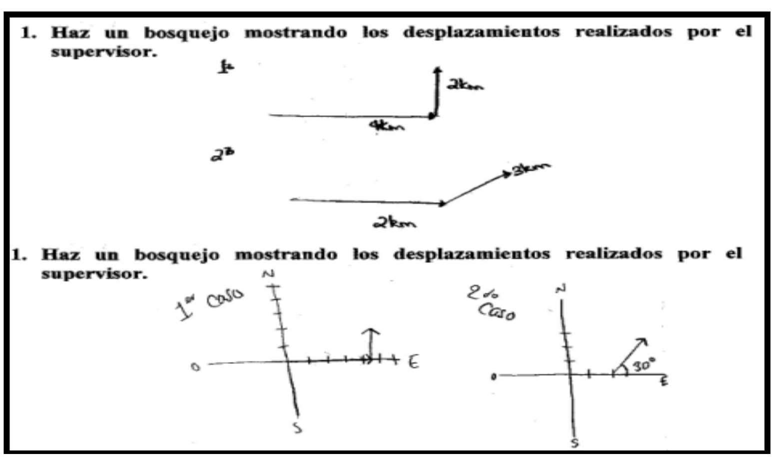


Figura 4.12: Respuestas dadas por algunos estudiantes para el inciso número uno

En la pregunta número dos se les pide a los estudiantes que calculen el recorrido hecho por el supervisor para cada caso, con la intención de que retomen lo que se discutió en la primera actividad respecto de la diferencia que hay entre recorrido y desplazamiento. A pesar de que en la primera actividad se discutió la diferencia entre esos dos objetos, las respuestas de la mayoría de los estudiantes nos indican que aún tienen problemas para identificar la diferencia entre lo que es el desplazamiento y el recorrido.

Los movimientos del supervisor están dados en términos de desplazamientos por lo que la información con la que cuentan los estudiantes es insuficiente para poder determinar los recorridos, pero fue hasta el debate de manera grupal en el que se percataron y recordaron la discusión que se había llevado a cado sobre estos objetos, por lo que concluyeron después de una serie de preguntas guiadas por parte del profesor que no podían dar una respuesta numérica especifica, pues la información no era suficiente.

La dinámica que se realizó por parte del profesor consistió en seleccionar a un estudiante, pedirle que se parara de su asiento e indicarle que hiciera algunos movimientos por el salón, por ejemplo: se le pidió que caminara hacia adelante algunos pasos y después que girara a la derecha para seguir caminando, una vez que se detuvo se le preguntó al resto del grupo que si cuál había sido el recorrido de su compañero y cuál el desplazamiento total realizado, percatándose de que la magnitud del desplazamiento sólo considera la distancia que hay del punto de inicial al punto final. Mientras que la magnitud del recorrido es la longitud del camino que siguió el estudiante para llegar del punto inicial al punto final, lo cual se puede hacer de muchas maneras diferentes manteniendo el mismo desplazamiento.

Después se le pidió a otro estudiante que se parara del asiento y que caminara hacia adelante, le diera 3 vueltas al primer banco y que regresara a su lugar y se sentara, para después preguntar cuál había sido el recorrido y el desplazamiento total, por lo que los estudiantes se dieron cuenta de que aunque se realizara un recorrido grande el desplazamiento total podría tener magnitud cero.

En la Figura 4.13 se observa cómo los estudiantes confunden el objeto recorrido con el objeto desplazamiento y al principio no logran distinguir que un desplazamiento puede ser producto de muchos recorridos.

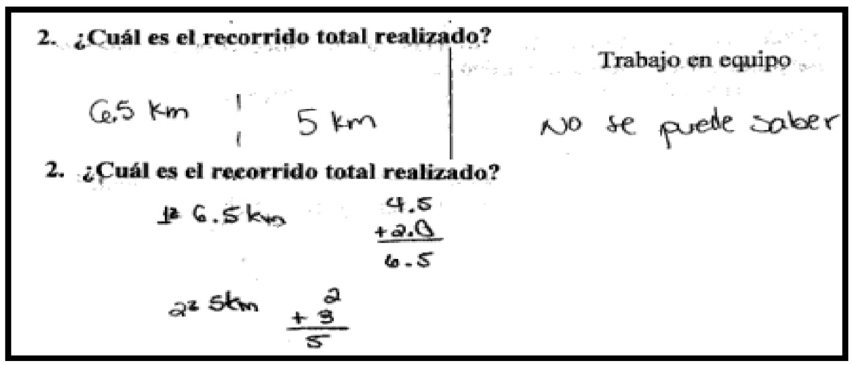


Figura 4.13: Respuestas dadas por los estudiantes para el segundo reactivo

En la pregunta número tres se les pide a los estudiantes que grafiquen el desplazamiento total hecho por el supervisor para cada caso, la respuesta fue buena en todos los estudiantes y no tuvieron ninguna dificultad, en las respuestas pudimos observar que la mayoría de los estudiantes hizo uso de un sistema de referencia para comenzar a representar los desplazamientos en el registro gráfico, como se observa en la Figura 4.14

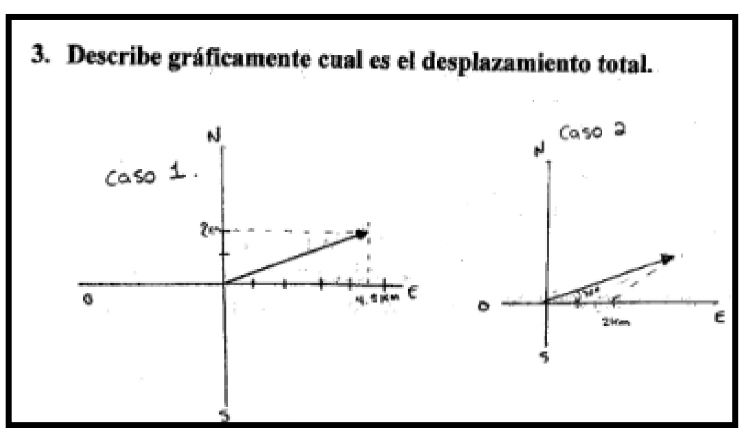


Figura 4.14: Diagrama hecho por un estudiante para el inciso 3

En el inciso cuatro de esta actividad aparece la primer situación en la que los desplazamientos realizados no son unidireccionales, en el primer caso los desplazamientos hechos por el supervisor forman un ángulo recto, por lo que al trazar la resultante se forma un triángulo rectángulo, en el que la hipotenusa representa la magnitud del desplazamiento total, entonces para calcular dicha magnitud (desplazamiento total) se espera que el estudiante aplique el Teorema de Pitágoras pues conoce la magnitud de dos lados del triángulo (los catetos); es decir, sustituir en la expresión aunque los estudiantes utilizan la expresión para responder a la pregunta, ver Figura 5.15.

Para el segundo caso en el registro gráfico no aparece un triángulo rectángulo, por ello se espera que los estudiantes recurran a la experiencia que tuvieron con el primer caso y que a partir de la información proporcionada en el texto puedan hacer tratamientos correspondientes para construir triángulos rectángulos que les permitan simplificar el problema.

Muchos de los estudiantes aplicaron el Teorema de Pitágoras para calcular la magnitud del desplazamiento total hecho por el supervisor, olvidando que dicho Teorema es válido sólo para triángulos rectángulos, como se aprecia en la siguiente Figura. Esta es una situación que ya se había detectado en varios estudiantes cuando se les aplicó el diagnóstico antes de iniciar la aplicación de la secuencia.

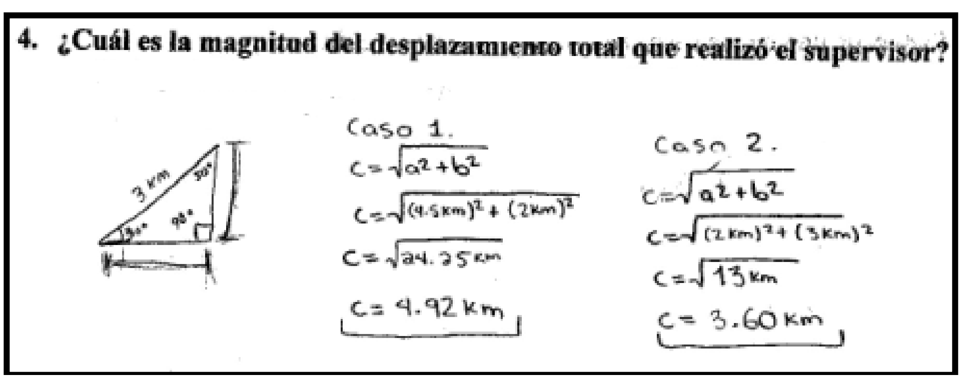


Figura 4.15: Respuesta dada por un estudiante el cual aplica el teorema de Pitágoras para resolver los dos casos

Otros estudiantes sí se percataron de que podían hacer uso de las funciones trigonométricas (ya conocidas por ellos) como:

Pues conocían uno de los lados y un ángulo, para hacer una conversión de las coordenadas polares hacia las coordenadas cartesianas que les permitiría transformar el problema inicial en otro que involucrara el Teorema de Pitágoras, una vez realizada la conversión aplicaron una serie de tratamientos en el registro numérico, como se observa en la siguiente Figura, lo que les permitió dar respuesta a dicha pregunta.

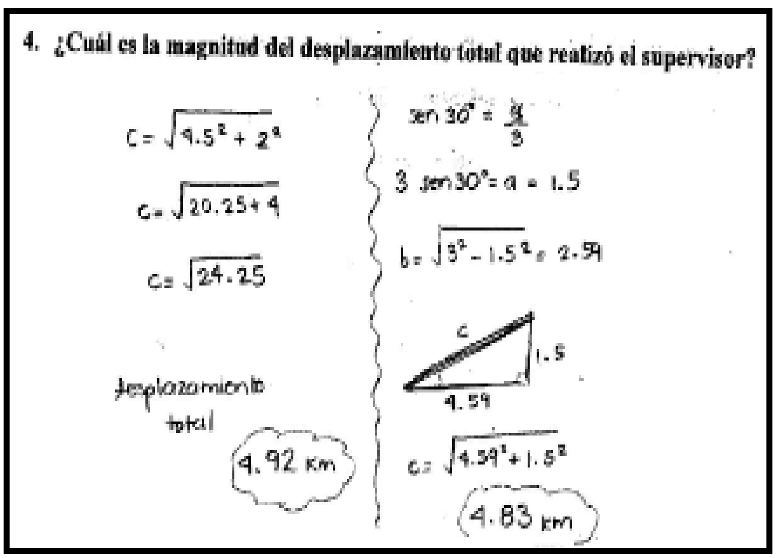


Figura 4.16: Respuesta de un estudiante que aplicó de manera correcta el Teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas

4.1.4 Actividad 4

En la actividad número cuatro la información estaba proporcionada en términos de los desplazamientos hechos por una persona para poder llegar de su casa al trabajo.

En la primera pregunta se les pide a los estudiantes que calculen la magnitud y el ángulo del desplazamiento total cuando se realizan sólo los dos primeros desplazamientos, es importante mencionar que todos los estudiantes hicieron una representación gráfica del problema (conversión de los datos proporcionados en registro numérico), como parte de la estrategia para resolver el problema.

Como los estudiantes ya estaban un poco más familiarizados con el hecho de formar triángulos rectángulos para poder aplicar el Teorema de Pitágoras, a partir de la información proporcionada, la mayoría no tuvo complicaciones para comenzar a trabajar; los problemas o confusiones se presentaron porque muchos estudiantes no tenían claro qué función usar. Algunos estudiantes no saben cuando utilizar la función seno o coseno y en ocasiones las confunden durante el proceso de solución.

La mayoría de los estudiantes resolvió sin dificultades la pregunta, pues convierten la información proporcionada en coordenadas polares a coordenadas cartesianas, haciendo uso de las funciones trigonométricas en datos, para después hacer uso del Teorema de Pitágoras (sumando los catetos correspondientes de los dos triángulos rectángulos que forman con cada uno de los dos desplazamientos) y aplicar una serie de tratamientos en el registro numérico que les permitan dar respuesta.

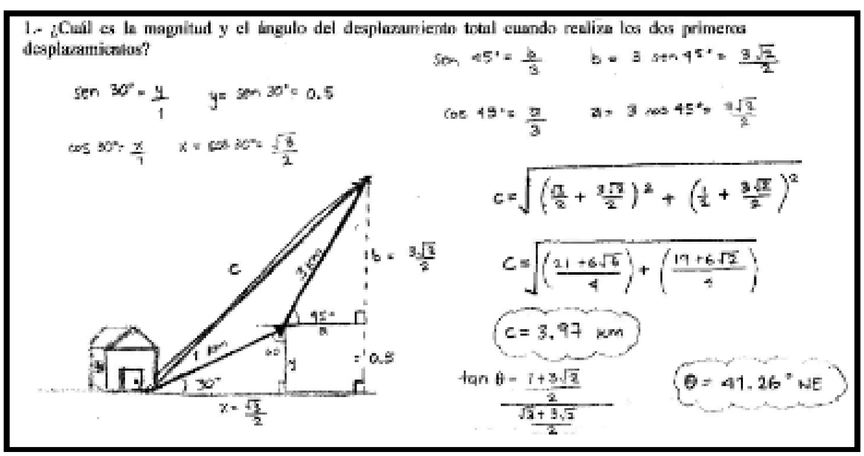


Figura 4.17: Respuestas dada para el primer reactivo de la actividad número 4

En cuanto al cálculo del ángulo del desplazamiento total de los dos primeros desplazamientos, tampoco presentó complicación pues como ya habían calculado tanto el cateto opuesto como el adyacente del desplazamiento total, sólo bastaba con aplicar la tangente inversa (tratamientos que también se observan en la Figura 4.17).

En la pregunta número dos se les pide a los estudiantes que calculen el ángulo del desplazamiento total formado por los tres desplazamientos que realiza la persona para poder llegar de su casa al trabajo.

Algunos de los estudiantes no pudieron resolver el problema porque el último desplazamiento tenía un ángulo de 130° y no sabían cómo formar el triángulo rectángulo para poder hace la conversión de coordenadas polares a cartesianas. Otra de las dificultades que se presentó en este problema fue en torno a la suma de los catetos pues el último desplazamiento fue hacia la izquierda por lo que involucraba una resta en uno de sus catetos y eso confundió en poco pues no sabían interpretar la información que obtenían de realizar los tratamientos en el registro numérico.

Una vez que los estudiantes calcularon los catetos realizaron una serie de tratamientos para poder dar respuesta a la pregunta (Ver Figura 4.18).

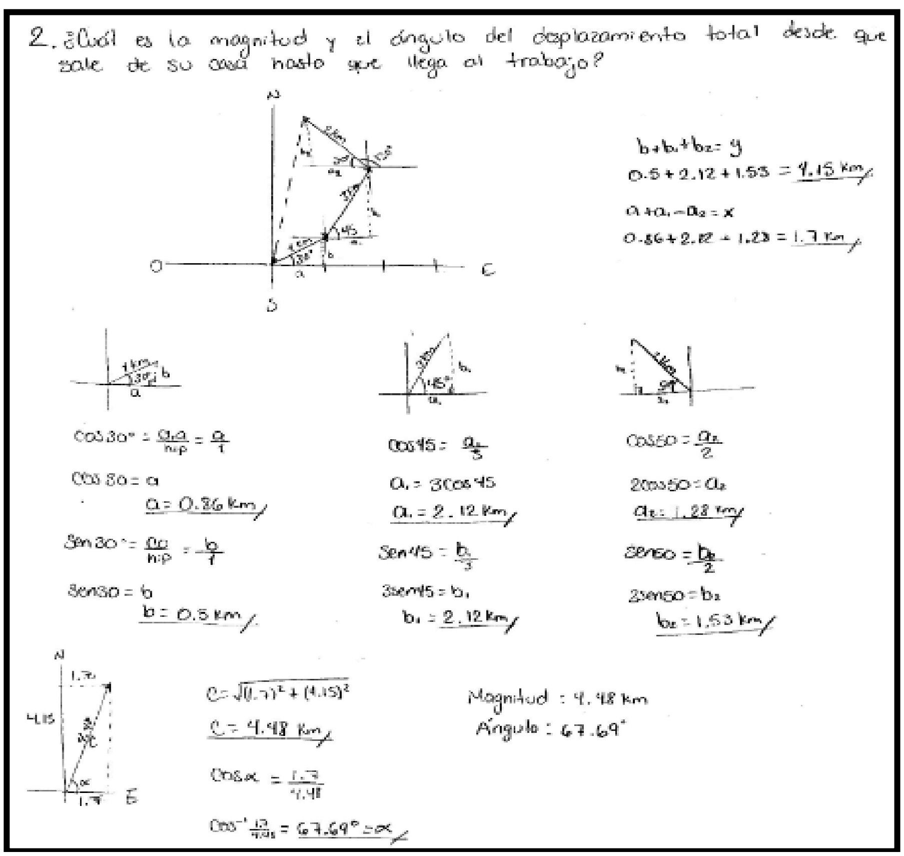


Figura 4.18: Se observan los tratamientos y conversiones que realizó el estudiante para responder dicho reactivo

Considero importante mencionar que aunque los estudiantes ya habían calculado los catetos formados por los dos primeros desplazamientos para dar responder a la primera pregunta y dicha información era necesaria para poder responder esta pregunta, ellos no relacionan qué les puede servir, por lo que vuelven a calcular todos los datos, creen que cada pregunta siempre es independiente de otra y no que pueden haber relación entre ellas.

En la última pregunta se les pide que digan cómo deben ser las características de un cuarto desplazamiento hecho por la persona para trasladarse del trabajo al hospital, si el desplazamiento total de su casa al hospital fue de 9 Km. con un ángulo de 120° EN.

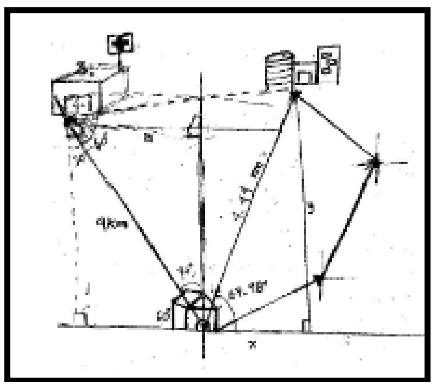


Figura 4.19: Representación del problema planteado en la tercer pregunta

Esta pregunta fue resuelta sólo por un estudiante que logró darse cuenta que en los problemas anteriores lo que hacía para resolver los problemas era convertir o transformar las coordenadas polares en coordenadas rectangulares, conversión para formar triángulos rectángulos que le permiten poder sumar los valores de los catetos correspondientes y obtener así los valores de los catetos de un triangulo rectángulo, es decir realizar tratamientos, cuya hipotenusa representa la magnitud del desplazamiento total.

El estudiante lo que hizo fue relacionar que si sumaba las componentes correspondientes en tendría el valor de la componente del vector resultante entonces: bastaba con despejar la componente que son las que desconocía para obtener las coordenadas de dicho vector, para después aplicar el Teorema de Pitágoras para conocer la magnitud del cuarto desplazamiento y después calcular el ángulo del mismo como podemos observa en la Figura 4.20

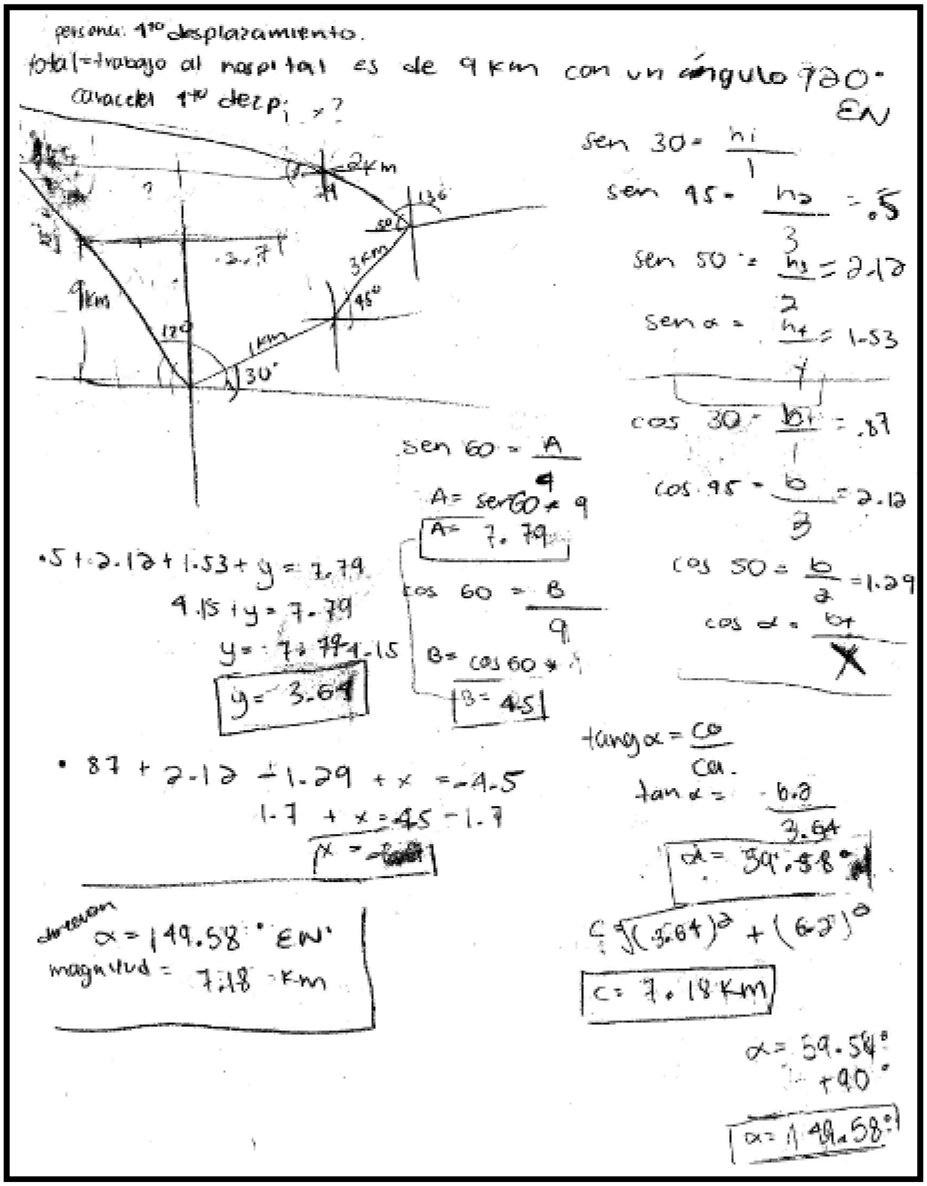
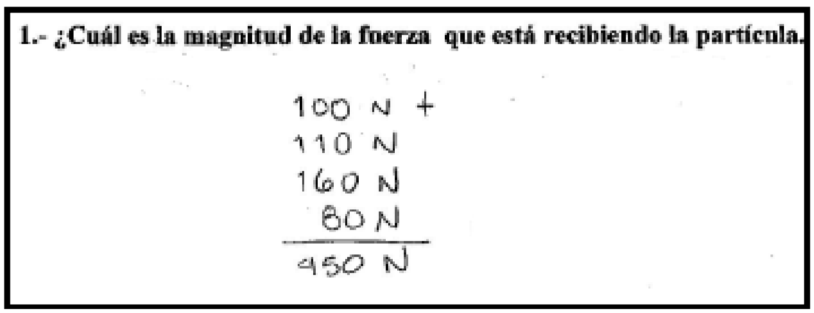


Figura 4.20: Tratamientos y conversiones realizadas para responder dicha pregunta

4.1.5 Actividad 5

En esta actividad, el estudiante tiene que interpretar información que se le proporciona de manera gráfica, en la primera pregunta se les pide a los estudiantes que calculen la magnitud de la fuerza que está recibiendo una partícula, dicha pregunta causó un poco de confusión pues les causaba un poco de conflicto ver en la figura la representación de los vectores que figuraban las fuerzas apuntando hacia afuera y no hacia la partícula.

La mayoría de los estudiantes sumó las magnitudes de las fuerzas tratando a los vectores como escalares para indicar la fuerza total que estaba recibiendo la partícula como se puede observar en la Figura 4.21

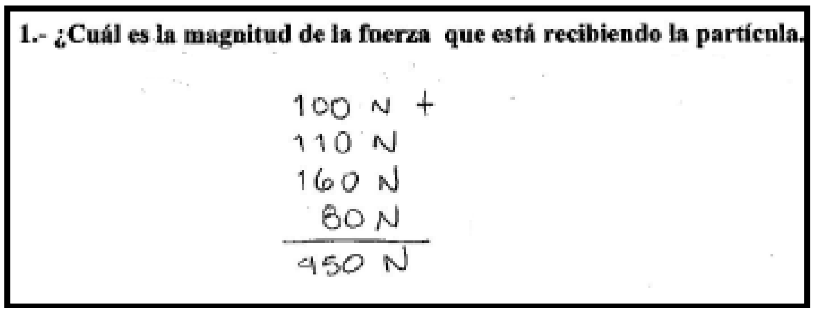

1.- ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que está recibiendo la partícula.

100 N +
110 N
160 N
80 N
―――
450 N

Figura 4.21: Suma de vectores como escalares

Otra dificultad que presentaron los estudiantes se manifestó al intentar graficar la suma de los vectores de manera gráfica, pues muchos no recordaron que ésta se hace colocando en el punto final del primer vector, el punto inicial del segundo vector y así sucesivamente, una vez que se aclararon las dudas durante el trabajo en equipo o bien en algunos casos durante el debate, la mayoría de los estudiantes hicieron uso de la representación gráfica que se les proporcionó para formar un triángulo rectángulo en cada fuerza. Una vez que hicieron lo anterior realizaron una conversión al transformar las coordenadas polares a coordenadas rectangulares para obtener las componentes horizontal y vertical de cada fuerza . Al obtener las componentes horizontal y vertical de cada fuerza, los estudiantes las sumaron para obtener la componente horizontal de la fuerza resultante y lo mismo hicieron con las componentes verticales, una vez que tuvieron las componentes horizontal y vertical las asociaron con los catetos de un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa representa la magnitud de la fuerza resultante. Con esta información recurrieron al

Teorema de Pitágoras para obtener la magnitud de la fuerza total como se observa en la Figura 4.22.



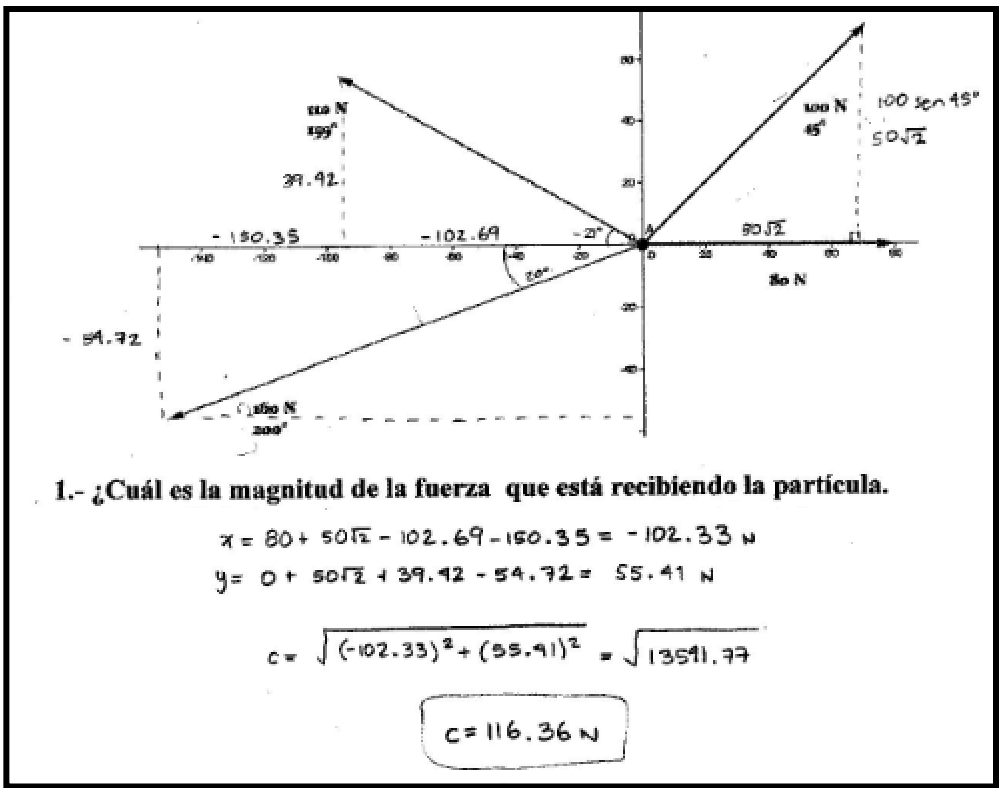
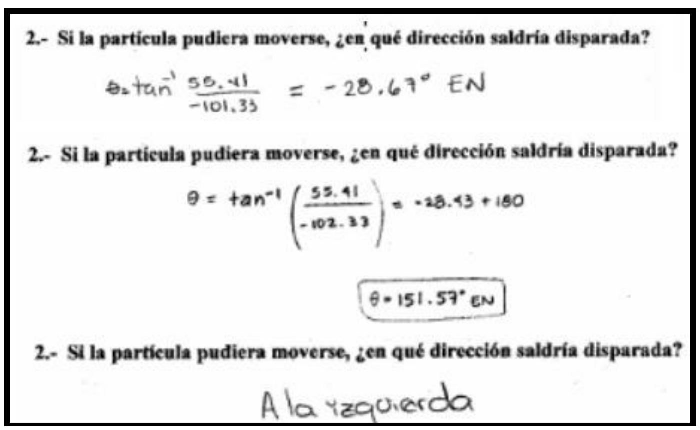


Figura 4.22: Tratamientos y conversiones realizados por los estudiantes para responder la pregunta uno de la actividad 5

En cuanto a la pregunta número dos en la que se le pide al estudiante que diga en qué dirección saldrá disparada la partícula, en caso de poder moverse, no se presentó ninguna dificultad pues en su mayoría los estudiantes respondieron de manera acertada haciendo uso de la tangente para calcular el ángulo de la fuerza resultante a través de la aplicación de una serie de tratamientos, el que no se hayan presentado dificultades se puede deber a que en las actividades previas ya se habían realizado este tipo de tratamientos y conversiones.

En algunos casos los estudiantes no interpretaban de manera correcta la información proporcionada por la calculadora que les reportaba un ángulo negativo y así lo dejaban en la respuesta, cuando el ángulo que se pedía era el medido del Este hacia el Norte (EN), en otros casos la respuesta de algunos estudiantes fue basadas en la interpretación de la representación gráfica de la suma de fuerzas por lo que la respuesta indicaba que la partícula se movería hacia la izquierda, confusión que fue aclarada durante la discusión grupal pues consideraron que era insuficiente la información.

Ejemplos de los casos planteados en el párrafo anterior se muestran en la Figura 4.23



2.- Si la partícula pudiera moverse, ¿en qué dirección saldría disparada?

$\theta = \tan^{-1} \frac{55.41}{-101.35} = -28.67°$ EN

2.- Si la partícula pudiera moverse, ¿en qué dirección saldría disparada?

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{55.41}{-102.33}\right) = -28.43 + 180$

$\boxed{\theta = 151.57° \text{ EN}}$

2.- Si la partícula pudiera moverse, ¿en qué dirección saldría disparada?

A la yzquierda

Figura 4.23: Tres distintas respuestas para la pregunta dos

El primer estudiante contestó de manera correcta proporcionando la información obtenida por medio de la calculadora, pero sin interpretar dicho resultado; el segundo estudiante además de obtener el resultado interpretó la información por lo que suponemos que entendió el resultado obtenido mientras que el último estudiante no calculó ningún ángulo, dado una respuesta incorrecta.

En las respuestas de las preguntas tres, cuatro y cinco no hubo ninguna dificultad pues sólo se les pedía a los estudiantes que respondieran sí todos los integrantes del equipo habían sumado las fuerzas en el mismo orden, y sí no es ese el caso, se les pide comparen sus resultados.

En la pregunta número seis se les pide a los estudiantes que digan cuál es la magnitud de la fuerza resultante si las fuerzas se suman manteniendo el siguiente orden: . En muchos de los casos los estudiantes volvieron a calcular todas los componentes de las fuerzas y las sumaron en el orden que se les pedía, llegando a la conclusión de que el resultado era el mismo, muy pocos estudiantes respondieron sin hacer ninguna operación que el resultado era el mismo pues no importaba el orden de la suma en el resultado de la fuerza resultante, creemos que esto en buena medida influenciados por la propiedad conmutativa de la suma con los números reales.

Como se observa en la Figura 4.24 los estudiantes se apoyan en el registro gráfico como estrategia para la búsqueda de la solución al realizar la suma de los vectores en el orden que se les pidió y vuelven a hacer las conversiones de coordenadas polares a coordenadas rectangulares aunque ya las tenían calculadas pues las utilizaron en la primera pregunta, por lo que en la Figura también se observan las conversiones y los tratamientos que los estudiantes realizan en el registro numérico.

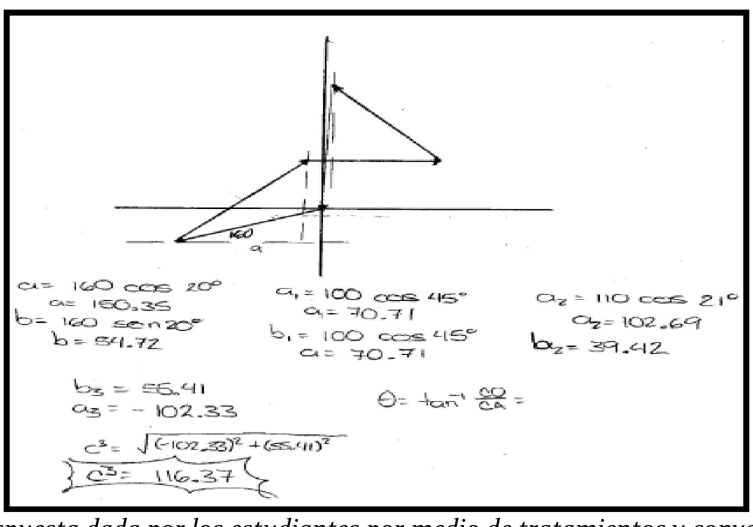
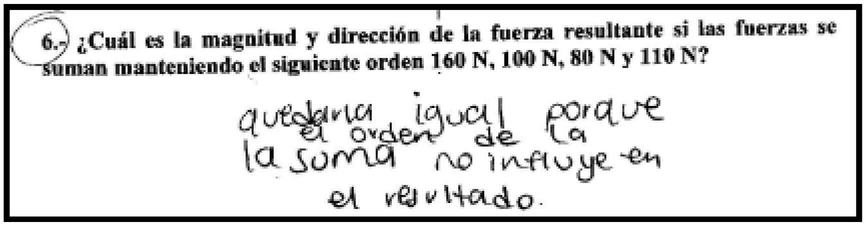


Figura 4.24: Respuesta dada por los estudiantes por medio de tratamientos y conversiones para la pregunta número seis



6.- ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza resultante si las fuerzas se suman manteniendo el siguiente orden 160 N, 100 N, 80 N y 110 N?

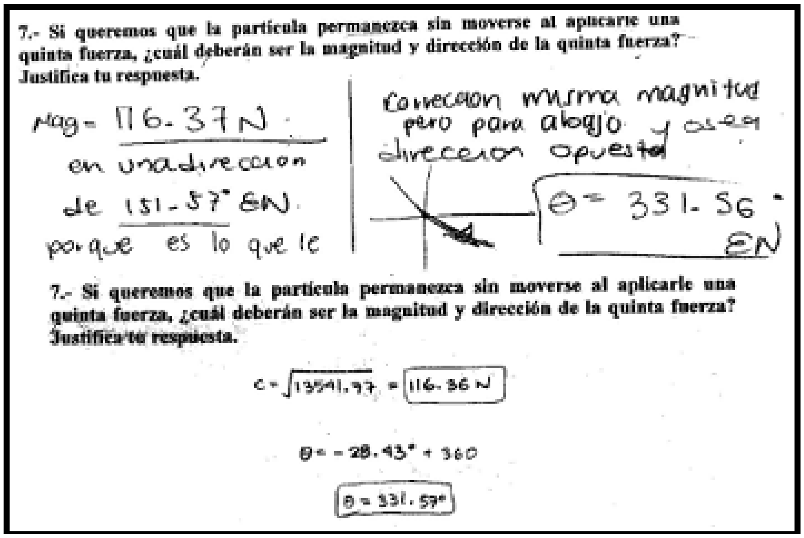
quedaria igual porque
el orden de la
la suma no influye en
el resultado.

Figura 4.25: Respuesta proporcionada de manera intuitiva sin el uso de ningún tratamiento o conversión

En las preguntas tres, cuatro, cinco y seis durante la discusión grupal se destacó que no importa el orden en que se utilicen los vectores en la suma (propiedades conmutativa); además que tampoco importa la manera en que se asocien las parejas de vectores para realizar la suma (propiedad asociativa), pues no todos los estudiantes realizaron la suma en el mismo orden pero si obtuvieron el mismo resultado.

En la última pregunta se les pide a los estudiantes que calculen la magnitud y la dirección de una quinta fuerza que tendría que aplicarle a la partícula para que esta permaneciera sin moverse.

Las respuestas de los estudiantes en su mayoría fueron correctas como se puede observar en la figura siguiente, en la que los estudiantes relacionan que para poder hacer que la partícula se quede inmóvil hay que restar una fuerza equivalente al fuerza resultante pero con un cambio de sentido de 180°, por lo que indican que ésta tiene que tener la misma magnitud de dicha fuerza resultante de las primeras cuatro pero con un sentido contrario, sólo en tres casos se considero que la quinta fuerza tendría las mismas características de la fuerza resultante (magnitud y sentido).



7.- Si queremos que la partícula permanezca sin moverse al aplicarle una quinta fuerza, ¿cuál deberán ser la magnitud y dirección de la quinta fuerza? Justifica tu respuesta.

Mag = 116.37 N.
en una direccion
de 151.57° EN.
porque es lo que le

Correccion misma magnitud
pero para abajo y osea
direccion opuesta

θ = 331.56° EN

7.- Si queremos que la partícula permanezca sin moverse al aplicarle una quinta fuerza, ¿cuál deberán ser la magnitud y dirección de la quinta fuerza? Justifica tu respuesta.

$c = \sqrt{13541.97} = \boxed{116.36\ N}$

$\theta = -28.43° + 360$

$\boxed{\theta = 331.57°}$

Figura 4.26: Respuestas dadas por los estudiantes para enunciar las características de la fuerza que hace que la partícula no se mueva

Esta quinta actividad se complementó con otras dos actividades que se realizaron con apoyo del software GeoGebra que se describirán a continuación.

4.1.6 Actividad 1 GeoGebra

La primera actividad hace referencia a la suma de dos vectores, inicia con una serie de indicaciones para el estudiante, en las que se le pide que active las casillas de los vectores , así como la de sus coordenadas polares.

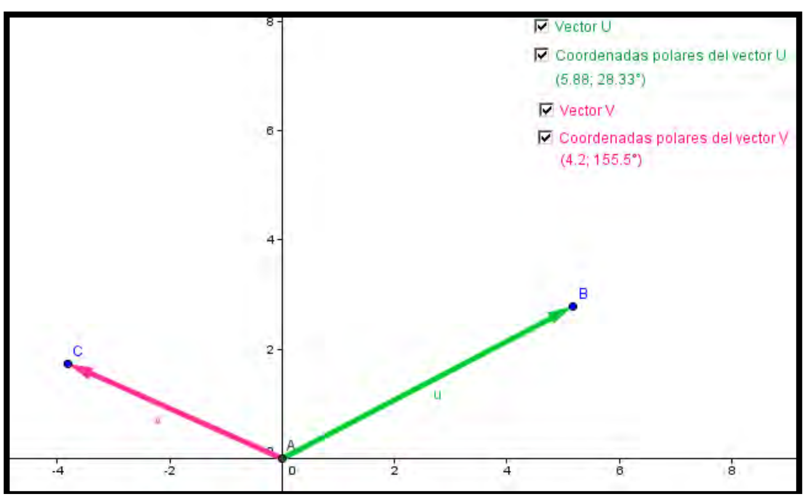
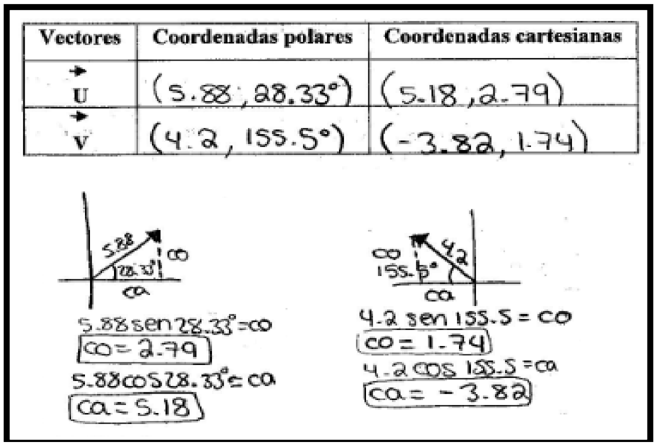


Figura 4.27: Pantalla del software donde el estudiante activa casillas

Después se les pide a los estudiantes que llenen una tabla que viene en las hojas de trabajo, en las que se les solicita calcular las coordenadas cartesianas de cada uno de los vectores, como se observa en la Figura 4.28



Vectores	Coordenadas polares	Coordenadas cartesianas
$\vec{U}$	(5.88 ; 28.33°)	(5.18 , 2.79)
$\vec{V}$	(4.2 , 155.5°)	(-3.82, 1.74)

Figura 4.28: Respuestas dadas por los estudiantes utilizando el software

Posteriormente se les pide activar la casilla correspondiente a la suma geométrica de y que calculen la magnitud y el ángulo (que determina la dirección y el sentido) de dicho vector.

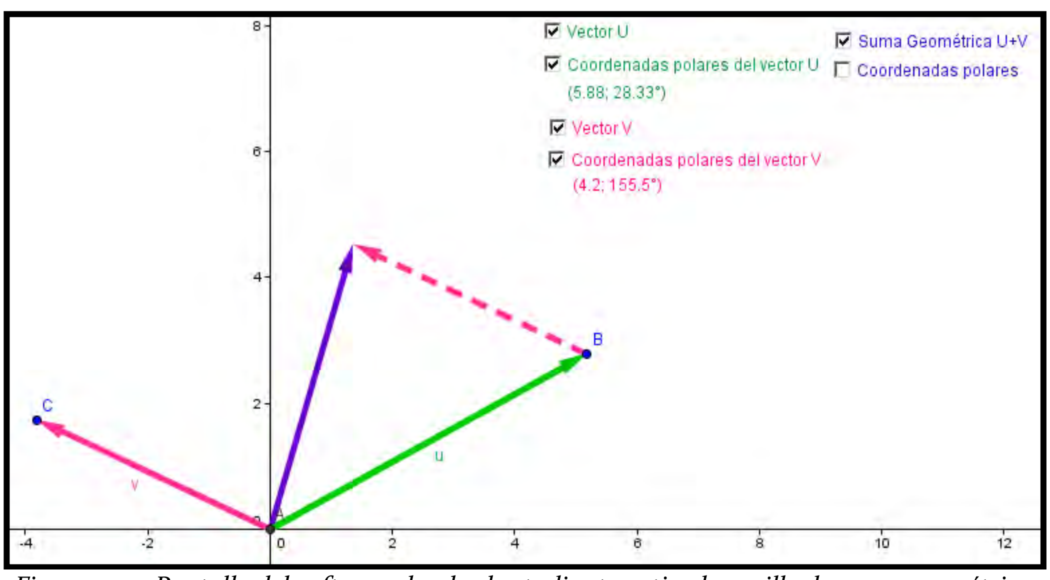


Figura 4.29: Pantalla del software donde el estudiante activa la casilla de suma geométrica

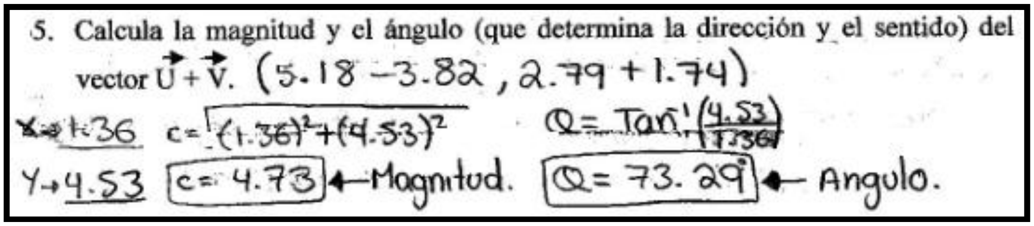


Figura 4.30: Respuesta de los estudiantes haciendo uso de tratamientos en el registro numérico

Posteriormente se le pide que establezcan las coordenadas cartesianas del vector , operación que tampoco les causó ninguna dificultad porque ya las habían calculado con anterioridad.

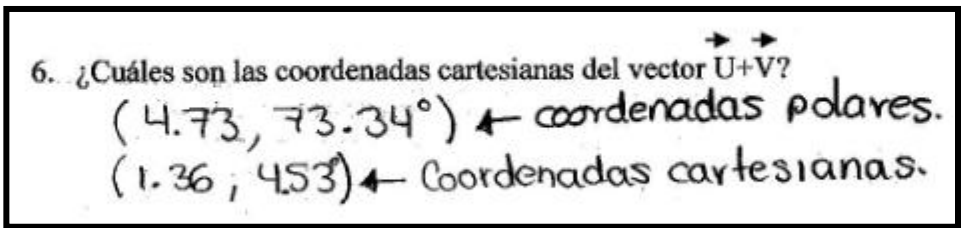


Figura 4.31: Respuesta para la pregunta número seis

La siguiente instrucción consiste en activar la casilla suma geométrica de para después calcular la magnitud y el ángulo de dicho vector.

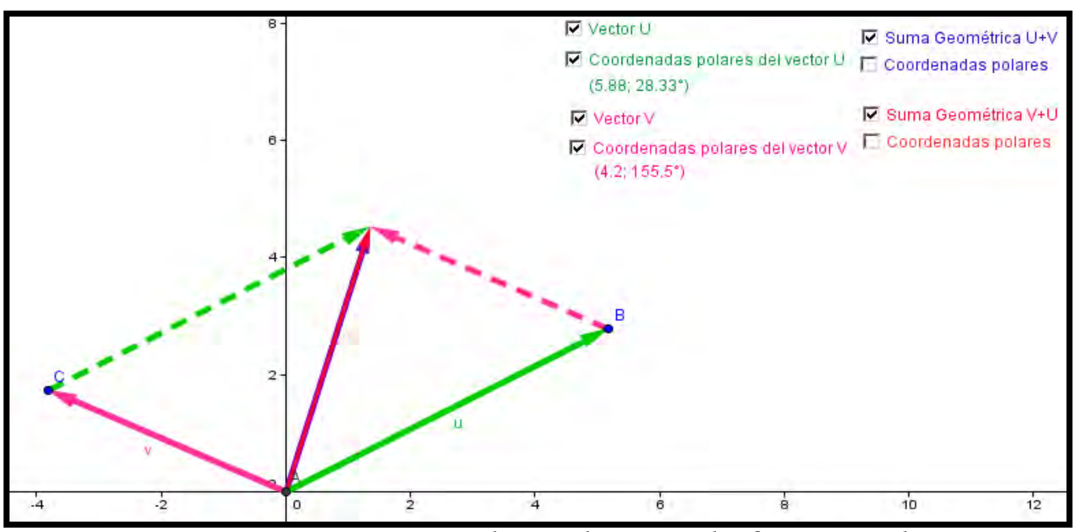


Figura 4.32: Representación vista por los estudiantes en el software GeoGebra

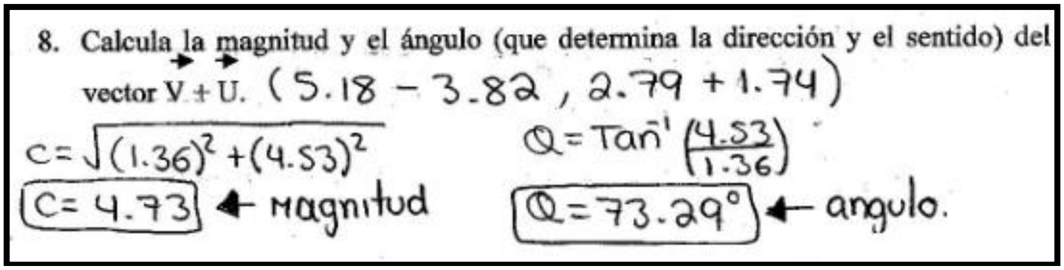


Figura 4.33: Respuesta dada por los estudiantes haciendo uso de tratamientos en el registro numérico.

Como paso siguiente los estudiantes tienen que establecer las coordenadas cartesianas del vector .

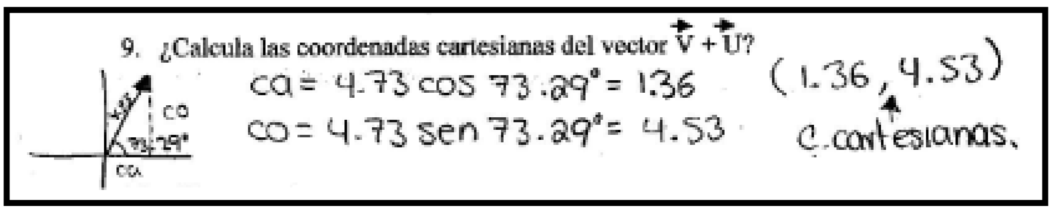


Figura 4.34: Respuesta dada por los estudiantes

Después se les pide a los estudiantes que comparen las coordenadas cartesianas correspondientes de los vectores . Donde la totalidad de las respuestas dadas por los estudiantes decía que eran iguales.

La siguiente instrucción consiste en activar la casilla de coordenadas polares de los vectores , y que comparen las coordenadas polares de cada uno de ellos.

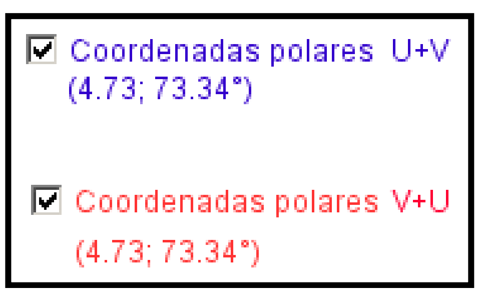


Figura 4.35: Casillas para activar coordenadas polares

Las respuestas de los estudiantes coincidían en que para los dos vectores tanto la magnitud como la dirección eran las mismas.

Posteriormente se les da una serie de instrucciones para que en una tabla registren tres casos distintos, es decir tres valores diferentes para el vector y para el vector tanto en magnitud como en dirección.

En la Figura 4.36 se muestra un ejemplo de los datos obtenidos por un alumno.

	Caso I		Caso II		Caso III	
Vectores	Magnitud	Ángulo	Magnitud	Ángulo	Magnitud	Ángulo
$\vec{U}$	5.97	13.69	6.91	32.28	5.22	56.94
$\vec{V}$	3.25	111.07	4.99	173.83	7.36	143.58

Figura 4.36: Datos llenadas por los estudiantes con ayuda del software

Una vez registrados los valores para los vectores en tres casos distintos el siguiente paso consiste en calcular las coordenadas de los vectores y colocar dicha información en las hojas de trabajo en una tabla, como en el siguiente caso.

	Coordenadas cartesianas	
Casos	$\vec{U}+\vec{V}$	$\vec{V}+\vec{U}$
Caso I	(3.8, 2.57)	(8.8, 2.57)
Caso II	(4.23, .88)	(4.23, .88)
Caso III	(8.72, -3.04)	(8.72, -3.04)

Figura 4.37: Datos calculados por los estudiantes a través de tratamientos y conversiones

A continuación se les pregunta a los estudiantes si para cualquier par de vectores sucederá lo mismo y se le pide que argumente si respuesta. En la siguiente Figura se observan algunas de las respuestas proporcionadas por los estudiantes, en las que coinciden en decir que sí.

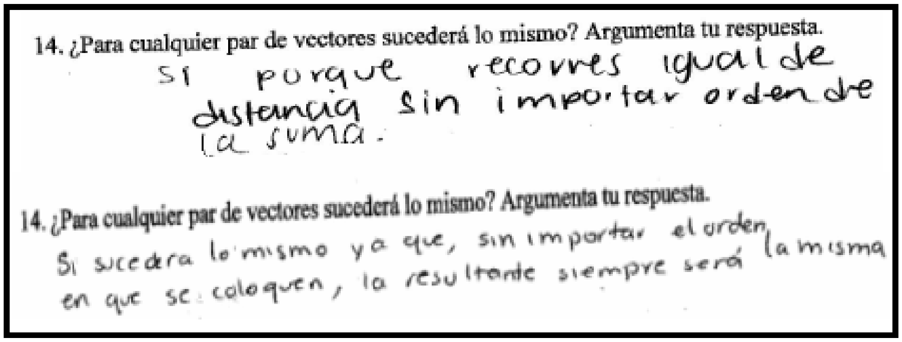


Figura 4.38: Respuesta de los estudiantes para el comportamiento de la suma de los vectores

Por último, se les pide que digan con qué propiedad de los números reales se relaciona el comportamiento de los vectores respecto a la suma, las respuestas de los estudiantes en su mayoría describían el comportamiento y pocos fueron los que escribieron el nombre de la propiedad conmutativa en este caso.

4.1.7 Actividad 2 GeoGebra

La segunda actividad que se realizó con GeoGebra consistía en la suma de tres vectores y comenzaba con una serie de indicaciones para los estudiantes, en las que se les pide que activen las casillas de los vectores , así como la de sus coordenadas polares.

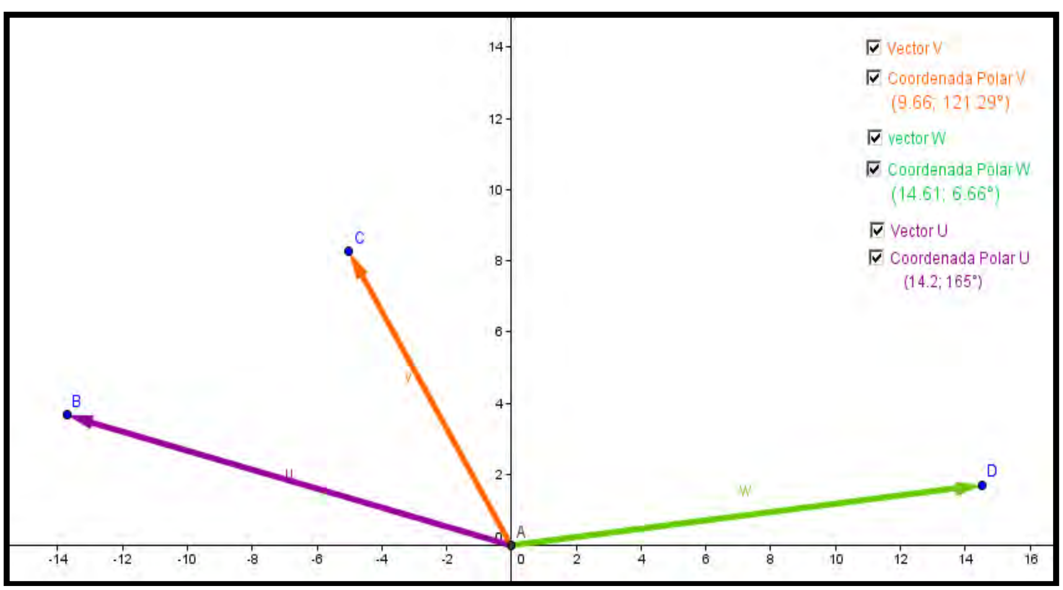


Figura 4.39: Pantalla de GeoGebra donde se presentan tres vectores

Después se les pide a los estudiantes que llenen una tabla que venía en las hojas de trabajo en la que se les indica que calculen las coordenadas cartesianas de cada uno de los vectores como se observa en la Figura 4.40

3. Calcula las coordenadas cartesianas de los tres vectores y llena la siguiente tabla.

Vectores	Coordenadas polares	Coordenadas cartesianas
$\vec{U}$	(14.2, 165°)	(-13.71, 3.69)
$\vec{V}$	(9.66, 121.29°)	(-5.01, 8.25)
$\vec{W}$	(14.61, 6.66°)	(14.51, 1.69)

Figura 4.40: Datos llenados por los estudiantes en las hojas de trabajo

Posterior mente se les pedía activar la casilla correspondiente a la suma de para después activar la casilla suma geométrica de y calcularan la magnitud y al ángulo (que determina la dirección y el sentido) de dicho vector.

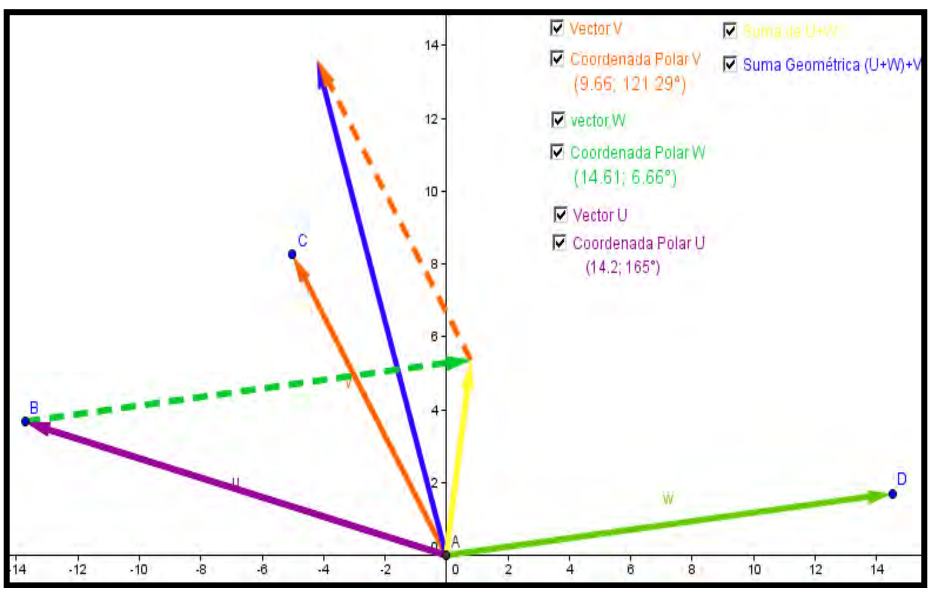
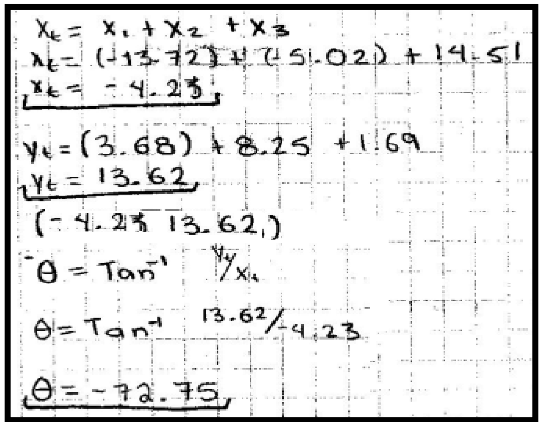


Figura 4.41: Corresponde a la activación de algunas casillas de suma

Después se les pide que establezcan las coordenadas cartesianas y el ángulo del vector , operación que tampoco les causó ninguna dificultad porque ya las habían calculado con anterioridad, cuando llenaron la primera tabla por lo que

solo tenían que sumar las coordenadas correspondientes
como se observa en la Figura 4.42


$X_t = x_1 + x_2 + x_3$

$x_t = (-13.72) + (-5.02) + 14.51$

$x_t = -4.23$

$y_t = (3.68) + 8.25 + 1.69$

$y_t = 13.62$

$(-4.23,\ 13.62)$

$\theta = Tan^{-1}\ y_t/x_t$

$\theta = Tan^{-1}\ 13.62/-4.23$

$\theta = -72.75$

Figura 4.42: Tratamientos realizados por los estudiantes para establecer coordenadas y ángulo

La siguiente instrucción consistía en activar la casilla suma de para después activar la casilla suma geométrica de y a continuación calcularan la magnitud y el ángulo de dicho vector.

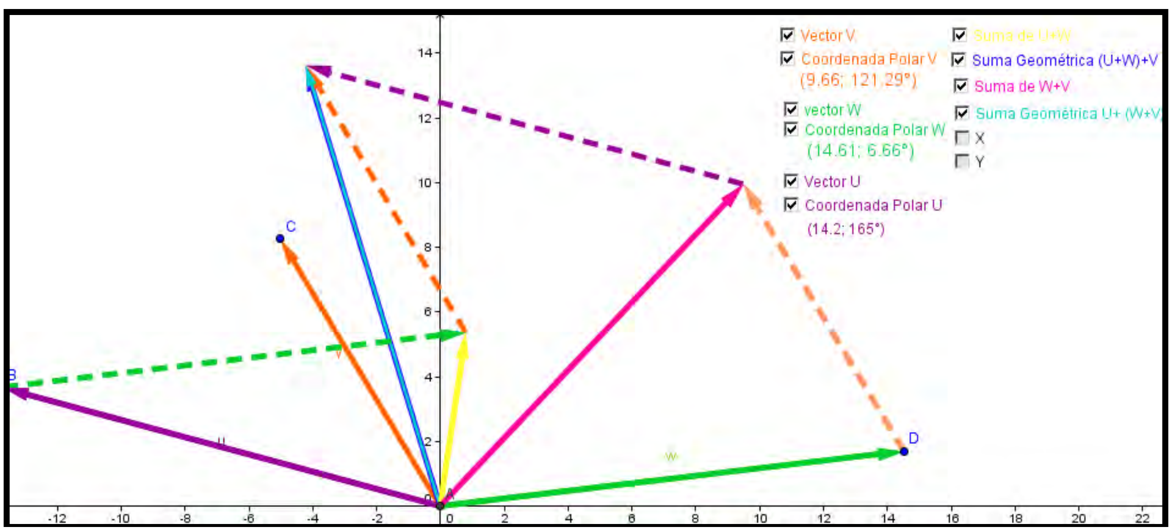


Figura 4.43: Pantalla de GeoGebra donde se observa la activación de casillas de algunas sumas

Como paso siguiente los estudiantes tenían que establecer las coordenadas cartesianas del vector .

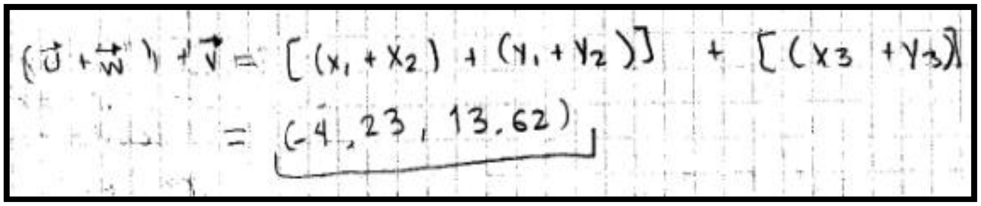


Figura 4.44: Coordenadas proporcionadas por el estudiante para el vector .

Después se les pedía a los estudiantes que compararan las coordenadas cartesianas correspondientes de los vectores . Donde la totalidad de las respuestas dadas por los estudiantes decía que eran iguales o las mismas.

La siguiente instrucción consistía en activar la casilla y que corresponden a las coordenadas polares de los vectores , y que compararan las coordenadas polares de cada uno de ellos. En esta ocasión las coordenadas polares estaban ocultas con el nombre de para tratar de evitar que los alumnos las revisaran con anterioridad.

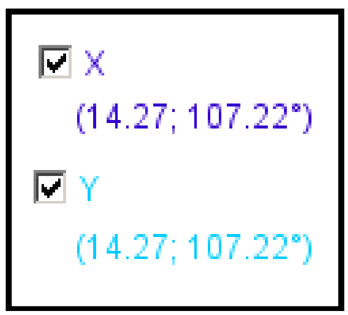


Figura 4.45: Corresponde a las coordenadas polares

Las respuestas de los estudiantes coincidían en que para los dos vectores tanto la magnitud como la dirección eran las mismas.

Posteriormente se les daban una serie de instrucciones para que en una tabla registraran tres casos distintos, es decir tres valores diferentes para el vector , para el vector y el vector tanto en magnitud como en dirección.

En la siguiente Figura se muestra un ejemplo de los datos obtenidos por un alumno.

	Caso I		Caso II		Caso III	
Vectores	Magnitud	Dirección	Magnitud	Dirección	Magnitud	Dirección
$\vec{U}$	15	75°	7.23	141.97°	16.71	160.42°
$\vec{V}$	7.82	95	10	160°	-11.74	178.33°
$\vec{W}$	8.39	30°	7.27	60°	5	45°

Figura 4.46: datos registrados por el estudiante para cada uno de los casos

Una vez registrados los valores para los vectores en tres casos distintos el siguiente paso consistía en calcular las coordenadas de los vectores

y colocar dicha información en las hojas de trabajo en una tabla como en el caso siguiente.

	Resultante de la suma	
Casos	$(\vec{U} + \vec{W}) + \vec{V}$	$\vec{U} + (\vec{W} + \vec{V})$
Caso I	28.47	28.47
Caso II	18.22	18.22
Caso III	25.71	25.71

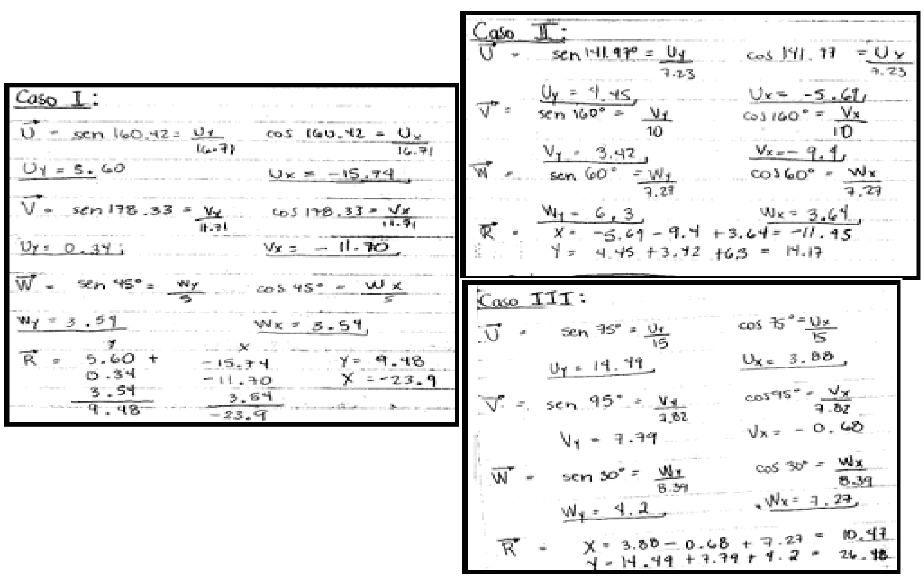
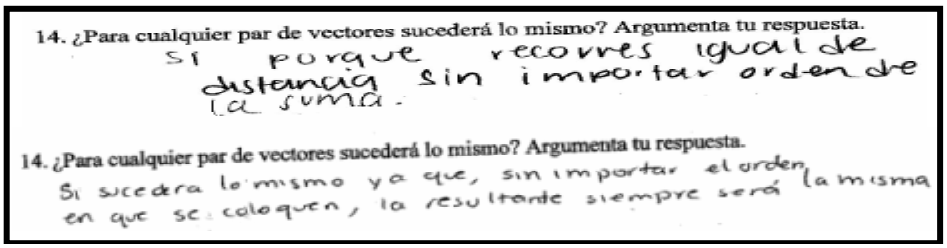


Figura 4.47: Tratamientos realizados por el estudiante para obtener las coordenadas para cada uno de los casos

Por último se les preguntaba a los estudiantes si para cualquier terna de vectores sucedería lo mismo y se les pedía que argumentara si respuesta. En la Figura 5.48 se observan algunas de las respuestas proporcionadas por los estudiantes, en las que la mayoría coincidieron en decir que si, porque todas las cantidades eran las mismas y como se sumaban no importaba el orden, la mayoría de los estudiantes le atribuyeron esta propiedad a la conmutatividad y sólo dos estudiantes se percataron de que se trataba de la propiedad asociativa.


14. ¿Para cualquier par de vectores sucederá lo mismo? Argumenta tu respuesta.
Si porque recorres igual de distancia sin importar orden de la suma.

14. ¿Para cualquier par de vectores sucederá lo mismo? Argumenta tu respuesta.
Si sucedera lo mismo ya que, sin importar el orden en que se coloquen, la resultante siempre será la misma

Figura 4.48: Justificación dada por los estudiantes para el comportamiento de los vectores

4.1.8 Actividad 8

Esta sexta actividad llamada características de los vectores, es muy importante para el análisis y como complemento de la implementación de las actividades ya que es una forma de saber si los estudiantes en realidad han estado construyendo conocimiento a lo largo de las actividades, además ésta es una actividad en la que el estudiante expresa la manera en que ha venido realizando o resolviendo las actividades, o bien que estrategias han sido las que ha implementando para poder solucionarlo.

En esta actividad también se define (institucionaliza) la presencia de las coordenadas polares y coordenadas cartesianas o rectangulares.

Como se puede observar en las siguientes figuras a los estudiantes se les realiza una seria de preguntas que responden haciendo uso del registro en lenguaje natural

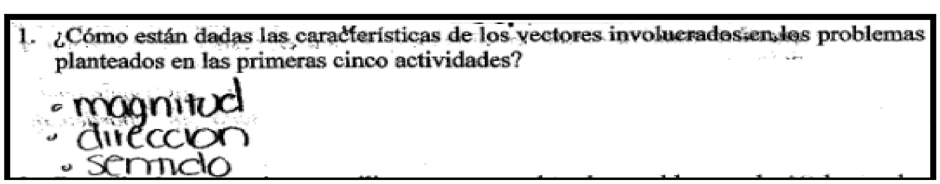
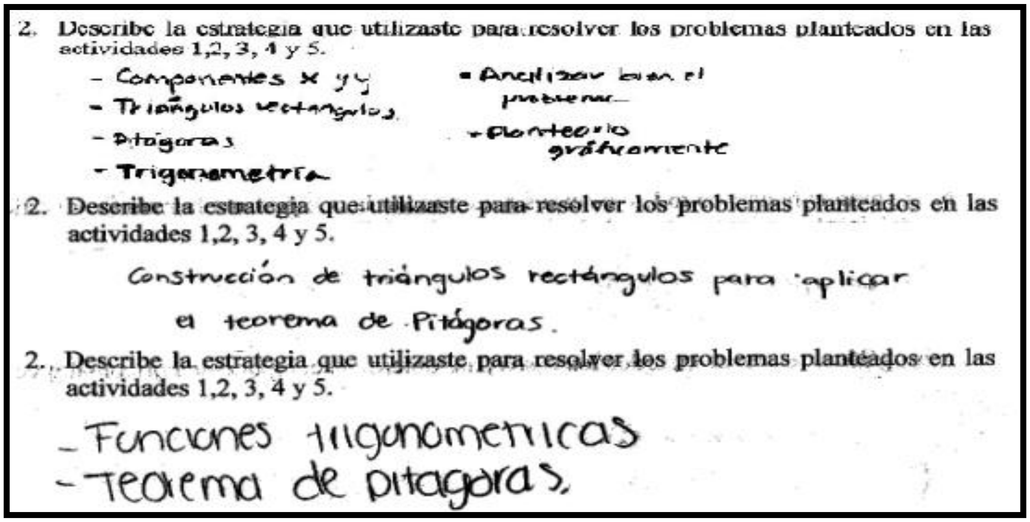

1. ¿Cómo están dadas las características de los vectores involucrados en los problemas planteados en las primeras cinco actividades?
- magnitud
- dirección
- sentido

Figura 4.49: Características de los vectores dadas por los estudiantes



2. Describe la estrategia que utilizaste para resolver los problemas planteados en las actividades 1,2, 3, 4 y 5.

- Componentes x y y
- Triángulos rectángulos
- Pitágoras
- Trigonometría
- Analizar bien el problema
- Planteario gráficamente

2. Describe la estrategia que utilizaste para resolver los problemas planteados en las actividades 1,2, 3, 4 y 5.

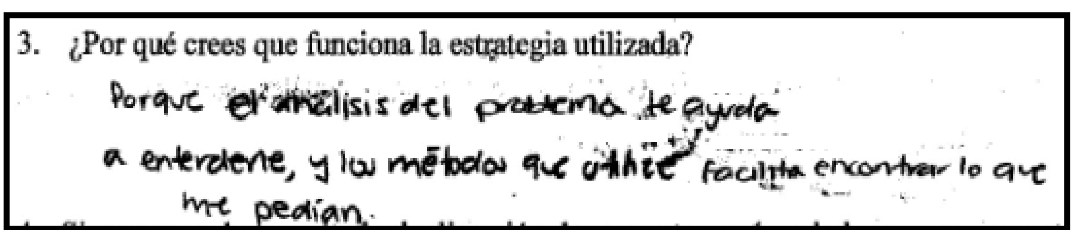
Construcción de triángulos rectángulos para aplicar el teorema de Pitágoras.

2. Describe la estrategia que utilizaste para resolver los problemas planteados en las actividades 1,2, 3, 4 y 5.

- Funciones trigonometricas
- Teorema de pitagoras.

Figura 4.50: Respuestas dadas por tres estudiantes distintos sobre las estrategias utilizadas

En la pregunta número tres se les pregunta a los estudiantes, ¿por qué creen que funciona la estrategia seleccionada?, donde la mayoría de ellos respondió que el poder expresar en un primer momento la información en un registro gráfico facilitaba la comprensión del problema, y el cambiar de coordenadas polares a coordenadas rectangulares para interpretar el problema a través del uso de triángulos rectángulos facilitaba la resolución, una de las respuestas se observan en la figura siguiente.

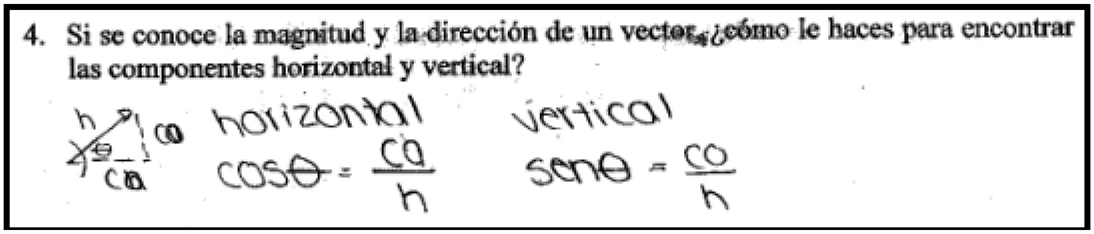


3. ¿Por qué crees que funciona la estrategia utilizada?

Porque el análisis del problema te ayuda a entenderle, y los métodos que utilicé facilita encontrar lo que me pedían.

Figura 4.51: Respuesta dada por un estudiante sobre la función de la estrategia seleccionada

En la cuarta pregunta se les cuestiona a los estudiantes sobre algunas conversiones que fueron necesarias para la resolución de los problemas como se observa a continuación.



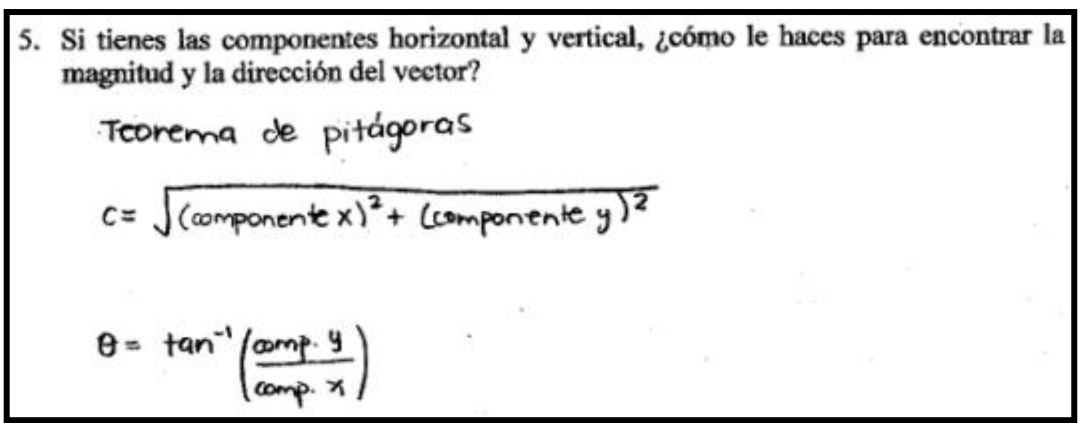
4. Si se conoce la magnitud y la dirección de un vector, ¿cómo le haces para encontrar las componentes horizontal y vertical?

horizontal $\cos\theta = \frac{ca}{h}$ vertical $\text{sen}\,\theta = \frac{co}{h}$

Figura 4.52: Respuesta para la conversión de coordenadas polares a rectangulares

Es importante mencionar que la totalidad de los estudiantes resolvió de manera correcta esta pregunta pues todos supieron que funciones trigonométricas necesitan para poder hacer la conversión de coordenadas polares en coordenadas rectangulares o cartesianas.

De la misma manera para la pregunta número cinco en la que se les pide a los estudiantes el otro tipo de conversión que habían estado manejando, es decir una conversión partiendo de las coordenadas rectangulares hacia las coordenadas polares también fue respondida de manera correcta. Como se ve en la figura 4.53



5. Si tienes las componentes horizontal y vertical, ¿cómo le haces para encontrar la magnitud y la dirección del vector?

Teorema de pitágoras

$c = \sqrt{(\text{componente } x)^2 + (\text{componente } y)^2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\text{comp. } y}{\text{comp. } x}\right)$

Figura 4.53: Respuesta de conversión de coordenadas rectangulares o polares

Con respecto a la pregunta número seis en la que se les pide a los estudiantes que describan como hicieron para obtener las componentes horizontal y vertical del desplazamiento total, fue resuelta por todos de manera correcta ya que la mayoría coincidió, en que una vez calculadas las componentes de cada uno de los vectores a través de la formación de triángulos rectángulos y de una conversión de coordenadas polares en coordenada rectangulares, lo que tenían que hacer es sumar todas las componentes en equis y todas las componentes en yes, para de esa manera obtener la componente del vector resultante .

En la última pregunta de la actividad se pretende que los estudiantes logren generalizar la suma de los vectores como se observa a continuación

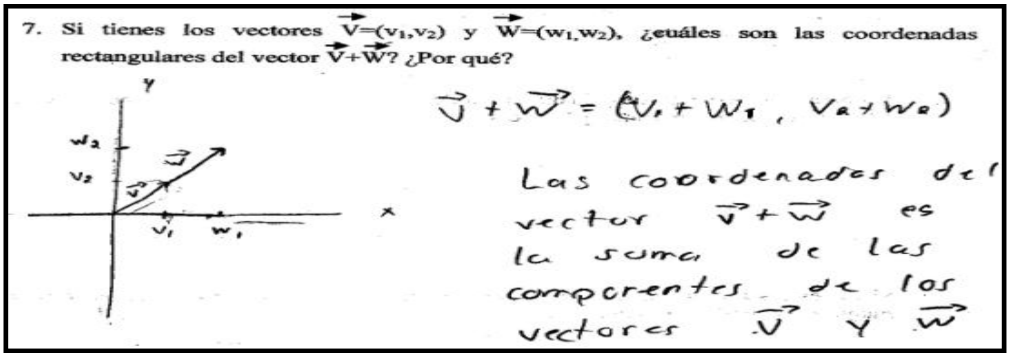


Figura 4.54: Respuesta dada por los estudiantes para la generalización de la suma

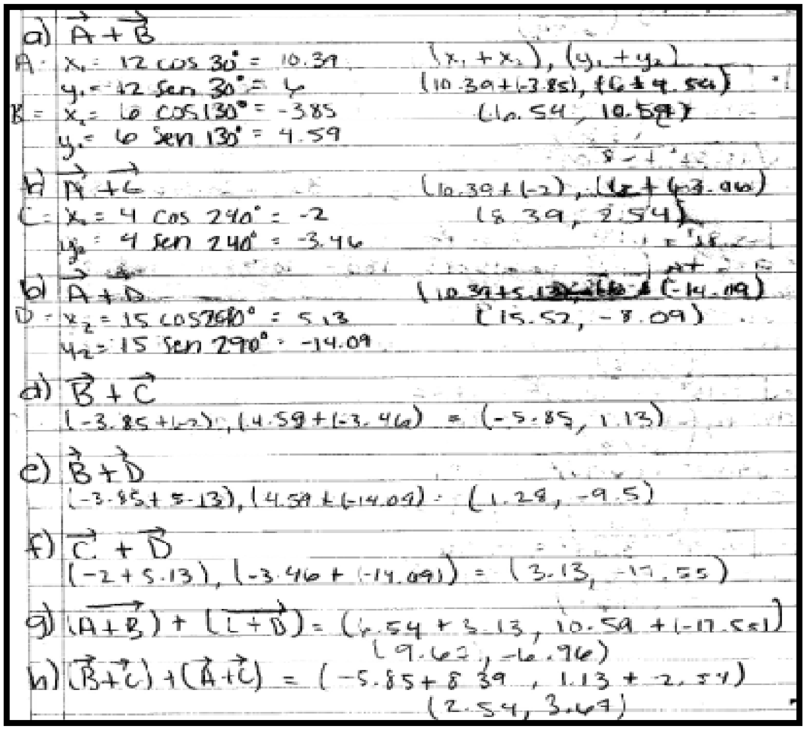
En la última pregunta de esta actividad las respuestas fueron muy buenas pues la mayoría de los estudiantes no solo respondieron correctamente en el registro algebraico si no que también la mayoría trata de explicar o justificar la razón del comportamiento.

4.1.9 Actividad 9

En esta actividad los estudiantes trabajan por primera vez en contextos puramente matemáticos, y al igual que en la actividad anterior los estudiantes tienen la oportunidad de definir la suma de los vectores.

La actividad está dividida en dos secciones, la primera corresponde a la suma de vectores, en la que se les proporcionó la magnitud y la dirección de cuatro vectores y se les pide que realicen la suma de dos y hasta cuatro vectores dando el resultado tienen que indicarlo en coordenadas rectangulares.

A continuación se presenta en la Figura 4.55 algunas de las respuestas dadas por los estudiantes.



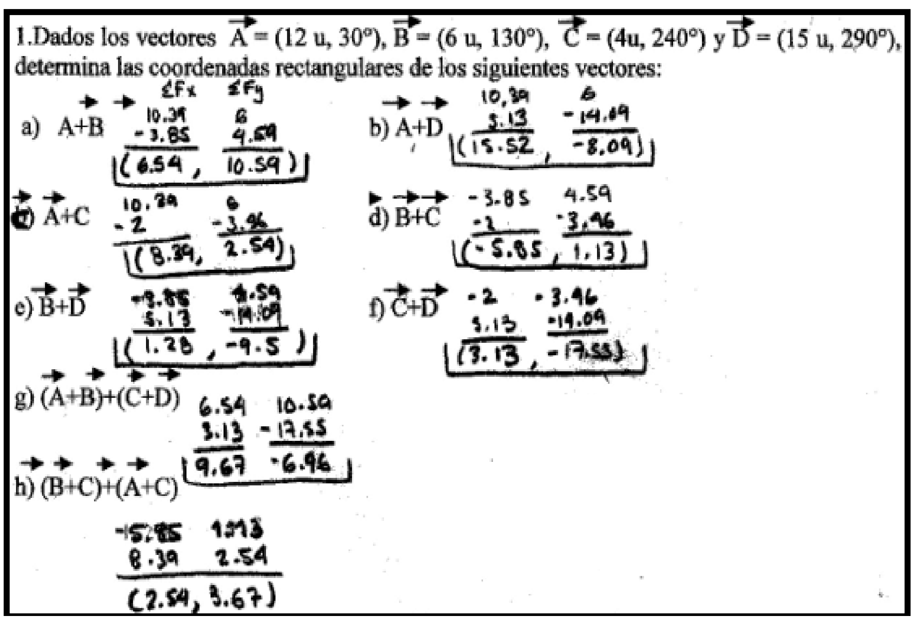
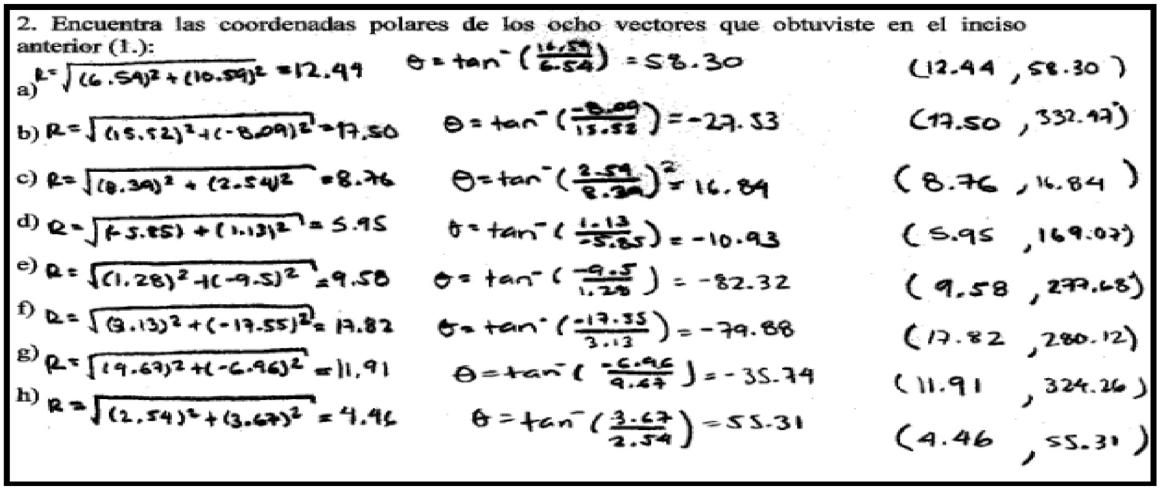


Figura 4.55: Tratamientos y conversiones realizados por los estudiantes para obtener las coordenadas rectangulares

Como se observa en la imagen anterior las estudiantes no presentaron ningún tipo de dificultad, mostrando de esta manera que el haber trabajado con las actividades anteriores si había permitido en ellos la construcción de algunos conocimientos que les permitió poder realizar estas actividades con mayor destreza.

En la segunda parte se les pide a los estudiantes que de los vectores que calculó en la primera parte obtenga ahora sus coordenadas polares.



2. Encuentra las coordenadas polares de los ocho vectores que obtuviste en el inciso anterior (1.):

a) $R=\sqrt{(6.54)^2+(10.59)^2}=12.49$ $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{10.59}{6.54}\right)=58.30$ $(12.44, 58.30)$

b) $R=\sqrt{(15.52)^2+(-8.09)^2}=17.50$ $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-8.09}{15.52}\right)=-27.53$ $(17.50, 332.47)$

c) $R=\sqrt{(8.39)^2+(2.54)^2}=8.76$ $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{2.54}{8.39}\right)^2=16.84$ $(8.76, 16.84)$

d) $R=\sqrt{(-5.85)+(1.13)^2}=5.95$ $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{1.13}{-5.85}\right)=-10.93$ $(5.95, 169.07)$

e) $R=\sqrt{(1.28)^2+(-9.5)^2}=9.58$ $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-9.5}{1.28}\right)=-82.32$ $(9.58, 277.68)$

f) $R=\sqrt{(3.13)^2+(-17.55)^2}=17.82$ $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-17.35}{3.13}\right)=-79.88$ $(17.82, 280.12)$

g) $R=\sqrt{(9.67)^2+(-6.96)^2}=11.91$ $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-6.96}{9.67}\right)=-35.74$ $(11.91, 324.26)$

h) $R=\sqrt{(2.54)^2+(3.67)^2}=4.46$ $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{3.67}{2.54}\right)=55.31$ $(4.46, 55.31)$

Figura 4.56: Tratamientos para la obtención de las coordenadas polares

En la Figura anterior se observa como los estudiantes en esta sección tampoco presentan dificultades para poder realizar los tratamientos y conversiones necesarias para poder hacer el cambio de coordenadas, por lo que podemos de cierta manera atribuirle la destreza por parte de los estudiantes a las actividades que se realizaron con anterioridad. Además es importante resaltar que en esta actividad los estudiantes tuvieron la oportunidad de definir o institucionalizar la suma de los vectores.

Conclusiones

En este apartado se presentan las conclusiones que se tienen del trabajo, con lo que se pretende que éstas permitan al lector tener una visión general de lo que se pudo observar al diseñar y al poner en escena la secuencia de actividades didácticas.

La estructura de este apartado contempla los siguientes aspectos: Dificultades en el proceso de diseño de la secuencia de actividades didácticas, dificultades que presentaron los estudiantes en las primeras actividades, logros de los objetivos planteados, experiencias en la estrategia de diseño y aplicación de la secuencia de actividades y posibles líneas de trabajo que permitan en futuros diseños o investigaciones enriquecer los resultados aquí obtenidos.

Dificultades en el proceso de diseño de la secuencia de actividades didácticas.

La elaboración de la secuencia de actividades didácticas fue un reto ya que debían ser actividades en las que los estudiantes participaran de manera activa al tratar de resolver las situaciones planteadas, partiendo de la idea de que es la acción del estudiante lo que le permite ir construyendo el significado del objeto matemático vector y en particular lo referente a la suma vectorial en coordenadas cartesianas. Otro reto era estructurar las actividades didácticas en una secuencia en la que se reflejará conexión entre ellas, tanto en contenido como en propósitos, y no que se vieran como actividades sueltas y sin sentido.

Entre las dificultades más importantes para lograr el diseño podemos mencionar las siguientes:

- Elección de los contextos.
- Seleccionar la información adecuada sin proporcionar datos extras.
- Falta de experiencia como profesora.
- Identificar lo que se quiere lograr con cada actividad.

- Redactar de manera correcta las preguntas para que a través de ellas se pudiera alcanzar el propósito establecido.
- Organización de las actividades en la secuencia.
- Falta de dominio del software GeoGebra.

Dificultades que presentaron los estudiantes en las primeras actividades

En la puesta en escena de la secuencia de actividades didácticas, se identificaron en los estudiantes una serie de dificultades, algunas de ellas coinciden con las dificultades que presentan estudiantes de otras universidades al trabajar con el tema de vectores, reportadas en otras investigaciones tal como lo reportamos en el primer capítulo, entre las dificultades detectadas al trabajar con las primeras actividades de la secuencia podemos destacar las siguientes:

- Desconocimiento de las características que definen un vector.
- Olvido de las funciones trigonométricas.
- Dificultades de carácter conceptual como sumar vectores como escalares.
- No logran diferenciar el objeto desplazamiento del objeto recorrido.
- Uso incorrecto del teorema de Pitágoras
- Ignoran el sentido de los vectores para realizar la suma.
- Expresar sus ideas y conclusiones en el registro del lenguaje natural, pese a haber utilizado una estrategia adecuada para resolver las actividades y tener las respuestas correctas.

Es importante mencionar que estas dificultades se hicieron evidentes al poner en escena las primeras actividades, y en la mayoría de los estudiantes no persistieron al finalizar la secuencia de actividades, lo cual no quiere decir que de manera automática al resolver las actividades dichas dificultades van desapareciendo, sino que es fundamental la participación del profesor responsable de la puesta en escena, ya que al ir interactuando con los estudiantes tiene la posibilidad de identificarlas y al mismo tiempo ir haciendo replanteamientos de la situación que se está trabajando para generar un ambiente en el que los estudiantes pongan en juego sus conocimientos y reflexionen sobre la pertinencia o no de la forma en cómo lo están utilizando.

Logros de los objetivos planteados

En lo que respecta al objetivo del trabajo podemos decir que para el diseño de la secuencia de actividades didácticas se logró identificar situaciones en contextos apropiados en los que se promueve la construcción de la suma vectorial, ya que al tratar de resolver las situaciones planteadas los estudiantes se ven en la necesidad de poner en juego la suma de vectores coordinando diferentes registros de representación o bien haciendo transformaciones dentro del mismo registro.

Para valorar el logro de los objetivos de la secuencia de actividades didácticas, que en buena medida determinan el logro de los objetivos del trabajo, es fundamental lo que se observa en el análisis de las hojas de trabajo y de lo que ocurre en el salón de clase al aplicar la secuencia, de donde podemos concluir que:

En las primeras cuatro actividades de la secuencia, y a pesar de las dificultades que presentaron los estudiantes logran diferenciar las cantidades escalares de los vectores. También durante el desarrollo de esas primeras actividades se observó que los estudiantes tuvieron mayor facilidad para identificar las características de los vectores en el registro gráfico, en un primer momento construyeron un significado en este registro de representación de los objetos matemáticos involucrados, aunque no tan completo pero útil para el propósito de las actividades.

La mayoría de las dificultades relacionadas con la representación en el registro gráfico, fueron provocadas principalmente por la poca familiaridad que tenían los estudiantes de trabajar en dicho registro, mientras que las dificultades presentes en el registro numérico pueden deberse al olvido de las funciones trigonométricas al iniciar el desarrollo de la secuencia, lo cual se va subsanando a lo largo del desarrollo de las actividades que integran la propuesta.

En la Actividad 5 que es la primera en la que se les proporciona la información en el registro gráfico, los estudiantes tuvieron dificultades para hacer el tratamiento en dicho registro al no poder, en un primer momento, realizar la suma vectorial haciendo la traslación (manifestación perceptible del tratamiento) de los vectores que se deben sumar (recordemos que la suma vectorial en el registro gráfico implica realizar un tratamiento de los vectores ya que una vez que se decide cual es el primer vector que se suma, el punto inicial del siguiente debe ser trasladado al punto final del primero, el del tercero al punto final del segundo y así sucesivamente hasta llegar al último vector que se suma). La dificultad presente en esta actividad puede deberse a que en las actividades previas el contexto plantea situaciones de desplazamientos y como que es más natural pensar que un segundo desplazamiento inicia después de haber terminado el primero, y un tercero después de haber terminado el segundo y así sucesivamente.

Los ambientes dinámicos diseñados con GeoGebra, utilizados en las actividades 6 y 7, brindaron a los estudiantes un escenario para que ellos tuvieran experiencias para observar el comportamiento de los vectores respecto a la suma vectorial, y a partir de dicha observación pudieron realizar conjeturas que el mismo ambiente computacional les permite verificar al menos en el registro gráfico y numérico. La manipulación que permite hacer GeoGebra proporcionó a los estudiantes la oportunidad de tener una gran cantidad de experiencias en las que las variaciones en el registro gráfico podía percibirlas instantáneamente en el registro numérico, lo cual les permitió enriquecer su significado de las propiedades conmutativa y asociativa de la suma vectorial. Este ambiente computacional también coadyuva a inhibir la presencia de la “paradoja cognitiva del conocimiento matemático”; ya que los estudiantes pudieron realizar tareas que involucraron la representación simultánea de objetos en el registro gráfico y numérico sin complicaciones mayores.

En la actividad 8 los estudiantes lograron definir la suma vectorial en coordenadas cartesianas, lo cual es uno de los elementos fundamentales propuestos tanto en el objetivo del trabajo como en el objetivo de la secuencia, consideramos que la ambientación que se generó con las primeras siete actividades propició que esto se lograra de manera natural.

En todas las actividades los estudiantes se vieron en la necesidad de poner en juego dos de las actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis: el tratamiento y la conversión, la primera se ponen de manifiesto a través de las transformaciones que se realizan dentro del mismo registro (lo cual se hace ostensible a través de operaciones aritméticas, algebraicas o geométricas (como las traslaciones)) que se requieren para resolver la situación planteada; y la segunda a través de las transformaciones que se realizan de un registro de representación a otro (lo cual se hace ostensible al representar gráficamente o numéricamente lo que se plantea de manera verbal o viceversa, o bien al pasar del registro numérico al gráfico y viceversa).

Experiencias en la estrategia de diseño y aplicación de la secuencia de actividades

En el diseño de las actividades fue fundamental el trabajo en equipo de dos elementos, quien diseñó las actividades y quien las implementaría en el aula con los estudiantes (profesor con experiencia en impartir el curso de Geometría Analítica), el hecho de que quien implementa la propuesta la conozca desde sus orígenes brinda la oportunidad de hacer sugerencias en el diseño de las actividades, así como tener conciencia de los propósitos específicos de cada una de ellas. Ese conocimiento de las actividades le permite que en la puesta en escena pueda hacer los ajustes que considere pertinentes.

Otro aspecto importante en el diseño de la secuencia de actividades didácticas es el hecho de hacer evidente los dos primeros momentos en que se organizó la estrategia didáctica con la que serían abordadas las actividades: trabajo individual y trabajo en equipo; el trabajo realizado en estos dos primeros momentos quedaron plasmados en las hojas de trabajo en las que se tiene asignado explícitamente un espacio para que los estudiantes registres sus estrategias y resultados obtenidos en cada uno de estos momentos, lo cual fue muy favorable para el análisis de la puesta en escena de las actividades ya que permite ver la evolución que tienen los estudiantes después de haber transitado ambos momentos.

Es importante destacar que el segundo momento de la estrategia didáctica (trabajo en equipo) les permitió poner en juego sus conocimientos y habilidades, además de realizar la institucionalización local del nuevo conocimiento que iban construyendo. Con esta forma de trabajo se observó en los estudiantes una mayor confianza al exponer sus ideas en grupos pequeños de compañeros; además, se favorece la cooperación entre los integrantes de los equipos durante la ejecución de las actividades. También se observó mayor disponibilidad por parte de los estudiantes para escuchar, refutar, argumentar y defender las conclusiones a las que habían llegado con sus equipos de trabajo, cuando se realizaban las discusiones grupales.

El formato que se diseñó para las hojas de trabajo no considera un espacio para que se registren las estrategias y resultados de los estudiantes una vez que se hace la discusión grupal, creemos que para próximas puestas en escena de la secuencia de actividades didácticas deberá incluirse un espacio para que esta información se registre, ya que así tenemos la posibilidad de tener un panorama más completo de la evolución que tienen los estudiantes una vez que se trabajan los tres momentos.

En la puesta en escena de la secuencia de actividades didácticas también se detectaron algunas dificultades que creímos pueden atribuirse a la redacción de algunas actividades, por lo que se hicieron los ajustes que consideramos pertinentes con el propósito de mejorar la redacción de las actividades, entre los que podemos mencionar las siguientes:

- Reorganización de las preguntas en actividad 1.
- Se agregaron más datos en algunas imágenes con la intención de mejorar la comprensión de la actividad 2.
- Cambio de redacción en la información proporcionada en los casos proporcionados en la actividad 3.
- Se agregaron preguntas a la actividad 5 que permitieran al estudiante comparar resultados con sus compañeros.

Posibles líneas de trabajo que permitan en futuros diseños o investigaciones enriquecer los resultados aquí obtenidos.

Después de concluido este trabajo, quedan abiertos algunos problemas o líneas de investigación relacionadas. Por ejemplo:

- La continuación del diseño para abarcar otras propiedades y características de la suma vectorial.
- La detección de dificultades de aprendizaje que los estudiantes presentan al trabajar con el tema de vectores y la suma de estos, aunque aquí se señalan algunas, no se realizó una investigación formal de ellas debido a que esto sobrepasa los alcances de este trabajo de tesis.
- Realizar un mayor número de actividades con el apoyo del software GeoGebra en el que se puedan explotar al máximo los beneficios que brinda en los estudiantes el trabajar con ambientes computacionales.
- Centrar el análisis en los elementos significativos que persisten en la representación del objeto matemático suma vectorial cundo se lleva a cabo la transformación de un registro de representación a otro.
- Realizar una guía para el profesor en la que se explique a detalle cada una de las actividades, los objetivos que estas tienen, lo que se pretende promover en cada una de ellos, lo que se espera que el estudiante sea capaz de hacer e

incluir de manera detallada la estrategia didáctica propuesta para su aplicación.

- Incorporar actividades en la secuencia de actividades didácticas que tengan como propósito central evaluar los aprendizajes de los estudiantes, ya que en este trabajo la construcción de los aprendizajes se observan y registran a través del trabajo que ellos hacen en el aula, y el reporte que se hace de ellos es de tipo descriptivo.

Para concluir me gustaría plantear algunas experiencias que tuve a lo largo de los dos años en que estuve trabajando en este proyecto, por una parte el estudio de algunas teorías que ayudan a entender y a explicar la problemática presente en Matemática Educativa y el hecho de compartir opiniones con los expertos de esta disciplina, cambio muchas de mis concepciones respecto de cómo deben ser enseñadas las matemáticas y que se puede esperar como respuesta de aquellos alumnos que son expuestos a distintos tipos de enseñanza. Por esta razón me propuse realizar como trabajo de tesis, un proyecto de desarrollo docente en el que se viera reflejada una de estas teorías, en particular la Teorías de la Representaciones Semióticas, que a mi juicio era la más apropiada para desarrollar la secuencia de actividades didácticas de acuerdo al objeto matemático que se pretende promover.

La experiencia vivida con este trabajo, resultó enriquecedora, no únicamente por los resultados observados de la aplicación del diseño, sino además porque fue posible enriquecer mi idea de lo que es el trabajo del profesor en el aula a partir de las necesidades de los estudiantes y de la manera en que ellos aprenden, por ejemplo yo tenía la idea de que era suficiente que el profesor enunciara verbalmente de manera adecuada alguna idea para que los estudiantes se apropiaran de ella. Esta visión se vio modificada al tener la oportunidad de participar como observadora en la puesta en escena de la secuencia de actividades didácticas, ya que aún cuando las ideas se discutía en equipo y después grupalmente, en siguientes actividades donde se tenía que poner en juego la misma idea había estudiantes que seguía presentado dificultades con ella.

Por último, he podido observa que cuando a los estudiantes se les da la oportunidad de participar de manera activa en la resolución de actividades se genera un ambiente más rico para el aprendizaje.

Anexo 1

Los aspectos en los que se centró la observación de la puesta en escena son los siguientes: Aspectos a observar en los estudiantes y accione realizadas por el docente.

Aspectos a observar en los estudiantes	**Se cumple**	**No se cumple**
Identificar confusiones o dificultades originadas por la redacción.		
Presenta resistencia al trabajar con temas que no se han explicado con anterioridad.		
Asume responsablemente su rol.		
Respeta y tolera los ritmos de los demás.		
Usa diferentes registro de representación para desarrollas la construcción de sus argumentos alrededor de las actividades.		
Es capaz de expresar textualmente lo que piensa.		
Es capaz de expresar sus ideas verbalmente.		
Tiene actitud positiva hacia el trabajo en equipo.		
El trabajo con las actividades permite lograr los objetivos didácticos planteados.		

Aspectos a observar en los estudiantes.

Acciones del docente, validas para el apoyo de los estudiantes	Se cumple	No se cumple
Doy instrucciones claras a los estudiantes antes de iniciar el trabajo.		
Me apoyo en la negociación para llegar a acuerdos con los estudiantes para llegar a acuerdos en la conformación de los grupos.		
Construyo sobre las ideas previas de cada equipo de trabajo.		
Asumo rol como instructor.		
Hago preguntas a los estudiantes para desequilibrarlos y generar nuevas reflexiones.		
Hago preguntas a los estudiantes para orientar.		
Hago preguntas a los estudiantes para motivar.		
Hago preguntas a los estudiantes para promover la búsqueda de información.		
Exploro e identifico los niveles de comprensión de los conceptos.		
Estimulo la discusión.		
Ofrezco oportunidades de reflexión sobre el proceso.		
Reflexiono con los estudiantes acerca de los conceptos evaluados para reforzarlos.		

Acciones del docente, validas para el apoyo de los estudiantes

Anexo 2

Actividad 1

Un autobús va hacia el Norte (90° EN), desde su punto de partida se desplaza 1 Km. antes de realizar la primera parada, después se desplaza 3 Km. antes de realizar una segunda parada, desde la segunda parada hasta su destino final se desplaza otros 4 Km.

1. ¿A qué distancia se encuentra de su punto de partida el autobús al momento de realizar la segunda parada?

Trabajo Individual	**Trabajo en Equipo**

2. ¿Cuál es la distancia total que recorrió el autobús de su punto de partida hasta su destino?

3. ¿Cuál fue el desplazamiento total de una persona que subió en la primera parada y terminó el recorrido?

4. Elabora un diagrama que muestre el desplazamiento total de la persona que subió en la primera parada y que llegó hasta la tercera parada del autobús.

Trabajo Individual	**Trabajo en Equipo**

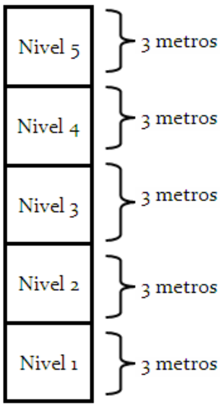
5. ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento total del autobús?

6. ¿Cuál es la dirección del desplazamiento total del autobús?

7. Elabora un diagrama que muestre el desplazamiento total del autobús.

Actividad 2:

Se está realizando una construcción de un edificio de cinco niveles (la planta baja es el primer nivel), el cual se encuentra en la etapa de colocación de ladrillo, dicha etapa se lleva a cabo en los cinco niveles a la vez, por lo que se hace uso de un elevador mecánico para transportar el material con mayor facilidad. Al iniciar las labores en un día de trabajo, el elevador, que se encuentra en el primer nivel, debe surtir material al tercer nivel, siendo éste su primer desplazamiento del día, estando en el tercer nivel recibió un aviso de que el material se había acabado en el quinto nivel por lo que su segundo desplazamiento fue hacia ese punto, el siguiente y último movimiento fue hacia el segundo nivel para recoger un material sobrante.



1. ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento total del elevador una vez realizados los tres movimientos?

Trabajo Individual	**Trabajo en Equipo**

2. Elabora un diagrama que muestre todos los desplazamientos hechos por el elevador en el que se represente el vector resultante al realizar los tres desplazamientos.

Trabajo Individual	**Trabajo en Equipo**

3. ¿Cuál es la magnitud de los dos últimos desplazamientos?

4. ¿Cuál es la dirección y el sentido de la resultante de los dos últimos desplazamientos?

5. ¿Cuál es la dirección y el sentido de la resultante de la suma de los desplazamientos realizados por el elevador?

Actividad 3:

Una constructora está reparando la carretera Bahía Kino-Hermosillo y la persona encargada de supervisar la obra debe visitar dos puntos de la carretera para supervisar los avances. La base de operaciones está en Bahía de Kino, que es el punto de donde sale a hacer el recorrido, el supervisor debe realizar dos desplazamientos:

Primer caso: El primero es de 4.5 Km. hacia el este y el segundo de 2 Km. hacia el norte.

Segundo caso: El primero es de 2 Km. hacia el este y el segundo de 3 Km. con una dirección de 30° EN.

Para cada uno de los casos anteriores realiza lo siguiente:

1. Haz un bosquejo mostrando los desplazamientos realizados por el supervisor.

Trabajo Individual	**Trabajo en Equipo**

2. ¿Cuál es el recorrido total realizado?

3. Describe gráficamente cual es el desplazamiento total.

Trabajo Individual	**Trabajo en Equipo**

4. ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento total que realizó el supervisor?

5. ¿Cuál es el ángulo que determina la dirección y sentido del desplazamiento total que realizó el supervisor?

Actividad 4:

Una persona realiza tres desplazamientos para llegar de su casa a su centro de trabajo, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Desplazamiento	Magnitud	Ángulo EN[2]
Primero	1 Km.	30°
Segundo	3 Km.	45°
Tercero	2 Km.	130°

1.- ¿Cuál es la magnitud y el ángulo del desplazamiento total cuando realiza los dos primeros desplazamientos?

Trabajo Individual **Trabajo en Equipo**

[2] Ángulo que determina la dirección y el sentido del desplazamiento

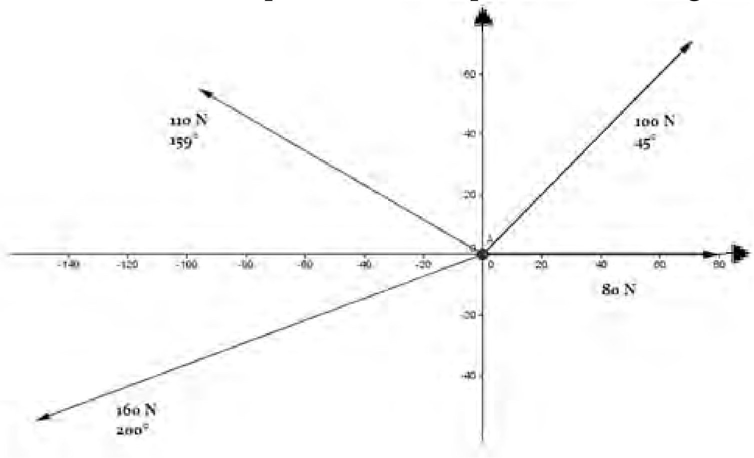
2.- ¿Cuál es la magnitud y el ángulo del desplazamiento total desde que sale de su casa hasta que llega al trabajo?

Trabajo Individual	**Trabajo en Equipo**

3.- Si la persona realiza un cuarto desplazamiento para trasladarse de su centro de trabajo al hospital y el desplazamiento total de su casa al hospital es de 9 Km. con un ángulo de 120° EN, ¿cuáles son las características del cuarto desplazamiento?

Actividad 5:

Cuatro fuerzas actúan sobre una partícula en el punto O de la figura.



1.- ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que está recibiendo la partícula?

Trabajo Individual	**Trabajo en Equipo**

2.- Si la partícula pudiera moverse, ¿en qué dirección saldría disparada?

3.- ¿Todos tus compañeros de equipo sumaron en el mismo orden las fuerzas para obtener el vector resultante?

4.- En caso de que alguno de tus compañeros lo haya realizado en distinto orden, ¿qué resultado obtuvo?

Trabajo Individual	Trabajo en Equipo

5.- ¿Cómo es el resultado que tu compañero obtuvo comparado con el que obtuviste?

6.- ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza resultante si las fuerzas se suman manteniendo el siguiente orden 160 N, 100 N, 80 N y 110 N?

7.- Si queremos que la partícula permanezca sin moverse al aplicarle una quinta fuerza, ¿cuál deberán ser la magnitud y dirección de la quinta fuerza? Justifica tu respuesta.

Referencias bibliográficas:

Brito, P., Amado, M. (2007), *Causas de reprobación en matemáticas,* Instituto tecnológico de Mexicali.

Campos, M., Garzón, M., Mora, M., Pérez, J., Villamarín, G. (2004), *Fundamentos del Álgebra Lineal,* tercera edición, Universidad de Colombia.

Castro, E. (1997), *Representaciones y modelización en* l*a educación matemática presentes en la enseñanza secundaria.* Barcelona.

Dörfler, W. (1991). Forms and Means of Generalization in Matehematics, en Bishop A.J.Mellin-Olsen S., Van Dormolen, J. (eds.): *Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer A.P.

Duval, R. (1993), *Registros de representaciones semióticas y funcionamiento cognitivo del pensamiento*, traducción para fines educativos (Hitt F., Ojeda A.), Departamento de matemática Educativa del Cinvestav-IPN, 1997, México.

Duval, R. (1998), *Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros,* University Luis Pasteur, versión al español de Blanca M. Parra.

Duval, R. (1999), *Semiosis y pensamiento humano: registro semiótico y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia, Universidad del valle.

Duval, R. (2006), *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar de registro de representación.* Traducción del artículo: Humberto Quesada, alumno de Doctorado de la Universidad de Alicante.

Flores, S., González, M., Herrera, A. (2007), *Dificultades de entendimiento en el uso de vectores en cursos introductorios de mecánica,* Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

Higdon, A. Stiles, E., Wees, J. (1986), *Ingeniería Mecánica, tomo I: estática vectorial*, Prentice Hall, México.

Hill, D., Colman, B. (2006), *Álgebra lineal*, octava edición, Pearson Educación, México.

Howard, A. (2004), *Introducción al álgebra lineal*, editorial Limusa, México.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education, en Grouws, *Handbookof Research on Mathematics Teaching and Learning* New York

Katz, R. (2010), *Vectores*, Álgebra y Geometría I, Facultad de ciencia exactas Ingeniería Y Agrimensura, Universidad de Rosario.

Pinzón, Á. (1977), *Física I conceptos fundamentales y sus aplicaciones*, Universidad Nacional de Colombia.

Richimont, E., Andrade, N., Parodi, C. (2008), Acta latinoamericana de matemática educativa, *La comprensión de un concepto matemático y los registros de representación semiótica*, Universidad Nacional de la Pampa, Argentina.

Romero, I. (2000). *Representación y comprensión de conceptos matemáticos Una experiencia didáctica en secundaria*.

Romero, C., (2010), *Una introducción grafica al concepto de transformación lineal usando GeoGebra*, Universidad de Sonora.

Serway, R. (1997), Física *I,* James Madison University, Traducción: Gabriel Cazares, Mc Graw-Hill Interamericana Editores S.A. de C.V.

Soto, J. (2005), Acta latinoamericana de matemática educativa, *Algunas dificultades en la conversión Gráfico-Algebraica de situaciones de vectores,* Universidad de Sonora

Tall, D. (1996). *International Handbook of Mathematics Education.*

Urrea, M. (1999), *La enseñanza de la Geometría analítica, algunas referencias metodológicas,* Matemática educativa, volumen 1, número 4.

Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares. (2011). Recuperado en abril del 2011, de http://www.enlace.sep.gob.mx/

Universidad de Sonora, (2011). Recuperado en junio del 2011, de http://www.uson.mx/institucional/marconormativo/reglamentosacademicos/lineamientos_modelo_curricular.htm