Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

La Derivada a Partir de Problemas de Optimización en Ambientes Dinámicos Creados con GeoGebra

Tesis que presenta

María Teresa Dávila Araiza

Para obtener el grado de

Maestría en Ciencias
con especialidad en Matemática Educativa

Directores de Tesis:
Dr. Agustín Grijalva Monteverde
M. C. José María Bravo Tapia

Miembros del Comité Revisor y Jurado:

Dr. Rafael Pantoja Rangel
M. C. Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez
Dr. José Ramón Jiménez Rodríguez
M. C. José María Bravo Tapia
Dr. Agustín Grijalva Monteverde

Hermosillo, Sonora, México — Octubre de 2010

AGRADECIMIENTOS

A César, por acompañarme y apoyarme incondicionalmente.

A mis padres y hermanos, cuyo cariño inmenso siempre me acompaña.

A mis directores de tesis, Agustín y José María, por su amistad y por guiarme amable y pacientemente.

A los miembros del Comité Revisor y Jurado, por los comentarios que permitieron mejorar este trabajo.

A José Ramón Jiménez, por su apoyo desde el ingreso a la maestría hasta la conclusión de este trabajo.

A mis profesores, por sus sabias enseñanzas y su amistad.

A mis compañeros de clase y amigos por los buenos momentos que compartimos.

CONTENIDO

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN....1
CAPÍTULO 2. PROBLEMÁTICA, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS 9
2.1 Problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial....9
2.1.1 Dificultades que enfrentan los estudiantes en el estudio del cálculo....12
2.1.2 Propuestas de enseñanza del cálculo....14
2.2 Justificación 19
2.3 Objetivos 21
CAPÍTULO 3. ELEMENTOS TEÓRICOS Y ANÁLISIS RELACIONADOS CON LA PROPUESTA DIDÁCTICA....23
3.1 Prácticas matemáticas....23
3.2 Significados....24
3.3 Objetos matemáticos 26
3.4 Tipología de significados....28
3.4.1 Significado institucional de referencia de la derivada....29
3.4.2 Significado institucional pretendido de la derivada....40
3.5 Idoneidad didáctica y sus dimensiones....48
CAPÍTULO 4. LA PROPUESTA DIDÁCTICA....55
4.1 Características de la propuesta....55
4.1.1 Estructura de las actividades 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8....58
4.1.2 Estructura de la actividad 1. 74
4.1.3 Estructura de la actividad 9....77
4.1.4 Estructura de la actividad 10....81
4.2 Análisis y valoración a priori de la idoneidad didáctica de la propuesta....85
4.2.1 Idoneidad epistémica....85
4.2.2 Idoneidad cognitiva....91
4.2.3 Idoneidad mediacional....95
4.2.4 Idoneidad emocional....99
4.2.5 Idoneidad ecológica....101
4.3 Hojas de trabajo 105
CAPÍTULO 5. PUESTA EN ESCENA DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA....143
5.1 Descripción general....143
5.2 Aspectos destacados 147

5.3 Modificaciones realizadas al diseño de las actividades didácticas como consecuencia de la puesta en escena....148
5.4 Análisis a posteriori de la idoneidad didáctica de la propuesta....150
5.5 Narración de lo sucedido durante la puesta en escena, con el primer grupo de estudiantes....157
5.5.1 Primer grupo. Actividad “La caja sin tapa”....157
5.5.2 Primer grupo. Actividad “La viga más resistente”....164
5.6 Narración de lo sucedido durante la puesta en escena, con el segundo grupo de estudiantes....168
5.6.1 Segundo grupo. Actividad “La estación de bombeo”....168
5.6.2 Segundo grupo. Actividad “La viga más resistente”....171
CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES....175
REFERENCIAS....181
ANEXOS....185
Anexo 1. Programa de estudios del curso Cálculo Diferencial e Integral I....185
Anexo 2. Hojas de trabajo utilizadas en la puesta en escena....188
Anexo 3. Solución geométrica al problema “La estación de bombeo”....204

CAPÍTULO UNO

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada, dirigida a estudiantes del curso "Cálculo Diferencial e Integral I" del área de Ingeniería de la Universidad de Sonora, cuyo propósito es promover la construcción de significado de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, a través de la resolución de problemas de optimización de contexto extramatemático, con el apoyo de ambientes dinámicos creados con el software de geometría dinámica *GeoGebra*.

El cálculo es una asignatura presente en el currículo de diversas carreras en el nivel superior, pues objetos matemáticos de esta disciplina, como la función y la derivada, tienen un papel clave en el estudio de fenómenos cambiantes, de interés para la física, la química, el comercio, la administración, la ingeniería, entre otras.

Desde nuestra experiencia como estudiantes y docentes de cálculo, hemos percibido la existencia de dificultades para darle un significado a los objetos matemáticos de este campo que permita emplearlos en la resolución de problemas, en particular en aquellos de contexto extramatemático que requieren la construcción de un modelo matemático. Revisando trabajos de investigación en Matemática Educativa constatamos que esta situación es común en los cursos de cálculo.

En el capítulo dos de este trabajo abordaremos la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en que se ubica nuestro trabajo y que justifica la realización del mismo. Mostraremos algunos resultados de investigación al respecto de la presencia de dificultades en los estudiantes durante el estudio de este campo, en particular para modelar y resolver situaciones de contexto extramatemático. Señalaremos los resultados de algunos autores sobre la importancia del uso de diferentes formas de lenguaje y el establecimiento de relaciones entre éstas (gráfico, analítico y numérico) en el estudio del cálculo.

Mencionaremos también en el capítulo dos, algunas propuestas realizadas para la enseñanza del cálculo y la derivada que otorgan un papel primordial a la resolución de problemas en la construcción de este objeto matemático, y que sugieren formas alternativas al tradicional y formal camino: funciones → límites → derivada → aplicaciones de la derivada, para la introducción de ésta. Algunas de estas propuestas parten de la resolución de problemas de optimización para promover la construcción de la derivada como la pendiente de la recta tangente, y otras parten de problemas físicos de variación para construir la derivada como herramienta para cuantificar y predecir el cambio; algunas se apoyan en tecnología computacional.

Nuestro trabajo se apoya en elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, conocido como EOS. En particular, tomamos en cuenta la naturaleza pragmática de los *objetos matemáticos*, asumida en este marco teórico, como los *entes que emergen gradualmente de los sistemas de prácticas*, operativas (lo que se hace) y discursivas (lo que se dice), realizadas durante la resolución de problemas de un mismo tipo (Godino, Batanero y Font, 2008). Tales sistemas de prácticas son lo que llamamos *significado* de un objeto.

Teniendo en cuenta esta naturaleza pragmática de los objetos matemáticos, la importancia de coordinar diferentes formas de lenguaje y el hecho de que nuestra propuesta didáctica se dirige a estudiantes de ingeniería, los cuales durante su formación académica y su práctica profesional, requiere modelar, describir y analizar situaciones cambiantes, además de optimizar costos, tiempo, materiales, etc., creemos pertinente utilizar problemas de optimización de contexto extramatemático, y apoyarnos en las bondades que ofrece el software de geometría dinámica GeoGebra, para promover el desarrollo de prácticas de modelación matemática y la construcción de significados de los objetos matemáticos del cálculo de una manera más cercana al área de trabajo de los estudiantes.

En este sentido, nuestro trabajo de tesis tiene como

OBJETIVO GENERAL:

Formular una propuesta de desarrollo docente, consistente en el diseño de una serie de actividades didácticas que a su vez tienen el siguiente

PROPÓSITO FUNDAMENTAL DEL DISEÑO:

Promover en estudiantes de ingeniería la construcción de significado de la derivada como pendiente de la recta tangente, y significados de otros objetos matemáticos del cálculo diferencial, en ambientes dinámicos virtuales y a partir de problemas de optimización.

El propósito fundamental del diseño se alcanzará a su vez, si se logran los siguientes

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Que los estudiantes:

- **Modelen los fenómenos implicados en los problemas, identificando las magnitudes involucradas, estableciendo relaciones entre éstas; y determinen los valores de dichas magnitudes que resuelven los problemas.**
- **Empleen diversas formas de lenguaje para analizar y resolver los problemas, con apoyo en las características que les proporciona el ambiente dinámico virtual.**
- **Desarrollen sistemas de prácticas que promuevan la emergencia de objetos del cálculo diferencial.**

En el capítulo 3 hablaremos sobre los elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2008) que apoyaron el diseño de esta propuesta y la valoración de su pertinencia; en particular, puntualizaremos las nociones de *objeto, práctica* y *significado*. También presentaremos el significado institucional de referencia de la derivada considerado para la elaboración de nuestra propuesta y el significado institucional pretendido en la misma. En la parte final del capítulo cinco introduciremos la noción de *idoneidad didáctica* y sus dimensiones, que empleamos para valorar la pertinencia de nuestra propuesta en distintos aspectos que influyen en la construcción de los significados personales de los estudiantes.

Es importante mencionar que en el EOS se considera como *objeto matemático* a cualquiera de los siguientes seis tipos, y sus combinaciones:

- *Situaciones*, entendidas como problemas matemáticos (más o menos abiertos), problemas extra-matemáticos (o aplicaciones), ejercicios, ejemplos, etc.
- *Lenguaje*, en diversas formas o representaciones semióticas: verbal, numérico, gráfico, geométrico, analítico (notación conjuntista, cuantificadores, expresiones algebraicas, notación del límite, etc.), entre otros.
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.).
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos como teoremas, corolarios, propiedades, etc.).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, etc.).
- *Conceptos (*expresados por medio de *definiciones o descripciones*).

Estos tipos de objetos se conocen como objetos primarios o componentes del significado. Si emergen durante la realización de prácticas para resolver campos de problemas, se les llama *objetos emergentes*, y si son objetos que se utilizan para hacer emerger nuevos objetos, se les llama *objetos intervinientes*.

El s*ignificado institucional pretendido* de la derivada en nuestra propuesta considera como objetos intervinientes (o prerrequisitos), objetos básicos de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría de los niveles escolares, medio y medio superior. Por ejemplo, *conceptos* como área, volumen, distancia y velocidad; *lenguaje:* la expresión analítica del teorema de Pitágoras y expresiones analíticas para calcular área y volumen, *procedimientos* como usar las expresiones anteriores, calcular razones trigonométricas, hacer despejes, realizar operaciones algebraicas, identificar gráficamente el signo de la pendiente de una recta; proposiciones*:* una recta tangente horizontal tiene pendiente cero, la distancia es no negativa; *argumentos* intuitivos y *situaciones* de optimización extramatemática que retomamos de libros de texto propuestos en el programa de estudios del curso Cálculo Diferencial e Integral I de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora.

Las situaciones de optimización que elegimos, involucran contextos familiares para los estudiantes o afines a su carrera, lo que facilita que éstos opinen, participen y se interesen en determinar y caracterizar los valores de las magnitudes que resuelven los problemas; y que de esta manera emerjan gradualmente los objetos matemáticos siguientes:

➢ Conceptos:

- Variable, variable dependiente, variable independiente, función, dominio, incremento y decremento (o aumento y disminución) de la variable dependiente e independiente, función creciente, función decreciente, valor máximo relativo, valor mínimo relativo y recta tangente (localmente).

➢ Lenguaje:

- Expresiones analíticas, verbales, gráficas, numéricas y tabulares de las funciones involucradas en los problemas de optimización.
- Términos como variable dependiente e independiente, función, intervalo, dominio, función creciente/decreciente, máximo relativo, mínimo relativo.

➢ Procedimientos:

- Determinar la expresión analítica de la función que modele el problema de optimización, determinar el dominio de la función, aproximar el valor extremo, buscando en intervalos cada vez más pequeños, reconocer gráficamente la monotonía de una función, reconocer gráficamente los valores máximos y mínimos.

- Proposiciones:

- Si la función *f* tiene un máximo o mínimo en *p* y si *p* no es extremo del dominio, entonces la recta tangente en el punto *(p,f(p)),* tiene pendiente cero o no existe.
- Si una función *f* es creciente antes de un número *c* de su dominio y decreciente después de *c*, entonces *f* tiene un valor máximo en *c.*
- Si una función *f* es decreciente antes de un número *c* de su dominio y creciente después de *c*, entonces *f* tiene un valor mínimo en *c*.
- La función es creciente en los intervalos donde la pendiente de la recta tangente es positiva y es decreciente en los intervalos donde la pendiente de la recta tangente es negativa.
- Si la pendiente de la recta tangente cambia de positiva a negativa en el punto (*c,f(c)*), entonces *f* tiene un máximo en *c*; si cambia de negativa a positiva en el punto (*c, f(c)*), entonces *f* tiene un mínimo en *c*.

- Argumentos:

Los argumentos que esperamos que se empleen durante el desarrollo de las actividades didácticas serán mayormente con base en el lenguaje numérico, las restricciones que implica el contexto del problema, y los ambientes dinámicos.

- Situaciones:

- La determinación de las coordenadas del punto donde la recta tangente a la gráfica de la función tiene pendiente cero, la determinación de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado y la determinación de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto cualquiera.

Nuestra propuesta consta de diez actividades didácticas, integradas por hojas de trabajo coordinadas con ambientes dinámicos virtuales. En el capítulo cuatro describiremos la estructura de estas actividades, mostrando cómo se espera promover la emergencia de los objetos matemáticos del significado institucional pretendido, y el papel que juegan en esto los ambientes dinámicos virtuales creados con el software GeoGebra. También realizamos un análisis a priori de la propuesta para valorar la idoneidad didáctica de la misma, y finalmente presentamos las hojas de trabajo correspondientes a cada una de las actividades didácticas.

El software GeoGebra tiene las cualidades de permitir utilizar distintas formas de lenguaje (verbal, gráfico, geométrico, algebraico, numérico, tabular) y vincularlas dinámicamente. Estas características nos permitieron crear los ambientes dinámicos virtuales, que constan de una construcción dinámica y manipulable que simula el contexto de los problemas a resolver; las representaciones tabular, analítica y gráfica de la función que modela al problema, donde la tabla es representada por una hoja de cálculo; un punto variable (móvil) sobre la gráfica; y la recta tangente a la gráfica en el punto variable.

Al principio de cada actividad, se propone al estudiante la manipulación de la construcción dinámica que simula el fenómeno implicado en el problema para que se percate de que existe una dependencia entre las magnitudes y se le facilite la construcción del modelo analítico. Enseguida se le pide al estudiante utilizar la expresión analítica que determinó, para llenar una tabla de valores y construir una gráfica en su hoja de trabajo.

Después se muestran las representaciones numérica, gráfica y analítica de la función en el ambiente dinámico y se guía al estudiante hacia la realización de un tratamiento numérico usando la hoja de cálculo para aproximar las coordenadas del punto cuya abscisa da la solución al problema. Luego se pide que ubique en la gráfica el punto que encontró con la hoja de cálculo. Enseguida se introduce la recta tangente y se busca que el estudiante observe que ésta parece horizontal en el punto que ubicó en la gráfica.

Posteriormente se busca que el estudiante observe la monotonía de la función en el lenguaje numérico, la relacione con el gráfico y con la pendiente de la recta tangente. Finalmente se le pide al estudiante que exprese cómo solucionaría gráficamente el problema, con el propósito de que éste reflexione en que debe determinar la abscisa del punto en el cual la recta tangente tiene pendiente cero.

En el capítulo cinco hablaremos sobre la puesta en escena de tres actividades didácticas de nuestra propuesta, la cual arrojó información importante:

- Que resaltó aspectos positivos del uso de problemas de optimización, reflejados en el interés y participación de los estudiantes.
- Sobre la actitud de los estudiantes hacia los ambientes dinámicos y su interacción con éstos.
- Que mostró deficiencias en los significados personales de los estudiantes de algunos objetos considerados como previos o intervinientes.
- Que sugirió realizar modificaciones al diseño de las actividades y los ambientes dinámicos, las cuales se incorporaron a las hojas de trabajo presentadas al final del capítulo 4.

También se mostrará en este capítulo, el análisis a posteriori de la idoneidad didáctica de nuestra propuesta y se comparará con el realizado a priori en el capítulo cuatro. Finalmente incluye una narración de la puesta en escena de cada actividad, con cada uno de los grupos, en la que se muestra cómo participaron los estudiantes en el planteamiento de los problemas.

En el capítulo seis plasmamos las conclusiones del trabajo, que incluyen la descripción del logro de los objetivos planteados en el capítulo dos y algunos aspectos sobresalientes del análisis de la idoneidad didáctica.

CAPÍTULO DOS

PROBLEMÁTICA, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

2.1 PROBLEMÁTICA DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Desde nuestra experiencia como estudiantes de licenciatura en matemáticas, podemos decir que tuvimos dificultades para entender las definiciones y propiedades de objetos como la función, el límite y la derivada, así como para resolver problemas usando lo aprendido. Al preguntarnos el porqué de dichas dificultades comenzamos a interesarnos en la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo.

Hemos observado que generalmente los cursos de cálculo tanto en Ingeniería como en la Licenciatura en Matemáticas, inician con el estudio de los números reales, las funciones, posteriormente los límites, la continuidad, y finalmente la derivada con sus aplicaciones; podemos decir además, que la enseñanza de estos temas se conduce con base en dos propuestas muy diferentes: una muy cercana al análisis, centrada en la definición formal y rigurosa de los objetos y estructuras matemáticas; la otra, centrada en los procesos algorítmicos para determinar el límite de una función, su derivada, entre otros. Sin embargo, estas dos propuestas tienen en común la tendencia a privilegiar el uso del lenguaje analítico y a descuidar las relaciones existentes entre éste y los lenguajes gráfico y numérico.

Estos enfoques de enseñanza, opuestos en cierto sentido, promueven el desarrollo de prácticas matemáticas[1] diferentes, y como consecuencia, significaciones distintas de los mismos objetos. Así, es posible que para un estudiante sea importante demostrar, por ejemplo, que $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ (para a > 0), mientras que para otro lo importante puede

[1] En el capítulo 3 se profundizarán las ideas al respecto del significado que se asigna a los objetos matemáticos en relación a los sistemas de prácticas matemáticas desarrolladas.

ser determinar el valor de un límite particular, como $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$, observando que se obtiene al multiplicar “arriba y abajo” por el conjugado del numerador.

Pero sin importar que el enfoque del curso sea formal, o se incline más hacia el dominio de algoritmos, o que las prácticas desarrolladas en cada uno de éstos sean diferentes, hemos percibido que estudiantes de estos cursos enfrentan serias complicaciones para darle a los objetos del cálculo el significado que la institución espera y sobre todo para emplearlos en la resolución de problemas, particularmente los externos a la matemática, donde para “aplicar” los algoritmos y técnicas estudiados, primero se tiene que modelar el problema.

Todas estas inquietudes se ven reforzadas cuando leemos algunos trabajos de autores como Artigue (1995), Cantoral y Farfán (1998), Dolores (2000) y Serna (2007), donde mencionan que estas formas de enseñanza y las dificultades que se señalan, efectivamente son comunes en los cursos de cálculo; plantean además que generalmente en los cursos se presenta a los objetos matemáticos como algo ya acabado y alejado de la realidad. Consideran también que esto puede ocasionar que el curso de cálculo carezca de sentido para el alumno, que sus significados de los objetos matemáticos sean pobres, que se le dificulte usarlos en contextos distintos del analítico, en problemas no rutinarios y para modelar situaciones planteadas en contextos extramatemáticos e interpretar los resultados de los problemas una vez que éstos han sido solucionados.

Por otra parte señalan el predominio del lenguaje analítico y, por ejemplo, al referirse al poco uso del lenguaje geométrico, algunos autores resaltan la importancia que tiene éste para el aprendizaje del cálculo y las consecuencias de la ausencia del mismo. Así, Hitt (2003a) menciona que el desarrollo de habilidades ligadas a la visualización matemática pueden favorecer en los estudiantes a una comprensión más amplia de los objetos del cálculo, mientras que la restricción a la manipulación algebraica de éstos limita su comprensión. Además, las representaciones gráficas brindan a los estudiantes consideraciones adicionales que les puedan servir de apoyo para darles mayor seguridad a sus procesos algebraicos o proporcionarles una señal de peligro en caso de error. Hitt

(2003a) cita a Zimmermann, quien afirma que el pensamiento visual es fundamental para el aprendizaje del cálculo, por lo que es difícil que en un curso donde no se enfatizan los elementos visuales, se logre un entendimiento conceptual de los objetos; mismo que es reconocido como faltante en la mayoría de los cursos de cálculo actuales.

También Cantoral y Farfán (1998) consideran que previo al estudio del cálculo se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos, a causa de las enseñanzas tradicionales entre el lenguaje analítico y el lenguaje gráfico.

Otros autores señalan la importancia de trabajar en distintos lenguajes. Hitt (2003b) menciona que las representaciones de un objeto matemático, sólo representan una parte del mismo, por lo tanto, las tareas de conversión entre representaciones y la manipulación coherente de éstas permitirán una sólida construcción del objeto en cuestión.

Por su parte Font (2009) menciona que generalmente los objetos matemáticos se pueden representar mediante notaciones diferentes que ayudan a producir diferentes sentidos (o significados parciales del objeto), y que comprender un objeto matemático requiere utilizar diferentes notaciones y convertir una representación en otra, pues aunque cada una de las notaciones ayuda a producir sentido, no produce todos los sentidos, y un cambio de notación puede activar un sentido diferente, que facilite o dificulte la resolución de una determinada actividad.

Retomando las reflexiones iniciales de este apartado, es importante mencionar que las dificultades que presentan los estudiantes al estudiar cálculo pueden ser originadas por la forma de enseñanza, el predominio del lenguaje algebraico, etc., pero también porque los objetos matemáticos pueden ser problemáticos por sí mismos. A manera de ejemplo en las siguientes líneas presentamos algunas dificultades que ejemplifican lo aquí expresado.

2.1.1 DIFICULTADES QUE ENFRENTAN LOS ESTUDIANTES EN EL ESTUDIO DEL CÁLCULO

Con el propósito de hacer una presentación útil, primero expondremos los resultados de trabajos que reportan algunas dificultades presentadas por los estudiantes con respecto al objeto función, posteriormente con el objeto límite y finalmente con la derivada.

En relación al objeto función, Artigue (1998) menciona resultados de investigaciones en los cuales se muestra que es común entre los estudiantes la dificultad para diferenciar lo que es una función, y a pesar de que puedan dar definiciones formales de ésta, sus criterios para decidir qué es y qué no es función tienen base en ejemplos que se les presentan con más frecuencia y toman como prototipos, entre otros, asumen que una función es una fórmula, o una curva, en lugar de considerar la definición formal que conocen, por lo que pueden no tomar como función a la función constante de valor 4 si se representa analíticamente ($y=4$), porque no aparece x, y aceptarla como tal si está representada gráficamente, por ser una recta. Otra asociación de este estilo, es la establecida entre función y función continua, como encontró Hitt (2003a) presente incluso en profesores. En este sentido, Pinzón y Gordillo (s. f.) mencionan que esto puede ser una consecuencia de no estudiar suficientes ejemplos de un objeto, pues los estudiantes pueden generalizar características que son comunes en los ejemplos vistos aunque éstas no sean relevantes al objeto.

Por otro lado, en cuanto a las distintas formas de representar a la función, Artigue (1998) menciona que se ha documentado la existencia de diversas dificultades para hacer traducciones del lenguaje gráfico al analítico. Incluso al trabajar en el mismo lenguaje hay problemas, por ejemplo, al trabajar en el lenguaje gráfico se presentan dificultades para establecer relaciones entre la gráfica de una función y la de su derivada, o de sus primitivas. En el caso particular de las funciones afines, Duval (1988) comenta que es muy difícil para los estudiantes encontrar la expresión analítica de una recta a partir de su gráfica, aun después de la enseñanza de tales funciones, y atribuye estas dificultades al desconocimiento de las reglas de correspondencia semióticas entre las representaciones gráficas y las analíticas, y al predominio de la técnica de punteo para graficar.

Otro de los objetos matemáticos del cálculo cuyo aprendizaje es muy problemático, es el objeto límite, en torno al cual se han detectado, entre otras, dificultades de los estudiantes para darle un significado aceptable, originadas por la significación que en la vida cotidiana tiene este término (Artigue, 1998): barrera imposible de pasar y no alcanzable, último término de un proceso, marca que no se alcanza, etc. Pinzón y Gordillo (s. f.) mencionan que los estudiantes tienden a rechazar el paso al límite como una nueva operación matemática, y lo consideran solamente como una aproximación. Por otro lado, Hitt (2003a) señala que es común que en los estudiantes prevalezca la idea del límite como una sustitución.

Uno de los objetivos de nuestra propuesta es promover el significado geométrico de la derivada (como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto), el cual descansa sobre un objeto matemático que podría parecer no muy problemático: la recta tangente, pero tras leer trabajos como el de Artigue (1998), Dolores (2000), Pinzón y Gordillo (s. f.) y Serna (2007) nos dimos cuenta de las complicaciones que encierra este objeto matemático.

En los niveles escolares elementales, la recta tangente se considera como la recta que toca a la circunferencia en un solo punto; en el caso de esta cónica, la recta no vuelve a tocar en otro punto, cualidad que es común que los estudiantes generalicen a otras curvas. En cálculo, se precisa de una definición local de tangencia, pues la noción anterior puede ocasionar que los estudiantes rechacen que la recta horizontal *y=0* sea tangente en *(0,0)* a la función de expresión analítica $f(x)=x^3$, dado que la corta; también es difícil que acepten que la recta $y=3\mathrm{x}-2$ es tangente a la función $f(x)=x^3$ en el punto *(1,1)* por tener contacto también con el punto *(-2.-8)* .

Un acercamiento que se hace comúnmente en cálculo para definir a la recta tangente, es tomar una sucesión de rectas secantes y hacer tender a cero la distancia entre las abscisas, así la recta tangente será el límite de dicha sucesión de secantes. Este proceso es difícil de comprender por los estudiantes. En este sentido, Dolores (2000) encontró que de 112 estudiantes de bachillerato del estado de Guerrero, que acababan de terminar el curso de cálculo diferencial, alrededor de la mitad creían que la expresión de la derivada, como límite de un cociente de diferencias, daba el valor de la derivada en dos puntos, pues continuaban con la idea de recta secante. También encontró que aunque los estudiantes observaran la gráfica de una función y su recta tangente en un punto, al pedirles el valor de la derivada en el punto de tangencia, más de la mitad de los estudiantes confundió el valor de la derivada en el punto, con el valor de la ordenada de éste.

Finalmente, con respecto a las dificultades relacionadas con la derivada, además de las ligadas a la recta tangente, Pinzón y Gordillo (s. f.) y Dolores (2000) reportan la existencia de dificultades para ver a la derivada como una función y caracterizarla de manera global, pues muchas veces los estudiantes ven a la derivada como un número, o como la pendiente de la recta tangente en un punto fijo, sin considerar que es una función que para cada punto de su dominio, da la pendiente de la recta tangente (en cada uno de dichos puntos), constituyendo así otra función. También se han reportado que muchos estudiantes le dan un significado erróneo a la notación del cociente incremental y del cociente diferencial, como reporta Dolores (2000), éstos consideran, por ejemplo, que si $\Delta x \rightarrow 0$, el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se hace cero.

2.1.2 PROPUESTAS DE ENSEÑANZA DEL CÁLCULO

Para superar algunas de las dificultades mencionadas anteriormente, o para darle un significado más rico a los objetos del cálculo, se han formulado diversas propuestas de enseñanza del cálculo, o en particular de la derivada. A continuación daremos una breve descripción de algunos de estos trabajos, comenzando con propuestas para la enseñanza del cálculo con base en problemas de optimización, posteriormente mencionaremos otras con base en la variación y la razón de cambio, y finalmente una propuesta para la enseñanza de la derivada en un ambiente tecnológico.

En la Universidad de Sonora se han realizado trabajos en torno a la enseñanza del cálculo con base en problemas de optimización, el primero de estos trabajos fue la tesis de Maestría en Matemática Educativa de Ávila, Díaz y Vargas (1988), en la cual se diseñó un currículo diferente al tradicional para un curso de cálculo diferencial en el bachillerato y se investigaron los resultados de enseñar la asignatura con este currículo contrastándolos con los obtenidos en un curso con diseño curricular tradicional. Como parte de la tesis se diseñaron también materiales de apoyo como problemarios, notas de clase y exámenes.

Se menciona que en un curso tradicional de cálculo la secuencia de temas es la siguiente: números reales → funciones → límites → continuidad → teoremas y fórmulas de derivación → aplicaciones de la derivada; mientras que en el diseño no tradicional propuesto por ellos en la tesis es ésta: problemas de optimización → relación de dependencia que conduce posteriormente al concepto de función → representación gráfica de funciones → aproximaciones gráficas al punto óptimo → condición geométrica para el punto óptimo (tangentes horizontales) → condición analítica para el punto óptimo (límites de Fermat y presentación implícita de continuidad y derivada) → más problemas de optimización → problemas sobre movimiento → más acerca de límites → generalización del concepto de derivada y obtención de fórmulas de derivación → otras aplicaciones.

Los resultados obtenidos muestran que estadísticamente no hubo diferencia significativa entre el número de estudiantes aprobados del curso tradicional y del curso no tradicional. Sin embargo, en el grupo correspondiente a la propuesta no tradicional hubo mejoras en el aprovechamiento (especialmente en estudiantes rezagados) en la unidad correspondiente a las aplicaciones de la derivada, también se observó que la actitud de los estudiantes fue más positiva que la de los estudiantes del curso tradicional, estaban más interesados, más participativos y con mayor iniciativa.

Los problemarios y notas de clase de esta tesis han sido retomados para elaborar cuadernillos de trabajo para estudiantes de Ingeniería con actividades didácticas que los guían durante el curso en la construcción de los objetos matemáticos del cálculo por profesores de la Universidad de Sonora como Bravo, Grijalva e Ibarra (2002)

En la tesis de maestría de Bravo (1997), también de la Universidad de Sonora, se retomó una versión de los cuadernillos de trabajo informalmente impresa por Ávila y Fonseca (1988), adaptándolos para usarse conjuntamente con el software "Graphic Calculus" de David Tall, en cursos de cálculo diferencial de Ingeniería.

Mencionaremos a continuación la propuesta de Andreu y Riestra (2005) quien con problemas de optimización busca hacer una construcción de la derivada haciendo una síntesis histórica del establecimiento de ésta y usando recursos computacionales.

En el trabajo de Andreu y Riestra (2005), se toma como punto de partida el hecho de que la derivada fue primero utilizada (Fermat y la determinación de máximos y mínimos), luego descubierta (invención del cálculo por Newton y Leibniz), enseguida desarrollada (Euler y Lagrange) y finalmente definida (por Cauchy, corregida por Weierstrass). En esta propuesta, se introduce significativamente a la derivada a partir de problemas de máximos y mínimos, iniciando con un acercamiento tabular y algunas referencias gráficas que llevan a la determinación de la función derivada para funciones algebraicas con un planteamiento moderno del método de Fermat (etapa de utilización).

Luego (correspondiente a la etapa de descubrimiento) se ve a la derivada como razón de cambio mediante el cálculo de valores para una tabla numérica cada vez más cercanos al valor óptimo y observando que las diferencias en los valores de la función son cada vez más pequeñas, al igual que el cociente de diferencias, luego se ve a la derivada como pendiente de la recta tangente (siguiendo a Euler) desarrollando la diferencia $f(x+h)-f(x)$ y llegando a que es igual a $f(x)h+TOS$ (términos de orden superior), en esta parte se omite el uso de infinitésimos (utilizados por Euler) y en su lugar se utilizan recursos computacionales (acercamientos sucesivos en la pantalla (o *zoom*)) para despreciar los términos de orden superior. Esta propuesta se implementó en un curso de cálculo diferencial, donde se modificó el orden de los temas a tratar, posponiendo hasta el final el estudio de los límites por su complejidad epistemológica.

La ventaja de las propuestas mencionadas arriba, es que permiten que en el curso de cálculo se entre más pronto a la aplicación y cálculo de la derivada, que es el objetivo del curso, utilizando el tiempo que en un curso tradicional se dedica al estudio de los límites.

Dolores (2000) menciona que en México han surgido propuestas para la enseñanza del cálculo a través de un enfoque variacional, como las de dos grupos de investigadores: uno dirigido por el Dr. Ricardo Cantoral y otro por la Dra. Elfride Wenzelburger.

En cuanto al enfoque de Ricardo Cantoral, Dolores (2000) menciona que en éste se propone quitarle su papel protagónico en el curso de cálculo al límite y otorgárselo a la variación física, plantea hacer acercamientos fenomenológicos a partir de las intuiciones y experiencias de los estudiantes, y estudiar a los fenómenos y su relación con los conceptos matemáticos más que a los conceptos mismos. El discurso escolar en esta propuesta, se organiza en torno a la idea de predicción para conocer las cantidades por medio de sus variaciones. Analíticamente la serie de Taylor juega el papel principal.

En cuanto a la propuesta de Wenzelburger, se menciona que está dirigida al nivel medio superior y sugiere un enfoque intuitivo, poco formal pero significativo para presentar las ideas clave del cálculo. En ella se le da un papel fundamental a la noción de razón de cambio y se pretende que en el curso se desarrollen métodos para cuantificar, describir y pronosticar los cambios. La derivada es vista como razón de cambio instantánea tras un manejo intuitivo de límites y haber obtenido razones de cambio promedio al estudiar fenómenos de la vida cotidiana.

Por su parte Dolores (2000) propone un acercamiento para el curso de cálculo diferencial bajo el enfoque variacional utilizando ideas de Cantoral y Wenzelburger. Se pretende que a partir del estudio de la variación se desprenda el contenido matemático del curso. Las nociones principales a tratar son la variación, la rapidez promedio de la variación y la rapidez instantánea de la variación. En la primera parte de la propuesta se abstraen las nociones de variable y función a partir de la modelación de problemas sencillos de física, luego se introducen la velocidad y aceleración promedio para finalmente arribar a la rapidez instantánea mediante el uso de infinitesimales. Por último, se amplían las nociones anteriores con el uso de funciones que no necesariamente dependen del tiempo, y se define a la derivada y a la función derivada. Las reglas básicas de derivación se deducen haciendo un uso intuitivo de infinitesimales.

Una propuesta de enseñanza de la derivada se presenta en Cantoral y Mirón (2000), donde se desarrolla una secuencia didáctica dirigida a estudiantes de bachillerato, con la cual se busca establecer relaciones entre una función y su función derivada, en un ambiente tecnológico (usando calculadora graficadora) y analizar la naturaleza del aprendizaje en estas condiciones. En esta secuencia didáctica, se construye el concepto de derivada (para funciones lineales y cuadráticas) de una manera distinta a la tradicional: se utiliza la definición de derivada de Lagrange (coeficiente lineal del polinomio en h) en lugar de la de Cauchy (límite de un cociente). Se parte de la noción griega de tangente y de razonamientos geométricos y algebraicos, evitando el límite y los procesos infinitos al utilizar el *zoom* en la calculadora para verificar si una recta es tangente a una curva en un punto o es secante.

Antes de abordar la secuencia didáctica se instruyó a los estudiantes en el manejo de la calculadora y en la realización de operaciones gráficas de desplazamiento manipulando los parámetros de la fórmula general de la recta y la parábola. Las primeras actividades de la secuencia se dirigieron, entre otras cosas, a lograr que el estudiante determinara la regularidad lineal: cuando una función cuadrática, con expresión algebraica $P(x)=Ax^2+Bx+C$, es tangente en el punto $(0,C)$ a una recta, la expresión algebraica de esta recta es $R(x)=Bx+C$ y viceversa. Luego se generaliza este resultado para un punto de tangencia cualquiera. Las últimas actividades se destinan a la construcción de la función derivada y la anticipación de una función primitiva, cabe aclarar que en cada una de las actividades se coordina el lenguaje algebraico con el gráfico, mediando siempre con el uso de la calculadora.

Los resultados obtenidos muestran que es posible afectar la naturaleza del aprendizaje de ideas matemáticas entre los estudiantes cuando la investigación en Matemática Educativa acompaña a la intervención de la tecnología. Sobre la naturaleza del aprendizaje en este medio, se detectó la presencia de un proceso de adaptación a las situaciones planteadas, se observó también que la estrategia de ensayo- error se convirtió en un obstáculo para algunos estudiantes. La construcción de conocimientos por parte de los estudiantes involucró la detección de patrones, la búsqueda de similitudes y el apoyo en los conocimientos previos haciendo uso de la calculadora.

2.2 JUSTIFICACIÓN

De lo expuesto en los párrafos anteriores, es posible observar que durante el estudio del cálculo los estudiantes enfrentan una gran cantidad de dificultades, en particular al intentar resolver problemas no rutinarios o de contexto extra matemático. Por otro lado, también se puede constatar que efectivamente se han hecho tanto investigaciones como propuestas didácticas para atender la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo.

Por nuestra parte, analizando el panorama expuesto y teniendo en cuenta que los estudiantes de Ingeniería (y los profesionistas) al enfrentarse con problemas dentro de ciertos escenarios, o fenómenos externos a la matemática, requieren construir modelos matemáticos para poder describir, analizar y resolver los problemas, donde comúnmente se requiere optimizar alguna magnitud como el costo, el tiempo, la cantidad de material, etc.; consideramos prudente realizar una propuesta didáctica con el objetivo de favorecer que los estudiantes construyan los objetos matemáticos del cálculo diferencial, y sus significados, a través de la resolución de problemas de optimización extra matemáticos donde surja la necesidad de construir herramientas que ayuden a describir el comportamiento de las magnitudes involucradas en los problemas, y encontrar los valores de éstas que los resuelven.

Es importante señalar que los problemas de optimización pueden ser muy ricos en cuanto a los objetos matemáticos que se pueden construir a partir de ellos con conocimientos básicos de álgebra, aritmética, geometría y trigonometría, además de que involucran contextos que pueden ser interesantes para los estudiantes por ser familiares o afines a su carrera, y sobre los que pueden opinar.

Por otro lado, como los problemas seleccionados para nuestra propuesta corresponden a fenómenos de cambio; consideramos que representarlos *dinámicamente* favorecería una mejor comprensión de los mismos y la construcción de un significado más rico de los objetos matemáticos pretendidos, que si solamente se utilizaran representaciones *estáticas*.

Retomando la reflexión anterior y lo señalado por autores como Cantoral y Farfán (1998); Font (2009) y Hitt (2003b) sobre la importancia de trabajar en distintas formas de lenguaje (y en particular el lenguaje gráfico) y establecer relaciones entre éstas, decidimos incorporar en nuestra propuesta las ventajas que nos ofrece la tecnología moderna, específicamente el software de geometría dinámica GeoGebra[2], tanto para crear construcciones dinámicas que simulen los fenómenos cambiantes implicados en los problemas de optimización, como para representar la relación funcional entre las magnitudes que intervienen, en los lenguajes: geométrico, numérico y analítico; y vincular los mismos, favoreciendo así el establecimiento de relaciones entre los objetos matemáticos intervinientes en el problema, y la construcción de nuevos objetos matemáticos. Cabe mencionar que GeoGebra es un software libre y fácil de portar (pues el instalador no ocupa mucho espacio y puede ser llevado casi en cualquier dispositivo USB), por lo que los estudiantes pueden usarlo en cualquier computadora.

[2] En el capítulo 4 se profundizará un poco más sobre el software GeoGebra.

2.3 OBJETIVOS

Con base en las reflexiones anteriores y tomando en cuenta que este trabajo está ubicado en la categoría que denominamos de “desarrollo docente”, la presente tesis tiene como

OBJETIVO GENERAL:

Formular una propuesta de desarrollo docente, consistente en el diseño de una serie de actividades didácticas, que a su vez tiene el siguiente

PROPÓSITO FUNDAMENTAL DEL DISEÑO:

Promover en estudiantes de ingeniería la construcción de significado de la derivada como pendiente de la recta tangente, y significados de otros objetos matemáticos del cálculo diferencial, en ambientes dinámicos virtuales y a partir de problemas de optimización.

El éxito del material didáctico que hemos diseñado se alcanzará, a su vez, si se logran los siguientes

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Que los estudiantes:

- **Modelen los fenómenos presentados, identificando las magnitudes involucradas, estableciendo relaciones entre éstas; y determinen los valores de dichas magnitudes que resuelven los problemas.**
- **Empleen diversas formas de lenguaje para analizar y resolver los problemas, con apoyo en las características que les proporciona el ambiente dinámico virtual.**
- **Desarrollen sistemas de prácticas que promuevan la emergencia de objetos del cálculo diferencial.**

Sobre lo mencionado en los objetivos, podemos señalar que con “ambientes dinámicos virtuales” nos referimos a archivos manipulables creados con GeoGebra, los cuales incluyen: una construcción dinámica que simula un fenómeno cambiante, por ejemplo, una hoja rectangular a la cual se le cortan las esquinas para construir una caja y la caja cuyas dimensiones cambian al cambiar la longitud del corte; la gráfica y expresión analítica de la función que modela al fenómeno; un punto variable (móvil) sobre la gráfica; una hoja de cálculo para obtener varios puntos dentro de un intervalo, los cuales aparecen automáticamente sobre la gráfica; y una recta tangente a la gráfica en el punto variable.

En lo que respecta a los objetos matemáticos, cuyo significado buscamos que construyan los estudiantes, algunos son: función, función creciente, función decreciente, recta tangente, valor máximo y valor mínimo. En el capítulo 3 y 4 hablaremos más ampliamente sobre éstos y sobre la forma en que promovemos que se construyan.

CAPÍTULO TRES

ELEMENTOS TEÓRICOS Y ANÁLISIS RELACIONADOS CON LA PROPUESTA DIDÁCTICA

En este capítulo hablaremos sobre los elementos principales del marco teórico que soporta nuestra propuesta: el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2008), el cual proporciona una serie de herramientas teóricas y metodológicas que permiten diseñar procesos de enseñanza, describir y explicar (con diferentes grados de detalle) lo que sucede al llevarlos a cabo, valorar su pertinencia y dan pautas que guían hacia su mejoramiento. Algunas de estas herramientas son las nociones de práctica matemática, objeto matemático, significado e idoneidad didáctica.

En la primera parte de este capítulo hablaremos sobre las prácticas matemáticas, los significados y los objetos matemáticos. Después presentaremos el significado institucional de referencia y el significado pretendido en nuestra propuesta para objetos matemáticos del cálculo. En la parte final hablaremos sobre la idoneidad didáctica y sus dimensiones.

3.1 PRÁCTICAS MATEMÁTICAS

Cuando un sujeto aborda la resolución de problemas matemáticos, realiza acciones (actuaciones o manifestaciones verbales, simbólicas, mímicas, etc.) encaminadas a determinar la solución de los problemas, comunicarla, validarla o generalizar los resultados obtenidos. A estas acciones les denominamos *prácticas matemáticas.*

Por sujeto entenderemos tanto una comunidad de personas comprometidas en la resolución de un mismo tipo de problemas matemáticos (a la que llamaremos *institución matemática*), como un individuo particular. De este modo asumiremos que las prácticas matemáticas son relativas al sujeto que las realiza: si son realizadas por una persona, les llamamos *prácticas* *matemáticas personales*, y si son promovidas por una institución o realizadas en el seno de la misma, les llamamos *prácticas matemáticas institucionales* (Godino y Batanero, 1994).

En una institución educativa, uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas es lograr que los estudiantes realicen, durante la resolución de determinados tipos de problemas, no prácticas aisladas, sino sistemas de prácticas, que se asemejen cada vez más a las establecidas en dicha institución. En otras palabras, en una institución educativa se espera que los sistemas de prácticas personales de los estudiantes se correspondan a los sistemas de prácticas institucionales.

3.2 SIGNIFICADOS

Consideramos que el *significado* que cada sujeto (persona o institución) da a un objeto matemático es el sistema de prácticas matemáticas que emplea al resolver un mismo tipo de problemas donde usa el objeto o a partir de las cuales lo construye; en otras palabras, lo que el sujeto puede hacer con el objeto y decir sobre éste. Dado que el significado se define en términos de las prácticas matemáticas, si las prácticas realizadas son institucionales, le llamaremos *significado institucional*, y si las prácticas son personales, será *significado personal* (Grijalva, 2007; Godino, Batanero y Font, 2008; Font 2005).

Como las prácticas matemáticas pueden variar de una institución (o persona) a otra, los significados que se tienen de los objetos también cambian, por ejemplo, mientras que en una comunidad se identifica a la expresión $\sqrt{2}$ como un número irracional, para otra comunidad dicha expresión puede indicar una operación que hay que realizar al número 2 para obtener otro número. O mientras que en una institución educativa del nivel medio se estudia a la recta tangente, ligada a la circunferencia, como la recta que toca a ésta en un solo punto; en una institución educativa del nivel superior se puede considerar a la recta tangente como la mejor aproximación lineal a una curva en una vecindad del punto de contacto. Del mismo modo, para un estudiante puede ser importante demostrar que

$\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ (para a > 0), mientras que para otro lo importante puede ser determinar el valor de un límite particular, como el $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$ y observar que éste se obtiene al multiplicar "arriba y abajo" por el conjugado del numerador.

Dada la dependencia de los significados a la persona que realiza los sistemas de prácticas, y sobre todo a la institución donde se realizan, al diseñar un proceso de instrucción sobre algún objeto matemático es necesario tener en cuenta el significado que se pretende promover en la institución en la que se implementará tal proceso.

En este sentido, nuestra propuesta didáctica se desarrolla en el seno de la Unidad Regional Centro de la Universidad de Sonora; y está dirigida a los estudiantes del curso "Cálculo Diferencial e Integral I" correspondiente a la División de Ingeniería, es decir, a estudiantes de Ingeniería Industrial, Ingeniería Civil, Ingeniería en Minas e Ingeniería Química. Las fuentes que nos pueden proporcionar información sobre las prácticas matemáticas, tipos de problemas y, por tanto, sobre los significados que se quiere promover en los estudiantes de esta institución, son el programa de estudios[3] propuesto para la asignatura, la bibliografía sugerida en éste y los profesores que imparten este curso.

Analizando el programa de estudios, algunos de los tipos de problemas que se mencionan son: problemas referentes a fenómenos físicos, geométricos y de la ingeniería, en particular a problemas de optimización; y problemas relativos a funciones reales de variable real, como: analizar la continuidad y el límite de funciones, determinar su dominio y rango, etc. En lo que respecta a las prácticas que se desea promover entre los estudiantes, algunas de las que se señalan son las siguientes: explicar el concepto de función; modelar problemas físicos, geométricos y de la ingeniería y usar los conceptos y técnicas del cálculo diferencial para resolver estos problemas; utilizar desigualdades para encontrar el dominio y rango de funciones sencillas; explicar la derivada como pendiente de la recta tangente y como razón instantánea de cambio; aplicar los criterios de máximos y mínimos; utilizar software dinámico para reforzar el concepto de derivada en un punto y de función derivada;

[3] El programa de estudios se encuentra en los anexos de la tesis.

encontrar máximos y mínimos de una función, monotonía, concavidad, puntos de inflexión y utilizarlos para el reconocimiento visual de la función a partir de su función derivada, entre muchas otras.

3.3 OBJETOS MATEMÁTICOS

Se puede percibir que en las prácticas mencionadas en el párrafo anterior se involucran una serie de objetos: función, derivada como razón instantánea de cambio, derivada como pendiente de la recta tangente, máximos, mínimos, etc.; propiedades sobre éstos, como la monotonía y concavidad de una función; procedimientos, como el uso de desigualdades para determinar el dominio de una función; entre otros. En general, podemos decir que, al desarrollar sistemas de prácticas matemáticas dentro de una institución, ligadas a la resolución de tipos de problemas, se precisa de un lenguaje especial: términos técnicos, símbolos, cuantificadores, gráficas, expresiones algebraicas, etc.; se usan definiciones de los objetos matemáticos, proposiciones sobre éstos, procedimientos y argumentos que justifican y validan las acciones; pero también, durante la realización de dichas prácticas se crea nuevo lenguaje, se establecen nuevas definiciones, se hacen nuevas proposiciones, se construyen nuevos procedimientos, se usan nuevos argumentos y surgen otros tipos de problemas; es decir, de las prácticas matemáticas ligadas a la resolución de tipos de problemas emergen o se construyen *entes* matemáticos que modifican o complementan a los ya existentes. A estos entes matemáticos los podemos clasificar en los seis tipos siguientes:

- *Situaciones*, entendidas como problemas matemáticos (más o menos abiertos), problemas extra-matemáticos (o aplicaciones), ejercicios, ejemplos, situaciones problémicas (en el sentido que se usa en la enseñanza problémica), etc.

- *Lenguaje*, en diversas formas: verbal, numérico, gráfico, analítico (entendido como notación conjuntista, cuantificadores, expresiones algebraicas, notación del límite, etc.).

- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.).

- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos como teoremas, corolarios, propiedades, etc.).

- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, etc.).

- *Conceptos (*expresados por medio de *definiciones o descripciones*).

A estos seis tipos de entes emergentes de los sistemas de prácticas, realizadas para resolver un cierto tipo o clase de problemas, les llamaremos *objetos matemáticos primarios.*

En este sentido, asumiremos como objetos matemáticos no sólo a lo que dentro de la matemática se le suele llamar objeto, sino también a cualquiera de los objetos matemáticos primarios mencionados arriba y combinaciones de los mismos. Por ejemplo, al referirnos al objeto función, podemos hablar sobre: su definición, su gráfica, su tabla de valores, su expresión analítica, si cumple la propiedad de continuidad, las reglas para obtener la expresión analítica de su función derivada, problemas en que se modela un fenómeno con una función, podemos argumentar con ella, etc. A todos estos entes ligados al objeto función también los consideraremos objetos matemáticos.

Al igual que las prácticas y los significados, los objetos matemáticos también tienen una faceta personal y una institucional, es decir, si quien realiza los sistemas de prácticas es una persona, los objetos emergentes de dichas prácticas serán *objetos matemáticos personales*, mientras que si las prácticas son realizadas en el seno de una institución, los objetos emergentes de éstas serán *objetos matemáticos institucionales* (Godino, Batanero y Font, 2008; Font 2005).

3.4 TIPOLOGÍA DE SIGNIFICADOS

En este trabajo, nos interesa promover la construcción de significados para algunos objetos del cálculo, de manera que estén ligados a problemas de optimización. Es decir, queremos que los estudiantes realicen ciertos sistemas de prácticas para resolver problemas de optimización, de los que emerjan objetos matemáticos del cálculo, y donde los objetos necesarios para la realización de las prácticas sean objetos que se construyen en la escuela preparatoria.

Para la realización de este trabajo, tomamos en cuenta los sistemas de prácticas matemáticas presentes en el programa de estudios, en los libros de texto propuestos para el curso, y nuestros sistemas de prácticas personales. A estos sistemas de prácticas les llamaremos si*gnificado institucional de referencia*.

Pero debido a la gran cantidad de trabajo y tiempo que implicaría diseñar actividades didácticas para promover la construcción de significado para todos los objetos matemáticos incluidos en el programa de estudios y libros de texto sugeridos para el curso, lo cual sobrepasaría los propósitos de este trabajo, procedimos a hacer una selección de los objetos del cálculo para los cuales promoveremos la construcción de significado mediante las actividades didácticas. Al sistema de prácticas matemáticas que planeamos promover con nuestra propuesta didáctica, el cual está formado por la selección de prácticas matemáticas que hicimos del significado institucional de referencia, le llamamos *significado institucional pretendido.* En un proceso de instrucción en general, este significado es el que aparece comúnmente en las planificaciones del profesor y en el programa de estudios del curso.

Algunas de las actividades didácticas de nuestra propuesta se probaron en un proceso de instrucción, en el cual se desarrollaron algunas de las prácticas planeadas, pero también se realizaron prácticas no planeadas en el diseño. En este sentido, al sistema de prácticas efectivamente desarrolladas en el proceso de instrucción las identificaremos como el *significado institucional implementado*.

Otro tipo de significado institucional, el cual no incluimos en este trabajo, es el *significado institucional evaluado*, el cual es el sistema de prácticas que se considera fundamental que los estudiantes realicen, y que generalmente se le pide mostrar en un examen o proceso de evaluación del aprendizaje.

Desde la perspectiva personal también podemos identificar varios tipos de significados: el g*lobal* es el sistema total de prácticas matemáticas de un estudiante ante un determinado tipo de situaciones problémicas, no importa si dichas prácticas son correctas o no para la institución correspondiente. El l*ogrado* es el sistema de prácticas manifestadas que son consideradas “correctas” por la institución, y el d*eclarado* es el sistema de prácticas mostradas por el estudiante en el proceso educativo, en particular en los procesos de evaluación, ya sean consideradas como correctas o incorrectas.

3.4.1 SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA DE LA DERIVADA

Dado que al desarrollar los sistemas de prácticas que conforman el significado (personal o institucional) de un objeto matemático, intervienen y/o emergen algunos (o todos) de los seis tipos de objetos matemáticos primarios, se considera que a través de la identificación de éstos se puede determinar con más detalle el significado del objeto, por lo que a los objetos matemáticos primarios, tanto intervinientes como emergentes del sistema de prácticas, se les llama *componentes del significado* del objeto.

En este sentido, a continuación presentamos los objetos matemáticos primarios que componen el significado institucional de referencia de la derivada, para el diseño de nuestra propuesta didáctica. Más adelante presentaremos también el significado institucional pretendido en nuestro trabajo.

➢ Situaciones

- A partir de la expresión analítica de f, determinar f'.
- A partir de la expresión analítica de f, determinar f' en un valor dado de x.
- Estimar gráfica y numéricamente el valor de la derivada f' de una función f, en un punto particular.
- Determinar los puntos donde la recta tangente a una función f es horizontal y esbozar la gráfica de f utilizando esos puntos.
- Trazar la gráfica de la función f' a partir de la gráfica de f.
- Determinar los puntos críticos de una función f.
- Estimar gráficamente los puntos críticos de una función f y comprobar analíticamente las respuestas.
- Determinar los máximos y mínimos globales de una función f.
- Problemas de optimización extramatemáticos: situaciones de la vida cotidiana o profesional de un ingeniero, en los que el cálculo puede jugar un papel importante.

➢ Conceptos

- *Función*: Una función f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento x de D un elemento único y de E. El conjunto D se llama *dominio* de la función. El *contradominio* de f es el conjunto E.

- *Recta tangente:* Suponga que la función f es continua en x_1. La recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_{1,} f(x_1))$ es la recta que pasa por P y tiene pendiente $m(x_1)$, dada por

  - $m(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ si este límite existe.

- La recta $x=x_1$ si $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ es $+\infty$ o $-\infty$ y $\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ es $+\infty$ o $-\infty$.

- *Función creciente*: Una función definida en un intervalo es *creciente* en ese intervalo si y sólo si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, donde x_1 y x_2 son números cualesquiera del intervalo. En otras palabras, si los valores de $f(x)$ aumentan en ese intervalo cuando x aumenta en ese intervalo.

- *Función decreciente*: Una función definida en un intervalo es *decreciente* en ese intervalo si y sólo si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, donde x_1 y x_2 son números cualesquiera del intervalo. En otras palabras, si los valores de $f(x)$ disminuyen en ese intervalo cuando x aumenta en ese intervalo.

- La *rapidez promedio de cambio* de una función f en el intervalo $a \leq x \leq a+h$, está dada por $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

- La *derivada de f en a*, se representa por $f'(a)$ y se define como la rapidez de cambio de f en a, es decir, $f'(a)=\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Si existe ese límite, se dice que f es *diferenciable en a.*

- *La función derivada* de una función f es:
  - $f'(x)$ = Rapidez de cambio de f en x = $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

  Para cada valor de x para el cual este límite existe, se dice que f es *diferenciable* en ese valor de x. Si existe el límite para toda x en el dominio de f, se dice que f es *diferenciable siempre*.

- *Mínimo local (o relativo)*: Sea *p* un número en el dominio de una función *f,*
  - *f(p)* es un *mínimo local* de *f* si existe un intervalo abierto *(a,b)* que contiene a *p* tal que $f(x) \geq f(p)$ para todo *x* en *(a,b)*.

- *Máximo local (o relativo)*: Sea *p* un número en el dominio de una función *f,*
  - *f(p)* es un *máximo local* de *f* si existe un intervalo abierto *(a,b)* que contiene a *p* tal que $f(x) \leq f(p)$ para todo *x* en *(a,b)*.

- *Extremo relativo:* si una función *f* alcanza un valor máximo o mínimo relativo en *p,* entonces se dice que la función tiene un *extremo relativo* en *p.*

- *Número crítico:* Un número *p* en el dominio de una función *f* se llama *número crítico* de *f* si *f '(p)=0* o bien *f '(p)* no existe. El punto *(p, f(p))* se llama *punto crítico*.

- *Mínimo absoluto (o global)*: sea *f* una función definida en un intervalo *I* y sea *p* un número en *I.*
  - *f(p)* es el mínimo absoluto de *f* en *I* si $f(x) \geq f(p)$ para todo *x* en *I.*

- *Máximo absoluto (o global)*: sea *f* una función definida en un intervalo *I* y sea *p* un número en *I.*
  - *f(p)* es el máximo absoluto de *f* en *I* si $f(x) \leq f(p)$ para todo *x* en *I.*

- *Extremo absoluto:* un *extremo absoluto* de una función en un intervalo es un valor máximo o mínimo absoluto de la función en el intervalo.

➢ Lenguaje

- Términos para los *conceptos* mencionados arriba.
- Tabla de valores de:

- *x* y *f(x)*.
- *x* y *f '(x)*.

- Expresiones analíticas:
  - de diferentes funciones
  - para definir la derivada vía límites
  - para denotar las funciones y la derivada: *f(x), f '(x), f(p), f '(a)*, etc
  - notación para intervalos

- Gráficas:
  - De diferentes funciones.
  - Donde se visualiza la rapidez promedio de cambio de *f* como la pendiente de una recta secante.
  - Donde se visualiza la rapidez instantánea de cambio de *f* como la pendiente de una recta tangente en un punto.
  - De funciones no diferenciables en un punto.
  - De funciones con sus puntos críticos, valores máximos y mínimos absolutos, si es que éstos existen.

➢ Procedimientos

- Calcular la rapidez promedio en intervalos, tomando valores de *h* cada vez más pequeños.

- Hacer *zoom* a la gráfica de una función en torno a un punto hasta que ésta parezca una recta.

- Identificar puntos en la gráfica de una función *f*, donde la derivada sea negativa, la derivada sea máxima, la derivada sea cero, donde *f* sea negativa, puntos distintos donde la derivada sea aproximadamente igual.

- Estimar gráficamente la derivada de una función *f* en un punto dado, como la pendiente de la recta tangente.

- Analizar el cambio de signo de la derivada en un número crítico para determinar si la función tiene un máximo o un mínimo local en tal número.

- Comparar los valores de la función en todos los números críticos en el intervalo y en sus extremos, para determinar el máximo y el mínimo globales de una función continua en un intervalo cerrado.

- Encontrar los valores de la función en todos los puntos críticos, trazar una gráfica, buscar en la función los valores de *x* cuando se aproxime a los extremos del intervalo o se acerque a $\pm\infty$, según sea el caso; para encontrar el máximo y mínimo globales de una función continua en un intervalo abierto o en todos los números reales.

➢ Proposiciones

- La derivada en el punto *A(a, f(a))* se puede interpretar como:
  - La pendiente de la curva en *A*.
  - La pendiente de la recta tangente a la curva en *A*.

- Si una función tiene derivada en un punto, su gráfica debe tener una tangente en ese punto; la pendiente de la tangente es la derivada. Cuando nos acercamos a la gráfica de la función debemos ver una línea recta no vertical.

- Algunas causas por las que una función puede ser no diferenciable en un punto son:
  - Si la función no es continua en ese punto.
  - Si la gráfica tiene una esquina en ese punto.
  - Si la gráfica tiene una tangente vertical.

- Sea f una función que es continua e un intervalo cerrado $[a,b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a,b):
  - Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a,b), entonces f es creciente en $[a,b]$.
  - Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a,b), entonces f es decreciente en $[a,b]$.

- Una función f definida en un intervalo abierto que contiene a a es diferenciable en a si y sólo si la derivada por la derecha y por la izquierda en a existen y son iguales.

- Si una función continua f tiene un máximo o mínimo local en p y si p no es extremo del dominio, entonces p es un número crítico.

- *Criterio de la primera derivada*: Sea f una función que es continua en un número crítico p y derivable en un intervalo abierto I que contiene a p, excepto posiblemente en p mismo.
  - Si f' cambia de negativa a positiva en p, entonces $f(p)$ es un mínimo local de f.
  - Si f' cambia de positiva a negativa en p, entonces $f(p)$ es un máximo local de f.
  - Si $f'(x)>0$ o bien si $f'(x)<0$ para todo x en I, excepto para $x = p$, entonces $f(p)$ no es un valor extremo local de f.

- *Criterio de la segunda derivada*: Sea f una función diferenciable en un intervalo abierto que contiene a p y tal que $f'(p)=0$.
  - Si $f''(p)>0$, entonces f tiene un mínimo local en p.
  - Si $f''(p)<0$, entonces f tiene un máximo local en p.

- Argumentos

- La derivada se define como un límite.

- Definición de límite y teoremas sobre límites.

- Se explica por qué la gráfica de una función diferenciable en un punto se ve como una recta al acercarnos más y más al punto utilizando el teorema siguiente:
  Si *f* es diferenciable en $x=a$ y $E(x)$ es el error de la aproximación lineal, esto es:
  $E(x)=f(x)-f(a)+f'(a)(x-a)$, entonces $\lim_{x\to a}\frac{E(x)}{x-a}=0$.

- *Teorema del valor extremo*: si la función *f* es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces *f* tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en $[a,b]$.

- *Teorema de Rolle*: sea *f* una función tal que
  - es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$;
  - es diferenciable en el intervalo abierto (a,b);
  - $f(a)=0$ y $f(b)=0$.

  Entonces existe un número p en el intervalo abierto (a,b) tal que $f'(p)=0$.

- Teorema: sea *f* continua en el intervalo I que contiene al punto c. Si $f(c)$ es un extremo local de *f* en I y c es el único punto en I para el cual *f* tiene un extremo local, entonces $f(c)$ es un extremo global de *f* en I.

Para determinar el significado institucional de referencia de la derivada, consultamos los siguientes libros de texto sugeridos en la bibliografía del programa de estudios del curso Cálculo Diferencial e Integral I de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora:

1. *Cálculo*. Hughes, D., et al. Segunda Edición. CECSA, 2000.

2. *El Cálculo*. Leithold, L. Séptima Edición. Oxford University Press, 1998.
3. *Cálculo con Geometría Analítica*. Swokowski, E. Segunda edición. Grupo Editorial Iberoamérica, 1989.
4. *Lecciones de Cálculo I. Introducción a la derivada*. Cruse, A., Lehman, M. Traducción de Hugo Arizmendi Peimpert. Fondo Educativo Interamericano, 1982.

A continuación mencionaremos brevemente cómo se introduce la derivada y el papel que juegan los problemas de optimización en estos libros de texto, para describir posteriormente cómo se abordará este objeto matemático en nuestra propuesta didáctica.

En Hughes (2000) se parte de una situación de contexto extra matemático para introducir la derivada: "¿cómo se puede medir la velocidad de un objeto en movimiento en determinado instante?". Con esta situación se construyen, en diferentes formas de lenguaje (verbal, numérico, gráfico y analítico), la velocidad promedio y (con el límite de ésta) la velocidad instantánea, Luego se relacionan con la pendiente de una recta secante y la pendiente de la curva en un punto, respectivamente. El procedimiento seguido, se extiende a cualquier función f y se definen la rapidez promedio de cambio y la rapidez instantánea de cambio de f en un punto a, a la cual se le llama "la derivada de f en a ". Gráficamente, se muestra que la rapidez promedio de cambio se puede interpretar como la pendiente de una recta secante; y la rapidez instantánea de cambio $f'(a)$, como la pendiente de la recta tangente en el punto $(a,f(a))$. Posteriormente se introduce la función derivada. En cuanto a los problemas de optimización extramatemáticos, éstos se estudian después de haberse definido la derivada.

En el texto de Leithold (1998) se señala el interés por definir la pendiente de la recta tangente a una función f en el punto $P(x_1,f(x_1))$. Para esto, se parte de la recta secante y se toma el límite cuando la distancia entre las abscisas de los puntos de contacto tiene a cero. Después se menciona que ese tipo de límite recibe un nombre específico y se define enseguida la función derivada $f'(x)$. Se evalúa la derivada en un numero particular x_1 y se comenta que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_1, f(x_1))$ es la derivada de f evaluada en la abscisa de ese punto. En este libro se utiliza principalmente el lenguaje analítico aunque también se muestran gráficas de las funciones implicadas. En cuanto a los problemas de optimización, previo a la derivada, se proponen algunos en los que se pide determinar el dominio y la expresión analítica de la función que modela la situación, y aproximar, usando una calculadora graficadora, el valor de la variable independiente que corresponde al valor óptimo. Después del estudio de la derivada, se retoman tales problemas de optimización (y se proponen nuevos), pero ahora se determina su solución exacta utilizando la derivada.

En el caso del texto de Swokowski (1989) se introduce el objeto *límite* a partir de la construcción de la recta tangente a una función en un punto, como aquella cuya pendiente es el límite de la pendiente de una recta secante cuando la abscisa de uno de de los puntos de contacto tiende al valor de la abscisa del otro; y de la velocidad en un punto, como el límite de la velocidad media. Cuando se aborda la derivada, se retoma la expresión analítica de la pendiente de la recta tangente y se menciona que ese límite se llama la *derivada de la función f en a*, luego se enuncia su definición. Posteriormente se define la función derivada. En este libro, los problemas de optimización se abordan después de haberse estudiado la derivada, como una aplicación de ésta.

En el texto de Cruse y Lehman (1982) se parte de dos situaciones de optimización: "el problema de la caja" y "el problema de la lata de aceite", para promover la emergencia de la derivada, como la pendiente de la recta tangente. Para abordar los problemas de optimización, se representan con variables las magnitudes que cambian, se construye una expresión analítica en dependencia de una de las variables, luego se determina el intervalo de valores posibles para la variable independiente, se construye una tabla con valores de las variables dependiente e independiente y una gráfica con las parejas de números de la tabla. Posteriormente, se señala que en el punto más alto de la gráfica, la curva termina de ascender y no ha comenzado a descender, es decir, que la recta tangente es horizontal. Después se plantea una nueva situación: ¿cómo localizar el punto sobre la curva en el cual la tangente es horizontal? Para solucionar esta situación, se aborda la construcción de la recta tangente a la parábola y la elipse, gráfica y analíticamente, partiendo de la circunferencia. Finalmente, se introduce el método de límites de Fermat para determinar la pendiente de la recta tangente a otras curvas en un punto particular y luego se construye una fórmula para calcular la pendiente de la tangente en un punto cualquiera. Utilizando este método se resuelven los problemas de optimización planteados al inicio. Posteriormente en este libro, se construye el significado de la derivada como velocidad y como razón de cambio partiendo de situaciones de contexto extramatemático, y se hace énfasis en la relación entre la derivada, como pendiente de la recta tangente, la velocidad y la razón instantánea de cambio.

Se puede observar que en los libros de texto mencionados arriba, la derivada se introduce de diferentes maneras: Hughes (2000) y Cruse y Lehman (1982) parten de situaciones de contexto extra matemático para promover, en un principio, la emergencia de la derivada, como rapidez de cambio y como la pendiente de la recta tangente, respectivamente. Por otra parte, Leithold (1998) y Swokowski (1989) comienzan definiendo la pendiente de la recta tangente y luego la retoman para definir la derivada, sin partir de situaciones. En este sentido, podemos ubicar estos libros de texto, por la forma en que introducen la derivada, dentro de una de las perspectivas siguientes (Font, 2007):

- La perspectiva formalista, en la que los objetos matemáticos se introducen partiendo de su definición y posteriormente se presentan ejemplos de éstos y se hace un estudio teórico (Figura 1).

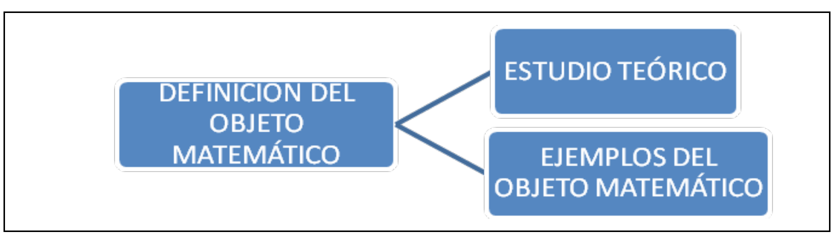


Figura 1. Perspectiva Formalista.

- La perspectiva contextualizadora, en la que los objetos matemáticos se introducen partiendo de situaciones de contexto extramatemático (Figura 2).

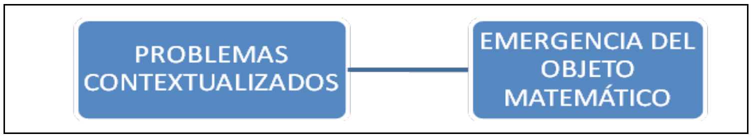


Figura 2. Perspectiva contextualizadora.

Como se puede observar en los párrafos anteriores, el objeto derivada (tanto global como localmente) tiene un significado muy amplio: razón o rapidez instantánea de cambio, velocidad instantánea (cuando las variables son magnitudes de distancia y tiempo), pendiente de la recta tangente (haciendo acercamientos sucesivos), límite de las pendientes de las rectas secantes cuando la distancia entre las abscisas de los puntos de contacto tiende a cero, etc. En nuestra propuesta didáctica, nos enfocaremos a la construcción de significados ligados a los aspectos geométricos de la derivada, localmente como la pendiente de la recta tangente a una función en un punto dado, y globalmente como la función que para cada número de su dominio da la pendiente de la recta tangente en éste a otra función. Nuestro trabajo se puede ubicar dentro de la perspectiva contextualizadora y retoma el enfoque del texto de Cruse y Lehman (1982) para la introducción de la derivada, a partir del estudio de problemas de optimización.

A continuación presentaremos, los objetos matemáticos primarios que componen el significado institucional pretendido de la derivada en nuestra propuesta.

3.4.2 SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDO DE LA DERIVADA

- Situaciones

Las *situaciones intervinientes*, cuya resolución motiva la realización de prácticas matemáticas y la emergencia de los objetos del cálculo diferencial, son los problemas de optimización extra matemáticos que se presentan a continuación, y las preguntas e indicaciones guía de las actividades didácticas.

Los problemas de optimización que se presentan enseguida, son situaciones que seleccionamos de libros de texto.

- LA CAJA SIN TAPA : De un cartón rectangular de 40 x 50 cm se quiere construir una caja sin tapa; para esto se recortarán cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas del cartón y se doblarán las cejas con el fin de formar los lados. Determine las dimensiones de la caja de volumen máximo.

Tomado de Ibarra, Ávila, Grijalva y Fonseca (1996, p. 4). También puede encontrarse en Leithold (1998, pp. 27, 207), Cruse y Lehman (1982, p. 1), Edwards y Penney (1996, p. 142) y Swokowski (1989, p. 195).

- LA ESTACIÓN DE BOMBEO: Hacia el mismo lado o margen de un río recto hay dos pueblos, los habitantes desean construir una estación de bombeo que les abastezca agua. La estación de bombeo debe estar en la margen del río y los tubos deben ir directo a los pueblos. Las distancias se muestran en la Figura 3 ¿Dónde debe estar la estación de bombeo para minimizar la longitud total del tubo?

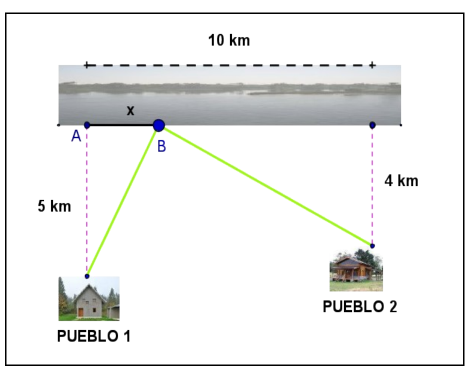


Figura 3. Problema "la estación de bombeo".

Esta situación la retomamos del texto de Hughes (2000, p. 315) pero cambiamos algunos datos numéricos. Se pueden encontrar situaciones similares a ésta, en modelo matemático, pero de contexto diferente*: el principio de Fermat del tiempo mínimo para la propagación de la luz,* en Edwards y Penney (1996, pp. 147, 148); e*l cable más corto que vaya de la punta de un poste, al suelo y luego a la punta de otro poste,* en Swokowski (1989, p. 203) e Ibarra et al. (1996).

- EL CORRAL: Se desea rodear un terreno rectangular con 60 m de cerca. El terreno se encuentra a la orilla de un río, por lo que un lado no necesita cerca. Determine las dimensiones del terreno de mayor área que pueda rodearse con esa cantidad de cerca.

Del texto de Leithold (1998, p. 27) tomamos esta situación, pero hicimos cambios en la redacción y la cantidad de cerca. También se puede encontrar esta situación Ibarra et al. (1996); Hughes (2000, p. 313) y Edwards y Penney (1996, p. 141).

- LA PÁGINA DE IMPRESIÓN: Una página impresa contiene una región de impresión de 24 plg^2, un margen de 2 plg en las partes superior e inferior y margen de 1.5 plg en los lados. Determine las dimensiones de la página más pequeña que satisface estos requerimientos.

La situación "la página de impresión" la encontramos en Leithold (1998, pp. 27, 273), aunque cambiamos algunos datos numéricos. Se encuentra también en Ibarra et al. (1996) y Swokowski (1989, p. 202). En Hughes (p. 314) se presenta una situación similar en modelo matemático, pero con un contexto diferente.

- LA VIGA MÁS RESISTENTE: La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto del ancho y el cuadrado de la altura de su sección transversal. Determine las dimensiones de la viga más resistente que se pueda obtener de un tronco circular de 30 cm de radio.

Esta situación la obtuvimos de Hughes (2000, p. 314) y Swokowski (1989, p. 203). También aparece en Ibarra et al. (1996), Edwards (1989, p. 145) y Leithold (1998, p. 215).

- LA LATA DE ACEITE: Se va a diseñar una lata de aceite con forma de cilindro circular recto, de tal forma que ésta contenga 60 cm^3 de aceite. Determine las dimensiones de la lata de tal manera que requiera la mínima cantidad de material para su manufactura.

De Ibarra et al. (1996) tomamos esta situación, aunque también se puede obtener de Leithold (1998, pp. 23, 267), Cruse y Lehman (1982, p. 4) y Hughes (2000, p. 308).

- LOS AUTOS: Un automóvil viaja a una velocidad de 60 km/hr, y se aproxima a un crucero. Cuando el automóvil está a 10 km del crucero, otro automóvil que viaja a una velocidad de 90 km/hr en una carretera perpendicular a la otra, pasa por el crucero. Determine en qué tiempo, después de que el segundo auto pasa el crucero, los dos autos están más cercanos.

Esta situación la obtuvimos de Leithold (1998, p. 273) pero modificamos algunos datos numéricos. En Swokowski (1989, p. 197) también se encuentra esta situación.

- El CANAL: Se va a construir un canal para agua mediante una banda larga de metal de 45 cm de ancho, doblando con un ángulo α una tira de 15 cm a cada lado. ¿Cuál ángulo maximiza la capacidad del canal?

Esta situación es una versión modificada de la de Edwards y Penney (1996, p. 163).

- EL TRIANGULO ISÓSCELES: Los vértices de un triángulo isósceles se colocan sobre lados adyacentes de un cuadrado de lado 4 cm como se muestra en la Figura 4. Determina las dimensiones del triángulo de área máxima.

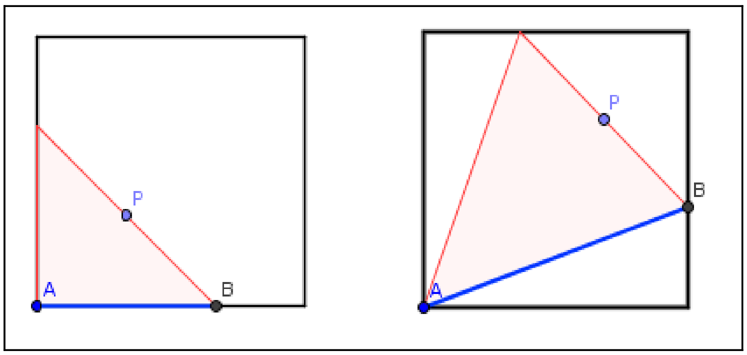


Figura 4. Problema "triángulo isósceles".

- LA CAJA DE BASE CUADRADA: Con una lámina cuadrada de 13 cm de lado se quiere construir una caja de base cuadrada sin tapa, donde la base esté formada por una esquina de la lámina, como se muestra en la Figura 5. Determina las dimensiones de la caja de mayor volumen.

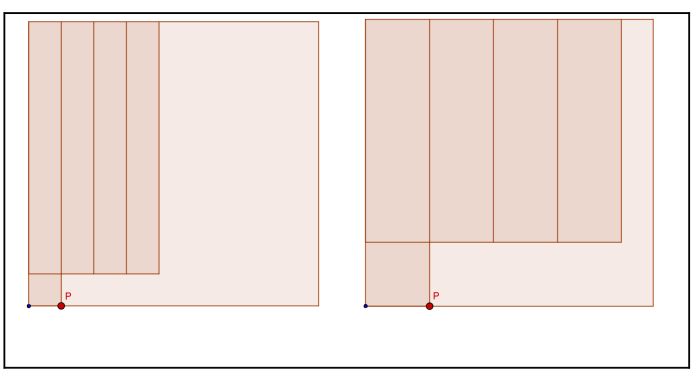


Figura 5. Problema "la caja de base cuadrada".

Esta situación se tomó de Moreno y Cuevas (2004).

Las *situaciones emergentes* son:

- Determinación de las coordenadas del punto donde la recta tangente a la gráfica de la función tiene pendiente cero.
- Determinación de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado.
- Determinación de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto cualquiera.

Estas situaciones *emergentes* promueven a su vez la emergencia del objeto derivada, con la significación geométrica como "la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto", y aunque la resolución de estas situaciones no se aborda en las hojas de trabajo, sí se pretende promoverlas mediante la detección de relaciones de la pendiente de la recta tangente con los puntos críticos y la monotonía de la función.

De esta manera, se promueve la emergencia de nuevas situaciones, centradas en la determinación de la pendiente recta tangente en un punto y, posteriormente, en la determinación de la función derivada.

➢ Lenguaje

Interviniente:

- Expresiones algebraicas para calcular el volumen de un paralelepípedo de base rectangular y de un cilindro circular recto, el área de un cuadrado, de un rectángulo, de un círculo y de un trapecio, el teorema de Pitágoras, la resistencia de una viga de madera, la velocidad como distancia dividida por el tiempo, entre otras.
- Términos: referentes a magnitudes como área, volumen, resistencia, tiempo, distancia y velocidad; otros como tabla, fórmula, recta tangente, pendiente; y algunos coloquiales como aumento o incremento, disminución y dependencia.

Emergente:

- Expresiones analíticas, verbales, gráficas, numéricas y tabulares de las funciones involucradas en los problemas de optimización.
- Notación para intervalos, para el incremento en x, para la pendiente de la recta tangente en un punto.
- Términos como variable dependiente e independiente, función, intervalo, dominio, función creciente/decreciente, máximo relativo, mínimo relativo.

➢ Procedimientos

Intervinientes:

- Hacer despejes sencillos, usar las fórmulas mencionadas arriba para calcular el área, el volumen, la resistencia, la velocidad, etc.
- Usar el teorema de Pitágoras.
- Graficar puntos en un plano a partir de datos numéricos correlacionados en una tabla.
- Construir una tabla de valores a partir de una fórmula.
- Realizar operaciones algebraicas.
- Determinar gráficamente el signo de la pendiente de una recta.

Emergentes:

- Determinar la expresión analítica de la función que modele el problema de optimización.
- Determinar el dominio de la función.
- Aproximar el valor extremo, buscando en intervalos cada vez más pequeños.
- Reconocer gráficamente la monotonía de una función.
- Reconocer gráficamente los valores máximos y mínimos.

- Proposiciones

Intervinientes:

- La distancia es no negativa.
- Teorema de Pitágoras.
- Razones trigonométricas.
- No se puede dividir entre cero.
- La pendiente de una recta horizontal es cero.

Emergentes:

- Si la función f tiene un máximo o mínimo en p y si p no es extremo del dominio, entonces la recta tangente en el punto $(p,f(p))$, tiene pendiente cero o no existe.
- Si una función f es creciente antes de un número c de su dominio y decreciente después de c, entonces f tiene un valor máximo en c.
- Si una función f es decreciente antes de un número c de su dominio y creciente después de c, entonces f tiene un valor mínimo en c.
- La función es creciente en los intervalos donde la pendiente de la recta tangente es positiva.
- La función es decreciente en los intervalos donde la pendiente de la recta tangente es negativa.
- Si la pendiente de la recta tangente cambia de positiva a negativa en el punto $(c, f(c))$, entonces f tiene un máximo en c.
- Si la pendiente de la recta tangente cambia de negativa a positiva en el punto $(c,f(c))$, entonces f tiene un mínimo en c.

- Argumentos

Los argumentos que esperamos que se empleen durante el desarrollo de las actividades didácticas serán mayormente con base en el lenguaje numérico, las restricciones que implica el contexto del problema, y los ambientes dinámicos.

➢ Conceptos

Intervinientes:

- Área, volumen, longitud, tiempo, distancia.
- Velocidad constante concebida como distancia entre tiempo.
- Recta tangente como la recta que toca a la gráfica en un solo punto.
- Pendiente de una recta, pendiente positiva de una recta, pendiente negativa de una recta, pendiente de una recta horizontal.

Emergentes:

- Variable, variable dependiente, variable independiente, función, dominio, incremento y decremento (o aumento y disminución) de la variable dependiente e independiente, función creciente, función decreciente, valor máximo relativo, valor mínimo relativo y recta tangente (localmente).

Cabe mencionar que estos objetos matemáticos primarios, tanto intervinientes como emergentes, no están aislados durante la realización de los sistemas de prácticas matemáticas ligadas a la resolución de tipos de problemas, sino que se relacionan unos con otros formando redes. A estas redes de objetos emergentes e intervinientes en los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos se les llama *configuraciones*. Si los objetos son institucionales las configuraciones se llamarán *epistémicas* y si los objetos matemáticos son personales, se llamarán *configuraciones cognitivas* (Godino, Batanero y Font, 2008).

3.5 IDONEIDAD DIDÁCTICA Y SUS DIMENSIONES.

Hasta el momento hemos caracterizado el significado institucional de referencia y el significado institucional pretendido en nuestra propuesta mediante la determinación de los componentes de dichos significados. Pero al diseñar, o llevar a cabo un proceso de instrucción, se deben considerar otros elementos intervinientes en el proceso de instrucción que influyen en la construcción de los significados personales de los estudiantes: la metodología de enseñanza del profesor (si la clase es magistral o promueve la participación de los estudiantes, etc.), si los contenidos matemáticos son de interés para los estudiantes, el papel que el estudiante cree que tiene en la clase (como espectador o como responsable de su aprendizaje, etc.), los materiales y herramientas tecnológicas con que se cuenta en la institución educativa, entre otros.

En este sentido, el EOS proporciona una herramienta muy útil para valorar la pertinencia de un proceso de instrucción diseñado o implementado; esta herramienta es la noción de *idoneidad didáctica*, que se define como la articulación de seis idoneidades parciales: *epistémica, cognitiva*, *mediacional*, *emocional*, *interaccional* y *ecológica;* que contemplan los elementos que mencionamos en el párrafo anterior, entre muchos otros (Godino, Batanero y Font, 2008).

Para cada una de las seis idoneidades parciales, en Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007) sugieren una serie de componentes y descriptores que facilitan la valoración de tales idoneidades, los cuales mostraremos enseguida y retomaremos en el siguiente capítulo para valorar a priori la idoneidad didáctica de nuestra propuesta.

1. **Idoneidad *epistémica***: es el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia, los componentes y descriptores de esta idoneidad se muestran a continuación (Tabla 1).

Tabla 1. Componentes y descriptores de la idoneidad epistémica.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Situaciones-problemas	▪ Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. ▪ Propuesta de situaciones de generación de

	problemas (problematización).
Lenguaje	▪ Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), traducciones y conversiones entre los mismos. ▪ Nivel del lenguaje adecuado a quienes se dirige. ▪ Propuesta de situaciones de expresión e interpretación.
Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	▪ Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. ▪ Presentación de los enunciados y procedimientos fundamentales del tema según el significado de referencia y el nivel educativo. ▪ Propuesta de situaciones para la generación y negociación de las reglas.
Argumentos	▪ Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen. ▪ Se promueven momentos de validación.
Relaciones (conexiones, significados)	▪ Relación y articulación significativa de los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.

2. **Idoneidad *cognitiva*:** Grado en que los significados implementados (pretendidos) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los

significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados. Sus componentes y descriptores son los siguientes (Tabla 2).

Tabla 2. Componentes y descriptores de la idoneidad cognitiva.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Conocimientos previos (Componentes similares a la dimensión epistémica)	▪ Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). ▪ Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	▪ Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.
Aprendizaje	▪ Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidas o implementadas.

3. **Idoneidad *mediacional*:** Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Ver la Tabla 3.

Tabla 3. Componentes y descriptores de la idoneidad mediacional.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Recursos materiales (Manipulativos,	▪ Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al

calculadoras, ordenadores)	significado pretendido. ▪ Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	▪ El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. ▪ El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	▪ Adecuación de los significados pretendidos /implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial). ▪ Inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema. ▪ Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad.

4. **Idoneidad *emocional*:** Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes. Sus componentes y descriptores se presentan enseguida (Tabla 4).

Tabla 4. Componentes y descriptores de la idoneidad emocional.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Intereses y necesidades	▪ Selección de tareas de interés para los alumnos. ▪ Proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	▪ Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. ▪ Se favorece la argumentación en situaciones de

	igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	▪ Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. ▪ Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

5. **Idoneidad *interaccional*:** Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje. Los componentes y descriptores de esta idoneidad son los siguientes (Tabla 5).

Tabla 5. Componentes y descriptores de la idoneidad interaccional.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Interacción docente-discente	▪ El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) ▪ Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.). ▪ Se busca llegar a consensos con base en el mejor argumento. ▪ Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. ▪ Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión

Interacción entre discentes	▪ Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. ▪ Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	▪ Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación)
Evaluación formativa	▪ Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.

6. **Idoneidad *ecológica***: Grado de adaptación curricular, socio-profesional y conexiones intra e interdisciplinares. Los componentes y descriptores en este caso, son los siguientes (Tabla 6).

Tabla 6. Componentes y descriptores de la idoneidad ecológica.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Adaptación al currículo	▪ Los significados, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	▪ Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva ▪ Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural	▪ Los significados contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
Conexiones intra e interdisciplinares	▪ Los significados se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

CAPÍTULO CUATRO

LA PROPUESTA DIDÁCTICA

4.1 CARACTERÍSTICAS DE LA PROPUESTA

Nuestra propuesta didáctica está dirigida a estudiantes del curso Cálculo Diferencial e Integral I de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora y busca promover la construcción de significado de la derivada, y otros objetos matemáticos del cálculo (especificados en el s*ignificado institucional pretendido*), mediante la resolución de problemas de optimización. Para lograr esto, apoyados en los elementos teóricos del EOS, hemos diseñado un conjunto de actividades didácticas que constan de hojas de trabajo para los estudiantes y un archivo manipulativo de GeoGebra, al que llamamos “ambiente dinámico virtual”, para cada uno de los problemas de optimización.

En este capítulo describiremos la estructura de las actividades didácticas, y ejemplificaremos con algunas de ellas cómo buscamos promover la emergencia de los objetos matemáticos del cálculo y el papel que juegan en esto los ambiente dinámicos, luego realizaremos un análisis de la propuesta para valorar a priori la idoneidad didáctica de la misma, y finalmente presentaremos las hojas de trabajo de las actividades didácticas que la conforman.

Para la implementación de las actividades didácticas de nuestra propuesta, consideramos que lo más favorable sería trabajar en un centro de cómputo donde se disponga de al menos una computadora por cada dos o tres estudiantes. De no ser posible tener tales condiciones, por lo menos debe contarse con una computadora y un proyector.

Los ambientes dinámicos que creamos con GeoGebra están disponibles en la dirección http://goo.gl/Pfoh y constan de los siguientes elementos: una construcción dinámica manipulable que simula el fenómeno implicado en el problema; las representaciones analítica, numérica y gráfica de la función que modela al problema, una hoja de cálculo que representa una tabla de valores; un punto variable (móvil) sobre la gráfica; la recta tangente a la gráfica en el punto variable y varias "casillas" que muestran u ocultan los elementos anteriores al ser activadas o desactivadas.

Las hojas de trabajo están coordinadas con los ambientes dinámicos y contienen el enunciado del problema y varios puntos con preguntas e indicaciones para el estudiante, que lo guían durante la búsqueda de solución para que se percate de aspectos relevantes, por ejemplo: se puede construir una expresión analítica, una tabla y una gráfica, existen restricciones para los valores de las magnitudes, hay intervalos donde el valor de la magnitud que se optimizará crece o decrece, la recta tangente en el punto crítico tiene pendiente cero, etc. Cabe mencionar que resolver los problemas de optimización no es el propósito principal de nuestras actividades didácticas, sino más bien, promover la construcción de objetos matemáticos del cálculo durante la resolución de los problemas.

Dado que éste trabajo se diseñó para estudiantes del primer semestre de ingeniería, las actividades didácticas están diseñadas para abordarse utilizando conocimientos básicos de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría que se construyen en la escuela preparatoria, y las hojas de trabajo manejan un lenguaje coloquial, familiar para los estudiantes, sin términos técnicos como dominio, función, conjuntos, etc. Desde nuestro punto de vista, la introducción de estos términos y la institucionalización de los objetos matemáticos emergentes deben hacerse gradualmente, mediante discusiones y consensos grupales guiados por el profesor.

Nuestra propuesta didáctica incluye 10 actividades, cada una de ellas correspondiente a los siguientes problemas de optimización, en el orden respectivo:

1. La caja sin tapa
2. La estación de bombeo
3. El corral
4. La página de impresión
5. La viga más resistente
6. La lata de aceite
7. Los autos
8. El canal
9. El triángulo isósceles
10. La caja de base cuadrada

El orden de las actividades se determinó considerando dos aspectos: la complejidad del modelo matemático involucrado en el problema y la posibilidad de hacer emerger objetos matemáticos diferentes a los del resto de las actividades.

El primer aspecto se refiere, por un lado, a los conocimientos previos necesarios para comprender el problema, ya que algunos problemas involucran objetos como área, volumen y perímetro, los cuales se estudian desde la escuela primaria, pero otros requieren de objetos como velocidad constante, proporcionalidad directa, radián, seno y coseno, que envuelven una mayor dificultad. Por otro lado, consideramos también el grado de dificultad para establecer la expresión analítica de la función involucrada, aún con apoyo de la construcción dinámica que simula el fenómeno correspondiente.

En lo referente al segundo aspecto, tres de las actividades tienen el potencial de contribuir a la emergencia de nuevos objetos matemáticos, además de los promovidos con el resto de las actividades. La actividad 1 “la caja sin tapa” comprende una gráfica que permite ver que la recta tangente globalmente puede cortar a la curva en otro punto diferente al de tangencia, lo cual favorece la evolución del significado global de recta tangente (como la que solamente puede tocar a la gráfica en un punto) al significado local que requiere el cálculo. La actividad 9 “el triángulo isósceles” implica una gráfica que no es diferenciable en el punto correspondiente al valor extremo, pues tiene una esquina en éste, lo que permite considerar que el valor extremo no siempre corresponde al punto de la gráfica en el cual la recta tangente tiene pendiente cero, sino que también puede encontrarse en el punto donde la recta tangente no exista. Finalmente, en la actividad 10 “la caja de base cuadrada” el valor que optimiza el volumen de la caja, corresponde a un extremo del intervalo, en cuyo punto correspondiente de la gráfica, la recta tangente no es horizontal, esto permite observar que los valores extremos también pueden alcanzarse en los extremos del intervalo, en caso de que éste sea cerrado.

De las diez actividades didácticas de nuestra propuesta, las actividades 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 tienen una estructura muy parecida. Las actividades 1, 9 y 10 presentan algunas variantes a la estructura del resto de las actividades, debido a que estas tres contribuyen a la emergencia de objetos matemáticos que el resto de las actividades no promueven.

4.1.1 ESTRUCTURA DE LAS ACTIVIDADES 2, 3, 4, 5, 6, 7 Y 8.

A continuación describiremos brevemente la estructura común a las actividades 2 a 8 y ejemplificaremos con la correspondiente a "la viga más resistente" cómo promovemos la emergencia de los objetos matemáticos pretendidos y el papel que juegan los ambientes dinámicos. Posteriormente presentaremos algo similar para las actividades 1, 9 y 10.

La estructura común a las actividades 2 a 8 consta de los siguientes momentos:

1. Manipulación de la construcción dinámica que simula al fenómeno implicado en el problema para facilitar la identificación de las magnitudes que varían y relaciones entre éstas.

2. Establecimiento de la representación analítica y el dominio de la función que modela al fenómeno y construcción de sus representaciones tabular y gráfica en las hojas de trabajo.

3. Activación de las representaciones anteriores en el ambiente dinámico.

4. Aproximación numérica (con ayuda de la hoja de cálculo) de las coordenadas del punto correspondiente al valor extremo y ubicación de éste en la gráfica.

5. Uso la herramienta *zoom* en torno al punto encontrado en la hoja de cálculo, para observar cómo, en una vecindad de tal punto, la gráfica se convierte en una recta horizontal que coincide con la recta tangente en tal punto, y así favorecer la caracterización de éste último y la construcción de un significado local de la recta tangente.

6. Caracterización de la monotonía de la función de dos maneras: primero relacionando los valores de la tabla con la forma de la gráfica, y luego, relacionando la pendiente de la recta tangente con la forma de la gráfica.

7. Finalmente se pregunta al estudiante cómo solucionaría gráficamente el problema, con el objetivo de que éste concluya que se requiere encontrar la abscisa del punto en el cual la recta tangente a la gráfica es cero.

Descripción de la actividad "la viga más resistente"

Como ya se mencionó al inicio de este capítulo, para la implementación de las actividades didácticas consideramos que lo más favorable sería trabajar en un centro de cómputo donde se disponga de al menos una computadora por cada dos o tres estudiantes. De no ser esto posible, por lo menos debe contarse con una computadora y un proyector.

Los problemas de optimización que seleccionamos para nuestra propuesta didáctica, involucran un contexto familiar para los estudiantes o cercano a la ingeniería, lo que consideramos es una característica muy favorable para promover que éstos se interesen en su resolución, participen en su planteamiento, opinen, propongan ideas y sean ellos quienes las validen, etc.

En este sentido, consideramos que antes de entregarle al estudiante las hojas de trabajo con el enunciado del problema, es importante que el profesor promueva un diálogo con los estudiantes sobre el contexto del problema y e indague con preguntas si éstos tienen los conocimientos necesarios para abordar la actividad.

Por ejemplo, en la actividad correspondiente al problema "la viga más resistente", se puede comenzar el diálogo con los estudiantes, preguntándoles qué uso se le da a la madera en la construcción; buscando que éstos mencionen que se utiliza, entre otras cosas, para hacer vigas. Se les puede preguntar después qué características serían deseables en una viga de madera, y guiarlos a que sugieran que ésta debe ser resistente. Luego, hacerlos reflexionar sobre la diferencia entre la resistencia a la compresión y la resistencia a la flexión (pues la resistencia a la que se refiere el problema es a la compresión, ya que no se considera la longitud de la viga). Posteriormente se les puede pedir a los estudiantes que imaginen que trabajan en un aserradero, preguntarles cómo harían una viga a partir del tronco de un árbol, y pasar a algunos estudiantes al pizarrón a que hagan un dibujo al respecto, guiándolos a que construyan un diagrama como el siguiente (Figura 6):

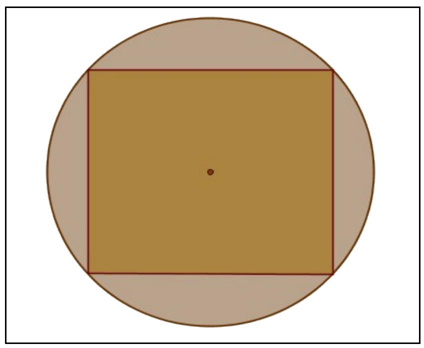


Figura 6. Sección transversal del tronco y la viga.

Después se puede preguntar a los estudiantes cómo creen que se pueda determinar la resistencia a la compresión de esa viga y de qué depende tal resistencia. En esta parte el profesor puede proponer al estudiante que el radio del tronco sea 30 cm y mostrar la simulación de la viga presente en el ambiente dinámico correspondiente a esta actividad, donde al mover el punto P cambia el ancho de la viga, de esta manera los estudiantes pueden observar las diferentes vigas que se pueden hacer de ese tronco. Enseguida se les puede preguntar a los estudiantes cuál de esas vigas creen que sea más resistente; de esta forma se favorece que los estudiantes intuyan que la resistencia depende del ancho y el alto de la viga y se percaten de que hay un problema presente: encontrar la viga más resistente.

En este momento el profesor puede comentarles a los estudiantes que la resistencia de una viga de madera de sección transversal rectangular, es directamente proporcional al producto de su ancho y el cuadrado de su altura. Es importante cerciorarse de que los estudiantes tengan un significado personal de la proporcionalidad directa, que les permita asignarle un significado a la expresión anterior y escribirla en lenguaje analítico. Después de esto, se le pueden entregar a los estudiantes las hojas de trabajo, en las cuales está escrito el enunciado del problema y una serie de puntos con preguntas e indicaciones a los estudiantes, y pedirles que formen equipos para contestar los primeros tres puntos, los cuales se explican a continuación.

Los puntos 1, 2 y 3 están dirigidos a la exploración del fenómeno, mediante la manipulación de la construcción dinámica que lo simula; y a favorecer la emergencia de los objetos matemáticos variable, dominio, función y la expresión analítica de la función. Se debe tener en cuenta que en esta parte los estudiantes pueden presentar dificultades para construir la expresión analítica de la función.

LA VIGA MÁS RESISTENTE: La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto del ancho y el cuadrado de la altura de su sección transversal. Determine las dimensiones de la viga más resistente que se pueda obtener de un tronco circular de 30 cm de radio.

Tabla 7. Actividad "la viga más resistente". Punto 1.

1. Abre el archivo "Viga.ggb". Mueve el punto "P" y observa lo que pasa. ¿Puedes calcular el alto de la viga, para un valor específico del ancho? ¿Cómo?

Al abrir el archivo de GeoGebra, en la pantalla de la computadora aparece una imagen o diagrama (Figura 7) que representa al tronco y la viga. Al mover el punto "P" se modifican en tiempo real las dimensiones de la viga. También aparecen una serie de casillas, que al ser activadas muestran alguno de los siguientes elementos: la imagen de la viga (o simulación dinámica del fenómeno), los puntos correspondientes a los datos numéricos de la hoja de cálculo, la gráfica y expresión analítica de la función, y la recta tangente. A lo largo de la hoja de trabajo se le va indicando al estudiante cuándo puede activar estas casillas.

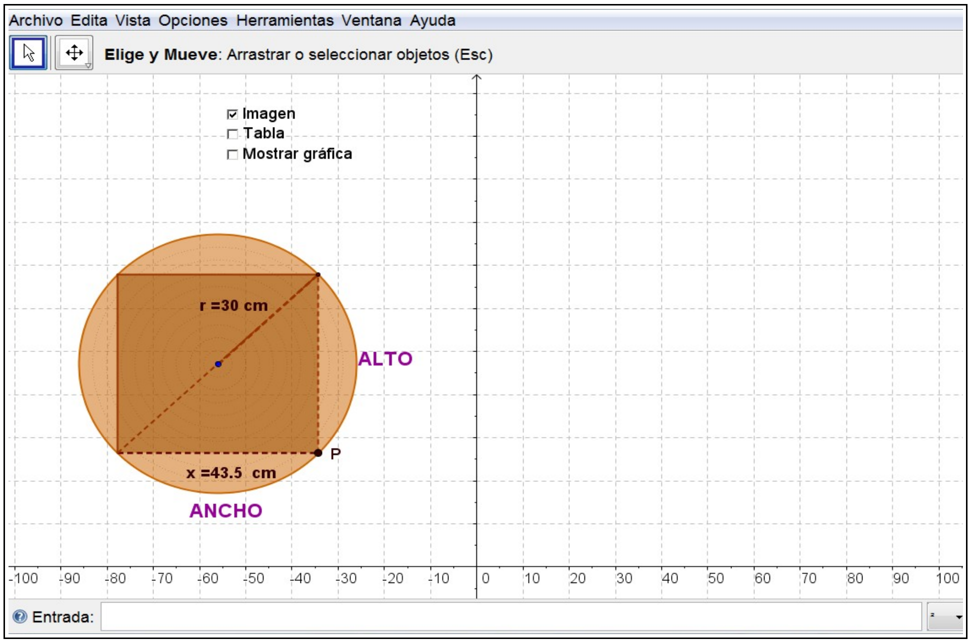


Figura 7. Estado inicial del ambiente dinámico para la actividad "la viga más resistente".

En el primer punto (Tabla 7) se pide al estudiante que manipule la construcción dinámica en GeoGebra con el objetivo de que observe que el ancho x de la viga puede tener diferentes valores y que su valor afecta la resistencia de la viga (visualmente cambia la forma de la viga y por lo tanto la longitud de su alto), esto busca promover la emergencia de la idea de una dependencia entre el ancho, el alto y la resistencia de la viga y la observación de que el ancho x es variable.

Al pedirle al estudiante que exprese cómo calcularía la resistencia de la viga para un valor específico de x, se espera que éste observe que en el diagrama se forma un triángulo rectángulo y que puede utilizar el teorema de Pitágoras para calcular el alto, y por ende la resistencia de la viga. Así, se espera dar la pauta para la construcción del modelo analítico del problema y favorecer la emergencia del objeto función.

Tabla 8. Actividad "la viga más resistente". Punto 2.

2. Escribe una expresión algebraica para calcular el alto y la resistencia de la viga en dependencia de x. Podemos llamarle *"y"* al alto de la viga y *R(x)* a la resistencia.

En el segundo punto (Tabla 8) se espera favorecer la emergencia de lenguaje: una expresión analítica que muestre la relación entre las magnitudes involucradas; es decir, la expresión analítica de la función que modela el problema, y seguir contribuyendo a la emergencia del objeto función.

Dado que consideramos que la manera natural en que un estudiante puede intentar resolver el problema, es probar con valores particulares de x, calcular la resistencia correspondiente y comparar los resultados para elegir el mejor, decidimos pedirle al estudiante en este punto la construcción de la expresión analítica de la función, la cual se utilizará en el punto 4 en la elaboración de una tabla de valores (Tabla 11) que organice la búsqueda del valor que optimiza la resistencia, y los resultados obtenidos.

A pesar de que en esta actividad (y en el resto de las actividades didácticas), la expresión analítica de la función sólo se utiliza durante la obtención de valores para la Tabla 11, se pide su construcción teniendo en cuenta que es imprescindible para la formación de los estudiantes ser capaces de determinar la expresión analítica de la función que modele un problema.

Tabla 9. Actividad “la viga más resistente”. Punto 3.

3. ¿Cuál es el valor más pequeño y el valor más grande que puede tomar x en el problema?

En el punto tres (Tabla 9) el objetivo es hacer reflexionar al estudiante que el modelo matemático para la situación sólo tiene sentido para ciertos valores de x (pues no se puede considerar una viga de ancho negativo). Con este punto queremos abonar a la emergencia del dominio de la función y también a la emergencia de la función.

Antes de continuar con la siguiente parte de la actividad, es importante que se verifique que los estudiantes hayan construido la expresión analítica de la función y que se realice una discusión grupal sobre los resultados obtenidos para llegar a un consenso sobre éstos, promoviendo que los mismos estudiantes argumenten sus acciones y las de sus compañeros.

Los puntos 4, 5, 6 y 7 se enfocan en la obtención de algunos valores de la función para valores fijos de *x;* la construcción de la gráfica de la función; el desarrollo de un procedimiento para aproximar las coordenadas del punto crítico consiste en la elección de intervalos cada vez más pequeños en torno a tal punto, primero manualmente en una tabla de la hoja de trabajo (Tabla 11) y posteriormente con ayuda de la hoja de cálculo; y finalmente la ubicación sobre la gráfica del punto cuyas coordenadas se encontraron con la hoja de cálculo.

Tabla 10. Actividad "la viga más resistente". Punto 4.

4. Calcula la resistencia de la viga cuando su ancho x es igual a 0, 10, 20, 30, 40, 50 y 60 usando la expresión analítica. Puedes usar la Tabla 11 y la cuadrícula siguiente (Figura 8) para colocar tus resultados.

Tabla 11. Tabla de valores de la hoja de trabajo.

x	y^2=(alto)^2	Resistencia $R(x)$ de la viga
0		
10		
20		

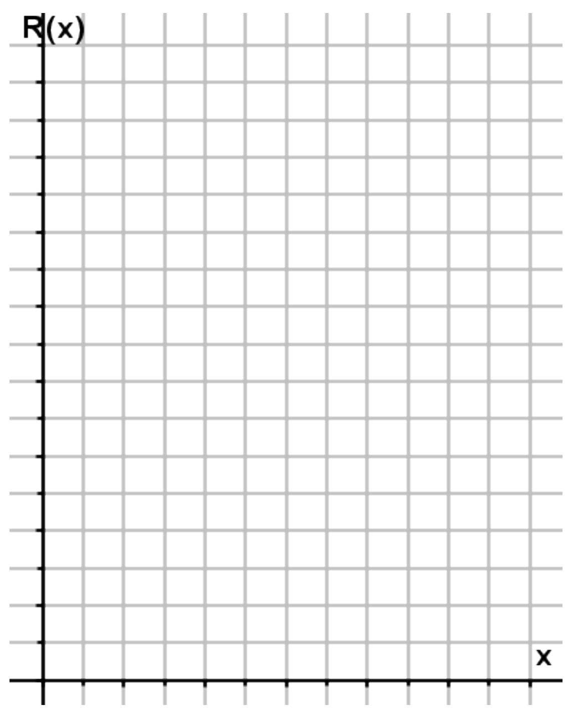


Figura 8. Ejes coordenados de la hoja de trabajo.

El objetivo del punto 4 (Tabla 10) es que el estudiante analice la relación numérica entre las magnitudes, observe que los valores de la resistencia cambian, cómo cambian (aumentan y luego disminuyen) y empiece a relacionar este comportamiento numérico con la posición en que se van colocando los puntos en los ejes coordenados (primero van "subiendo" y luego van "bajando"), para que en el punto 6 (Tabla 13) con este supuesto elija el intervalo donde va a comenzar la búsqueda del valor que optimiza la resistencia.

Es importante que la pregunta 5 (Tabla 12) se aborde grupalmente, para que los equipos de estudiantes comparen y validen sus resultados antes de activar, en el ambiente dinámico, la gráfica y expresión analítica de la función, y la hoja de cálculo con los valores de la Tabla 11. De esta manera se favorece que los estudiantes busquen un consenso con base en el mejor argumento y no dejen la validación de sus resultados solamente al ambiente dinámico.

Tabla 12. Actividad "la viga más resistente". Punto 5.

5. ¿Para qué valor de x de la Tabla 11 (que llenaste en la pregunta 4) se obtuvo la mayor resistencia? ¿Será tal valor de x el que nos de la mayor resistencia posible o habrá otro? Explica tu respuesta. Nota: Puedes comprobar los resultados presionando, en el archivo "Viga.ggb", la pestaña *vista* y seleccionando la opción *vista de hoja de cálculo* (observa las columnas B y C). Presiona también la casilla "Tabla" y la casilla "Mostrar gráfica".

Los objetivos del punto 5 son que el estudiante comience a reflexionar si habrá otros valores de x con los cuales se obtenga una mayor resistencia, que dé argumentos de por qué el valor encontrado en la Tabla 11 no es la solución al problema, y así promover la emergencia de una estrategia numérica para buscar el valor de x que maximiza la resistencia, la cual en principio probablemente será probar con otro valor de x cercano al encontrado en la Tabla 11, pero con el punto 6 (Tabla 13) se buscará organizar la búsqueda de tal valor.

Con respecto a la nota que se hace, en el ambiente dinámico (Figura 9) aparecerá una hoja de cálculo que se usará como la tabla de la hoja de trabajo del estudiante, también se mostrarán la gráfica y la expresión analítica de *R(x),* y los puntos correspondientes a los datos numéricos de la hoja de cálculo (columnas B y C). Si se quiere obtener los puntos de un intervalo, en la hoja de cálculo se pueden colocar el límite inferior de éste en la celda A2, el límite superior en la celda A4 y un incremento para *x* en la celda A6. Para ejemplificar esto, cuando el estudiante activa la hoja de cálculo, aparecen en ésta los datos correspondientes al intervalo [0,60] con un incremento de 10, en la columna B aparecen los valores de *x* correspondientes a los puntos dentro del intervalo, en este caso serán *x*=0, 10, 20, 30, 40, 50 y 60. En la columna C aparecen los valores de la resistencia para cada uno de tales valores de *x*.

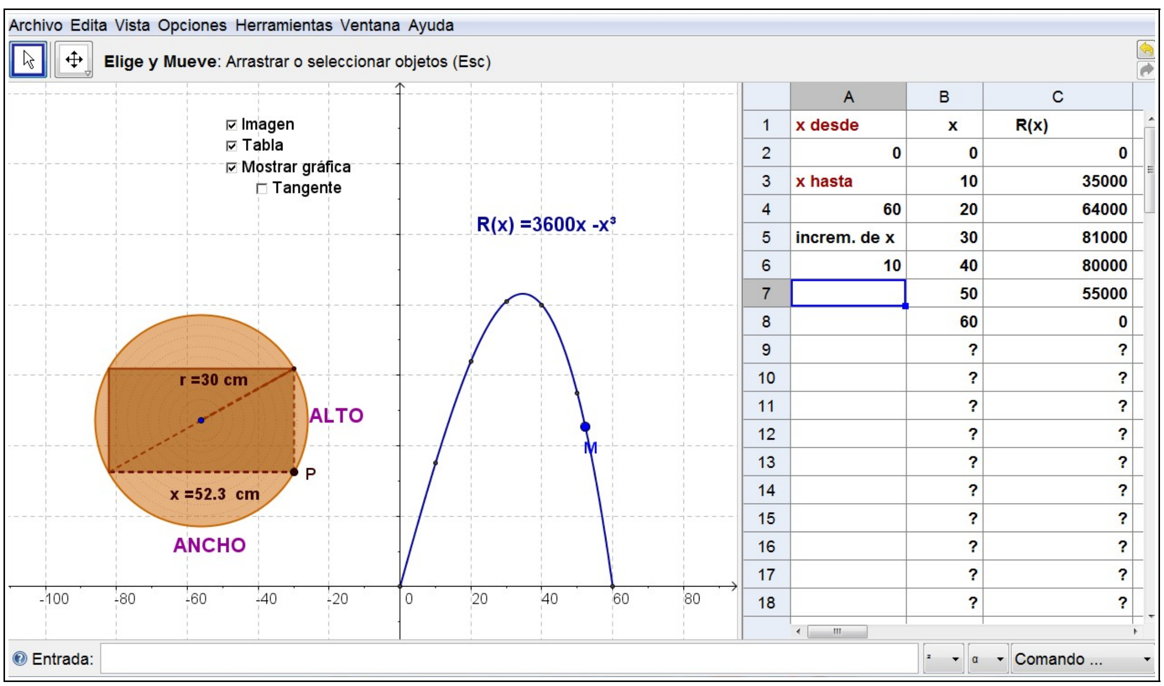


Figura 9. Hoja de cálculo que muestra los valores de *x* y *R(x)* en el intervalo [0, 60] con un incremento de 10 para *x*. También se muestran sobre la gráfica los puntos obtenidos de las columnas B y C de la hoja de cálculo.

Los estudiantes pueden contestar las preguntas del punto 6 (Tabla 13) en su equipo, pero antes de abordar la búsqueda numérica de la solución se debe hacer una discusión grupal para que cada equipo exprese su respuesta a las dos preguntas planteadas y la justifique. Grupalmente se debe acordar una estrategia de búsqueda en la hoja de cálculo, la cual debe considerar realizar la búsqueda tanto antes como después del valor de x que vaya dando la mayor resistencia. Los estudiantes, en sus respectivos equipos, pueden llenar la Tabla 14.

Tabla 13. Actividad "la viga más resistente". Punto 6.

6. ¿Entre qué números estará el valor del ancho que nos daría la viga de máxima resistencia? ¿Cómo le harías para encontrarlo? Aproxima su valor con cuatro cifras. Sugerencia: en la hoja de cálculo puedes colocar nuevos intervalos de valores para el ancho y elegir incrementos más pequeños para x. Por ejemplo, si quieres obtener valores de x y de la resistencia correspondiente, para valores de x entre 0 y 60, y quieres que el valor de x vaya aumentando 5 cada vez, coloca el 0 en la celda A2, el 60 en la celda A4, y 5 en la celda A6. Puedes usar la Tabla 14.

Tabla 14. Datos de la búsqueda de las coordenadas del punto correspondiente al valor extremo.

x desde	x hasta	Incremento de x	Valor de x que da la mayor resistencia	Resistencia $R(x)$

En este punto se espera que los estudiantes realicen en la hoja de cálculo, la búsqueda del valor de x que maximiza la resistencia, de una manera similar a la siguiente (Figura 10): eligiendo un intervalo, por ejemplo el [30, 40] y un incremento de 1. En tiempo real se trazarán en la gráfica los puntos correspondientes a los valores que aparecen en las columnas B y C de la hoja de cálculo, que corresponden al ancho x y a la resistencia correspondiente, respectivamente. Al analizar la columna C de la hoja de cálculo se puede observar que el valor más grande para la resistencia se obtiene en x=35, por lo que se puede seguir la búsqueda ahora en el intervalo [34, 36], es decir, entre el valor anterior y el valor posterior, en la hoja de cálculo, a x=35.

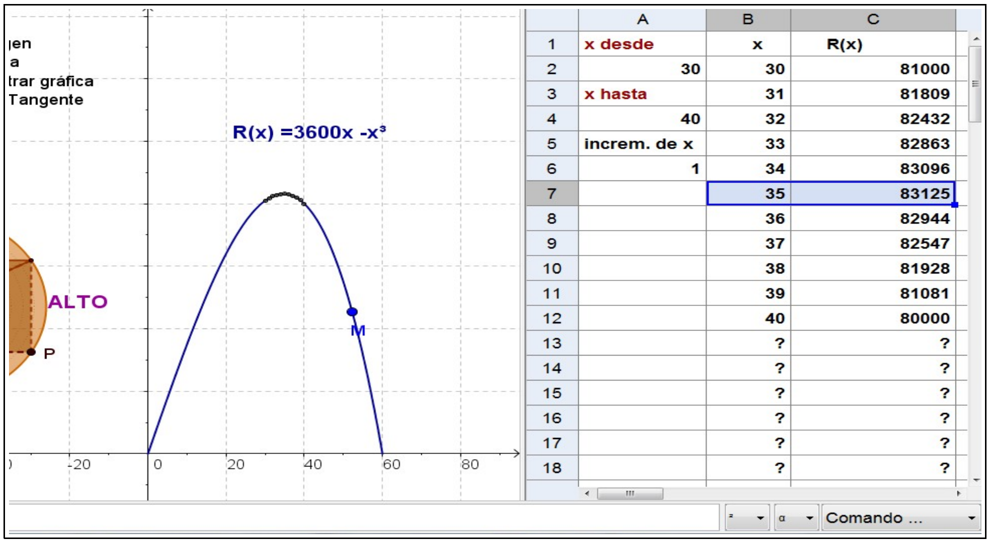


Figura 10. Búsqueda en el intervalo [30, 40]

Para continuar la búsqueda, se puede colocar el nuevo intervalo (Figura 11) que en este ejemplo es [34, 36], eligiendo un incremento para x , por ejemplo 0.2, para obtener nuevos valores para x y $R(x)$ en la hoja de cálculo. Enseguida se trazarán automáticamente en la gráfica los puntos correspondientes a los nuevos valores obtenidos en las columnas B y C.

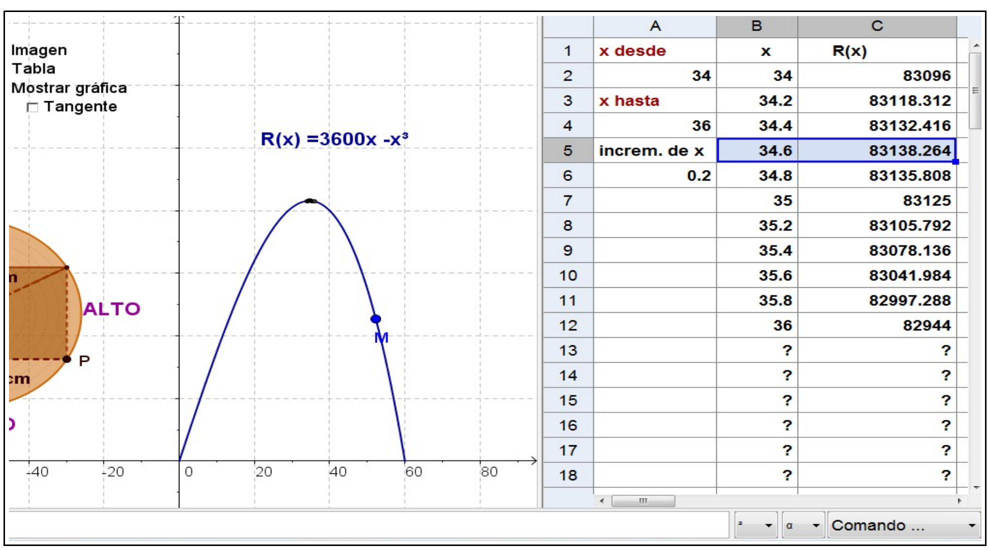


Figura 11. Búsqueda en el intervalo [34, 36].

Con el punto 6 buscamos guiar una estrategia de búsqueda de las coordenadas del punto crítico, eligiendo un intervalo donde se crea que está el punto crítico, obteniendo nuevos valores y repitiendo este proceso varias veces para aproximar con varios decimales las coordenadas del punto crítico. Con la Tabla 14, dada en el punto 6, se facilita el control de la búsqueda y queda registro de que el incremento que se elige es cada vez más cercano a cero y que los extremos de los intervalos son números que difieren por centésimas o milésimas al igual que los valores de x y $R(x)$.

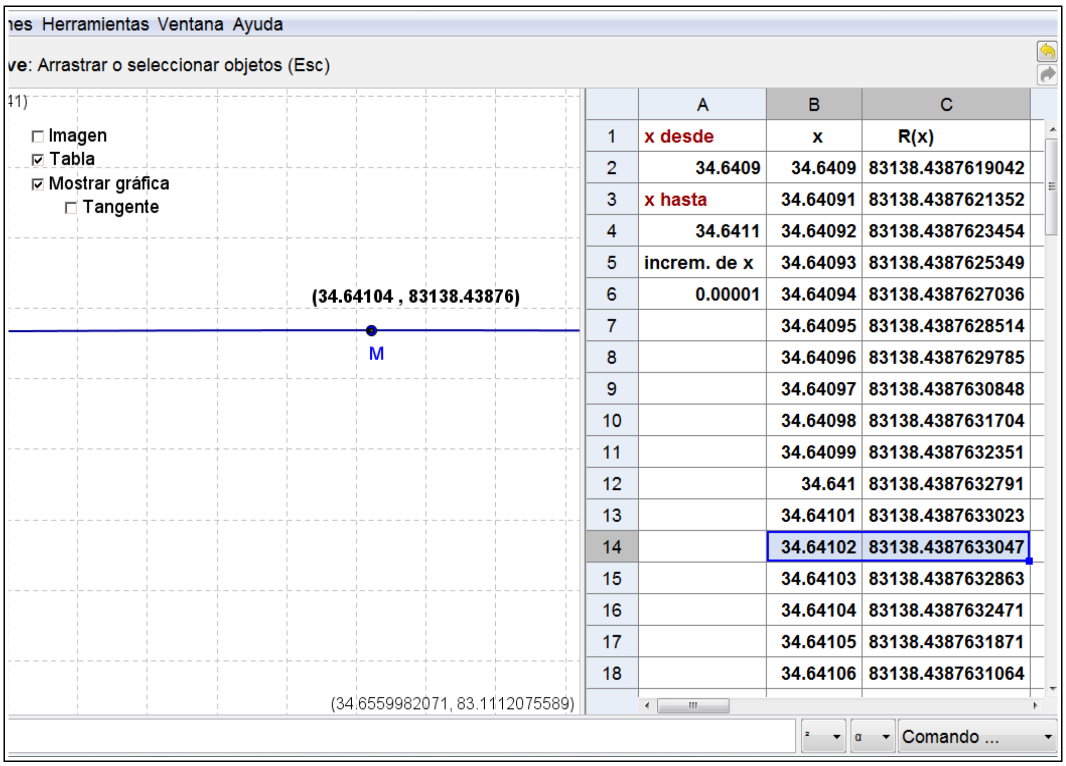
Con el software se facilitará la exploración de los diferentes intervalos para aproximar la solución al problema con varios decimales, además de que en tiempo real se mostrarán en la gráfica los puntos correspondientes a los valores de la hoja de cálculo, lo que favorecerá que el estudiante se percate de cómo se refleja gráficamente que tales números se vayan aproximando a un valor.

Se le pide al estudiante que aproxime el valor de x con al menos cuatro cifras, para promover, conforme vaya obteniendo más cifras decimales, que se argumente con un contraejemplo por qué el valor de $R(x)$ correspondiente no es el máximo; también porque con cuatro cifras decimales es suficiente para que la gráfica se linealice al tratar de hacer coincidir las coordenadas del punto móvil de la gráfica con los valores encontrados en la hoja de cálculo, con lo cual se busca promover la emergencia de la propiedad de que (en este caso) en el punto crítico la recta tangente a la gráfica es horizontal.

Tabla 15. Actividad “la viga más resistente”. Punto 7.

7. ¿Qué características tiene en la gráfica el punto correspondiente al valor de x que da la mayor resistencia, que lo distingue de los otros? Sugerencia: desactiva la casilla “Imagen”, luego mueve el punto “M”, que se encuentra sobre la gráfica, con el cursor para que sus coordenadas coincidan con el valor de x que encontraste, para esto puedes hacer *zoom* (presionando la tecla SHIFT y girando hacia atrás el *scroll* del ratón simultáneamente) varias veces sobre el punto para aproximar mejor sus coordenadas.

El punto 7 (Tabla 15) se puede trabajar en equipo. Los objetivos de este punto son: que el estudiante identifique al punto crítico como el más alto en la curva, y que al realizar acercamientos sucesivos (o *zooms*) en el software para hacer coincidir los valores de *x* y *R(x)* que encontró en la hoja de cálculo, con las coordenadas del punto móvil, observe cómo la gráfica se va convirtiendo en una línea recta horizontal cerca del punto (Figura 12). Con esto pretendemos que se caracterice al punto crítico como el punto de la gráfica en el que la recta tangente tiene pendiente cero.



	A	B	C
1	x desde	x	R(x)
2	34.6409	34.6409	83138.4387619042
3	x hasta	34.64091	83138.4387621352
4	34.6411	34.64092	83138.4387623454
5	increm. de x	34.64093	83138.4387625349
6	0.00001	34.64094	83138.4387627036
7		34.64095	83138.4387628514
8		34.64096	83138.4387629785
9		34.64097	83138.4387630848
10		34.64098	83138.4387631704
11		34.64099	83138.4387632351
12		34.641	83138.4387632791
13		34.64101	83138.4387633023
14		34.64102	83138.4387633047
15		34.64103	83138.4387632863
16		34.64104	83138.4387632471
17		34.64105	83138.4387631871
18		34.64106	83138.4387631064

Figura 12. Gráfica de la función tras varios acercamientos (*zoom*) en torno a los puntos correspondientes a los valores de la hoja de cálculo, que se aproximan al punto crítico.

El punto 8 (Tabla 16) puede seguir trabajándose en equipo, pero antes de continuar con el punto nueve deben discutirse grupalmente los resultados de los puntos 7 (Tabla 15) y 8 (Tabla 16). Se debe promover que los estudiantes observen que la gráfica se vuelve una recta horizontal y que expresen por qué creen que sucedió esto. También debe favorecerse que los estudiantes concluyan que la recta que se empalma con la gráfica es la recta tangente de pendiente cero y que argumenten por qué su pendiente es cero.

Tabla 16. Actividad "la viga más resistente". Punto 8.

8. ¿Qué pasó con la gráfica cuando hiciste *zoom* para hacer coincidir las coordenadas del punto "M" con los valores que encontraste en la tabla? Presiona la casilla "Tangente", observa qué sucede y luego quita el aumento poco a poco girando hacia delante el *scroll* de ratón y presionando la tecla SHIFT al mismo tiempo. Menciona lo que observas.

En esta parte se espera que el estudiante, al presionar la casilla "Tangente" observe que aparece una recta que se empalma con la gráfica (Figura 13) y al alejarse observe que tal recta es la recta tangente a la gráfica en el punto "M" (Figura 14). Con esto queremos promover la emergencia de la propiedad del punto crítico de que la recta tangente a la gráfica en él es horizontal.

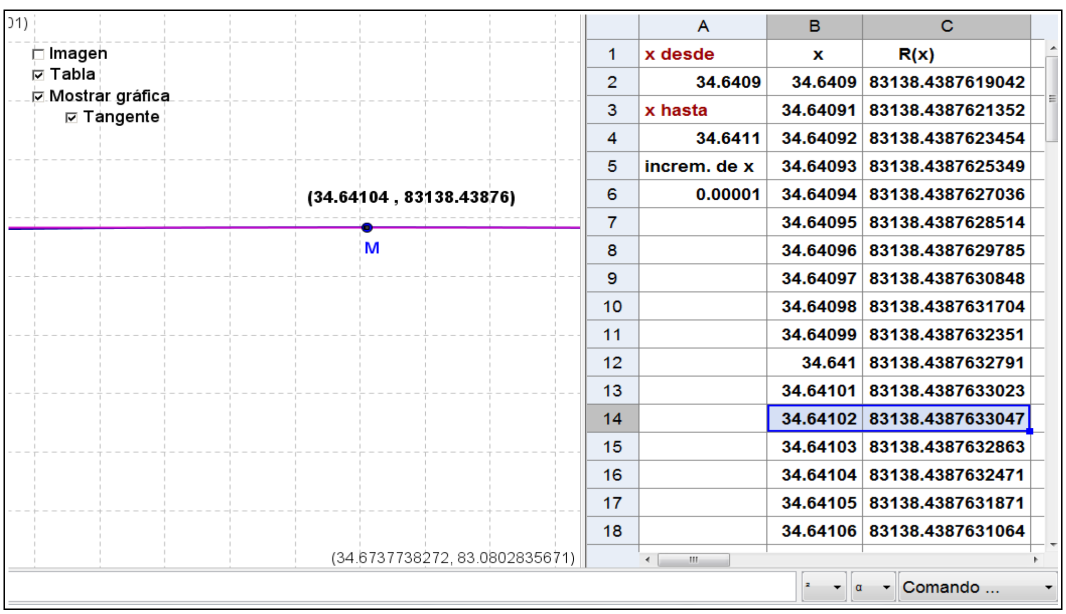
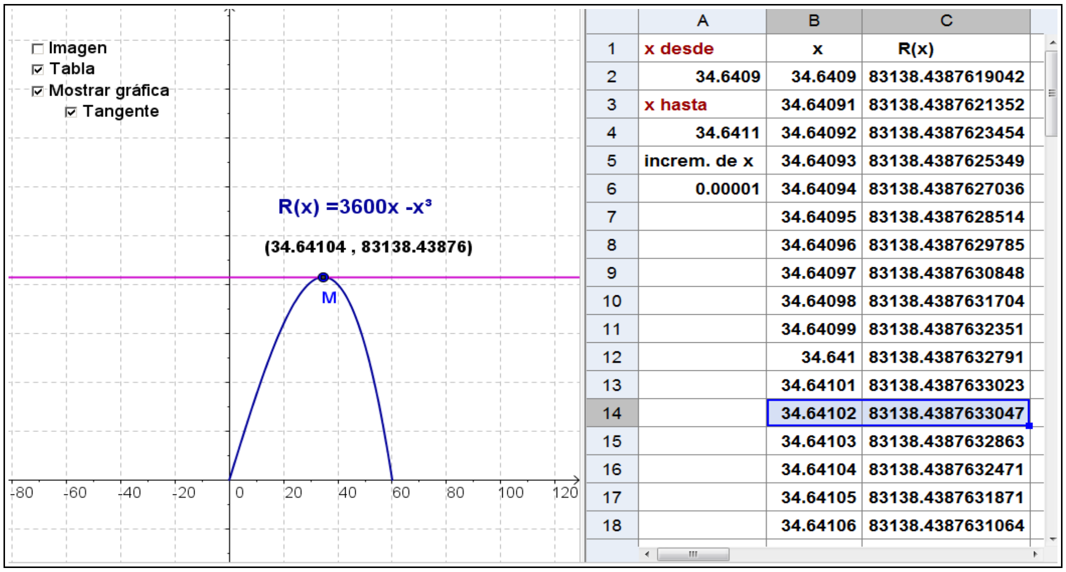


Figura 13. Gráficas de la recta tangente y la función *R(x)* "empalmadas" en una vecindad de los puntos correspondientes a los valores de la hoja de cálculo, tras varios acercamientos (*zoom*).



	A	B	C
1	x desde	x	R(x)
2	34.6409	34.6409	83138.4387619042
3	x hasta	34.64091	83138.4387621352
4	34.6411	34.64092	83138.4387623454
5	increm. de x	34.64093	83138.4387625349
6	0.00001	34.64094	83138.4387627036
7		34.64095	83138.4387628514
8		34.64096	83138.4387629785
9		34.64097	83138.4387630848
10		34.64098	83138.4387631704
11		34.64099	83138.4387632351
12		34.641	83138.4387632791
13		34.64101	83138.4387633023
14		34.64102	83138.4387633047
15		34.64103	83138.4387632863
16		34.64104	83138.4387632471
17		34.64105	83138.4387631871
18		34.64106	83138.4387631064

Figura 14. Gráficas de la recta tangente y la función *R(x)* al alejarse (*zoom out*).

Los puntos 9, 10, 11, 12 y 13 pueden seguir trabajándose en equipo o de manera individual. Al finalizar el punto 13 (Tabla 21) se debe hacer una discusión grupal para comparar los resultados obtenidos y llegar a un consenso sobre éstos.

Tabla 17. Actividad "la viga más resistente". Punto 9.

9. En la Tabla 11 de tu hoja de trabajo, cuando *x* aumenta de valor (antes de llegar al valor que da la mayor resistencia) ¿Qué pasa con la resistencia de la viga? ¿Cómo es la gráfica para estos valores? Dibújala.

El objetivo del punto 9 es que el estudiante determine primero numéricamente que la función aumenta o crece antes del valor de *x* que maximiza la resistencia, y luego lo haga gráficamente apoyándose con lo numérico, de esta manera se promueve la emergencia del objeto función creciente.

Tabla 18. Actividad "la viga más resistente". Punto 10.

10. Y cuando *x* aumenta su valor (después del valor que da la mayor resistencia) ¿Qué pasa con la resistencia de la viga? ¿Cómo es la gráfica para estos valores? Dibújala.

El objetivo del punto 10 (Tabla 18) es que el estudiante determine primero numéricamente que la función disminuye o decrece después del valor de *x* que maximiza la resistencia, y luego gráficamente apoyándose con lo numérico. Así contribuiremos a la emergencia del objeto de función decreciente.

Tabla 19. Actividad "la viga más resistente". Punto 11.

11. Mueve el punto "M" en el archivo de GeoGebra y observa cómo la recta tangente recorre la gráfica. ¿Qué diferencia encuentras en la recta tangente antes del punto más alto y después de éste?

El objetivo del punto 11 es que el estudiante observe que la pendiente de la recta tangente cambia de positiva (Figura 15) a negativa (Figura 16) en el punto crítico, y así, agregar elementos para la caracterización de éste.

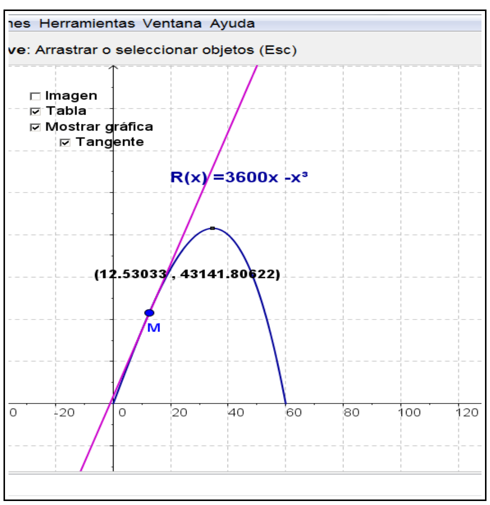


Figura 15. Recta tangente antes del punto crítico.

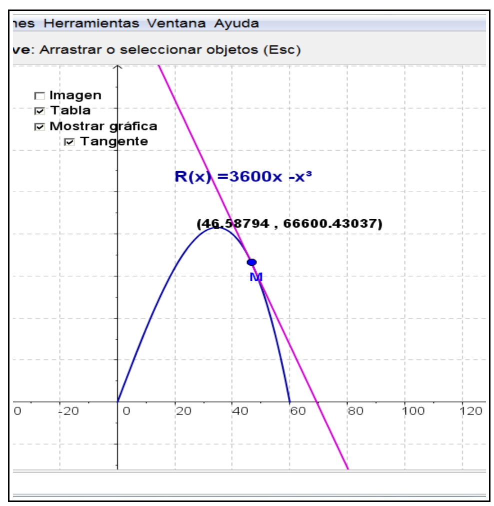


Figura 16. Recta tangente después del punto crítico.

Tabla 20. Actividad "la viga más resistente". Punto 12.

12. ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en los puntos donde la resistencia crece? ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en el punto más alto de la gráfica? ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en los puntos donde la resistencia decrece?

El punto 12 (Tabla 20) contribuye a que el estudiante relacione el signo de la pendiente de la recta tangente a la gráfica con la monotonía de la función.

El último punto de la actividad es el siguiente:

Tabla 21. Actividad "la viga más resistente". Punto 13.

13. ¿Cómo solucionarías gráficamente el problema de encontrar el valor de x que hace máxima la resistencia de la viga?

Después de haberse contestado en equipo el punto 13 (Tabla 21), se debe realizar una discusión grupal sobre los resultados obtenidos, buscando que el estudiante caracterice el punto crítico como aquel en el que la recta tangente es horizontal. Cabe aclarar que conforme el estudiante aborde actividades correspondientes a problemas de máximos y problemas de mínimos, será más fácil que observe que estas propiedades son comunes en los puntos que corresponden al valor extremo de cada problema; y se problematice después, en torno a la determinación de la pendiente de la recta tangente en un punto dado y en un punto cualquiera.

4.1.2 ESTRUCTURA DE LA ACTIVIDAD 1.

En esta actividad se pueden implementar los señalamientos metodológicos que se realizaron en la actividad "la viga más resistente", tanto los referentes a la forma de trabajo de los estudiantes (individual, en equipo y discusiones grupales), como lo que respecta a comenzar un diálogo con los estudiantes sobre el contexto del problema, para promover la participación e implicación de éstos, antes de entregarles las hojas de trabajo.

LA CAJA SIN TAPA: De un cartón rectangular de 40 X 50 cm se quiere construir una caja sin tapa; para esto se recortarán cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas del cartón y se doblarán las cejas con el fin de formar los lados. Determine las dimensiones de la caja de volumen máximo.

Los primeros 13 puntos de esta actividad tienen el mismo propósito que los 12 primeros puntos de la actividad “la viga más resistente”: identificación de las magnitudes que varían y relaciones entre éstas; establecimiento de la representación analítica, dominio de la función que modela al fenómeno y construcción de sus representaciones tabular y gráfica en las hojas de trabajo; aproximación numérica (con ayuda de la hoja de cálculo) de las coordenadas del punto correspondiente al valor extremo y la ubicación de éste en la gráfica; la observación de que en una vecindad de tal punto, la gráfica se convierte en una recta horizontal que coincide con la recta tangente en tal punto; y caracterización de la monotonía de la función de dos maneras: primero relacionando los valores de la tabla con la forma de la gráfica, y luego analizando el signo de la pendiente de la recta tangente cuando la función es creciente o decreciente.

Consideramos que es necesario hacer una discusión grupal sobre los resultados obtenidos con respecto a la monotonía de la función, en los puntos de la hoja de trabajo anteriores al punto 14 (Tabla 22), y abordar este punto y los restantes de manera individual o en equipo:

Tabla 22. Actividad “la caja sin tapa”. Punto 14.

14. ¿Qué pasa con la recta tangente cuando la primera coordenada del punto “M” tiene un valor cercano a 20?

En el punto 14 se pide al estudiante que coloque la recta tangente en un punto de la gráfica cuya abscisa esté cercana al valor 20, para que observe que la recta que creía tangente corta a la curva en un punto distinto al de tangencia (Figura 17). Con el punto 14 (Tabla 22) buscamos crear un conflicto en el significado personal de recta tangente de los estudiantes para promover, con los puntos 15 (Tabla 23) y 16 (Tabla 24), que éste evolucione a un significado local de recta tangente, como la recta que más se parece a la gráfica en una vecindad del punto de tangencia.

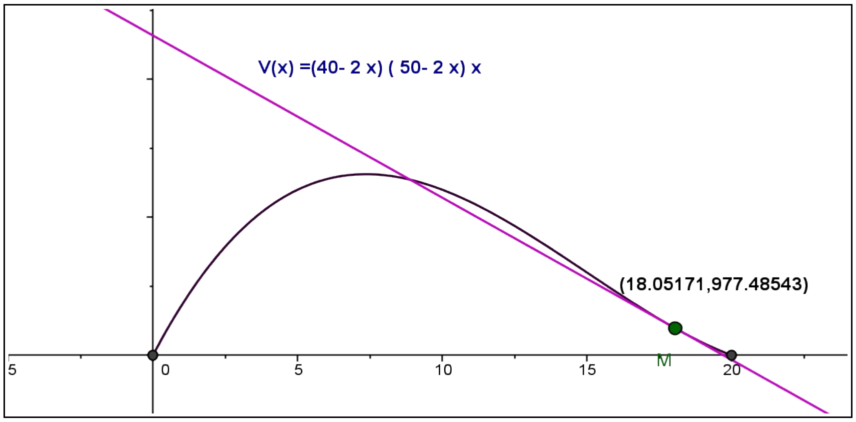


Figura 17. La recta tangente cortando a la curva en un punto distinto al de tangencia.

El punto 15 es el siguiente:

Tabla 23. Actividad "la caja sin tapa". Punto 15.

15. Coloca la recta en un punto donde consideres que es tangente y haz *zoom* varias veces hasta que la gráfica se vuelva una recta. Luego coloca la recta en un punto donde consideres que no es tangente y haz *zoom* varias veces como se te indicó para el punto anterior ¿Observas que tienen algo en común?

En el punto 15 (Tabla 23) se espera que el estudiante, al hacer zoom varias veces observe que la recta y la gráfica se superponen, tanto cuando el punto de contacto entre éstas es único, como cuando no lo es; y retome esta propiedad para redefinir a la recta tangente en el punto 16 (Tabla 24).

Tabla 24. Actividad "la caja sin tapa". Punto 16.

16. Escribe una nueva definición de recta tangente, de manera que la recta que toca al punto "M" pueda considerarse tangente a la gráfica aún cuando el valor de su primera coordenada se aproxime a 20.

El punto 17 (Tabla 25) tiene como objetivo promover la emergencia de una nueva situación, consistente en la determinación de las coordenadas del punto de la gráfica en el cual la recta tangente tiene pendiente cero. Después de que los estudiantes contesten este último punto, es importante discutir grupalmente sobre las propiedades observadas de la recta tangente y buscar la caracterización del punto crítico.

Tabla 25. Actividad "la caja sin tapa". Punto 17.

17. ¿Cómo solucionarías gráficamente el problema de encontrar el valor de *x* que hace máximo el volumen de la caja?

4.1.3 ESTRUCTURA DE LA ACTIVIDAD 9.

En la siguiente actividad, se le puede entregar a los estudiantes la hoja de trabajo desde el inicio y organizarlos en equipos para que contesten los puntos 1a, 1b, 2, y 3 (Tabla 26). Después de contestar estos puntos es importante hacer una puesta en común de los resultados obtenidos. Se debe tener en cuenta que los estudiantes pueden presenta dificultades para construir la expresión analítica de la función.

Los primeros 3 puntos de la actividad 9 tienen como propósito que el estudiante manipule construcción dinámica para que observe relaciones entre los elementos de ésta, que faciliten la construcción de la expresión analítica y el dominio de la función que modela al fenómeno.

EL TRIANGULO ISÓSCELES: Los vértices de un triángulo isósceles se colocan sobre lados adyacentes de un cuadrado de lado 4 cm como se muestra en la Figura 18. Realiza lo que se te solicita a continuación.

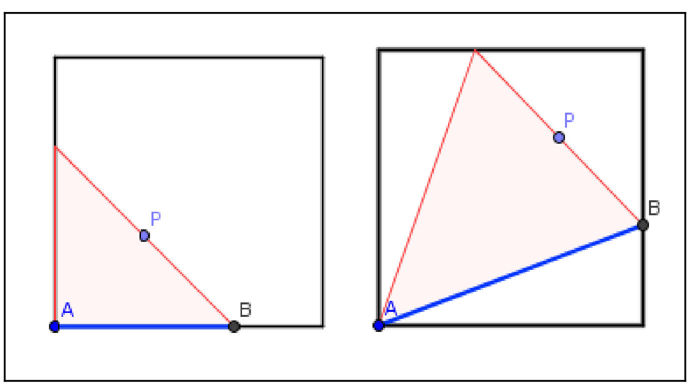


Figura 18. Problema "el triángulo isósceles".

Tabla 26. Actividad "el triángulo isósceles". Puntos 1, 1a, 1b, 2 y 3.

1. Abre el archivo "Triángulo.ggb". Mueve el punto "P" y observa lo que sucede. Si x representa la longitud del lado AB del triángulo, determina la expresión analítica, en dependencia de x, para: a) El área del triángulo, cuando B se encuentra sobre la base del cuadrado. b) El área del triángulo, cuando B se encuentra sobre el lado perpendicular a la base. 2. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar x en la **primera** expresión? ¿y el mayor? 3. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar x en la **segunda** expresión? ¿y el mayor?

Al abrir el archivo, aparecerá en la pantalla la siguiente construcción (Figura 19):

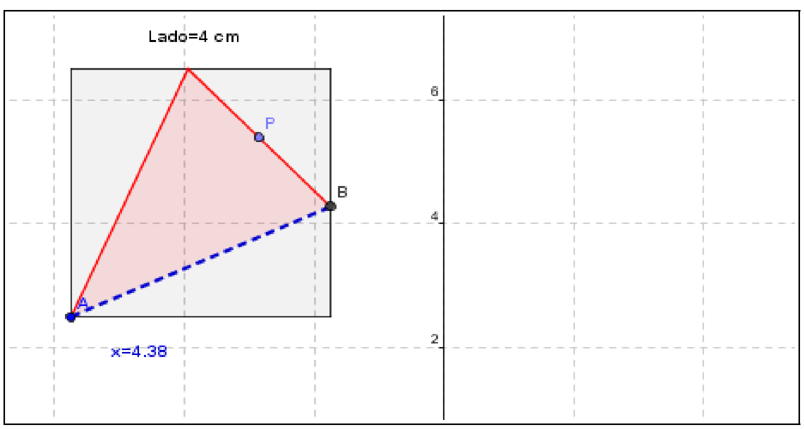


Figura 19. Estado inicial del ambiente dinámico.

Los puntos 4, 5, 6, 7 y 8 pueden abordarse en equipo.

Tabla 27. Actividad "el triángulo isósceles". Punto 4.

4. Usando la expresión analítica para el área del triángulo, a la que llamaremos $A(x)$, completa la Tabla 28 y luego construye la gráfica correspondiente en los ejes que se te proporcionan (Figura 20).

Tabla 28. Tabla de valores de la hoja de trabajo.

x	A(x)
1	
2	
3	
4	
4.5	
5	

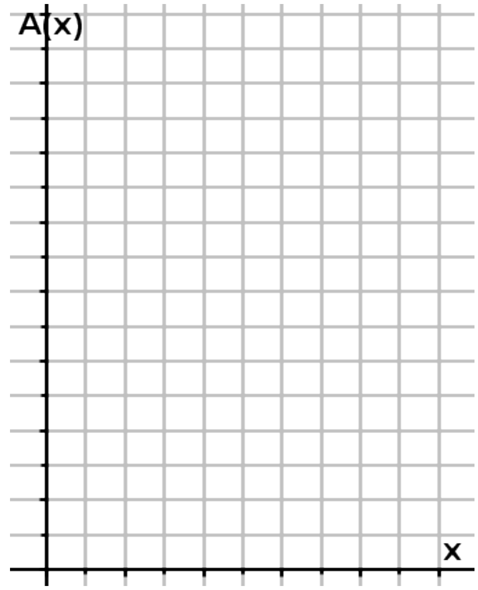


Figura 20. Ejes coordenados de la hoja de trabajo.

Tabla 29. Actividad "el triángulo isósceles". Punto 5.

5. Activa la casilla "Gráfica" ¿Observas algo diferente en la gráfica, con respecto a las gráficas de los problemas anteriores?

El punto 5 (Tabla 29) tiene como objetivo que el estudiante observe que la gráfica de la función tiene una esquina en el punto más alto, en el ambiente dinámico aparecerá la siguiente gráfica (Figura 21).

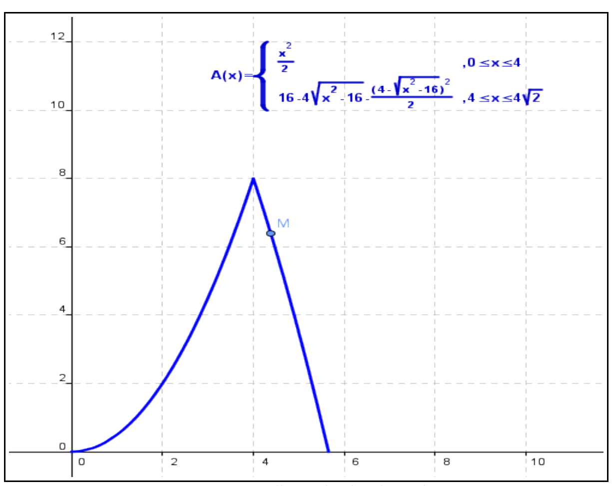


Figura 21. Gráfica de la función.

Tabla 30. Actividad “el triángulo isósceles”. Punto 6.

6. ¿Cómo identificas en la gráfica al punto correspondiente al área máxima del triángulo?

El objetivo del punto 6 (Tabla 30) es que el estudiante identifique al punto más alto como el correspondiente al área máxima.

Tabla 31. Actividad “el triángulo isósceles”. Punto 7.

7. Desactiva la casilla “Cuadrado”, coloca el punto “M” en la cima de la gráfica y haz zoom varias veces ¿pasa algo diferente a lo que sucedía en los problemas anteriores?

El objetivo del punto 7 (Tabla 31) es que el estudiante observe que a pesar de hacer *zoom* varias veces, la gráfica no se linealiza en el punto más alto, como sucedía en las gráficas de los problemas anteriores. La gráfica se verá de la siguiente manera (Figura 22):

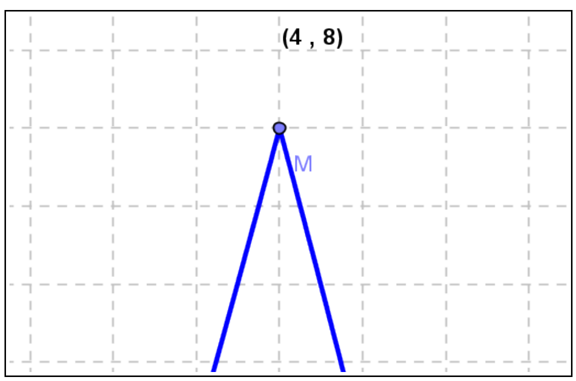


Tabla 32. Actividad “el triángulo isósceles”. Punto 8.

8. Activa la casilla “Tangente” ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente antes del punto más ato? ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente después del punto más alto? ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en el punto más alto?

El objetivo del punto 8 (Tabla 32) es que el estudiante observe que la pendiente de la recta tangente sigue conservando sus propiedades antes y después del punto correspondiente al valor extremo; sin embargo, en el punto más alto ya no es cero y la recta tangente no existe en tal punto. En esta parte queremos promover la emergencia del objeto *punto crítico*. Es importante que después de que los estudiantes contesten el punto 8, se haga una discusión grupal, para hacer un consenso sobre los resultados obtenidos y las propiedades observadas. Se debe buscar que el estudiante concluya que la recta tangente en el punto más alto no existe, pues para esto se requiere que la curva pueda verse localmente como una recta en una vecindad del punto de contacto.

4.1.4 ESTRUCTURA DE LA ACTIVIDAD 10.

En el caso de esta actividad, al igual que en la actividad 9, se le puede entregar a los estudiantes la hoja de trabajo desde el inicio. Los estudiantes pueden trabajar de manera individual o en equipo los primeros cuatro puntos. Después de estos puntos es importante hacer una puesta en común de los resultados obtenidos.

Los primeros cuatro puntos de la actividad 10 tienen como propósito que el estudiante manipule construcción dinámica y observe relaciones entre el lado de la base de la caja y el volumen de ésta, que faciliten la construcción de la expresión analítica y el dominio de la función que modela al fenómeno.

LA CAJA DE BASE CUADRADA: Con una lámina cuadrada de 13 cm de lado se quiere construir una caja de base cuadrada sin tapa, donde la base esté formada por una esquina de la lámina, como se muestra en la figura siguiente (Figura 23). Contesta lo siguiente:

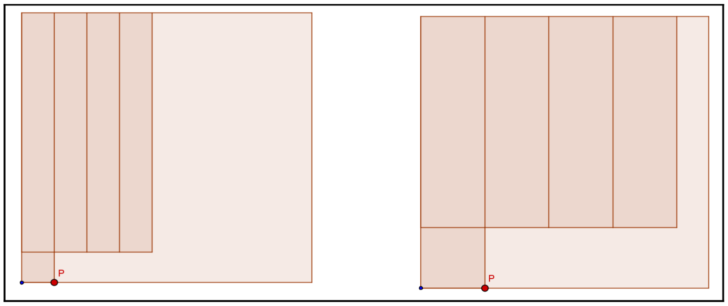


Figura 23. Problema “la caja de base cuadrada”.

Tabla 33. Actividad “la caja de base cuadrada”. Punto 1.

1. Abre el archivo “Caja de base cuadrada.ggb” y mueve el punto “P”. Si la longitud del lado de la base de la caja fuera 2 cm ¿Cuál sería su volumen?

Al abrir el archivo, el ambiente dinámico se verá de la siguiente manera (Figura 24):

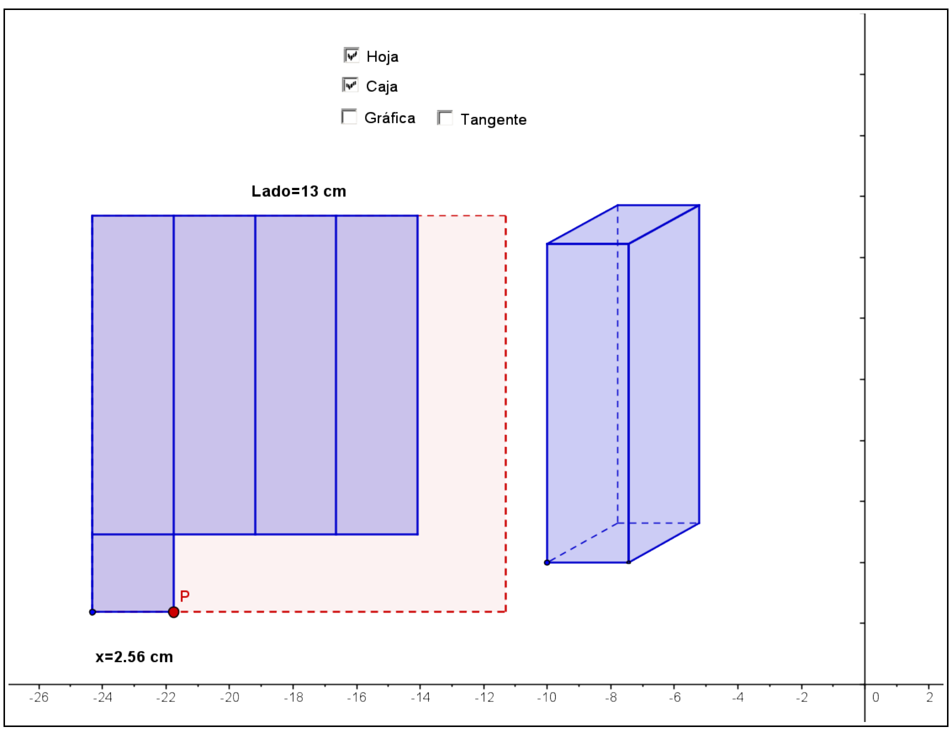


Figura 24. Estado inicial del ambiente dinámico.

Tabla 34. Actividad "la caja de base cuadrada". Puntos 2, 3 y 4.

2. Si x representa la longitud del lado de la base ¿cómo expresarías la altura de la caja en dependencia de x? Y ¿cómo expresarías su volumen (al que llamaremos $V(x)$)?   3. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tomar x? ¿cuál es el más grande?   4. Usando la expresión algebraica para $V(x)$ completa la Tabla 35 y dibuja una gráfica en los ejes que se te proporcionan (Figura 25).

Tabla 35. Tabla de valores de la hoja de trabajo.

x	$V(x)$

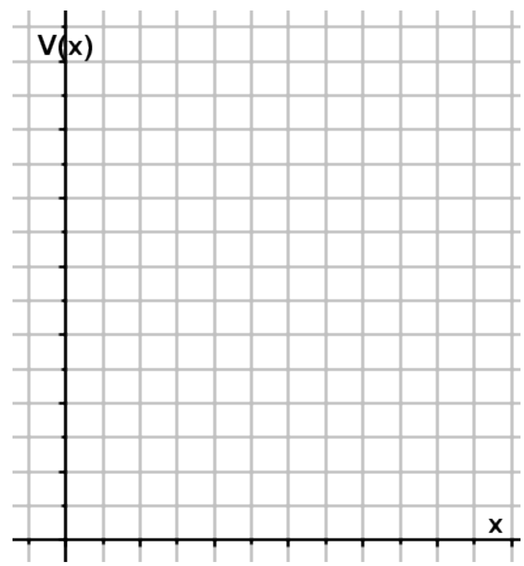


Figura 25. Ejes coordenados de las hojas de trabajo.

Después de que los estudiantes contesten el punto 4 (Tabla 34) es importante hacer una puesta en común de los resultados obtenidos, discutiéndose los aspectos relevantes que observen los estudiantes tanto en los datos numéricos de la Tabla 35 como en la gráfica de la función, y que lleguen a un consenso.

Los puntos 5 y 6 pueden trabajarse de manera individual o en equipo.

Tabla 34. Actividad "la caja de base cuadrada". Puntos 5 y 6.

5. ¿Observas algo diferente en la gráfica y la Tabla 35, con respecto a las gráficas de los problemas anteriores? Desactiva las casillas "Hoja" y "Caja" y activa la casilla "Gráfica". 6. ¿Cómo identificas gráficamente al punto correspondiente al valor máximo del volumen?

Los objetivos de los puntos 5 y 6 (Tabla 34) son que el estudiante observe que en este caso la función solamente es creciente, y que el volumen máximo corresponde al valor más grande que puede tomar *x*. En el ambiente dinámico aparecerá la siguiente gráfica (Figura 26):

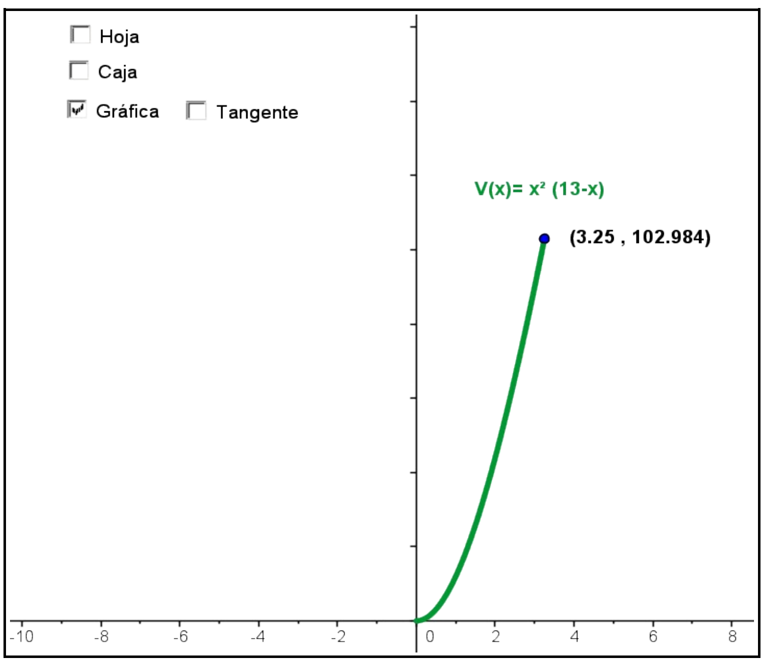


Figura 26. Gráfica de la función.

Tabla 35. Actividad "la caja de base cuadrada". Punto 7.

7. Activa la casilla "Tangente" ¿La recta tangente tiene pendiente igual cero en el punto más alto?

Los objetivos del punto 7 (Tabla 35) son que el estudiante observe que no siempre la recta tangente va a ser horizontal en los puntos correspondientes al valor extremo, y contribuir a un método para determinar los valores extremos de una función definida en un intervalo cerrado: examinar los puntos donde la recta tiene pendiente cero, donde no exista y los extremos del intervalo.

4.2 ANÁLISIS Y VALORACIÓN A PRIORI DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LA PROPUESTA

Como ya se mencionó en la parte final del capítulo anterior, al diseñar actividades didácticas y al planear, implementar o evaluar un proceso de enseñanza y aprendizaje, se debe considerar, que la idoneidad didáctica (pertinencia o adecuación) de los mismos dentro de un sistema educativo, depende de diversos factores, los cuales podemos ubicar en seis dimensiones: epistémica, cognitiva, emocional, mediacional, ecológica e interaccional (Godino, Batanero y Font, 2008). En este sentido, nuestra propuesta didáctica se planeó para que su idoneidad fuera alta a priori en cada cada una de las seis dimensiones anteriores, con base en los componentes y descriptores propuestos por Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007).

A continuación realizaremos una valoración a priori de la idoneidad didáctica de nuestra propuesta.

4.2.1 IDONEIDAD EPISTÉMICA

Consideramos que la idoneidad epistémica es el grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos, respecto del significado de referencia. Las componentes de esta idoneidad se refieren a los seis tipos de objetos matemáticos primarios. Para la primera componente, que corresponde a las *situaciones*, se proponen dos indicadores:

1. ¿Son las situaciones una muestra representativa y articulada de las incluidas en el significado de referencia, las cuales permiten la contextualización y ejercitación de los conocimientos que se pretende construir y su aplicación a situaciones relacionadas?

En el capítulo anterior señalamos que los problemas de optimización forman parte de las situaciones presentes en el significado de referencia, y mostramos que los problemas que seleccionamos para nuestra propuesta, están presentes en los libros de texto sugeridos para el curso. Estos problemas de optimización implican diferentes modelos matemáticos y distintos contextos y conceptos (área, volumen, longitud, resistencia, velocidad, tiempo, etc.), por lo que consideramos que nuestra propuesta contempla una muestra representativa de situaciones de optimización extra matemáticas.

Las actividades didácticas de nuestra propuesta tienen una estructura común, la cual busca promover gradualmente al desarrollo de un sistema de prácticas para favorecer la emergencia de los objetos matemáticos pretendidos, los cuales son básicamente los mismos en las mayoría de las actividades, de esta manera no sólo se abona en cada actividad a la emergencia de dichos objetos matemáticos y a la construcción de significados para éstos, sino también a la ejercitación y al reforzamiento de los mismos.

Dado que la emergencia de los objetos matemáticos en nuestra propuesta, está ligada a problemas de optimización extramatemáticos, consideramos que estamos desarrollando prácticas de contextualización de estos objetos, útiles en otros problemas de aplicación de las matemáticas.

El segundo indicador para la idoneidad epistémica de las *situaciones* es el siguiente:

2. ¿Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan la oportunidad de plantear problemas, reformularlos y/o de problematizarse (en el sentido de asumir los problemas como propios)?

Los problemas de optimización que elegimos para las actividades didácticas tienen un contexto familiar para los estudiantes, lo cual consideramos favorece que éstos puedan participar en su planteamiento al realizarse un diálogo con ellos sobre el contexto del problema, antes de entregarles las hojas de trabajo, como se ejemplificó con la actividad "la viga más resistente". En el capítulo siguiente mostraremos cómo durante la puesta en escena de tres de las actividades didácticas de nuestra propuesta con estudiantes de ingeniería, se logró que éstos participaran en el planteamiento de los problemas de optimización correspondientes.

Las situaciones propuestas en las actividades didácticas que diseñamos, son potenciales situaciones problémicas, pues los contextos de los problemas de optimización son familiares para los estudiantes o propios de la ingeniería, por lo que los éstos pueden opinar sobre aspectos de tal contexto e interesarse en la resolución del problema; hacerlo suyo.

Para la segunda componente, correspondiente al *lenguaje*, se proponen tres indicadores de la idoneidad epistémica.

1. ¿Se hace uso de diferentes formas de lenguaje (verbal, gráfico, analítico, etc.) y se establecen relaciones entre las mismas?

Podemos decir que las actividades didácticas diseñadas para los problemas de optimización promueven el uso y la emergencia de diversas formas de lenguaje, pues los problemas son planteados en el lenguaje verbal en las hojas de trabajo, y en lenguaje geométrico-dinámico en GeoGebra, posteriormente se guía a los estudiantes a que establezcan analíticamente la función que modela la situación y obtengan con ésta valores numéricos para construir a la función en lenguaje tabular y luego en lenguaje gráfico, después en el archivo de GeoGebra se presenta a la función en tales formas de lenguaje, pero dinámicamente vinculadas. En las actividades didácticas se promueven conversiones para la función, entre el lenguaje geométrico-dinámico y el analítico, entre el numérico y el gráfico; además se promueve el establecimiento de relaciones tanto gráfica como numéricamente entre los valores extremos, la monotonía de la función, y la pendiente de la recta tangente.

El segundo indicador de la idoneidad epistémica correspondiente al lenguaje es éste:

2. ¿El nivel del lenguaje es adecuado a quienes se dirige?

Las actividades didácticas que hemos diseñado, están pensadas para estudiantes principiantes en el estudio del cálculo diferencial, por lo que decidimos comenzar la construcción de significados para los objetos matemáticos del cálculo partiendo de formas de lenguaje, que en el caso de los problemas de optimización elegidos, son intuitivas: el lenguaje geométrico-dinámico, el numérico y la lengua natural; y a partir de las cuales pretendemos promover la construcción de significados en el lenguaje gráfico. Aunque el lenguaje formal de la matemática (uso de cuantificadores, literales, notación conjuntista, notación de límite, etc.) es muy eficiente para expresar sin ambigüedad proposiciones sobre los objetos matemáticos, realizar demostraciones, procedimientos, etc., consideramos que comenzar la construcción de significados para los objetos matemáticos (con estudiantes de ingeniería principiantes en el estudio del cálculo) partiendo de esta forma de lenguaje puede resultar más complicado para los estudiantes que iniciar con otras diferentes e ir gradualmente formalizando.

Cabe mencionar que el lenguaje verbal que se utiliza en las primeras actividades es lenguaje coloquial, pero en caso de que los estudiantes manejen términos matemáticos, se pueden modificar las preguntas guía de las actividades para incorporarlos, por ejemplo, en lugar de preguntarles cuál es el valor más grande y más pequeño que puede tomar x en el problema, se les puede pedir directamente que determinen el intervalo donde la magnitud puede tomar valores, o más aún, determinar el dominio de la función.

El último indicador de la idoneidad para el lenguaje es el siguiente:

3. ¿Se proponen situaciones de expresión e interpretación?

Consideramos que las actividades didácticas de nuestra propuesta promueven en el estudiante prácticas de expresión y de interpretación, pues las preguntas guía que vienen en las hojas de trabajo le piden a éste que describa lo que observa numéricamente y gráficamente, que justifique sus respuestas, que proponga una estrategia para encontrar el punto crítico, que mencione características gráficas del punto crítico, que interprete gráficamente el aumento y disminución de los valores de la magnitud a optimizar, entre otras cosas.

Por otra parte, durante el diálogo grupal sobre el contexto del problema, que proponemos se haga antes de entregar las hojas de trabajo a los estudiantes; y durante las discusiones grupales sobre los aspectos principales de los puntos de las hojas de trabajo, los estudiantes pueden participar, expresando sus ideas y resultados obtenidos, al interpretar el fenómeno y sus representaciones en el ambiente dinámico.

Comenzamos ahora con los *conceptos (o definiciones), proposiciones y procedimientos*, para los cuales se sugieren tres indicadores. Los primeros dos son lo siguientes:

1. ¿Las definiciones, procedimientos y proposiciones están clara y correctamente enunciados, y adaptados al nivel educativo al que se dirigen?

2. ¿Se presentan las definiciones, procedimientos y proposiciones fundamentales del tema según el significado de referencia, están clara y correctamente enunciados, y el nivel educativo al que se dirigen?

En las hojas de trabajo correspondientes a las actividades didácticas no se enuncian conceptos, proposiciones ni procedimientos, por lo cual no consideraremos esta parte del primer indicador en nuestro análisis.

Pretendemos que al realizar las actividades didácticas de nuestra propuesta, se promueva en los estudiantes la construcción gradual (claro que a través de momentos de trabajo individual y en equipo, además de negociación grupal) de significados (y en particular una definición) para los objetos función, función creciente, función decreciente, recta tangente, entre otros; de una manera intuitiva y apoyada en las bondades visuales y dinámicas que brinda GeoGebra, lo cual consideramos adecuado para estudiantes de ingeniería que inician el estudio del cálculo diferencial. Estos objetos matemáticos son objetos fundamentales del cálculo diferencial, y como ya mostramos en el capítulo anterior, las definiciones de éstos, las propiedades y los procedimientos, cuya emergencia buscamos promover, forman parte del significado institucional de referencia.

Con nuestra propuesta abonamos a la emergencia de proposiciones sobre los valores máximos y mínimos relativos, los puntos críticos y la monotonía de la función; las cuales son proposiciones importantes en relación a la derivada.

En cuanto a los procedimientos, las actividades retoman algunos que probablemente el estudiante ya realizó en la escuela preparatoria, como darle valores a una expresión analítica para construir una tabla de valores y luego colocar éstos en ejes coordenados. Después estos procedimientos se vuelven dinámicos al apoyarse en las capacidades de cómputo y graficación de GeoGebra. También emergen procedimientos nuevos como la exploración de intervalos cada vez más finos para aproximar el valor de la magnitud que optimiza lo requerido, el análisis gráfico del signo de las pendientes de las rectas tangentes y de la monotonía de la gráfica, procedimientos propios del cálculo diferencial.

El último indicador para las definiciones, proposiciones y procedimientos es:

3. ¿Se proponen situaciones para la generación y negociación de las definiciones, proposiciones y procedimientos?

Las preguntas guía de las hojas de trabajo correspondientes a las actividades didácticas, como ya se mostró en el significado institucional pretendido, están encaminadas a promover la generación o emergencia de definiciones, proposiciones y procedimientos a través de la realización de sistemas de prácticas para resolver los problemas de optimización. La negociación de éstos objetos matemáticos se dará principalmente durante las discusiones grupales sobre los resultados obtenidos en las hojas de trabajo y durante el trabajo en equipo.

Para los *argumentos* se sugieren dos indicadores:

1. ¿Son adecuadas las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen?

2. ¿Se promueven momentos de validación?

Sobre estos dos indicadores, podemos decir que en las hojas de trabajo se les pide a los estudiantes, que expliquen sus respuestas a las preguntas, esperando que utilicen en sus argumentos el contexto del problema, los valores de la tabla y la gráfica (tanto los plasmados en las hojas de trabajo, como los presentes en el ambiente dinámico).

Por otro lado, en la primera parte de este capítulo cuando explicamos la estructura de las actividades didácticas tomando como ejemplo la actividad “la viga más resistente”, señalamos momentos específicos para hacer una puesta en común de los resultados obtenidos, promoviendo que los estudiantes validaran sus respuestas y llegaran a un consenso.

4.2.2 IDONEIDAD COGNITIVA.

La idoneidad cognitiva expresa el grado en que los significados pretendidos (o implementados) estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como el grado de parecido o correspondencia de los significados personales logrados a los significados pretendidos (o implementados).

La primera componente de la idoneidad cognitiva corresponde a los *conocimientos previos* (situaciones, lenguaje, procedimientos, proposiciones, argumentos y conceptos), y consta de dos indicadores, de los cuales se presenta a continuación el primero:

1. ¿Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio)?

Como ya se mostró, al analizar el significado institucional pretendido, los problemas de optimización que proponemos requieren de conceptos matemáticos elementales, como área (de rectángulos, círculos, trapecios regulares), volumen (de un paralelepípedo, un cilindro recto), distancia, etc., los cuales se estudian desde la escuela primaria, y otros como la pendiente de una recta, proporcionalidad directa, razones trigonométricas, velocidad constante, entre otros, que se estudian en el bachillerato al igual que elementos lingüísticos como expresiones analíticas, literales para variables, procedimientos como construir expresiones analíticas, construir una tabla de valores a partir de una expresión analítica, graficar puntos en un plano a partir de datos numéricos correlacionados en una tabla, usar el teorema de Pitágoras, hacer despejes y sustituciones; propiedades de la recta asociadas al signo de su pendiente, entre otras.

Revisando los programas de estudios para matemáticas en el nivel medio superior[4], de la Dirección General del Bachillerato (DGB) y la Secretaría de Educación Pública (SEP), podemos observar que dentro del significado pretendido por dicha institución, se contemplan los objetos matemáticos previos necesarios para que el estudiante aborde las

[4] Programas de estudios para matemáticas de la DGB y SEP para matemáticas en el bachillerato:
Matemáticas I, obtenido de:
http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_1ersem/MATEMATICAS-I.pdf
Matemáticas II, obtenido de:
http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_2osem/MATEMATICAS-II.pdf
Matemáticas III, obtenido de :
http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_3ersem/MATEMATICAS-III.pdf
Matemáticas IV, obtenido de:
http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_4osem/Matematicas-IV.pdf

actividades didácticas de nuestra propuesta. En este sentido, mostraremos a continuación, algunos de los objetos matemáticos pretendidos en los primeros cuatro semestres de la escuela preparatoria.

En el primer semestre se comienza con el uso del lenguaje algebraico (variables y expresiones algebraicas), las variaciones directas e inversas, incluyendo la variación proporcional como caso simple de relación lineal entre dos variables; se estudian también los sistemas de ecuaciones 1 x 1, 2 x 2, y 3 x 3 en estrecha conexión con la función lineal y se estudia el método de solución de sistemas de ecuaciones por sustitución. Se menciona que el estudiante debe poder determinar el comportamiento de la gráfica de la función lineal de acuerdo al signo de la pendiente. En este semestre, se espera que el estudiante aprenda a representar en los ejes vertical y horizontal las variables dependientes e independientes de la función lineal o cuadrática asociada a una ecuación, y a calcular una a partir de la otra para tabular valores y hacer gráficas, también se espera que resuelva problemas que se plantean con funciones cuadráticas utilizando despejes y/o factorización.

En el segundo semestre se avanza en aplicaciones teóricas y prácticas de la congruencia y semejanza de triángulos, se estudia el teorema de Pitágoras y se aplica para la resolución de problemas y para determinar la medida del lado de un triángulo rectángulo conocidos los otros dos. Por otro lado, se estudian las relaciones entre lados y ángulos en triángulos de todo tipo y el comportamiento de las tres funciones trigonométricas básicas, se establece que el estudiante debe construir las identidades pitagóricas a partir de definición de las funciones en el plano cartesiano o en círculo trigonométrico, y obtener los valores de funciones trigonométricas para ángulos de cualquier medida, utilizando calculadora, o tablas y el ángulo de referencia; también debe trazar las gráficas del seno, coseno y tangente por medio de puntos calculados en tablas. Por otro lado, se estudia en este semestre a la recta tangente y la recta secante, pero sólo en el caso de la circunferencia.

Sobre la pendiente de una recta, en el tercer semestre, se estudia su relación con el ángulo de inclinación y se conceptualiza a partir de la razón entre conceptos tales como elevación y avance, y se instruye a los estudiantes para obtener el ángulo de inclinación de una recta con respecto al eje x a partir de su pendiente y viceversa, y para determinar el signo de la pendiente de una recta a partir de la medida de su ángulo de inclinación.

En el cuarto semestre, se distinguen y describen diferentes tipos de funciones matemáticas, así como operaciones y transformaciones algebraicas y geométricas entre ellas; se profundiza el análisis de las características de los modelos lineales y cuadráticos; se estudian las funciones periódicas, se emplea la calculadora para tabular valores de funciones racionales, entre muchas otras cosas.

2. ¿Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes?

Dado el carácter intuitivo y el contexto familiar con que se propone iniciar la construcción de los objetos matemáticos del cálculo en las actividades didácticas de nuestra propuesta, además de las ventajas visuales y dinámicas que proporciona GeoGebra, consideramos que los significados pretendidos tienen una dificultad apropiada para los estudiantes de ingeniería principiantes en el estudio del cálculo diferencial.

La segunda componente de la idoneidad cognitiva se refiere a las *adaptaciones curriculares a las diferencias individuales* y consta de un indicador:

1. ¿Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo?

Las actividades didácticas de nuestra propuesta tienen una estructura similar, lo cual favorece que los estudiantes refuercen los significados que vayan construyendo durante el desarrollo de las primeras actividades. Por otro lado, contribuyen la ampliación del significado de recta tangente y punto crítico.

La tercer componente de esta idoneidad corresponde al *aprendizaje* y tiene un indicador:

1. ¿Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos/ competencias pretendidos o implementados?

Este indicador se refiere a un proceso de instrucción implementado, así que no lo consideraremos para el análisis a priori de nuestra propuesta.

4.2.3 IDONEIDAD MEDIACIONAL

Se considera a la idoneidad mediacional como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y de aprendizaje.

El primer componente corresponde a los *recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores)*, el cual contiene dos indicadores. Presentamos enseguida el primero:

1. ¿Se propone el uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones, adaptadas al significado pretendido?

En nuestra propuesta utilizamos como recursos materiales principales las hojas de trabajo para los estudiantes y una herramienta computacional: GeoGebra, el cual es un software de geometría dinámica que permite, además de hacer construcciones geométricas en el plano; graficar funciones, trabajar con expresiones analíticas, definir parámetros y vincular todo dinámicamente.

GeoGebra es un software libre, de código abierto, disponible en la página http://www.geogebra.org/cms/ de la cual se puede descargar un archivo instalador, o bien, elegir la opción GeoGebra WebStart, en la cual se instala y se actualiza GeoGebra directamente desde Internet. Este software también se puede usar sin la necesidad de instalarlo en la computadora, ya sea desde Internet trabajando en un applet completamente funcional, o creando páginas interactivas HTML (también llamadas hojas de trabajo dinámicas), las cuales se pueden usar con tan solo tener un navegador de Internet (como Explorer o Mozilla Firefox). Como GeoGebra está basado en Java puede correr en cualquier sistema operativo y está disponible en varios idiomas, entre ellos el español.

En lo referente a situaciones, GeoGebra permite construir detallados modelos dinámicos de éstas, por ejemplo, permite modelar la hoja de cartón y la caja del problema de la caja sin tapa, modificar en tiempo real la longitud de los cuadrados de las esquinas que se cortarán y observar cómo cambia de tamaño la caja; también permite modelar dinámicamente el tronco y la viga que se obtendrá de él, y variar las dimensiones de ésta; simular la posición de la estación de bombeo en la margen del río; los carros que se mueven por la carretera acercándose (o alejándose) del crucero; la lámina que se dobla para hacer un canal; entre muchas otras cosas más.

En cuanto al lenguaje, GeoGebra permite presentar al problema en lenguaje geométrico-dinámico (simulación del fenómeno) y verbal; a la función que modela el problema en lenguaje gráfico, analítico y numérico, y vincular estas formas de lenguaje dinámicamente, lo cual favorece el establecimiento de relaciones entre éstas.

GeoGebra permite que el estudiante realice rápidamente procedimientos como tabulación de valores eligiendo un intervalo de valores y un incremento para la variable independiente, graficación de los puntos de la tabla, graficación de funciones, rectas tangentes, realizar acercamientos sucesivos (*zoom*) en torno a un punto, etc.

La animación que simula al fenómeno pretende facilitar al estudiante la argumentación de porqué las magnitudes sólo pueden tomar ciertos valores; la tabla y la gráfica ayudarán a justificar por qué el valor que encuentran al principio en la tabla no es el valor extremo.

En lo que respecta a las proposiciones, el manejo de GeoGebra favorece la observación de que la recta tangente en el punto máximo o mínimo es horizontal, pues los estudiantes después de aproximar la solución al problema con varios decimales, tratarán de ubicar el punto máximo (o mínimo) en la gráfica observando las coordenadas de éste y haciendo acercamientos sucesivos, con lo cual observarán que la gráfica se convierte en una recta horizontal en torno al punto, lo que promueve la construcción de una definición local de recta tangente. También favorece la elaboración de conjeturas sobre la relación entre la función y la recta tangente (monotonía, máximos y mínimos) al ver dinámicamente cómo la recta tangente recorre la gráfica de la función.

El segundo indicador se presenta a continuación:

2. ¿Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones, modelos concretos y visualizaciones?

Nuestra propuesta, como se ha mencionado antes, promueve la construcción o emergencia de distintos objetos matemáticos primarios del cálculo (en particular definiciones y propiedades) a partir de la modelización y resolución de problemas de optimización de contexto extra matemático y con apoyo de los recursos visuales y dinámicos de GeoGebra, por lo que coincide ampliamente con este indicador.

La siguiente componente de la idoneidad mediacional corresponde al *número de alumnos, horario y condiciones del aula* y consta de dos indicadores:

1. ¿Son el aula, el número de alumnos y su distribución adecuados para llevar a cabo la enseñanza pretendida?

Dado que no estamos analizando un proceso de instrucción implementado, no contamos con un aula ni un grupo de estudiantes para analizar las condiciones que plantea el indicador, pero podemos decir que nuestra propuesta está diseñada para desarrollarse en un centro de cómputo donde lo ideal sería que hubiera una computadora para cada estudiante, o por lo menos computadoras suficientes para equipos pequeños de estudiantes, pero de no ser posible, consideramos que nuestra propuesta puede modificarse sin muchas complicaciones para desarrollarse en un aula que cuente con al menos una computadora y un proyector, la cual podrían manipular por turnos algunos estudiantes o el profesor.

El segundo indicador es el siguiente:

2. ¿El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora)?

Esta propuesta no está dirigida a algún grupo de estudiantes predeterminado con un horario asignado, por lo que no consideraremos este indicador en el análisis.

La última componente de la idoneidad mediacional se refiere al *tiempo (de enseñanza colectiva /tutorías; tiempo de aprendizaje)* y comprende tres indicadores.

1. ¿Son adecuados los significados pretendidos /implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial)?

Consideramos que el tiempo requerido para el desarrollo de las actividades didácticas será cada vez menor dadas las similitudes en la estructura de las mismas.

El resto de los indicadores de esta componente son los siguientes:

2. ¿Se invierte el tiempo adecuado en los contenidos más importantes o nucleares del tema?

3. ¿Se invierte el tiempo pertinente en los contenidos que presentan más dificultad?

Sobre el segundo y tercer indicador, en el capítulo tres mostramos que en el programa de estudios para el curso "Cálculo Diferencial e Integral I" de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora, se establece como uno de los objetivos del curso, que el estudiante pueda usar la derivada para describir el comportamiento de las funciones: dónde son crecientes o decrecientes, dónde tienen máximos y mínimos etc.; lo cual se aborda en nuestra propuesta.

Otro de los objetivos de los cursos de ingeniería de la Universidad de Sonora, es que los estudiantes puedan modelar y resolver problemas no matemáticos, en particular de optimización; en lo cual diversos reportes de investigación muestran que los estudiantes presentan grandes dificultades.

En este sentido, dado que las situaciones presentes en nuestra propuesta son de contexto extra matemático, más precisamente, de optimización, y dado que se busca el desarrollo de sistemas de prácticas para su resolución, a partir de las cuales se promueva la construcción de significados para los objetos matemáticos del cálculo en tales contextos, donde la función, por ejemplo, en sus distintas formas del lenguaje sea una herramienta para la modelación de fenómenos de la vida real; y la recta tangente una herramienta que permite describir de cierta manera los cambios de las magnitudes relacionadas al fenómeno; consideramos que el tiempo invertido en nuestras actividades didácticas, se dedica a partes esenciales del curso.

4.2.4 IDONEIDAD EMOCIONAL

La Idoneidad emocional se refiere al grado en que el proceso de instrucción permite la implicación (interés, motivación, apropiación de los problemas) de los alumnos en éste.

Para la idoneidad emocional, se proponen tres componentes: *intereses y necesidades, actitudes, y emociones*; cada una de las cuales cuenta con dos indicadores.

Para la componente correspondiente a los *intereses y necesidades,* se proponen los siguientes dos indicadores:

1. ¿Se cuenta con una selección de tareas de interés para los alumnos?

2. ¿Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional?

Los problemas de optimización que seleccionamos, son problemas extra matemáticos de un contexto familiar para los estudiantes y algunos de los cuales están relacionados con la ingeniería, por lo que se facilita que éstos participen en su planteamiento con la guía del profesor y se interesen en su resolución, pues pueden abordarlos con sus conocimientos de preparatoria, de esta forma consideramos a priori que los estudiantes se percatarán de la utilidad de las matemáticas que conocen, para resolver problemas afines a su área profesional y de la vida cotidiana, pero al mismo tiempo experimentarán la construcción de nuevas matemáticas.

Para la componente que considera a las *actitudes* se tienen dos indicadores:

1. ¿Se promueve la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.?

2. ¿Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice?

Sobre el primer indicador podemos decir que promovemos la implicación de los estudiantes en las actividades al elegir situaciones de su interés y sobre las cuales puede opinar por serle familiares, aunque consideramos que este indicador se dirige más a un proceso de enseñanza y aprendizaje implementado.

Para la tercera componente, referente a las *emociones,* tenemos dos indicadores:

1. ¿Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas?

2. ¿Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas?

Al igual que en la componente anterior, consideramos que estos indicadores corresponden más a un proceso de instrucción implementado que a un diseño como el nuestro, pero podemos comentar lo siguiente: el hecho de que las situaciones de nuestra propuesta sean de un contexto familiar, de interés para los estudiantes y simuladas en GeoGebra dinámicamente, favorece en éstos la participación e implicación en la resolución del problema, además el que se utilicen en las primeras preguntas guía de las hojas de trabajo, procedimientos elementales como la tabulación de valores (que organiza el método por tanteo que pudieran realizar los estudiantes) y la graficación de éstos en los ejes coordenados, puede dar cierta confianza al estudiante pues no se hace intervenir (al menos no explícitamente para los estudiantes) objetos matemáticos abstractos sobre los que no se tiene un significado útil construido.

4.2.5 IDONEIDAD ECOLÓGICA

La Idoneidad ecológica se refiere al grado en que el proceso de estudio se ajusta al currículo de la institución, contempla las necesidades e implicaciones del medio social en que se ubica la misma, y considera las conexiones intra e interdisciplinares.

La primera componente de esta idoneidad corresponde a la a*daptación de la propuesta al currículo* y consta de un indicador:

1. ¿Los significados, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares?

Dentro de los objetivos del programa de estudios para el curso “Cálculo Diferencial e Integral I” (que tomamos como significado institucional de referencia) se indica que los estudiantes modelen y resuelvan problemas usando los objetos del cálculo diferencial, en particular que apliquen los criterios de optimización que involucran derivadas en la resolución de problemas físicos, geométricos y relacionados con los principales temas de la ingeniería; y que usen la derivada para describir el comportamiento de las funciones: dónde son crecientes o decrecientes, cóncavas hacia abajo o hacia arriba, dónde tienen máximos y mínimos absolutos y relativos, entre otros.

Consideramos que nuestra propuesta encaja en gran parte con lo establecido en tales objetivos, sin embargo, en las actividades didácticas que diseñamos, no buscamos que los estudiantes "apliquen" la derivada y los criterios de optimización para resolver los problemas, sino que al contrario, a través de intentar resolverlos construyan objetos matemáticos del cálculo, como la función, la monotonía de la función, los puntos críticos y relaciones entre éstos y la pendiente de la recta tangente, entre otros.

La segunda componente habla sobre la *apertura hacia la innovación didáctica*, y su primer indicador es el siguiente:

1. ¿La propuesta es innovadora y basada en la investigación y la práctica reflexiva?

Aunque ya se han hecho propuestas didácticas diferentes a lo tradicional para la enseñanza del cálculo, que parten de la resolución de problemas de optimización, como la de Ávila, Díaz y Vargas (1988) o la de Bravo, Grijalva e Ibarra (2002) de las cuales retomamos algunas ideas, o la de Andreu y Riestra (2005); consideramos que nuestra propuesta didáctica es innovadora en el sentido siguiente: incorpora el uso de un software novedoso con grandes potencialidades tanto gráficas como numéricas y analíticas, y se fundamenta con una teoría novedosa cada vez más reconocida y utilizada, el EOS.

Para la elaboración de este trabajo también retomamos resultados de trabajos de investigación y de propuesta didáctica que reportan dificultades presentadas por los estudiantes para aprender cálculo diferencial; que hablan sobre el estado de la enseñanza del Cálculo en el nivel medio superior y superior y los aspectos importantes que tal forma de enseñanza descuida, como el uso y la articulación de distintas formas de lenguaje; y que plantean formas de enseñanza del cálculo alternativas a la tradicional y/o que se apoyan en herramientas tecnológicas y computacionales, sobre los cuales hablamos en los capítulos dos y tres.

2. ¿Se integran nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.)?

Nuestra propuesta se apoya en las capacidades dinámicas, geométricas, numéricas y algebraicas del software GeoGebra, sobre el cual ya hemos hablado en este documento.

La tercera componente de la idoneidad ecológica se refiere a la *adaptación socio-profesional y cultural*, para la cual se propone el siguiente indicador:

1. ¿Los significados pretendidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes?

Con nuestra propuesta buscamos favorecer que los estudiantes construyan significados para objetos matemáticos del cálculo en un contexto extra matemático y de optimización, y de esta manera contribuir a la preparación del estudiante en la utilización de tales objetos para modelar y resolver problemas de ingeniería.

Cuando se explicó la estructura de las actividades didácticas, incluimos señalamientos metodológicos para el profesor, que incluían realizar un diálogo con los estudiantes para familiarizarlos con el contexto del problema y guiarlos al planteamiento del mismo. Consideramos que promover la participación de los estudiantes en el planteamiento de los problemas de optimización puede favorecer la incorporación a su sistema de prácticas, de algunas prácticas importantes para su formación profesional como identificar qué información que se requiere conocer, cuál se puede establecer fácilmente, cuál no es relevante en ese momento, construir un diagrama que modele el fenómeno (aunque luego se utilice el la simulación dinámica de GeoGebra), etc.

La cuarta componente corresponde a las *conexiones intra e interdisciplinares*, para la cual se tiene el siguiente indicador:

1. ¿Los significados se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares?

En este caso hemos buscado identificar cuáles conocimientos matemáticos tienen relación con otros que se revisarán en cursos posteriores y cuáles se relacionan con cursos y situaciones propias de la ingeniería.

El desarrollo de nuestras actividades busca promover, en sentido general, el desarrollo de habilidades y competencias que serán de utilidad a los estudiantes en dichos cursos, no sólo en cuanto a la relación directa de las nociones matemáticas involucradas, sino también en otros aspectos fundamentales para la resolución de problemas de la ingeniería.

Por ejemplo, al partir de situaciones problemas de interés, promovemos el desarrollo de habilidades para la modelación matemática de dichas situaciones, promovemos el trabajo en equipo para desarrollar habilidades de comunicación de ideas matemáticas y la contrastación de conjeturas, etc.

4.2.6 Idoneidad interaccional

La Idoneidad interaccional corresponde al grado en que los modos de interacción en un proceso de enseñanza y aprendizaje permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.

Cuando explicamos la estructura de las actividades didácticas de nuestra propuesta, en la primera parte de este capítulo, señalamos la necesidad de momentos de trabajo individual, en equipo y grupal, y momentos de discusiones grupales. También mencionamos que es importante que los estudiantes argumenten para convencer a sus compañeros de que sus respuestas o ideas son válidas y llegar a consensos sobre los objetos matemáticos puestos en juego. Consideramos que con esto se favorece por un lado, que los estudiantes asuman una parte de la responsabilidad de su aprendizaje y la validación de sus argumentos; y por otro lado, la manifestación de conflictos en los significados personales de los estudiantes.

4.3 HOJAS DE TRABAJO

A continuación presentaremos las hojas de trabajo de las actividades didácticas de nuestra propuesta. Las cuales incluyen las correcciones sugeridas tras la puesta en escena de algunas de ellas, sobre la que se hablará en el capítulo siguiente. Los ambientes dinámicos virtuales de cada una de las actividades, están disponibles en la dirección: http://goo.gl/Pfoh

ACTIVIDAD 1

LA CAJA SIN TAPA: De un cartón rectangular de 40 X 50 cm se quiere construir una caja sin tapa; para esto se recortarán cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas del cartón y se doblarán las cejas con el fin de formar los lados. Determine las dimensiones de la caja de volumen máximo.

1. En el archivo "Caja.ggb" está simulado el cartón rectangular, mueve el punto "P" y observa lo que sucede, luego activa la casilla "Mostrar caja" y observa qué pasa ahora ¿Crees que cambie el volumen de la caja si cambia la medida del lado de los cuadrados que se recortan? ¿Cómo lo demostrarías?

2. ¿Cuál será el volumen de la caja si le recortamos cuadrados cuyos lados midan 15 cm?

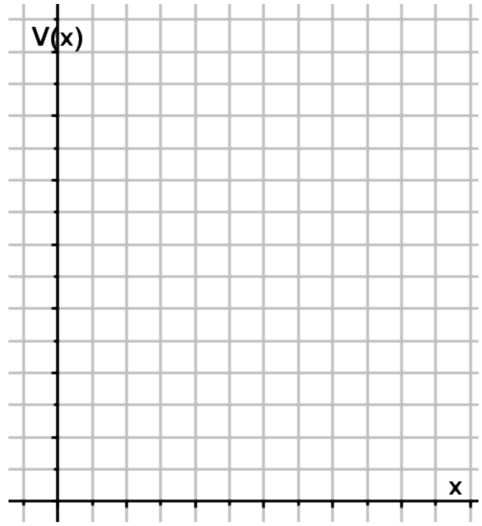
3. Escribe una expresión algebraica (en dependencia de la longitud x del lado del cuadrado recortado) para el largo, el ancho y el volumen de la caja. Para referirnos al volumen, escribiremos $V(x)$.

Largo______________ Ancho________________ $V(x)$____________________

4. ¿Cuál es el valor más pequeño y cuál es el valor más grande que puede tomar x en el problema?

5. ¿Qué volumen tendrá la caja si la longitud x de los cuadrados que se recorten es 0, 3, 6, 9, 12, 18 y 20? Colocar tus resultados en la tabla y cuadrícula siguientes.

Longitud *x* del lado de los cuadrados	*V(x)*= Volumen de la caja
0	
3	
6	
9	
12	
15	
18	
20	



2. ¿Para qué valor de *x* de la tabla que llenaste en la pregunta anterior, se obtuvo el mayor volumen? ¿Será tal valor de *x* la solución al problema? Explica tu respuesta.

Nota: Puedes comprobar tus resultados de la tabla presionando la pestaña *vista* y seleccionando la opción *vista de hoja de cálculo* (observa las columnas B y C). Presiona también la casilla "Mostrar puntos de la tabla" y la casilla "Mostrar gráfica". Vuelve a mover el punto "P" y observa qué pasa en la gráfica.

3. ¿Crees que haya otro valor de *x* con el cual se obtenga una caja de volumen mayor? Si es así ¿Entre qué valores de la tabla estará? Aproxima con 4 cifras decimales el valor de *x* que hace máximo el volumen de la caja.

Sugerencia: en la celda A2 de la hoja de cálculo puedes poner el número desde el cual quieres que *x* tome valores, en la celda A4 puedes poner el número hasta el cual quieres que tome valores *x*, y en la celda A6 puedes colocar la cantidad que quieras que vaya aumentando *x* cada vez. Por ejemplo, si quieres obtener valores de *x* y del volumen correspondiente, para valores de *x* entre 0 y 20, y quieres que el valor de *x* vaya aumentando 1 cada vez, coloca el 0 en la celda A2, el 20 en la celda A4, y 1 en la celda A6. Puedes llevar un registro de tus resultados en la tabla siguiente:

x desde	*x* hasta	Incremento de *x*	Valor de *x* que da el mayor volumen	Volumen de la caja *V(x)*

4. ¿Qué características tiene en la gráfica el punto correspondiente al valor de *x* que da el máximo volumen? Sugerencia: Desactiva las casillas “Mostrar caja” y “Mostrar cartón rectangular”, luego mueve el punto “M”, que se encuentra sobre la gráfica, con el cursor para que sus coordenadas coincidan con el valor de *x* que encontraste, para esto puedes hacer *zoom* (presionando la tecla SHIFT y girando hacia atrás el *scroll* del ratón simultáneamente) varias veces sobre el punto para aproximar mejor sus coordenadas.

5. ¿Qué pasó con la gráfica cuando hiciste *zoom* para acomodar el punto “M” en la cima? Presiona la casilla “Tangente” y observa qué sucede, luego quita el aumento poco a poco (girando hacia delante el *scroll* de ratón y presionando la tecla SHIFT al mismo tiempo). Menciona lo que observas.

6. En la tabla de la pregunta 5, cuando *x* aumenta de valor (antes de llegar al que da el mayor volumen) ¿Qué pasa con el volumen de la caja? ¿Cómo es la gráfica en estos valores? Dibújala.

7. Y cuando x aumenta su valor (después del valor en la tabla que da el mayor volumen) ¿Qué pasa con el volumen de la caja? ¿Cómo es la gráfica en estos valores? Dibújala.

8. Mueve el punto "M" y observa cómo la recta tangente recorre la gráfica. ¿Qué diferencia encuentras en la recta tangente antes del punto más alto y después de éste?

9. ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en los puntos donde el volumen $V(x)$ está creciendo? ¿Cómo es en el punto más alto de la gráfica? ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en los puntos donde el volumen $V(x)$ está decreciendo?

10. ¿Qué pasa con la recta tangente cerca de x=20?

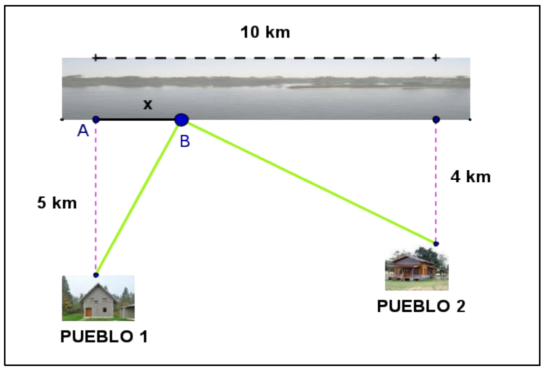
11. Coloca la recta en un punto donde consideres que es tangente y haz *zoom* varias veces hasta que la gráfica se vuelva una recta. Luego coloca la recta en un punto donde consideres que no es tangente y haz *zoom* varias veces como se te indicó para el punto anterior ¿Observas que tienen algo en común?

12. Escribe una nueva definición de recta tangente, de manera que la recta que toca al punto "M" pueda considerarse tangente a la gráfica aún cuando x se aproxima a 20.

13. ¿Cómo solucionarías gráficamente el problema de encontrar el valor de x que hace máximo el volumen de la caja?

ACTIVIDAD 2

LA ESTACIÓN DE BOMBEO: Hacia el mismo lado o margen de un río recto hay dos pueblos, los habitantes desean construir una estación de bombeo que les abastezca agua. La estación de bombeo debe estar en la margen del río y los tubos deben ir directo a los pueblos. Las distancias se muestran en la figura siguiente. ¿Dónde debe estar la estación de bombeo para minimizar la longitud total del tubo?



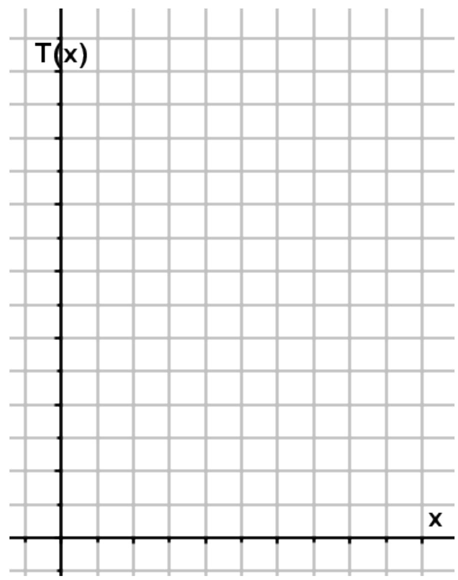
1. Abre el archivo "Estación de bombeo.ggb". Mueve el punto "B" que representa a la bomba y observa lo que sucede. Si colocas la bomba a 1 km del punto A (es decir x=1 km) ¿Qué cantidad de tubo se requiere para conectar la estación de bombeo solamente con el pueblo 1? ¿Y con el pueblo 2?

2. Escribe una expresión algebraica, para calcular la cantidad de tubo requerida para conectar el pueblo 1 con la estación de bombeo, otra para la cantidad de tubo requerida para conectar el pueblo 2 con la estación de bombeo y otra para la cantidad total de tubo, todas en dependencia de la distancia x. Le llamaremos $T(x)$ a la cantidad total de tubo.

3. Cuál es el valor más pequeño y el valor más grande que puede tomar x en el problema?

4. ¿Qué cantidad de tubo se necesitaría en total para conectar los dos pueblos con la estación de bombeo si x= 0, 4, 6, 8 y 10 km? Puedes colocar tus resultados en la tabla y cuadrícula siguientes.

x	Cantidad total de tubo $T(x)$
0	
1	
4	
6	
8	
10	



5. ¿Para qué valor de x de la tabla (que llenaste en la pregunta 4) se obtuvo la menor cantidad de tubería? ¿Será tal valor de x el que nos de la menor cantidad posible de tubo o habrá otro? Explica tu respuesta.

Nota: Puedes comprobar los resultados presionando, en el archivo "Estación de bombeo.ggb", la pestaña "*vista*" y seleccionando la opción "*vista de hoja de cálculo*" (observa las columnas B y C). Presiona también la casilla "Tabla" y la casilla "Gráfica".

6. ¿Entre qué números de la tabla estará el valor de x que nos dé la menor cantidad posible de tubo? ¿Cómo le harías para encontrarlo? Aproxima su valor con 4 cifras decimales. Sugerencia: en la hoja de Cálculo puedes colocar nuevos intervalos de valores para x y elegir incrementos más pequeños. Por ejemplo, si quieres obtener valores de x y de la cantidad de tubo correspondiente, para valores de x entre 2 y 7, y quieres que el valor de x vaya aumentando 0.5 cada vez, coloca el 2 en la celda A2, el 7 en la celda A4, y 0.5 en la celda A6. Puedes usar la tabla siguiente para tener control de la información que encuentres:

x desde	x hasta	Incremento de x	Valor de x que da la menor cantidad de tubo	Cantidad de tubo $T(x)$

7. ¿Qué característica tiene en la gráfica el punto correspondiente al valor de x que da la menor cantidad de tubo, que lo distingue de los otros? Sugerencia: Desactiva la casilla “Diagrama”, luego mueve el punto “M”, que se encuentra sobre la gráfica, con el cursor para que sus coordenadas coincidan con el valor de x que encontraste, para esto puedes hacer *zoom* (presionando la tecla SHIFT y girando hacia atrás el *scroll* del ratón simultáneamente) varias veces sobre el punto para aproximar mejor sus coordenadas.

8. ¿Qué pasó con la gráfica cuando hiciste *zoom* para hacer coincidir las coordenadas del punto “M” con los valores que encontraste en la tabla? Presiona la casilla “Tangente” y observa qué sucede, luego quita el aumento poco a poco girando hacia delante el *scroll* de ratón y presionando la tecla SHIFT al mismo tiempo. Menciona lo que observas.

9. En tu tabla de la pregunta 3, cuando x aumenta de valor (antes de llegar al valor que da la menor cantidad de tubo) ¿Qué pasa con la cantidad $T(x)$ de tubo? ¿Cómo es la gráfica en estos valores? Dibújala.

10. Y cuando x aumenta su valor (después del valor que da la menor cantidad de tubo) ¿Qué pasa con la cantidad $T(x)$ de tubo? ¿Cómo es la gráfica para estos valores? Dibújala.

11. Mueve el punto "M" y observa cómo la recta tangente recorre la gráfica. ¿Qué diferencia encuentras en la recta tangente antes del punto más bajo y después de éste?

12. ¿Cómo son las pendientes de las rectas tangentes donde la cantidad de tubo decrece? ¿Cómo es la recta tangente en el punto más bajo de la gráfica? ¿Cómo son las pendientes de las rectas tangentes donde la cantidad de tubo crece?

13. ¿Cómo solucionarías gráficamente el problema de encontrar el valor de x que hace mínima la cantidad de tubo?

ACTIVIDAD 3

EL CORRAL: Se desea rodear un terreno rectangular con 60 m de cerca. El terreno se encuentra a la orilla de un río, por lo que un lado no necesita cerca. Determine las dimensiones del terreno de mayor área que pueda rodearse con esa cantidad de cerca.

1. En el archivo "Corral.ggb" mueve el punto "P" y observa cómo cambia la forma del terreno cercado. Si construimos la cerca de tal manera que el lado paralelo al río mida 10 m ¿Cuánto metros medirán los otros lados? Y ¿cuál será el área del terreno cercado?

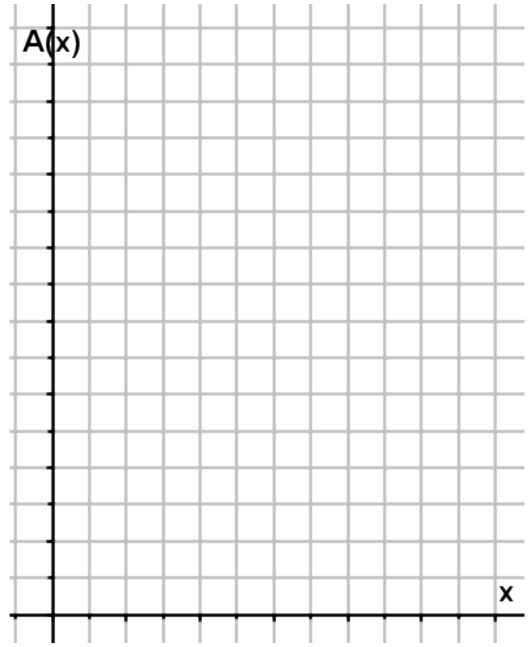
2. Escribe una expresión algebraica para calcular la longitud del lado *"y"* en dependencia de x, y una expresión algebraica para el área $A(x)$ del terreno cercado también en dependencia de x.

Lado y=____________________ $A(x)$=____________________

3. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar x? ¿Y el mayor?

4. ¿Crees que se pueda cercar un terreno mayor con la misma cantidad de alambre? Si es así, ¿Cómo encontrarías otra medida para el lado x que permitiera cercar un terreno mayor? Puedes usar la tabla y cuadrícula siguientes.

Longitud *x* del lado paralelo al río	*A(x)*= Área del terreno cercado



5. ¿Crees que haya otro valor para *x* que dé un área aún mayor? ¿Cómo lo encontrarías? Puedes usar la hoja de cálculo de GeoGebra, activar la casilla "Puntos de la tabla" y la casilla "Gráfica" para comprobar tus resultados.

6. ¿Qué características tiene en la gráfica el punto correspondiente al área máxima?

7. En la tabla de la pregunta 4 ¿Qué pasa con los valores del área *A(x)* cuando *x* aumenta de valor (antes de llegar al valor que da la mayor área para el terreno)? ¿Cómo es la gráfica de para estos valores? Dibújala.

8. Y cuando x aumenta su valor (después del valor que da la mayor área para el terreno) ¿Qué pasa numéricamente con los valores del área $A(x)$? ¿Cómo es la gráfica para estos valores? Dibújala.

9. Activa la casilla "Tangente". Mueve el punto "M" para que la recta tangente recorra la gráfica ¿Qué diferencia encuentras en la recta tangente antes del punto más alto y después de éste?

10. ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en los puntos donde el área aumenta? ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en el punto más alto de la gráfica? ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en los puntos donde el área disminuye?

11. ¿Cómo solucionarías gráficamente el problema de encontrar las dimensiones del terreno de área máxima que se pueda cercar con 60 m de alambre?

ACTIVIDAD 4

LA PÁGINA DE IMPRESIÓN: Una página impresa contiene una región de impresión de 24 plg², un margen de 2 plg en las partes superior e inferior y margen de 1.5 plg en los lados. Determine las dimensiones de la página más pequeña que satisface estos requerimientos.

1. Abre el archivo "Página de impresión.ggb". Puedes mover el punto "P" para modificar las dimensiones de la hoja. Calcula:

Para x=2 Altura de la región de impresión ___________________________ Base de la hoja______________ Altura de la hoja_____________	Para x =5 Altura de la región de impresión ____________________________ Base de la hoja_______________ Altura de la hoja______________

2. ¿Cuál es la expresión algebraica (en dependencia de x) de la **altura** de la **región de impresión**?

3. Escribe ahora una expresión analítica (en dependencia de x) para:

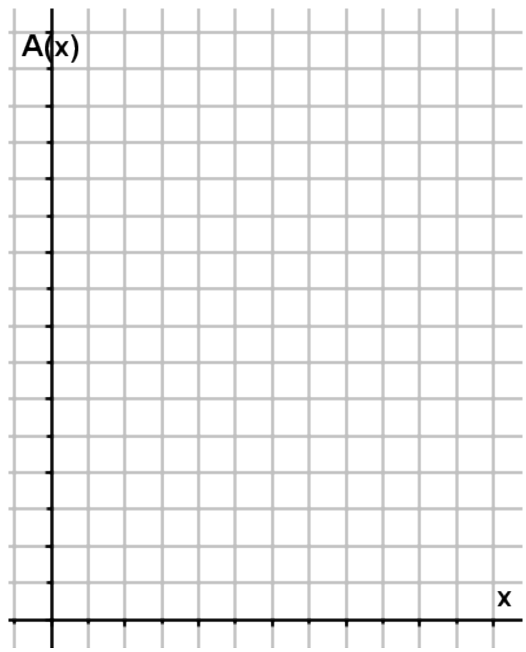
La **altura** de la **hoja**__________________ la **base** de la **hoja** ____________________

4. ¿Cuál es la expresión analítica (en dependencia de x) del área de la hoja? Llámale $A(x)$ a tal área.

5. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar x en este problema? Y ¿cuál es el mayor? ¿por qué?

6. Usando la expresión analítica para $A(x)$, llena la tabla siguiente con diferentes valores de x y construye una gráfica.

x	A(x)



7. Usando la hoja de cálculo aproxima con cuatro decimales el valor de x que minimiza el área $A(x)$. Activa las casillas "Puntos de la tabla" y "Gráfica" para comprobar tus resultados.

8. ¿Qué característica tiene en la gráfica el punto correspondiente al valor de x que minimiza el área? Sugerencia: Desactiva la casilla "Hoja", luego mueve el punto "M", que se encuentra sobre la gráfica, para que sus coordenadas coincidan con el valor de x que encontraste, para esto puedes hacer *zoom* (presionando la tecla SHIFT y girando hacia atrás el *scroll* del ratón simultáneamente) varias veces sobre el punto para aproximar mejor sus coordenadas.

9. ¿Qué pasó con la gráfica cuando hiciste *zoom* sobre el punto "M"? Presiona la casilla "Tangente" y observa qué sucede, luego quita el aumento poco a poco girando hacia delante el *scroll* de ratón y presionando la tecla SHIFT al mismo tiempo. Menciona lo que observas.

10. En tu tabla de la pregunta 7, cuando x aumenta de valor (antes de llegar al valor que da la menor área) ¿Qué pasa con los valores de $A(x)$? ¿Cómo es la gráfica en estos valores? Dibújala.

11. Y cuando x aumenta su valor (después del valor que da la menor área) ¿Qué pasa con los valores de $A(x)$? ¿Cómo es la gráfica para estos valores? Dibújala.

12. Mueve el punto "M" y observa cómo la recta tangente recorre la gráfica. ¿Qué diferencia encuentras en la recta tangente antes del punto más bajo y después de éste?

13. ¿Cómo son las pendientes de las rectas tangentes donde el área decrece? ¿Cómo es la recta tangente en el punto más bajo de la gráfica? ¿Cómo son las pendientes de las rectas tangentes donde el área crece?

14. ¿Cómo solucionarías gráficamente el problema?

ACTIVIDAD 5

LA VIGA MÁS RESISTENTE: La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto del ancho y el cuadrado de la altura de su sección transversal. Determine las dimensiones de la viga más resistente que se pueda obtener de un tronco circular de 30 cm de radio.

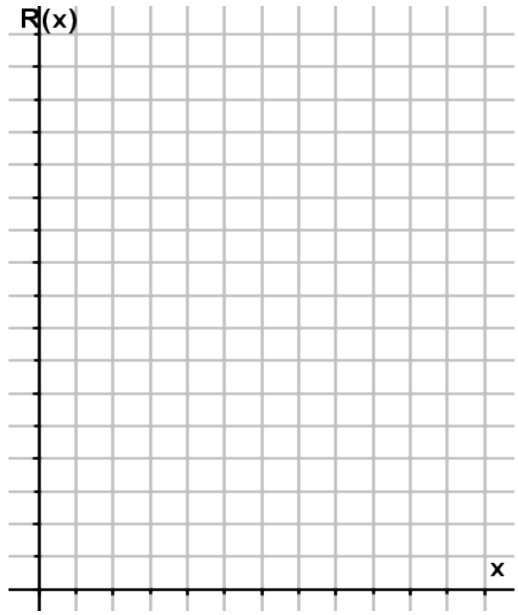
1. Abre el archivo "Viga.ggb". Mueve el punto "P" y observa lo que pasa. ¿Puedes calcular el alto de la viga, para un valor específico del ancho? ¿Cómo?

2. Escribe una expresión analítica para calcular el alto y la resistencia de la viga en dependencia de x. Podemos llamarle *"y"* al alto de la viga y $R(x)$ a la resistencia.

3. ¿Cuál es el valor más pequeño y el valor más grande que puede tomar x en el problema?

4. Calcula la resistencia de la viga cuando su ancho x es igual a 0, 10, 20, 30, 40, 50 y 60 usando la expresión analítica. Puedes usar la tabla y la cuadrícula siguientes para colocar tus resultados.

x=ancho	y^2=(alto)^2	Resistencia $R(x)$ de la viga
0		
10		
20		



5. ¿Para qué valor de x de la tabla (que llenaste en la pregunta 4) se obtuvo la mayor resistencia? ¿Será tal valor de x el que nos de la mayor resistencia posible o habrá otro? Explica tu respuesta.

Nota: Puedes comprobar los resultados presionando, en el archivo “Viga.ggb”, la pestaña *vista* y seleccionando la opción *vista de hoja de cálculo* (observa las columnas B y C). Presiona también la casilla “Tabla” y la casilla “Mostrar gráfica”.

6. ¿Entre qué números estará el valor del ancho que nos daría la viga de máxima resistencia? ¿Cómo le harías para encontrarlo? Aproxima su valor con 4 cifras. Sugerencia: en la hoja de Cálculo puedes colocar nuevos intervalos de valores para el ancho y elegir incrementos más pequeños para x. Por ejemplo, si quieres obtener valores de x y de la resistencia correspondiente, para valores de x entre 0 y 60, y quieres que el valor de x vaya aumentando 5 cada vez, coloca el 0 en la celda A2, el 60 en la celda A4, y 5 en la celda A6. Puedes usar la tabla siguiente:

x desde	*x* hasta	Incremento de x	Valor de *x* que da la mayor resistencia	Resistencia *R(x)*

7. ¿Qué características tiene en la gráfica el punto correspondiente al valor de *x* que da la mayor resistencia, que lo distingue de los otros? Sugerencia: desactiva la casilla "Imagen", luego mueve el punto "M", que se encuentra sobre la gráfica, con el cursor para que sus coordenadas coincidan con el valor de *x* que encontraste, para esto puedes hacer *zoom* (presionando la tecla SHIFT y girando hacia atrás el *scroll* del ratón simultáneamente) varias veces sobre el punto para aproximar mejor sus coordenadas.

8. ¿Qué pasó con la gráfica cuando hiciste *zoom* para hacer coincidir las coordenadas del punto "M" con los valores que encontraste en la tabla? Presiona la casilla "Tangente" y observa qué sucede, luego quita el aumento poco a poco girando hacia delante el *scroll* de ratón y presionando la tecla SHIFT al mismo tiempo. Menciona lo que observas.

9. En la tabla de tu hoja de trabajo, cuando *x* aumenta de valor (antes de llegar al valor que da la mayor resistencia) ¿Qué pasa con la resistencia de la viga? ¿Cómo es la gráfica para estos valores? Dibújala.

10. Y cuando x aumenta su valor (después del valor que da la mayor resistencia) ¿Qué pasa con la resistencia de la viga? ¿Cómo es la gráfica para estos valores? Dibújala.

11. Mueve el punto “M” y observa cómo la recta tangente recorre la gráfica. ¿Qué diferencia encuentras en la recta tangente antes del punto más alto y después de éste?

12. ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en los puntos donde la resistencia crece? ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en el punto más alto de la gráfica? ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en los puntos donde la resistencia decrece?

13. ¿Cómo solucionarías gráficamente el problema de encontrar el valor de x que hace máxima la resistencia de la viga?

ACTIVIDAD 6

LA LATA DE ACEITE: Se va a diseñar una lata de aceite con forma de cilindro circular recto, de modo que ésta contenga 60 cm^3 de aceite. Determine las dimensiones de la lata que requiera la mínima cantidad de material para su manufactura.

1. ¿Cómo se calcula el volumen de un cilindro circular recto? Escribe su expresión algebraica.

2. En nuestro problema el valor del volumen de la lata de aceite debe ser 60 cm3. Sustituyendo este valor en la expresión algebraica del volumen V. ¿Cuál es la nueva expresión?

3. Si despejas la altura h de la expresión anterior ¿de quién depende ahora el valor de h?

4. Abre el archivo "Lata.ggb". Puedes cambiar el radio de la lata moviendo el punto "P" ¿Cómo habrá de cortarse la lámina para construir la lata? Sugerencia: puedes activar la casilla "Mostrar lámina" en el archivo "Lata.ggb".

5. ¿Cómo calcularías la cantidad de material empleado para construir la lata?

6. Escribe una expresión algebraica (en dependencia solamente del radio r) para: la base, la altura y el área del rectángulo que sirve de cara lateral del cilindro.

7. Escribe también una expresión algebraica para el área de la tapa y del fondo de la lata en dependencia del radio *r*.

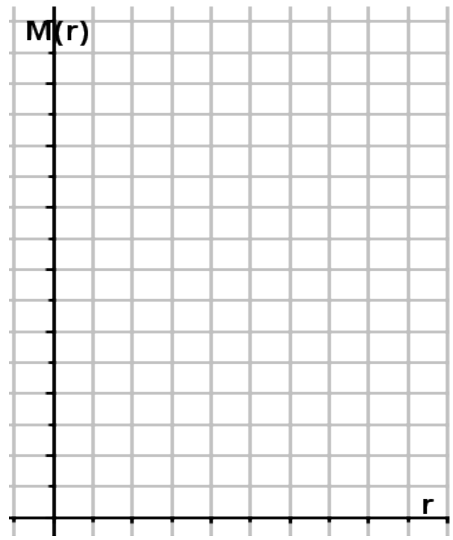
8. Con base en los resultados de los incisos 5, 6 y 7, escribe una expresión algebraica para calcular el área de la superficie del cilindro en dependencia solamente de *r*. Le llamaremos *M(r)*.

9. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar el radio *r* en nuestro problema? ¿Y el mayor?

10. Si mueves el punto "P" para modificar el radio de la lata ¿qué pasa con la altura de la lata a medida que tomamos un radio cada vez más pequeño? ¿y qué pasa con la altura a medida que el radio es cada vez más grande?

11. Para que observes qué pasa con la cantidad de material, calcúlalo cuando r=1, 2, 3, 4 y 5. Construye también una gráfica en los ejes coordenados.

r	M(r)
1	
2	
3	
4	
5	



12. Puedes comprobar tus resultados presionando las casillas “Puntos de la tabla” y “Gráfica”. Utilizando la hoja de cálculo, aproxima con varias cifras decimales el valor de *r* que minimiza el material.

13. ¿Qué características tiene en la gráfica el punto correspondiente a la cantidad mínima de material? Sugerencia: Puedes colocar el punto “M” obre la gráfica, de modo que sus coordenadas coincidan con los valores encontrados en la hoja de cálculo, haciendo *zoom* varias veces sobre el punto.

14. Activar la casilla “Tangente” ¿Qué observas?

15. En la tabla de la pregunta 11, cuando *r* aumenta de valor (antes de llegar al valor que da la menor cantidad de material) ¿Qué pasa con el material? ¿Cómo es la gráfica para estos valores? Dibújala.

16. Y cuando *x* aumenta su valor (después del valor que da la mayor cantidad de material) ¿Qué pasa con el material? ¿Cómo es la gráfica para estos valores? Dibújala.

17. Mueve el punto "M" y observa cómo la recta tangente recorre la gráfica ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en los puntos donde la cantidad de material disminuye? ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en el punto más alto de la gráfica? ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en los puntos donde la cantidad de material aumenta?

18. ¿Cómo solucionarías gráficamente el problema de encontrar el valor de *r* que hace mínima la cantidad de material?

ACTIVIDAD 7

LOS AUTOS: Un automóvil viaja a una velocidad de 60 km/hr, y se aproxima a un crucero. Cuando el automóvil está a 10 km del crucero, otro automóvil que viaja a una velocidad de 90 km/hr en una carretera perpendicular a la otra, pasa por el crucero. Determine en qué tiempo, después de que el segundo auto pasa el crucero, los dos autos están más cercanos.

1. ¿Cuántos km recorre el auto #1 (al que llamaremos A1) por **minuto**? ¿Y el auto #2 (al que llamaremos A2)?

2. Abre el archivo "Autos.ggb" Mueve el punto "P" ubicado en el carro deportivo y observa lo que sucede. ¿A qué distancia se encuentra A1 del crucero un minuto después (*t=1)* de que el A2 pasó el crucero? ¿Y a qué distancia está A2 del crucero en ese momento? ¿Cuál es la distancia entre los autos en ese momento?

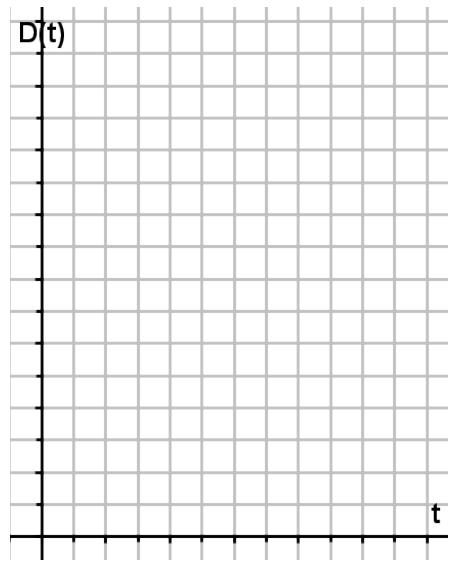
3. ¿A qué distancia se encuentra A1 del crucero dos minutos después (*t=2)* de que el A2 pasó el crucero? ¿Y a qué distancia está A2 del crucero en ese momento? ¿Cuál es la distancia entre los autos en ese momento?

4. Escribe una expresión algebraica, en dependencia del tiempo (medido en minutos), para calcular la distancia a la que se encuentra A1 del crucero (puedes llamarle $d_1(t)$), otra expresión algebraica para la distancia recorrida por A2 desde el crucero (puedes llamarle $d_2(t)$), y otra para la distancia entre los dos autos (puedes llamarle $D(t)$).

5. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tomar *t*? ¿y el más grande? Explica tu respuesta.

6. Usando la expresión que construiste en la pregunta 4, calcula a qué distancia se encuentran los autos cuando *t*=4, 6 y 8 segundos. Coloca tus resultados en la tabla siguiente y construye una gráfica.

t minutos	*D(t)* Distancia entre *A1* y *A2*
1	
2	
4	
6	
8	



Nota: Puedes activar las casillas "Mostrar tabla" y "Mostrar gráfica" para comprobar tus resultados.

7. ¿Encontraste un momento en que los carros estuvieran más cerca? ¿Crees que haya otro valor de *t* en que puedan estar todavía más cerca? Usando la hoja de cálculo aproxima con al menos 4 decimales el valor de *t* que hace mínima la distancia entre los carros.

En la tabla siguiente registra tus resultados.

t desde	*t* hasta	Incremento de *t*	Valor de *t* que da la menor distancia	Distancia *D(t)* encontrada

8. ¿Qué características tiene en la gráfica el punto correspondiente al valor de *t* que da la menor distancia? Sugerencia: Desactiva la casilla "Imagen" para que puedas mover el punto "M" en la gráfica y hacer que coincidan sus coordenadas con los valores que aproximaste en la tabla anterior, para esto puedes hacer *zoom* varias veces sobre el punto para aproximarte mejor a sus coordenadas.

9. ¿Qué pasó con la gráfica cuando hiciste *zoom* para acomodar el punto "M" en la parte más baja? Presiona la casilla "Tangente" y ahora quita poco a poco el aumento con la herramienta de alejamiento. Menciona lo que observas.

10. En la tabla, cuando *t* aumenta de valor (antes de llegar al valor que da la menor distancia entre los autos) ¿Qué pasa con distancia *D(t)*? ¿Cómo es la gráfica para estos valores?

11. Y cuando t aumenta su valor (después del valor en la tabla de GeoGebra que da la menor distancia entre los autos) ¿Qué pasa con la distancia *D(t)*? ¿Cómo es la gráfica para estos valores?

12. Mueve el punto "M" sobre la gráfica y observa cómo la recta tangente la recorre. ¿Qué diferencia encuentras en la recta tangente antes del punto más bajo y después de éste?

13. ¿Cómo son las pendientes de las rectas tangentes en los puntos donde la distancia disminuye? ¿Cómo es la recta tangente en el punto más bajo de la gráfica? ¿Cómo son las pendientes de las rectas tangentes en los puntos donde la distancia aumenta?

14. ¿Cómo solucionarías gráficamente el problema de encontrar el momento t en el que la distancia entre los autos sea mínima?

ACTIVIDAD 8

EL CANAL: Se va a construir un canal para agua mediante una banda larga de metal de 45 cm de ancho, doblando con un ángulo α una tira de 15 cm a cada lado. ¿Cuál ángulo maximiza la capacidad del canal?

En el archivo "Canal.ggb" puedes mover el punto "P" para hacer más abierto o más cerrado el canal.

1. ¿De qué dimensiones depende el área de la sección transversal del canal? Escribe una expresión algebraica para su área.

2. Escribe una expresión algebraica, en dependencia del ángulo α, para la **altura** del trapecio. Sugerencia: la altura coincide con el cateto opuesto al ángulo α.

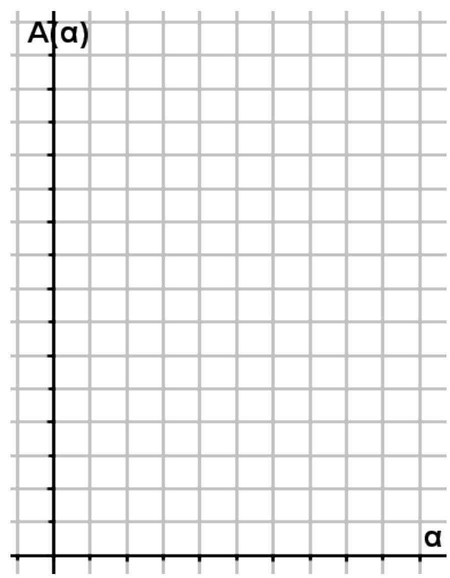
3. Escribe una expresión algebraica, en dependencia del ángulo α, para el **cateto adyacente** a tal ángulo.

4. Escribe una expresión algebraica para el **área** del trapecio, en dependencia solamente del ángulo α.

5. ¿Cuál es el valor más pequeño, y cuál el más grande, que puede tomar α?

6. ¿Cuál es el área de la sección transversal del canal cuando α tiene los valores de la tabla siguiente? Construye una gráfica en los ejes coordenados, tomando a α en radianes.

α	A(*α)*
0.27 radianes (30°)	
1.04 radianes (60°)	
1.57 radianes (90°)	
2.09 radianes (120°)	



Activa las casillas "Puntos de la tabla" y "Gráfica" y la *hoja de cálculo* para comprobar tus respuestas.

7. Usando la hoja de cálculo aproxima con 3 decimales el valor de α que hace mínima la distancia entre los carros. En la tabla siguiente registra tus resultados.

α desde	α hasta	Incremento de α	Valor de α que da el área mayor	Área A(α) encontrada

8. ¿Qué características tiene en la gráfica el punto correspondiente al valor de α que da la mayor área? Sugerencia: Desactiva la casilla "Diagrama" para que puedas mover el punto "M" en la gráfica y hacer que coincidan sus coordenadas con los valores que aproximaste en la tabla anterior, para esto puedes hacer *zoom* varias veces sobre el punto para aproximarte mejor a sus coordenadas.

9. ¿Qué pasó con la gráfica cuando hiciste zoom para acomodar el punto "M" en la parte más baja? Presiona la casilla "Tangente" y ahora quita poco a poco el aumento con la herramienta de alejamiento. Menciona lo que observas.

10. En la tabla, cuando α aumenta de valor (antes de llegar al valor que da el área mayor) ¿Qué pasa con el área A(α)? ¿Cómo es la gráfica para estos valores?

11. Y cuando α aumenta su valor (después del valor que da el área mayor) ¿Qué pasa con los valores del área A(α)? ¿Cómo es la gráfica para estos valores?

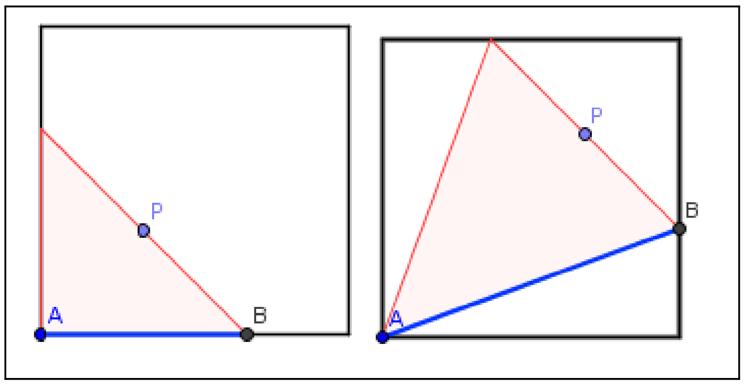
12. Mueve el punto "M" sobre la gráfica y observa cómo la recta tangente la recorre ¿Qué diferencia encuentras en la recta tangente antes del punto más bajo y después de éste?

13. ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en los puntos donde el área aumenta? ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en el punto más bajo de la gráfica? ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en los puntos donde el área disminuye?

14. ¿Cómo solucionarías gráficamente el problema de encontrar el valor del ángulo α en el que la capacidad del canal sea máxima?

ACTIVIDAD 9

EL TRIANGULO ISÓSCELES: Los vértices de un triángulo isósceles se colocan sobre lados adyacentes de un cuadrado de lado 4 cm como se muestra en las figuras siguientes. Realiza lo que se te solicita a continuación.



9. Abre el archivo "Triángulo.ggb". Mueve el punto "P" y observa lo que sucede. Si x representa la longitud del lado AB del triángulo, determina la expresión analítica, en dependencia de x, para:

c) El área del triángulo, cuando B se encuentra sobre la base del cuadrado.

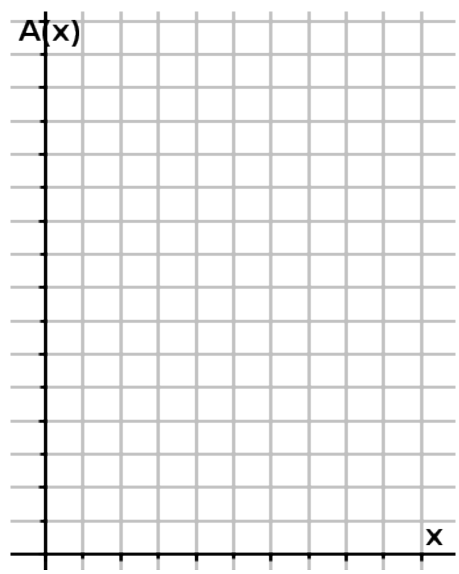
d) El área del triángulo, cuando B se encuentra sobre el lado perpendicular a la base.

10. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar *x* en la **primera** expresión? ¿y el mayor?

11. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar *x* en la **segunda** expresión? ¿y el mayor?

12. Usando la expresión analítica para el área del triángulo, a la que llamaremos *A(x)*, completa la tabla siguiente y luego construye la gráfica correspondiente.

x	A(x)
1	
2	
3	
4	
4.5	
5	



13. Activa la casilla "Gráfica" ¿Observas algo diferente en la gráfica, con respecto a las gráficas de los problemas anteriores?

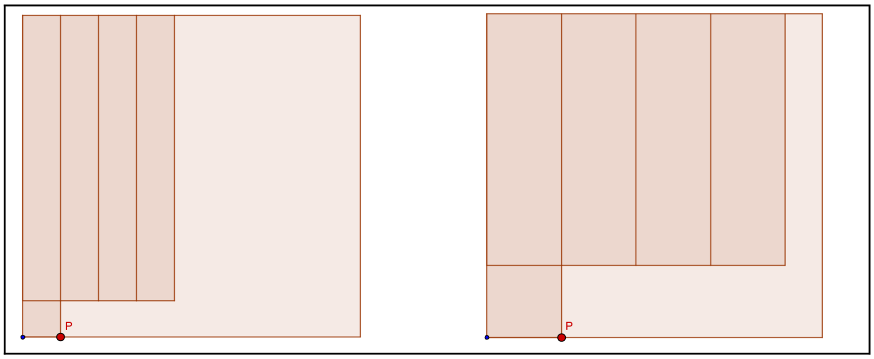
14. ¿Cómo identificas en la gráfica al punto correspondiente al área máxima del triángulo?

15. Desactiva la casilla "Cuadrado", coloca el punto "M" en la cima de la gráfica y haz *zoom* varias veces ¿pasa algo diferente a lo que sucedía en los problemas anteriores?

16. Activa la casilla "Tangente" ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente antes del punto más ato? ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente en el punto más alto? ¿Cómo es la pendiente de la recta tangente después del punto más alto?

ACTIVIDAD 10

LA CAJA DE BASE CUADRADA: Con una lámina cuadrada de 13 cm de lado se quiere construir una caja de base cuadrada sin tapa, donde la base esté formada por una esquina de la lámina, como se muestra en las figuras siguientes. Contesta lo siguiente:



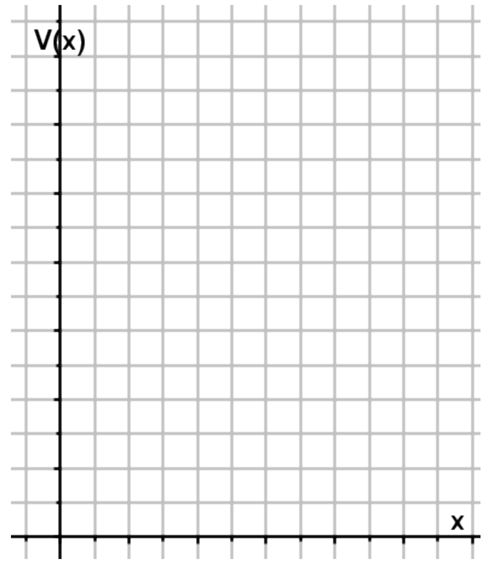
8. Abre el archivo "Caja de base cuadrada.ggb" y mueve el punto "P". Si la longitud del lado de la base de la caja fuera 2 cm ¿Cuál sería su volumen?

9. Si x representa la longitud del lado de la base ¿cómo expresarías la altura de la caja en dependencia de x? Y ¿cómo expresarías su volumen (al que llamaremos $V(x)$)?

10. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tomar x? ¿cuál es el más grande?

11. Usando la expresión algebraica para *V(x)* completa la tabla siguiente y dibuja una gráfica en los ejes que se te proporcionan.

x	V(x)



12. ¿Observas algo diferente en la gráfica y la tabla, con respecto a las gráficas de los problemas anteriores? Desactiva las casillas "Hoja" y "Caja" y activa la casilla "Gráfica".

13. ¿Cómo identificas gráficamente al punto correspondiente al valor máximo del volumen?

14. Activa la casilla "Tangente" ¿La recta tangente tiene pendiente igual a cero en el punto más alto?

CAPÍTULO CINCO

PUESTA EN ESCENA DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

5.1 DESCRIPCIÓN GENERAL

En este capítulo hablaremos sobre los aspectos principales de la puesta en escena de tres actividades didácticas de nuestra propuesta, la cual se llevó a cabo con dos grupos de estudiantes de Ingeniería Civil, durante la primera semana del curso de Cálculo Diferencial e Integral II. Tales actividades fueron las correspondientes al problema "la caja sin tapa", que fue elegida por ser de un contexto familiar para los estudiantes e implicar un modelo matemático relativamente sencillo; al problema "la viga más resistente" y al problema "la estación de bombeo", ambas elegidas por tener un contexto muy relacionado con la carrera de los estudiantes. Las hojas de trabajo de las actividades puestas en escena, se encuentran en los anexos de esta tesis.

Consideramos a priori que al poner en escena las actividades didácticas de nuestra propuesta podríamos obtener información sobre los siguientes aspectos:

- En qué medida se logró la emergencia de los objetos matemáticos pretendidos y el grado en que se alcanzaron los objetivos de las actividades, referentes a que los estudiantes:

    a) Modelaran las situaciones presentadas, identificando las magnitudes involucradas y estableciendo relaciones entre éstas; y determinaran los valores de dichas magnitudes que resuelven los problemas.

    b) Emplearan diversos formas de lenguaje para analizar y resolver las situaciones, con apoyo en las características que proporciona el ambiente dinámico virtual.

c) Desarrollaran sistemas de prácticas que promuevan la emergencia de objetos del cálculo diferencial.

- Qué tan apropiados fueron los diseños de las hojas de trabajo correspondientes a las actividades didácticas, en lo que respecta a su estructura, a la redacción de las preguntas e instrucciones y a su interacción con el archivo de GeoGebra.

- Qué tan adecuados fueron los ambientes dinámicos creados con GeoGebra para favorecer la construcción de los significados pretendidos y qué cambios requerían.

Sin embargo, dado que los estudiantes con los cuales probamos las actividades didácticas, ya habían cursado la materia "Cálculo Diferencial e Integral I", esta puesta en escena no fue apropiada para evaluar lo correspondiente a la emergencia de los objetos matemáticos pretendidos, pues eran objetos a los cuales los estudiantes probablemente ya habían asignado un significado. Por otro lado, obtuvimos información interesante que nos sugirió realizar cambios en el diseño de las actividades y en los ambientes dinámicos de GeoGebra, y nos señaló algunas partes de las actividades en las que los estudiantes presentan dificultades considerables.

La puesta en escena de las actividades tuvo lugar en el aula correspondiente a cada grupo, bajo las siguientes condiciones:

- El primero estuvo conformado por 40 estudiantes. Se abordaron dos problemas de máximos: "la caja sin tapa" y "la viga más resistente". El segundo grupo estuvo integrado por 24 estudiantes. Se abordó un problema de mínimos y uno de máximos: "la estación de bombeo" y "la viga más resistente".

- En ambos grupos se contó con una computadora y un proyector. La diseñadora de las actividades y conductora del proceso de estudio manipuló la computadora siguiendo las sugerencias que hacían los estudiantes en cada parte de la actividad. El contar sólo con una computadora dificultó evaluar qué tan adecuadas eran las instrucciones sobre la manipulación del ambiente dinámico creado con GeoGebra, para los estudiantes.

- La puesta en escena estuvo conducida en ambos grupos por la diseñadora de las actividades, pero estuvieron presentes, en el primer grupo, el profesor titular y un profesor invitado, quienes tuvieron la facultad de realizar intervenciones cuando lo consideraran necesario. En el segundo grupo, asistió solamente el profesor titular, quien también tuvo la libertad de intervenir durante el proceso de estudio.

- Cada estudiante contó con las hojas de trabajo correspondientes a las actividades, las cuales contenían el enunciado del problema y varios puntos con preguntas e instrucciones.

- Aunque se organizó a los estudiantes en equipos de cuatro personas, el proceso de estudio fue en su mayoría de trabajo grupal: la diseñadora/conductora formulaba preguntas relacionadas con el contexto del problema o con los puntos de las hojas de trabajo, y los estudiantes opinaban, argumentaban a favor o en contra de las respuestas dadas y pasaban al pizarrón.

- Después de cada discusión grupal, se destinaban algunos minutos de la clase para que los estudiantes, con apoyo de su equipo, plasmaran en las hojas de trabajo sus conclusiones individuales al respecto de los puntos que la diseñadora/conductora indicaba que se contestaran. Cuando el tiempo de clase no fue suficiente para que los estudiantes entregaran por escrito sus conclusiones, éstas se les dejaron como tarea.

El proceso de estudio llevado a cabo con cada uno de los grupos de estudiantes, contó con los siguientes momentos en el orden que se muestra a continuación:

- Diálogo grupal con el propósito de familiarizar a los estudiantes con el contexto del problema, promoviendo que éstos determinaran condiciones y datos necesarios para comprender el fenómeno implicado; y guiarlos hacia el planteamiento del problema de optimización.

- Manipulación de la construcción dinámica que simulaba el fenómeno, haciendo énfasis en la dependencia existente entre las magnitudes involucradas, observando que al modificar el valor de una (a la que se le llamó x en todas las actividades) se modificaba la otra; y discusión para determinar el intervalo de valores posibles para x.

- Trabajo en equipos para construir, en las hojas de trabajo, una tabla de valores para x y la magnitud a optimizar, una gráfica de los puntos correspondientes a los valores de la tabla y una expresión analítica que relacionaran las magnitudes intervinientes en el problema.

- Puesta en común de los resultados obtenidos, y contrastación de éstos con las representaciones tabular, gráfica y analítica de la función que modela al fenómeno, en el ambiente dinámico virtual.

- Análisis grupal de los datos de la hoja de cálculo para determinar intervalos cada vez más finos en los cuales buscar el valor de x que resuelve el problema, y aproximar con varios decimales las coordenadas del punto correspondiente al valor óptimo buscado.

- Identificación gráfica del punto correspondiente al valor óptimo, como el punto más alto (si se busca maximizar) o más bajo de la curva (si se quiere minimizar) y en el cual la pendiente de la recta tangente es cero.

- Visualización numérica y gráfica del aumento o disminución de los valores de la magnitud a optimizar, cuando el valor de x aumenta, antes y después del valor correspondiente al valor óptimo.

- Visualización de la recta tangente recorriendo la gráfica y análisis del signo de su pendiente, antes y después del punto correspondiente al valor óptimo y en el punto mismo.

- En el caso del segundo grupo, se discutieron las similitudes y diferencias entre las situaciones propuestas, pues una era de minimización y la otra de maximización.

5.2 ASPECTOS DESTACADOS

A partir de la puesta en escena de las tres actividades didácticas con los dos grupos de estudiantes, pudimos percibir que las situaciones de optimización que elegimos efectivamente fueron de interés para éstos, pues se logró que participaran haciendo propuestas, argumentando a favor o en contra de las mismas, pasando al pizarrón a explicar sus ideas, delimitando condiciones e información para comprender los fenómenos implicados, etc.

Consideramos que los ambientes dinámicos virtuales fueron del agrado de los estudiantes, pues éstos se asombraron al ver modelados los fenómenos dinámicamente y se interesaron en la búsqueda numérica del valor óptimo (en uno de los grupos no tanto) y en el análisis del signo de las pendientes de las rectas tangentes. Otro punto favorable de los ambientes dinámicos, fue que ayudaron a comprobar algunas de las conjeturas de los estudiantes y sirvieron como apoyo en los argumentos dados en las discusiones.

Durante la puesta en escena de las actividades, pudimos observar dificultades en los estudiantes para construir la expresión analítica de la función que modela al problema (en el caso de los problemas "la viga más resistente" y "la estación de bombeo"), para determinar el signo de la pendiente de la recta tangente representada gráficamente; además de significados personales deficientes sobre la proporcionalidad entre dos magnitudes.

5.3 MODIFICACIONES REALIZADAS AL DISEÑO DE LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS COMO CONSECUENCIA DE LA PUESTA EN ESCENA

Como resultado de lo observado durante la puesta en escena, consideramos prudente realizar los siguientes cambios a las actividades didácticas, tanto en las hojas de trabajo como en los ambientes dinámicos:

1. Momento en que se pide la construcción de la expresión analítica de la función implicada.

Originalmente se pedía la construcción de la expresión analítica después de haberse llenado una tabla con los valores de la magnitud a optimizar correspondientes a diferentes valores particulares de x. Pero tras la puesta en escena, consideramos que usar la expresión analítica para calcular los valores de la tabla, le daría más sentido a la construcción de dicha expresión.

2. Introducción de la recta tangente horizontal.

Incorporamos a las actividades una parte cuyo objetivo es que sea el estudiante quien intuya que la recta tangente tiene algo qué ver en la resolución de problemas de optimización. En las hojas de trabajo, se sugiere al estudiante que realice acercamientos sucesivos en torno al punto más alto (o más bajo) de la curva para que observe cómo ésta se convierte en una recta horizontal, y que al sobreponer una recta horizontal a la curva y alejarse sucesivamente, observe que tal recta es la recta tangente.

3. Contribuir a la construcción de un significado local de tangencia.

En la actividad “La caja sin tapa” después de que se introduce la recta tangente en el punto correspondiente al valor óptimo y se observa lo que pasa con el signo de su pendiente antes y después de tal punto, incorporamos algunas preguntas y/o indicaciones que buscan que el estudiante observe que la recta que creía tangente corta a la curva en un punto distinto al de tangencia. Luego sugieren hacer acercamientos sucesivos en torno al punto de tangencia para que se observe que localmente la recta y la curva se superponen a pesar de que haya otro punto de contacto. Después se hacen acercamientos sucesivos en torno a un punto, en el cual la recta tangente no toque a otros, para favorecer que se observe la misma propiedad local. Finalmente se pide al estudiante construir una nueva definición de recta tangente de tal manera que la recta que creía tangente, pero que toca en más de un punto, se pueda considerar recta tangente.

4. Omitir el valor numérico de la pendiente de la recta tangente.

En los ambientes dinámicos, se decidió no mostrar el valor numérico de la pendiente de la recta tangente por dos razones: la primera es que dificultaba a los estudiantes observar qué pasaba globalmente con el signo de la pendiente, es decir, sólo observaban su valor pero no reflexionaban en que cambiaba de signo en el punto crítico; la segunda es que consideramos que mostrar tal valor podría quitarle sentido, posteriormente, a la búsqueda de un método para determinar la pendiente de la recta tangente, lo cual es una de las situaciones cuya emergencia buscamos promover con nuestra propuesta didáctica.

5. Modificación de los datos de una de las situaciones.

En la actividad “La estación de bombeo” la solución del problema con los datos que se escogieron, resultó ser un número entero. Esto le quitó sentido rápidamente a la búsqueda numérica de la solución, así que se decidió cambiar los datos de la situación, para que la solución no fuera un número entero.

6. Redacción de la última pregunta de las hojas de trabajo.

Debido a que varios de los estudiantes expresaron no comprender a qué se refería la pregunta, la redactamos de manera diferente.

5.4 ANÁLISIS A POSTERIORI DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LA PROPUESTA

A continuación, con base en la puesta en escena cuyas características generales se describieron en las páginas anteriores, realizaremos una valoración a posteriori de la idoneidad didáctica de nuestra propuesta, evaluando cada una de las idoneidades parciales. Para contrastar la idoneidad didáctica de nuestra propuesta, a priori y a posteriori, retomaremos del capítulo cuatro las principales consideraciones hechas en la valoración a priori de la misma.

Para calificar, tanto a priori como a posteriori, cada una de las idoneidades parciales, consideramos los valores bajo, medio y alto.

- En lo referente a la *idoneidad epistémica* de nuestra propuesta:

A *priori* la valoramos alta, tomando en cuenta que:

1. Los objetos primarios pretendidos (derivada, problemas de optimización, valores extremos, criterios de la primera derivada, la modelación, etc.) forman parte del significado institucional de referencia.

2. Consideramos que con las actividades didácticas se favorece la emergencia de los objetos matemáticos en contextos extramatemáticos, y en consecuencia su aplicación a este tipo de situaciones.

3. Los contextos de los problemas son familiares para los estudiantes y/o cercanos a la ingeniería, lo cual facilita que éstos puedan participar en su planteamiento y se problematicen.

4. Se promueve el uso de representaciones en diferentes formas de lenguaje.

A *posteriori* continuó alta pues:

Consideramos que los estudiantes expresaron sus ideas, tuvieron la oportunidad de participar en el planteamiento de los problemas y se problematizaron con las situaciones que les presentamos; pues tanto durante el diálogo sobre el contexto, como en el desarrollo de los puntos de las hojas de trabajo, delimitaron condiciones e información para comprender los fenómenos implicados y plantear el problema, propusieron procedimientos, argumentaron a favor o en contra de los mismos, establecieron conjeturas, validaron sus argumentos, pasaron al pizarrón a explicar sus ideas y emplearon diferentes formas de lenguaje durante el desarrollo de las actividades.

- Sobre la *idoneidad cognitiva*, podemos decir que:

A *priori* la calificamos como alta, teniendo en cuenta que los objetos matemáticos previos, necesarios para abordar las actividades didácticas, son objetos matemáticos “básicos” que se estudian en la escuela secundaria y preparatoria, además que los significados pretendidos son alcanzables.

A *posteriori* la valoramos como media:

1. Se consideró a priori que en la construcción de la expresión analítica de la función implicada en el problema no se presentarían serias dificultades; sin embargo algunos estudiantes sí tuvieron dificultades considerables en este aspecto, a pesar haber podido determinar varios valores particulares de las magnitudes involucradas.

2. Por otro lado, aunque algunos estudiantes no tenían conocimientos previos necesarios sobre la proporcionalidad directa entre dos magnitudes y para determinar el signo de la pendiente de una recta en el lenguaje gráfico; esto se detectó oportunamente durante el desarrollo de las actividades y se hizo un repaso al respecto para que los estudiantes pudieran continuar con éstas. Esto resalta la importancia de verificar que los estudiantes cuenten con los conocimientos necesarios para abordar las actividades.

- Con respecto a la *idoneidad mediacional*:

A *priori* la valoramos como alta, pues:

1. Las actividades se apoyan en ambientes dinámicos virtuales y situaciones de optimización, que motivan y favorecen la construcción y visualización de los objetos pretendidos.

2. Consideramos que el tiempo invertido se destina a construir el significado de la derivada, objeto fundamental del curso, y a promover prácticas de modelización matemática.

A *posteriori* nos pareció media, pues:

1. La solución de uno de los problemas era un número entero, lo que le quitó sentido al proceso de examinar en la hoja de cálculo, intervalos cada vez más pequeños.

2. Se detectó un elemento distractor en los ambientes dinámicos: el valor numérico de la pendiente de la recta tangente, que ocasionó que los estudiantes se interesaran más en el valor de la pendiente que en lo que pasaba con el signo de ésta antes y después del punto correspondiente al valor extremo. Consideramos además, que el hecho de que se muestre el valor de la pendiente de la recta, podría restarle importancia, posteriormente, a la búsqueda de un método para determinar tal valor. Estas consideraciones implicaron omitir tal valor numérico en los ambientes dinámicos.

3. Por otro lado, los ambientes dinámicos facilitaron la visualización de los objetos matemáticos, y las situaciones propuestas efectivamente motivaron la realización las prácticas pretendidas y el uso de los objetos matemáticos esperados.

4. Aunque en las cinco sesiones se implementaron dos actividades didácticas con cada grupo, consideramos que el tiempo consumido en las actividades posteriores será menor, debido a la similitud en la estructura de las actividades.

- Podemos decir, sobre la *idoneidad emocional* que:

A *priori* la calificamos como alta, pues consideramos que las situaciones elegidas son de interés para los estudiantes y permiten ver la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y en lo profesional.

A *posteriori* la valoramos como media porque:

1. En el problema "la estación de bombeo" la solución era un número entero y los estudiantes la determinaron rápidamente con la hoja de cálculo, lo cual propició que se perdiera un poco el interés en el resto de la actividad. Cabe mencionar que esto

no afectó significativamente el interés de los estudiantes en el desarrollo de la actividad didáctica que se abordó después.

2. Por otro lado, las situaciones propuestas efectivamente fueron de interés para los estudiantes, los cuales participaron ampliamente, en especial durante las discusiones relativas al contexto de las situaciones.

3. Además, los estudiantes mostraron una actitud positiva hacia los ambientes dinámicos, les entusiasmó ver simulados los fenómenos dinámicamente, poder realizar la búsqueda numérica del valor óptimo con la hoja de cálculo, visualizar la recta tangente en el punto variable, etc.

- En el caso de la *idoneidad ecológica* :

A *priori*, la consideramos alta, teniendo en cuenta que:

1. En el currículo de la asignatura se menciona la expectativa de promover prácticas de modelación y resolución de problemas no matemáticos, lo cual se considera esencial promover con nuestro trabajo.

2. Nuestra propuesta didáctica está apoyada en un marco teórico de la matemática educativa y toma en cuenta resultados de investigaciones en esta ciencia.

3. Las actividades didácticas incluyen el uso de tecnología computacional.

4. Los significados pretendidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.

A *posteriori,* la calificamos alta, pues los estudiantes modelaron fenómenos externos a la matemática, resolvieron los problemas con ayuda de los ambientes dinámicos y participaron en el planteamiento de las situaciones haciendo uso de conocimientos relacionados con su carrera y su experiencia.

- Finalmente, en lo que respecta a la *idoneidad interaccional*:

A *priori* se valoró alta, porque al planear el proceso de estudio usando las actividades didácticas, se hicieron los supuestos siguientes:

1. Son necesarios momentos de trabajo individual, en equipo y grupal.

2. Las discusiones grupales favorecen que el profesor detecte conflictos entre los significados personales de los estudiantes.

3. Es importante que los estudiantes argumenten para convencer a sus compañeros de que sus respuestas o ideas son válidas y llegar a consensos sobre los objetos matemáticos puestos en juego.

4. Se requieren momentos de institucionalización.

A *posteriori* se valoró media, puesto que:

1. Al revisar las hojas de trabajo nos percatamos de que no hubo un consenso sobre el dominio de las funciones implicadas en las actividades, a pesar de que grupalmente se propuso un intervalo de valores posibles para x y se dieron argumentos válidos que justificaban su elección.

2. Por otro lado, hubo momentos de trabajo individual, en equipo y grupal. También momentos de exploración, formulación de hipótesis, y validación que se dieron mayormente de forma grupal.

3. Durante el proceso de estudio se detectaron dificultades (las mencionadas en la valoración de la idoneidad cognitiva) pero se actuó a tiempo al respecto de éstas para favorecer que los estudiantes pudieran seguir realizando las actividades didácticas.

4. Además hubo diálogo entre los estudiantes, especialmente para validar las respuestas dadas por éstos.

A continuación representamos, en el sentido de Robles (2010), la idoneidad didáctica de nuestra propuesta (Figura 27).

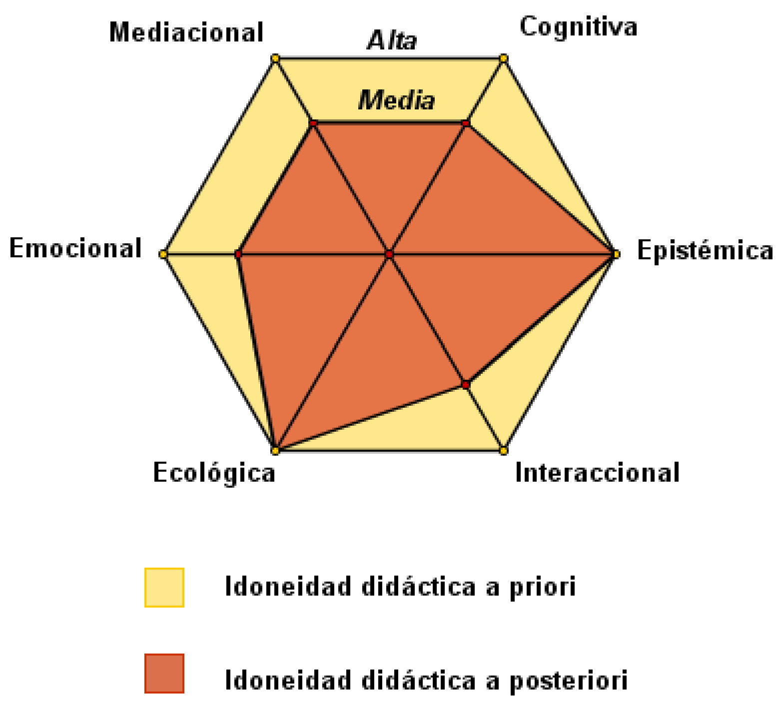


Figura 27. Idoneidad didáctica de la propuesta.

A continuación describiremos con más detalle lo sucedido en la puesta en escena de las actividades didácticas, comenzando con el primer grupo de estudiantes.

5.5 NARRACIÓN DE LO SUCEDIDO DURANTE LA PUESTA EN ESCENA, CON EL PRIMER GRUPO DE ESTUDIANTES

Con el primer grupo, se llevó a cabo la puesta en escena de dos actividades didácticas, la primera correspondiente al problema “la caja sin tapa”, que requirió de dos sesiones de una hora respectivamente, y la segunda al problema “la viga más resistente”, realizada en tres sesiones de una hora cada una.

5.5.1 PRIMER GRUPO. ACTIVIDAD “LA CAJA SIN TAPA”

En la primera sesión se dividió al grupo en equipos de 4 o 5 personas, sin embargo, como solamente había una computadora, el trabajo fue en su mayoría grupal, con excepción de momentos de trabajo en equipo para contestar las preguntas de las hojas de trabajo. Cabe mencionar que en la primera sesión no fue posible utilizar la única computadora que había.

Antes de proporcionarle a los estudiantes las hojas de trabajo de la actividad didáctica, la diseñadora/implementadora promovió la participación grupal para hacer el planteamiento de la situación correspondiente, cuestionando a los estudiantes sobre cómo construirían una caja a partir de una hoja de cartón rectangular (sin mencionar las medidas de los lados), buscando de esta manera la construcción del modelo geométrico.

Uno de los estudiantes pasó al pizarrón a explicar al grupo cómo haría la caja, representando el cartón rectangular y los cortes que haría con un dibujo. La forma en que propuso construir la caja coincidió con la propuesta en el problema. Enseguida la diseñadora/instructora preguntó al grupo sobre el comportamiento del volumen de la caja cuando el lado de los cuadrados que se recortan cambiaba de longitud; algunos de los estudiantes contestaron que éste cambiaría y que habría un volumen máximo. Éste hecho indicó que posiblemente varios estudiantes ya habían tenido contacto con el problema.

Después del diálogo grupal se les entregaron a los estudiantes las hojas de trabajo[5], se les indicó que contestaran en equipo los primeros dos puntos y posteriormente se hizo una puesta en común de las respuestas. En el primer punto se preguntaba si el volumen de la caja cambiaría al cambiar la longitud del cuadrado que se recorta y por qué (aunque esta cuestión ya se había tratado grupalmente, se quiso que quedaran escritas las conclusiones de cada estudiante). El segundo punto pedía calcular el volumen de la caja para distintos valores de la longitud x del lado del cuadrado y colocar los resultados en una tabla y unos ejes coordenados. Se esperaba que de esta manera los estudiantes, en el tercer punto, presentaran menos dificultades para determinar la expresión analítica que relacionara la longitud x del lado del cuadrado que se recortaría en las esquinas, con el largo, ancho y volumen de la caja.

Mientras los estudiantes trabajaban en los puntos uno y dos, la diseñadora recorrió el aula para observar algunas de las prácticas realizadas por los integrantes de los equipos, y se observó que en el punto dos de las hojas de trabajo, éstos procedieron de manera distinta a lo esperado, es decir, construyeron la expresión analítica que relacionaba al volumen de la caja con la longitud x, y usando ésta calcularon el volumen correspondiente a los valores dados para x en la tabla. El que los estudiantes procedieran de esta manera nos hizo darnos cuenta de que al realizarse primero la construcción de la tabla y luego la de la expresión analítica, se le estaba quitando el sentido a la construcción de esta última, pues las reflexiones posteriores en la actividad se realizaban en el lenguaje numérico y gráfico; por el contrario, crear la expresión analítica, para calcular con ella valores específicos de las magnitudes correspondientes (como lo habían hecho los estudiantes) le daba una razón de ser. Así que decidimos cambiar el diseño original de las actividades tomando en cuenta la reflexión anterior.

[5] Las hojas de trabajo de las actividades correspondientes a la puesta en escena se incluyen en los anexos.

La diseñadora/conductora también observó que en un equipo los estudiantes habían resuelto el problema, derivando e igualando a cero la expresión analítica encontrada para el volumen en dependencia de x. A pesar de esto, tales estudiantes continuaron participando con el grupo sin sugerir que el problema se resolvía de dicha manera, tal vez con la curiosidad de ver si de la forma propuesta en las actividades se llegaba al mismo resultado y pensando en que la actividad tenía el objetivo de proponer una manera diferente de resolver el problema.

Después de darles a los estudiantes unos minutos de trabajo en equipo para contestar los puntos uno y dos, el instructor dibujó en el pizarrón una tabla y unos ejes coordenados (pues no se pudo contar con la computadora en esta sesión), y completó la tabla con ayuda del grupo; uno de los estudiantes pasó a dibujar la gráfica. Enseguida la diseñadora/conductora preguntó cuál era el mínimo y el máximo valor que podía tomar x (lo cual correspondía al punto cuatro de la actividad didáctica), encontrando que algunos estudiantes no consideraban los valores 0 y 20 como posibles, pues no aceptaban que el volumen fuera cero, es decir, consideraban que el volumen no existía en esos valores; por el contrario otros lo aceptaban sin problema.

Al revisar las hojas de trabajo con las respuestas de los estudiantes, corroboramos la importancia de la negociación de significados y la búsqueda de consenso grupal en un proceso de enseñanza y de aprendizaje, ya que las respuestas de los estudiantes reflejaban que, a pesar de haberse discutido y argumentado grupalmente, sobre cuál era el intervalo de valores para x, no se había llegado a un acuerdo, pues algunos contestaron que x podía tomar valores desde cero hasta 20, la mayoría consideró que x tenía que ser mayor que cero y menor que 20, otro estudiante contestó que x podía tomar valores entre 1 y 19, mientras que otros contestaron que podía valer desde 0.0001 hasta 19.999.

Posteriormente se procedió a hacer grupalmente el análisis de los valores de la tabla y se observó cómo el volumen aumentaba, en x=7 se alcanzaba el volumen mayor y luego disminuía. La sesión terminó, se les recogieron las hojas de trabajo a los estudiantes y no se les pidió tarea alguna.

En la segunda sesión se retomó el análisis de la tabla y se preguntó a los estudiantes si el valor x=7 era la solución al problema (punto 6 de las hojas de trabajo), varios estudiantes respondieron que no, algunos argumentando que al calcular el volumen para otros valores de x después (otros dijeron que antes) de 7, podría haber alguno que proporcionara un volumen aún mayor. Se inició entonces una discusión para determinar entre qué valores dados para x en la tabla podría estar el valor que maximizara el volumen, promoviéndose que los estudiantes defendieran su postura y convencieran al resto del grupo de que tenían razón. Algunos estudiantes comenzaron a argumentar que el valor de x que maximizaba el volumen podría estar tanto antes como después de x=7 y sugirieron a la diseñadora/conductora dibujar en el pizarrón cómo sería la gráfica en cada caso. El resto del grupo pareció convencerse con el argumento, y propusieron calcular el volumen para más valores de x tanto antes como después de x=7, para determinar en qué valor se encontraba el mayor volumen.

En esta sesión ya se contó con la computadora y un proyector, así que la diseñadora/conductora rápidamente mostró la simulación dinámica de la hoja de cartón con los cortes y la caja sin tapa (los estudiantes se asombraron con el modelo dinámico y mostraron agrado hacia éste), enseguida activó la hoja de cálculo de GeoGebra con los valores correspondientes a los datos de la tabla y mostró además la gráfica del volumen, en dependencia de x, y sobre ésta los puntos correspondientes a los valores de la tabla, además de un punto móvil que cambiaba de posición en la gráfica al modificar la longitud x del corte que se hacía al cartón. La diseñadora/conductora fijó el valor de x en la simulación del cartón y preguntó a los estudiantes cómo se representaban en la gráfica la longitud x del corte que se haría al cartón y el volumen correspondiente; los estudiantes estuvieron pensando un momento y luego comenzaron a argumentar que eran las coordenadas del punto rosa (punto móvil), el volumen era la altura y x la distancia al origen.

Se continuó entonces con la búsqueda numérica del valor de x que maximizaba al volumen. Los estudiantes sugirieron a la diseñadora/conductora que inspeccionara el intervalo [6,10] dándole un incremento a x de 0.5, para probar si el valor de x que maximizaría al volumen, se encontraba antes o después de x=7. Se observó en la hoja de cálculo, que el volumen mayor se alcanzaba en x=7.3. Para aproximar mejor el valor de x buscado, se eligió un intervalo de menor longitud, considerando que el valor de x que optimiza el volumen podría estar tanto antes como después de 7.3. Uno de los estudiantes tuvo la oportunidad de manipular la hoja de cálculo mientras sus compañeros le sugerían el intervalo de búsqueda y un incremento para x cada vez más pequeño. Al aproximarse con algunos decimales a las coordenadas del punto correspondiente al volumen máximo, se observó cómo los puntos de la hoja de cálculo se empalmaban en la cima de la gráfica (del archivo de GeoGebra) y de pronto parecían un solo punto, al hacer *zoom* varias veces se vio que los puntos en realidad estaban separados, pero como el incremento en x era muy pequeño, sin hacer *zoom* parecía que eran uno solo.

Enseguida un estudiante mencionó que en el punto más alto, el cual correspondía al volumen máximo, la recta tangente tenía pendiente cero, y que antes de éste la recta tangente tenía pendiente positiva y después de éste tenía pendiente negativa. Después de este comentario, se realizó una búsqueda más de las coordenadas del punto correspondiente al volumen máximo y luego la diseñadora/conductora mostró en el archivo de GeoGebra, un segmento de la recta tangente (con el valor de su pendiente), el cual cambiaba en tiempo real al mover el punto de tangencia sobre la gráfica. El profesor invitado preguntó a los estudiantes qué era la recta tangente, manifestándose los siguientes significados personales: un estudiante mencionó que era la recta que tocaba una sola vez a la curva, otro dijo que era la recta que más se parecía a la gráfica cerca de un punto, alguien más expresó que su pendiente era la derivada, y otro mencionó que la derivada era la razón de cambio.

En esta parte fue la primera vez que se mencionó a la derivada (fuera del equipo mencionado anteriormente), a la pendiente de la recta tangente y su relación con el valor extremo y con la monotonía; a pesar de que los estudiantes habían cursado el semestre anterior la asignatura Cálculo Diferencial e Integral I. Éste hecho en particular nos llamó la atención, las explicaciones posibles son a) que dentro de los sistemas de prácticas personales de muchos de los estudiantes, no se encontraba la resolución de problemas de optimización (con lo cual no estamos diciendo que en su curso pasado no los estudiaron); y b) que las prácticas realizadas, al abordar ese problema de optimización, fueron diferentes a las comúnmente llevadas a cabo en los cursos de cálculo.

El profesor invitado preguntó a los estudiantes si estaban de acuerdo con que la derivada en un punto era la pendiente de la recta tangente a la gráfica en tal punto y ellos contestaron que estaban de acuerdo. La diseñadora/conductora mostró gráficamente en qué sentido la recta tangente se parecía a la gráfica de la función, haciendo *zoom* sucesivamente en torno a un punto y observando cómo el segmento de recta tangente y la curva se superponían. En esta parte surgió la idea de realizar otro cambio en el diseño de la actividad, pues la posibilidad de hacer zoom en GeoGebra permitiría hacer evolucionar el significado de recta tangente, como la recta que solamente toca en un punto a la gráfica, a la caracterización local que se requiere en cálculo: que sea tangente en una vecindad del punto de contacto, cosa que no se hizo con este grupo de estudiantes, pues únicamente se mostró un segmento de la recta tangente, cuando la recta "completa" habría cortado en otro punto diferente al de tangencia y habría provocado una discusión rica al respecto.

Después se discutió grupalmente, qué diferencias había en la pendiente de la recta tangente, antes y después del punto más alto, y cómo era en éste; también se analizó la monotonía de la gráfica usando la recta tangente. En esta parte se observó que el mostrar el valor numérico de la pendiente de la recta tangente, distraía de una visión global del comportamiento de ésta, por lo que en el diseño posterior de las actividades, omitimos tal valor en el archivo de GeoGebra.

Al final de esta sesión se le pidió de tarea a los estudiantes, contestar en las hojas de trabajo el resto de las preguntas, las cuales correspondían a la monotonía de la función, su relación con la pendiente de la recta tangente (lo cual ya se había discutido grupalmente, por lo que esperábamos que plasmaran sus conclusiones al respecto) y finalmente al planteamiento del problema de la caja sin tapa en el lenguaje gráfico. Cabe mencionar que los estudiantes tuvieron dificultades para comprender a qué se refería la última pregunta, la cual se reformuló en el nuevo diseño.

Con respecto a los objetivos de este trabajo, consideramos que durante el desarrollo de esta actividad se logró que los estudiantes modelaran matemáticamente la situación, observando una dependencia entre las magnitudes involucradas, y estableciendo una relación entre éstas en diferentes formas de lenguaje; también se realizaron prácticas matemáticas en el lenguaje numérico, para que aproximaran con ayuda de la hoja de cálculo y la gráfica de GeoGebra, el valor de x que resuelve el problema.

Pudimos observar que los estudiantes se sorprendieron al ver simulada la caja en el archivo de GeoGebra, y ver cómo cambiaba su forma al cambiar la longitud del corte de las esquinas del cartón rectangular; también pudimos observar que les pareció interesante poder aproximarse numéricamente al valor del volumen máximo y del valor de x correspondiente, usando la hoja de cálculo de GeoGebra.

Por otro lado, la puesta en escena nos permitió observar que era necesario realizar cambios en la estructura de las actividades y el archivo de GeoGebra correspondiente.

Otra reflexión que hicimos sobre el diseño de las actividades fue que la intervención de recta tangente (para caracterizar en el punto correspondiente al valor extremo y la monotonía de la función) era muy "artificial", pues en cierta parte de la actividad de repente se preguntaba cómo era la pendiente de la recta tangente antes y después del punto más alto (o más bajo, según el problema) y en el punto mismo, sin relacionarla con lo realizado anteriormente. Así que aprovechando las capacidades gráficas de GeoGebra, agregamos a la actividad, una parte donde se sugiere a los estudiantes colocar el punto móvil sobre la curva de manera tal que sus coordenadas se aproximen a las del punto correspondiente al valor extremo (las cuales ya aproximaron con la hoja de cálculo), haciendo uso de la herramienta "zoom" de GeoGebra para ubicarlo mejor; así los estudiantes podrán observar que la curva se va linealizando en torno al punto variable, hasta convertirse en una recta horizontal.

En el caso la puesta en escena que hemos estado narrando, los estudiantes fueron quienes sugirieron que la recta tangente tenía pendiente cero en el punto buscado, pero éstos ya habían cursado la materia de Cálculo Diferencial e Integral I, pero consideramos que es posible que estudiantes (sobre todo los principiantes en el estudio del cálculo) no se percataran por sí mismos de que la recta tangente tiene algo que ver en la resolución de problemas de optimización, pero con la visualización de que al acercarse a la curva en el punto más alto (o más bajo si se busca minimizar) ésta se vuelve una recta horizontal se facilita la emergencia la propiedad que tiene esta recta de ser horizontal en el punto correspondiente al valor extremo.

5.5.2 PRIMER GRUPO. ACTIVIDAD “LA VIGA MÁS RESISTENTE”

En la tercera sesión la diseñadora/conductora comenzó cuestionando a los estudiantes sobre qué uso se le da a la madera en la construcción, los cuales opinaron que la madera se podía usar para construir casas, para hacer cimbras, o para crear vigas.

Enseguida, se les preguntó: “si trabajaran en un aserradero ¿cómo harían una viga a partir del tronco de un árbol?”, uno de los estudiantes pasó al pizarrón a explicar cómo construiría ésta, representando geométricamente el tronco y la viga, pero de tal manera que se desperdiciaba mucha madera, hecho que notó uno de sus compañeros e inmediatamente señaló, sugiriéndole dibujar la viga de tal manera que sus aristas se interceptaran con la superficie del tronco.

La diseñadora/ conductora preguntó después, qué características serían deseables en una viga, y los estudiantes propusieron lo siguiente: cierta resistencia, unas medidas específicas de largo, ancho y alto, cierta flexibilidad, que sea de un tipo de madera. Luego preguntó de qué dependía la resistencia de una viga, algunos estudiantes dijeron que del tipo de madera y las medidas de la viga. Hubo un estudiante que comentó que dependía del uso que se le fuera a dar.

Entonces la diseñadora/conductora mencionó la existencia de diferentes tipos de resistencia, entre ellos a la compresión y a la flexión. Usando como ejemplo las vigas del techo del aula, se observó que algunas de ellas sólo se apoyaban en sus extremos y que otras se apoyaban completamente sobre una de sus caras. Se comentó que las primeras requerían ser resistentes a la flexión, y que las segundas deberían ser resistentes a la compresión.

Sobre la resistencia a la compresión, se discutió de qué dependía ésta, utilizando al borrador del pizarrón como ejemplo de viga. Colocando el borrador sobre caras diferentes, se preguntó a los estudiantes en cuál posición creían que éste resistiría más carga. Se conjeturó que la resistencia a la compresión, de una viga de madera, dependía de la posición en que ésta se colocara, de sus dimensiones y del tipo de madera.

La diseñadora/conductora de las actividades, enunció verbalmente que la resistencia de una viga de madera era directamente proporcional al producto del ancho por el cuadrado de la altura. Aclarando que no se contemplaba el largo de la viga dado que la carga puesta era la misma sobre toda la viga.

Posteriormente se preguntó a los estudiantes qué significaba que dos magnitudes fueran directamente proporcionales. En esta parte nos percatamos de que los estudiantes no tenían un significado personal de la proporcionalidad directa, así que se comenzó a preguntarles qué entendían cuando se decía que dos magnitudes eran proporcionales. Los estudiantes contestaron que cuando una aumentaba, la otra también; entonces el maestro invitado dibujó la gráfica del volumen de la caja sin tapa, de la actividad anterior, mencionando que en ese caso cuando aumentaba la longitud del corte, aumentaba el volumen; y preguntó si en ese caso había proporcionalidad. Los estudiantes contestaron que no.

Un estudiante dijo, que había proporcionalidad si ambas magnitudes aumentan en la misma proporción. La diseñadora/conductora preguntó qué significaba que aumentaran en la misma proporción, pero los estudiantes no pudieron explicarlo.

La diseñadora/conductora puso como ejemplo la expresión algebraica del área del círculo, para observar la proporcionalidad entre el cuadrado del radio y el área. Enseguida el profesor invitado intervino y sugirió analizar el perímetro de un cuadrado con respecto a la longitud de su lado. Se observó qué significaba que las magnitudes aumentaran en la misma proporción y se determinó que había una cantidad constante, llamada constante de proporcionalidad. Luego, expresó algebraicamente qué significaba que dos magnitudes fueran directamente proporcionales. Grupalmente se determinó la expresión algebraica para la resistencia: $R = kah^2$, con *a* como el ancho, *h* como la altura y *k* como constante de proporcionalidad (que dependía del tipo de madera).

El profesor del grupo dejó como tarea a los estudiantes, calcular la resistencia y buscar proporcionalidad, tomando $k=2$ y con las siguientes condiciones: fijando la altura y variando el ancho; y fijando el ancho y variando la altura.

En la siguiente sesión se concluyó que había proporcionalidad directa entre la resistencia y el ancho, si la altura era constante; así mismo entre la resistencia y la altura, si el ancho permanecía constante. Luego se analizó qué sucedía si el ancho y la altura eran variables, y se observó que la proporcionalidad directa se conservaba solamente con el producto del ancho y el cuadrado de la altura.

La diseñadora/conductora recordó a los estudiantes que lo que se quería hacer era construir una viga a partir del tronco de un árbol, de tal manera que fuera la más resistente, y dibujó en el pizarrón un círculo con un rectángulo inscrito, que representaba al tronco y a la viga. Preguntó a los estudiantes cómo calcularían la resistencia de esa viga, si el radio del tronco fuera de 60 cm. Un estudiante pasó al pizarrón a mostrar su idea, la cual consistía en comparar áreas, pero no pudo concretarla. Entonces la diseñadora/conductora trazó el diámetro de la viga, como una diagonal del rectángulo, e inmediatamente algunos estudiantes dijeron, “con el teorema de Pitágoras”. Se terminó la sesión y quedó como tarea proponer cómo calcular la resistencia de la viga.

En la última sesión sucedió algo interesante, una estudiante mencionó que había resuelto el problema y pasó al pizarrón a mostrar cómo. Ella asumió que la viga de sección transversal cuadrada era la más resistente y redujo el problema a obtener las dimensiones de tal viga, considerando que los ángulos formados por la diagonal del rectángulo eran de 45°. Mientras explicaba cómo lo había hecho, sus compañeros inmediatamente le dijeron que cómo estaba segura de que esa viga era la más resistente, que podía haber otras más resistentes y que las medidas del cuadrado que propuso a lo mejor ni siquiera eran posibles con ese tronco.

En esta parte nos percatamos que el problema de encontrar la viga más resistente, no representaba un problema de variación para la estudiante, pero para algunos de sus compañeros sí.

Después de que los estudiantes explicaron a su compañera que su solución no necesariamente era correcta, la diseñadora/conductora mostró la simulación de la viga con GeoGebra. Los estudiantes observaron como al aumentar el ancho de la viga, disminuía su altura, y viceversa; lo cual se usó como argumento para decir por qué las dimensiones de la viga no podían ser cualesquiera.

La diseñadora/conductora preguntó a los estudiantes, cómo calcularían la resistencia de la viga si el ancho de ésta fuera de 40 cm. Un estudiante pasó al pizarrón a hacerlo y sus compañeros lo ayudaron. Primero calculó la altura, con el teorema de Pitágoras, luego elevó el resultado al cuadrado y finalmente multiplicó lo obtenido por el ancho. Enseguida se les pidió que contestaran los puntos 1 y 2, correspondientes al llenado de una tabla numérica que contenía valores particulares del ancho (que se le denotó con la literal x), la construcción de una gráfica con los valores de la tabla, y de una expresión analítica para la resistencia usando la literal x.

Se realizó una puesta en común de los resultados y luego se hizo una exploración numérica para aproximar el valor extremo. Los estudiantes mencionaron, al igual que en la actividad anterior, a la recta tangente, la cual se colocó aproximadamente sobre el punto más alto de la curva para observar que tenía pendiente cero. También se analizó la monotonía de la gráfica usando la recta tangente. Se dejó de tarea a los estudiantes que contestaran el resto de los puntos de las hojas de trabajo como tarea para la próxima sesión y que las entregaran a su profesor en la siguiente clase.

5.6 NARRACIÓN DE LO SUCEDIDO DURANTE LA PUESTA EN ESCENA, CON EL SEGUNDO GRUPO DE ESTUDIANTES

Con el segundo grupo trabajamos un total de cinco sesiones de una hora, con las actividades correspondientes a “la estación de bombeo” y a “la viga más resistente”.

5.6.1 SEGUNDO GRUPO. ACTIVIDAD “LA ESTACIÓN DE BOMBEO”

En la primera sesión, con la intensión de plantear el problema “la estación de bombeo”, la diseñadora/conductora comenzó hablando la problemática de la falta de agua en la ciudad de Hermosillo, Sonora y les preguntó a los estudiantes cómo se podría abastecer ésta ciudad de agua, los estudiantes opinaron que se podría traer agua del mar, de una presa o de un río.

La diseñadora/conductora pidió a los estudiantes que se imaginaran que vivían en un pueblo cercano a un río, y les preguntó cómo llevarían el agua a su pueblo. Un estudiante mencionó que se podría bombear el agua. Entonces la diseñadora/conductora comentó que como las bombas son muy caras, se podría pedir ayuda a otro pueblo cercano, para que entre los dos pueblos compraran una bomba que los abasteciera de agua. Enseguida dibujó un segmento de recta y dos puntos en el pizarrón para representar el río y los dos pueblos, respectivamente. Y preguntó a los estudiantes, qué información se necesitaría conocer para colocar la bomba y llevar agua a los pueblos; éstos sugirieron lo siguiente: el precio de la bomba, el precio de la tubería, la cantidad de tubería, la distancia a la que se encuentra cada pueblo del río y la distancia que hay entre los pueblos.

La diseñadora/conductora preguntó también, qué era importante considerar al realizar algún trabajo, una estudiante mencionó que siempre se buscaba economizar. La diseñadora/conductora preguntó: "en este caso ¿qué podemos economizar?". Un estudiante comentó que se podía ahorrar tubería escogiendo el camino más corto o la distancia menor para colocar la bomba; otro estudiante dijo que se podía colocar la bomba en el sentido de la corriente; también mencionaron que se podía poner la bomba en medio de los pueblos. La diseñadora/conductora dibujó la bomba entre los pueblos y la tubería correspondiente. En ese momento un estudiante propuso poner la bomba de tal manera que la tubería llegara primero a un pueblo y de ahí al otro, y la diseñadora/conductora hizo otro dibujo correspondiente a lo mencionado. En este momento había dos modelos diferentes para la situación, el Modelo 1 (Figura 28) donde salen dos tuberías independientes desde la bomba; y el Modelo 2 (Figura 29) donde sale una sola tubería desde la bomba.

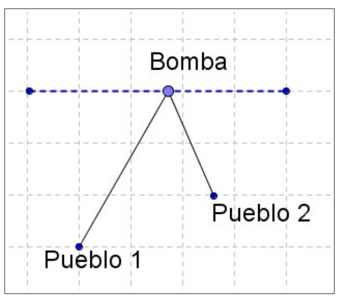


Figura 28. Modelo 1.

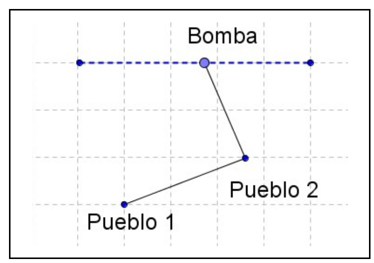


Figura 29. Modelo 2.

Como el ambiente dinámico virtual diseñado en GeoGebra para esta actividad, correspondía al modelo 1, la diseñadora/conductora buscó que los estudiantes eligieran tal modelo como el mejor; argumentando que en el modelo 2 podría haber problemas en cuanto a la presión con que llegaría el agua al pueblo 1; ya que si en el pueblo 2 se utilizara mucha agua, al pueblo 1 llegaría con poca presión, y ese sería un gran inconveniente. Los estudiantes estuvieron de acuerdo y desecharon el modelo 2. Hubiera sido conveniente en este caso, sugerir a lo estudiantes calcular la cantidad de tubería requerida en el modelo 2, encontrar la solución al problema con el modelo 1 y luego comparar los resultados.

La diseñadora/conductora preguntó en seguida "¿y podemos poner la bomba en cualquier parte de la margen del río?", "¿sería conveniente no ponerla entre los pueblos?" Los estudiantes dijeron que no era conveniente poner la bomba fuera de la región del río delimitada por los pueblos, pues se gastaría más tubería que poniéndola entre los pueblos.
Luego de tal discusión, el profesor del grupo les entregó a los estudiantes las hojas de trabajo y los organizó en equipos de cuatro personas, mientras la diseñadora/conductora abría el archivo "Estación de bombeo.ggb". Se mostró la simulación del fenómeno. Los estudiantes reaccionaron positivamente al ambiente dinámico. Rápidamente, se determinó de manera grupal, a qué elementos de la situación correspondían los elementos de la construcción dinámica: los pueblos, el río, la tubería, la bomba, etc.

Después la diseñadora/conductora preguntó: ¿si x=1 cómo calcularían la cantidad de tubería para conectar solamente la bomba al pueblo 1? Un estudiante contestó "con el teorema de Pitágoras". Enseguida se les pidió a los estudiantes que contestaran los primeros dos puntos, que correspondían al cálculo de la cantidad de tubería para un valor específico de x, la determinación de la expresión analítica que relacionara la cantidad total de tubería con la distancia x y la construcción de una tabla de valores y una gráfica correspondiente a éstos.

Después de unos minutos de trabajo en equipo, se hizo la puesta en escena de los resultados, pasando primero a un estudiante al pizarrón a mostrar cómo había calculado la cantidad de tubo para x=1. Luego se revisaron los resultados de la tabla, haciendo enseguida un análisis de éstos, donde se observó cómo la cantidad de tubería disminuía y después aumentaba.

A continuación se mostró la hoja de cálculo y la gráfica en GeoGebra y se hizo una discusión parecida a la del grupo 1 para determinar el primer intervalo donde se buscarían las coordenadas del punto correspondiente al valor mínimo. En esta parte descubrimos un error en la elección de los datos del problema, pues el valor de x que optimizaba la cantidad de tubería, era un número entero. Éste hecho restó interés a la exploración numérica pues en los primeros tres intervalos elegidos, la menor cantidad de tubería siempre se alcanzó en x=4.

En esta sesión no se revisó grupalmente la expresión analítica, así que quedó pendiente para la siguiente sesión.

En la sesión del día siguiente, la diseñadora/conductora preguntó a los estudiantes por la expresión analítica, y se percató de que gran parte de los estudiantes no la habían construido; así que pasó al pizarrón a uno de los estudiantes para que calculara la cantidad de tubería necesaria para un valor particular de x. Luego, grupalmente cambiaron el valor particular de x por la literal x para obtener la expresión en dependencia de tal variable.

Después se abrió el archivo de GeoGebra con el ambiente dinámico y se retomó la discusión sobre la monotonía de la función, numéricamente y gráficamente (observando si la curva subía o bajaba). En esta parte algunos de los estudiantes comenzaron a mencionar que en el punto más bajo se podía trazar una recta tangente de pendiente cero. Otros comenzaron a decir que antes del punto mínimo tenía pendiente negativa y después positiva.

En el ambiente dinámico se mostró la recta tangente a la gráfica y se comentó grupalmente sobre el signo de las pendientes antes y después del punto más bajo de la gráfica. El profesor del grupo observó que varios estudiantes (algunos de los cuales habían presentado dificultades para determinar la expresión analítica de la función) no podían identificar el signo de la pendiente de la recta tangente a partir de su representación gráfica, entonces intervino para promover en los estudiantes un significado de la pendiente de una recta y que así éstos identificaran su signo gráficamente.

5.6.2 SEGUNDO GRUPO. ACTIVIDAD “LA VIGA MÁS RESISTENTE”

En la tercera sesión, se comenzó hablando sobre el uso de la madera en la construcción, promoviendo una discusión parecida a la realizada con el grupo 1, sólo que en este caso, dentro del aula había un par de tablas de madera que la diseñadora/conductora utilizó para guiar la discusión sobre dos tipos diferentes de resistencia: a la flexión y a la compresión, y la dependencia de la última, a la cara de la viga que se toma como base.

Luego, la diseñadora/conductora preguntó a los estudiantes cómo creían que se determinaba la resistencia de la madera, ellos dijeron que probando varias muestras, sometiéndolas a presión y registrando cuándo se quebraban. Después de ese comentario, la diseñadora/conductora mencionó que la resistencia de una viga de madera es directamente proporcional al producto del ancho por el cuadrado de la altura y se discutió qué significaba la proporcionalidad directa con ejemplos de contexto extramatemático, determinando cuál era la constante de proporcionalidad en cada caso y luego se expresó analíticamente la proporcionalidad directa.

Al final de la sesión, se dejó de tarea a los estudiantes calcular la resistencia de la viga, tomando la constante de proporcionalidad $k=1$ y a) el ancho a variable y el alto $h=2$; b) el ancho $a=2$ y el alto h variable.

En la cuarta sesión se comenzó preguntando a los estudiantes cómo construirían una viga a partir de un tronco de manera que tuviera la máxima resistencia a la compresión. Los estudiantes sugirieron la viga como un paralelepípedo rectangular inscrito en un cilindro circular recto. Dado que se buscaba la máxima resistencia a la compresión, se discutió por qué en la expresión analítica para la resistencia no se contemplaba el largo, y se decidió trabajar solamente con una sección transversal.

Enseguida se repartieron las hojas de trabajo a los estudiantes mientras se abría el archivo de GeoGebra. Al ver la animación de la viga se observó que el ancho y la altura eran variables, y dependían una de la otra. Se aclaró a los estudiantes que la constante de proporcionalidad para la resistencia a la compresión, dependía del tipo de madera, y que en este caso se tomaría como uno porque no se especificaba el tipo de madera.

Luego, se les preguntó a los estudiantes cómo calcularían la resistencia de la viga si el ancho fuera de 10 cm, y éstos sugirieron usar el teorema de Pitágoras. Enseguida se les pidió que hicieran los cálculos correspondientes y que completaran una tabla de valores y graficaran los puntos correspondientes a éstos, en unos ejes coordenados, en las hojas de trabajo. Se esperaba que de esta manera se les facilitara a los estudiantes la construcción de la expresión analítica, al observar que el ancho cambiaba de valor en la tabla. Sin embargo, en uno de los equipos, los integrantes no habían podido construir la expresión a pesar de haber podido calcularla para varios valores particulares de x.

Se pasó al pizarrón a uno de los integrantes de tal equipo, y el resto del grupo le ayudó a construir la expresión analítica.

Decidimos que en el diseño final, la expresión analítica se construiría antes que la tabla, pues las dificultades se seguían presentando y posponiendo su construcción le quitábamos importancia.

Posteriormente se hizo un análisis de la monotonía de la función numéricamente, y se determinaron los primeros dos intervalos para la búsqueda del valor de x que maximizaba la resistencia de la viga. En este momento algunos de los estudiantes sugirieron que ya no se aproximara más la solución. La diseñadora/conductora los convenció de seguir con la búsqueda, argumentando que era importante aproximar con más decimales, porque la diferencia entre la resistencia calculada para varios valores de x difería por varios cientos de kilogramos por cm^2.

En la gráfica del ambiente dinámico, se fueron trazando algunos puntos del intervalo donde se buscaba el valor óptimo, y se observó cómo los puntos se amontonaban en la cima de la gráfica. Después se realizó un análisis de la monotonía, numérica y gráficamente; parecido al realizado en la actividad anterior.

En la última sesión se hizo un repaso, sobre cómo identificar gráficamente el signo de la pendiente de una recta y se analizó el signo de las pendientes, antes y después del punto más alto de la gráfica de la resistencia.

Luego se discutió grupalmente sobre las diferencias y similitudes entre el problema de la estación de bombeo (en el cual se buscaba minimizar) y el problema de la viga más resistente (en el cual se buscaba maximizar). Los estudiantes mencionaron que a) la gráfica era diferente, pues en una se buscaba el punto más bajo y en la otra el más alto; b) en ambos problemas la recta tangente a la gráfica, tenía pendiente cero en los puntos buscados; c) en un problema, los valores disminuían y luego aumentaban, mientras que en el otro primero aumentaban y luego disminuían; d) en una gráfica las rectas tangentes eran primero de pendiente negativa y luego positiva, mientras que en la otra, primero tenían pendiente positiva y luego negativa.

Sobre la presencia de los ambientes dinámicos virtuales creados con GeoGebra para las actividades, podemos decir que los estudiantes mostraron agrado hacia ellos, pues facilitaron la comprobación de algunas conjeturas de los estudiantes. En general les gustó que se usara GeoGebra tanto para la simulación del fenómeno como para la visualización de la gráfica y la recta tangente, sin embargo les aburrió estar realizando la búsqueda numérica del valor óptimo en la hoja de cálculo.

CAPÍTULO SEIS

CONCLUSIONES

En el capítulo 2 reflexionamos sobre la problemática existente en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, y señalamos nuestro interés en lo referente a las dificultades presentadas por los estudiantes para modelar y resolver problemas de contexto extramatemático. Nuestra aportación al respecto de tal problemática, fue una propuesta didáctica que buscó promover un acercamiento intuitivo y pragmático al cálculo, y en particular a la derivada, con base en la resolución de problemas de optimización extramatemáticos.

Nuestra propuesta, como mostramos en el capítulo 4, consistió en el diseño de un conjunto de actividades didácticas, integradas por hojas de trabajo y ambientes dinámicos creados con GeoGebra.

El EOS nos facilitó el diseño de las actividades didácticas y la valoración de las mismas, pues las nociones *objeto* y *significado* de esta teoría, nos permitieron determinar detalladamente los objetos matemáticos primarios, intervinientes y emergentes, que conformarían el significado pretendido de nuestra propuesta y así, darle una estructura a las actividades didácticas que favoreciera el uso y la emergencia de dichos objetos. Por otro lado, la noción *idoneidad didáctica*, nos permitió hacer una valoración, a priori y a posteriori, de la pertinencia de las actividades dentro del sistema educativo correspondiente a la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora.

Como mencionamos en el capítulo 2, el *propósito fundamental* de nuestra propuesta fue promover en los estudiantes de ingeniería la construcción de significado de la derivada como pendiente de la recta tangente, y significados de otros objetos matemáticos del cálculo diferencial, en ambientes dinámicos virtuales y a partir de problemas de optimización.

Para hacer una evaluación de nuestra propuesta y obtener las conclusiones que presentamos, tomamos en cuenta dos momentos importantes: los referentes a la valoración de la propuesta al escribirse y que llamamos etapa *a priori*. Otro momento es el referente a la evaluación de lo sucedido durante la puesta en escena que, con todo y sus limitaciones, nos permitió hacer una valoración que denominamos *a posteriori*.

Se establecieron tres *objetivos específicos*, el primero de los cuales es el siguiente:

1. Que los estudiantes modelaran los fenómenos presentes en los problemas de optimización, identificando las magnitudes involucradas y estableciendo relaciones entre éstas; y determinaran los valores que resuelven tales problemas.

A priori supusimos que este objetivo era alcanzable pues consideramos que:

- La construcción manipulable que simula al fenómeno implicado en el problema correspondiente, facilitaría la identificación de las magnitudes intervinientes y la observación de una dependencia entre éstas.

- Al pedirle al estudiante, en las hojas de trabajo, probar con un valor particular de la variable independiente, y promover la observación de que hay más valores posibles para ésta, se favorecería la construcción del modelo analítico, y posteriormente del numérico y del gráfico, del fenómeno.

- Con ayuda de la hoja de cálculo de GeoGebra, los estudiantes determinarían sistemáticamente y con mayor facilidad los valores que resolvían el problema.

A posteriori consideramos que este primer objetivo específico se alcanzó, pues durante la puesta en escena se constató que tras la observación de la simulación dinámica del fenómeno, los estudiantes percibieron una dependencia entre las magnitudes involucradas y pudieron determinar el valor de una magnitud correspondiente al valor dado de otra (a la que se le llamó x); y aunque algunos estudiantes presentaron dificultades para construir la expresión analítica que relacionara tales magnitudes a pesar de observar dinámicamente que x podía tomar distintos valores, se logró que los participantes aproximaran numéricamente la solución al problema con ayuda de la hoja de cálculo.

El segundo objetivo específico se refería a que los estudiantes:

2. Usaran diversas formas de lenguaje para analizar y resolver los problemas, con apoyo en las características que proporciona el ambiente dinámico virtual.

A priori se consideró que este objetivo se podía lograr, pues en las actividades se le pedía al estudiante la construcción de una expresión analítica, una tabla de valores y una gráfica; y se promovían análisis numéricos y gráficos del problema: primero la simulación dinámica del fenómeno permitiría analizar intuitivamente el problema. Luego, el análisis de los valores de la tabla promovería que se propusiera una estrategia para buscar numéricamente la solución, la cual se apoyaría luego en la hoja de cálculo. Posteriormente se esperaba la realización de un análisis gráfico usando la pendiente de la recta tangente en el punto variable, para determinar la monotonía de la función y caracterizar al valor extremo.

Durante la puesta en escena de las actividades, constatamos que el objetivo se alcanzó, pues pudimos observar que realmente los estudiantes modelaron el fenómeno implicado, en diferentes formas de lenguaje; propusieron calcular más valores de la variable independiente para encontrar el valor extremo y con ayuda de la hoja de cálculo se aproximó la solución numérica al problema; se analizó el comportamiento de las magnitudes involucradas utilizando la recta tangente y su pendiente; y se caracterizaron, con éstas últimas, los valores extremos y la monotonía de la función involucrada.

El tercer objetivo específico que se planteó en nuestra propuesta consistió en que los estudiantes:

3. Desarrollaran sistemas de prácticas que promovieran la emergencia de objetos del cálculo diferencial.

A priori consideramos que era posible alcanzar este objetivo pues:

- Al simular con GeoGebra fenómenos cambiantes y representar objetos variables, como un punto o una recta tangente en tal punto a la gráfica, se favorecería la construcción de un significado para el objeto *variable*.

- Se promoverían prácticas de modelación, que favorecerían la construcción de un significado inicial para la *función*, como herramienta para modelar el fenómeno implicado, que relaciona dos magnitudes, en diferentes formas de lenguaje.

- Se favorecerían prácticas de análisis numérico y gráfico del comportamiento de los valores de las magnitudes, lo que ayudaría a la emergencia de objetos como: *función creciente*, *función decreciente* y *valor extremo (máximo o mínimo)*.

- Se promovería un significado local de la *recta tangente* al introducirla mediante *zooms* en la gráfica, sobre el punto cuya abscisa aproxima al valor extremo.

- Se facilitarían análisis gráficos que contribuirían a la caracterización gráfica del *valor extremo* y *punto crítico* usando la pendiente de la recta tangente.

- Se facilitaría la visualización de propiedades de la pendiente de la recta tangente para describir la monotonía de la función y caracterizar los valores extremos, con lo cual se problematizaría en torno a la determinación de la pendiente de la recta tangente en un punto.

En la puesta en escena, aunque no pudimos evaluar el grado en que nuestra propuesta contribuyó a la construcción de los significados personales esperados, pudimos observar que las prácticas anteriores se llevaron a cabo (salvo lo referente a la introducción de la recta tangente, pues se incorporó después de probar las actividades) y que los estudiantes describieron el comportamiento de las magnitudes tanto numéricamente como gráficamente con la pendiente de la recta tangente; asimismo caracterizaron los valores extremos, tanto con la monotonía como con la pendiente; sin embargo, no se tuvo tiempo para discutir de manera grupal cómo solucionar gráficamente los problemas de optimización y así problematizar a los estudiantes en cuanto a la determinación de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.

Con base en lo expresado en los párrafos anteriores, consideramos que nuestra propuesta sí promueve la construcción del significado de la derivada como pendiente de la recta tangente, además de la construcción de significado para otros objetos del cálculo, mediante el desarrollo de prácticas matemáticas ligadas a la resolución de problemas de optimización y haciendo uso de las herramientas brindadas por los ambientes dinámicos.

En el análisis a priori de la idoneidad didáctica de nuestra propuesta, que realizamos en el capítulo cuatro, calificamos como altas las seis idoneidades parciales, considerando que las habíamos integrado todas ellas en la secuencia de actividades. Por otro lado, aunque con la puesta en escena de las actividades, observamos que el contexto de los problemas y la presencia de los ambientes dinámicos favorecieron el interés y la participación activa de los estudiantes, y se alcanzaron los objetivos propuestos, valoramos a posteriori, en el capítulo cinco, como medias las idoneidades, *cognitiva*, *emocional, mediacional* e *interaccional*.

Las razones por las cuales la valoración a posteriori no coincidió con la realizada a priori, son por un lado, que percibimos la necesidad de realizar algunos cambios pequeños en:

a) La redacción de algunas preguntas
b) El momento en que se trabajaba en el lenguaje analítico
c) La introducción de la recta tangente
d) Los ambientes dinámicos, pues el valor numérico de la pendiente resultó ser un distractor
e) Los datos de uno de los problemas, pues la solución era un número entero.

Por otro lado, se detectaron algunas dificultades relacionadas con:

a) La construcción de la expresión analítica de la función que modelaba al problema
b) El establecimiento del dominio de la función como intervalo abierto o cerrado
c) La determinación del signo de la pendiente de una recta a partir de su representación gráfica; y
d) El significado de proporcionalidad entre dos magnitudes.

Durante la puesta en escena, las dificultades anteriores, excepto la c), se detectaron y se actuó al respecto para que los estudiantes pudieran continuar con el desarrollo de las actividades. La dificultad c) se observó al revisar las hojas de trabajo entregadas por los estudiantes. Cabe señalar que no esperábamos que se presentaran las dificultades b) y c).

Los cambios sugeridos tras la puesta en escena, se incorporaron al diseño final de las actividades, con lo cual mejoramos la idoneidad didáctica en las componentes que no salieron altas a posteriori. La presencia de las dificultades mencionadas señala puntos de las actividades en los cuales los estudiantes pueden requerir más apoyo.

Como comentario final de este capítulo, se nos hizo la observación, con respecto al problema “la estación de bombeo”, de la existencia de una solución geométrica de éste, que en caso de ser desarrollada por un estudiante, le quitaría el sentido a la actividad didáctica que diseñamos para el mismo. Cabe mencionar que este problema se extrajo de un libro de cálculo diferencial y que problemas similares a éste (pues se pueden resolver de la misma manera) se encuentran en varios libros de cálculo. En los anexos de esta tesis se presenta una explicación breve de la solución geométrica a este problema.

REFERENCIAS

Andreu, M. E. y Riestra, J. A. (2005). Propuesta alternativa para la enseñanza del concepto de derivada desde una perspectiva histórico-epistemológica de su desarrollo. En Cortés, J. C. y Hitt, F. (Eds.). *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 81-107). México: Morevallado Editores.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: "una empresa docente" & Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *1*(1), 40-55. Recuperado de http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/335/33510104.pdf

Ávila, R., Díaz, J. y Vargas, R. (1988). *El cálculo. Una alternativa para su enseñanza en contraste con la enseñanza tradicional y su influencia en el aprendizaje del álgebra*. Tesis de Maestría, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del I. P. N. Sección de Matemática Educativa, Hermosillo, Sonora, México.

Bravo, J. (1997). Una propuesta didáctica para abordar el concepto de derivada con apoyo de la computadora. Tesis de Maestría. Universidad de sonora, México.

Bravo, J., Grijalva, A. e Ibarra, S. (2002). Ediciones internas del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora.

Cantoral, R., y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon 42*, 353 – 369.

Cantoral, R., y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange, al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3* (3), 265-292. Recuperado de http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33503302

Cruse, A. y Lehman, M. (1982). *Lecciones de Cálculo I. Introducción a la derivada.* Traducción de Hugo Arizmendi Peimpert. México.: Fondo Educativo Interamericano.

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. *El futuro del cálculo infinitesimal. ICME-8 Sevilla, España* (pp. 155-181). Distrito Federal, México: Grupo Editorial Iberoamérica. Recuperado de http://cimate.uagro.mx/pub/Crisologo/ArticuloICME8.pdf

Duval, R. (1988). Gráficas y Ecuaciones: la Articulación de dos registros. Antología de educación matemática. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV – IPN , México.

Edwards, C. y Penney, D. (1996). *Cálculo con geometría analítica.* (4a. Ed.) México.: Prentice Hall.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.): *Investigación en Educación Matemática*. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática pp. 109-128. Córdoba: Universidad de Córdoba. Disponible en http://www.webpersonal.net/vfont/SEIEM2005defVFont.pdf

Font, V. (2007, septiembre). Tendencias actuales en la enseñanza de la matemática. *Ciclo de conferencias "Matemática y Física Educativa 2007"*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Lima, Perú. Recuperado de http://www.slideshare.net/cartoni21/tendencias-actuales-en-la-enseanza-de-la-matematica

Font, V. (2009). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Colección Digital Eudoxus, 0*(11). Recuperado de http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/422/421

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Reserches en Didactique des Mathematiques, 14* (3), 325-355. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). U*n enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Grijalva, A. (2007). *El Papel del Contexto en la Asignación de Significados a los Objetos Matemáticos. el Caso de la Integral de una Función.* Tesis Doctoral. Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. U. Legaria, México D. F.

Hitt, F. (2003a). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *XI Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior.* Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia.

Hitt, F. (2003b). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10* (2), 213-223. Recuperado de http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf

Hughes, D., et al. (2000). *Cálculo* (2a. Ed.). México, D. F.: Editorial CECSA.

Ibarra, S., Ávila, R., Grijalva, A. y Fonseca, D. (1996). Ediciones internas del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo* (7a. Ed.). Oxford University Press-Harla México, S. A. de C. V.

Moreno, S. y Cuevas, C. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial. *Educación Matemática , 16* (2), 93-104. Recuperado de http://redalyc.uaemex.mx/pdf/405/40516205.pdf

Pinzón, W. y Gordillo, W. (s. f.). Algunas dificultades en el proceso enseñanza y aprendizaje del concepto derivada. *Sexto Encuentro Colombiano y Primero Iberoamericano de la enseñanza del Cálculo* .

Serna, L. (2007). *Estudio Socioepistemológico de la Tangente.* Tesis de Maestría. Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. U. Legaria, México D. F.

Swokowski, E. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. (2a. Ed.). México.: Grupo Editorial Iberoamérica.

ANEXOS

ANEXO 1. PROGRAMA DE ESTUDIOS DEL CURSO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

NOMBRE: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

UNIDAD: REGIONAL CENTRO **EJE BÁSICO, DIVISIÓN DE INGENIERÍA**

DEPARTAMENTO: MATEMATICAS **ACADEMIA:** (SERVICIO) **HORAS DE CATEDRA** 80

CARACTER: OBLIGATORIA **CREDITOS**: 08 **TEORICA:**03 **TALLER**: 02

REQUISITO: Bachillerato **SERIACION POSTERIOR:**

OBJETIVO GENERAL: Analizar los problemas relativos a funciones reales de variable real, modelar fenómenos físicos, geométricos y de la Ingeniería y resolver problemas no matemáticos utilizando conceptos y técnicas del Cálculo Diferencial.

CONTENIDO	**OBJETIVOS TEMÁTICOS**	**HABILIDADES** ESPECIFICAS
1. **FUNCIONES. (15 horas)** Definición, dominio y rango. Desigualdades lineales, cuadráticas y con valor absoluto Gráficas de funciones. Problemas de optimización modelados con funciones cuadráticas. Funciones inyectiva, suprayectivas y su caracterización geométrica. La función inversa. Álgebra de funciones. La función composición Funciones polinomiales, racionales, trigonométricas, valor absoluto, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas.	Explicar el concepto de función y la terminología relacionada, familiarizándose con los principales tipos de funciones reales de variable real y su representación geométrica.	–Modelar fenómenos físicos y de la Ingeniería –Utilizando desigualdades, encontrar dominio y rango de funciones sencillas.. –Dada una representación gráfica, obtener la correspondiente representación algebraica y viceversa. –Utilizar software dinámico para el estudio de las representaciones gráficas. –Calcular máximos y mínimos de funciones cuadráticas. –Dar una solución aproximada a problemas de optimización que involucran otro tipo de funciones.
2. SUCESIONES Y (10 horas) CONVERGENCIA. Definición de sucesión Definición de convergencia de una sucesión. Teoremas sobre límites.	Dada una sucesión de números reales, el estudiante comprobará si converge o diverge.	-Calcular límites de sucesiones utilizando los teoremas sobre convergencia de sucesiones -Modelar y resolver problemas físicos y de la Ingeniería como aproximaciones y como límites de sucesiones.

NOMBRE: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

3. LÍMITES Y CONTINUIDAD (15 horas) Definición de límite de una función en un punto dado, utilizando sucesiones. Teoremas sobre límites Límites infinitos, al infinito y asíntotas. Definición de continuidad puntual de continuidad en un conjunto.	Utilizar el concepto de convergencia de sucesiones numéricas para analizar los conceptos de límite y continuidad de funciones reales de variable real.	-Encontrar límites de funciones en un punto – vía sucesiones -. -Calcular límites de funciones en un punto, utilizando teoremas. -Resolver problemas físicos y de la Ingeniería como aproximaciones y como límites de funciones. -Caracterizar la continuidad de una función en términos de límite -Determinar el tipo de discontinuidad (removible, no removible, etc)
4. DERIVACIÓN (30 horas) Introducción al concepto de derivada. Reglas de derivación: suma, producto, cociente. La regla de la cadena La derivada de la función inversa. Derivación implícita Razones de cambio con variables relacionadas. Teoremas sobre derivadas Derivadas de orden superior Criterios de máximos y mínimos Monotonía, concavidad, puntos de inflexión Aplicaciones de máximos y mínimos en problemas geométricos, físicos y de la Ingeniería.	Explicar el concepto de derivada como pendiente de la recta tangente, como velocidad instantánea y en general, de razón instantánea de cambio, en otros contextos. Aplicará los criterios de optimización que involucran derivadas, en la resolución de problemas físicos, geométricos y relacionados con los principales temas de la Ingeniería.	-Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado. –Dada la posición de un cuerpo en cada instante, calcular su velocidad instantánea, como límite de velocidades medias. -Resolver problemas que involucren razones promedio de cambio -Modelar y resolver problemas físicos y de la Ingeniería como razón instantánea de cambio. -Utilizar software dinámico para reforzar el concepto de derivada en un punto y de función derivada. -Encontrar derivadas de funciones elementales apoyándose en el software. -Dada la gráfica de una función, encontrar la gráfica de la derivada y viceversa. -Calcular derivadas de funciones utilizando las reglas de derivación. -Encontrar máximos y mínimos de una función, monotonía, concavidad, puntos de inflexión. –Reconocimiento visual de una función a partir de su función derivada: (creciente, decreciente, concavidad, máximos y mínimos, puntos de inflexión) –Modelar y resolver problemas de optimización geométricos, físicos y de la ingeniería.
5. DIFERENCIACIÓ (10 horas) 5.1 Introducción al concepto de diferencial 5.2 Interpretación geométrica del diferencial	Resolverá problemas de aproximación utilizando el concepto de Diferencial como la mejor aproximación lineal.	–Resolver problemas de aproximación, utilizando a la recta tangente como la mejor aproximación lineal

NOMBRE: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

5.3 Aplicaciones del diferencial		–Resolver problemas no matemáticos utilizando el concepto de diferencial

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS:

La cátedra se desarrollará en dos etapas; en la primera, el profesor utilizará problemas geométricos, físicos y de la ingeniería para introducir de una manera intuitiva los conceptos básicos del cálculo diferencial, combinando la clase con ejercicios resueltos como refuerzo didáctico. En la segunda etapa, se organizarán sesiones de práctica, donde el estudiante tendrá oportunidad de recibir un adiestramiento adicional a través de ejercicios propuestos para resolverse en forma individual o colectiva, según la planeación que el maestro decida. Por lo menos una hora a la semana la clase se desarrollará en un centro de cómputo donde el maestro se apoyará en el uso de software interactivo

POLÍTICAS DE ACREDITACIÓN Y EVALUACIÓN SUGERIDAS:
Para la evaluación de los estudiantes, el profesor tomará en cuenta los resultados de los exámenes parciales aplicados (mínimo tres), tareas y trabajos de investigación, participación individual y colectiva en las actividades cotidianas. Los porcentajes serán previamente acordados al inicio del semestre. Al final del mismo se realizará un examen departamental.

PERFIL DESEABLE DEL MAESTRO:

La División de Ciencias Exactas, buscará el perfil más propicio del maestro para impartir esta asignatura a la División de Ingeniería. Se recomienda que el profesor tenga las siguientes características:

- Cuente con una formación matemática sólida en el área a impartir
- Posea conocimientos acerca de la utilización de herramientas matemáticas en problemas de ingeniería
- Incorpore el empleo de recursos computacionales en las actividades cotidianas del curso

BIBLIOGRAFÍA, DOCUMENTACIÓN Y MATERIALES DE APOYO:

Leithold, L., El Cálculo, 7ma edición, Oxford, 1998

Kreyszig, E., Matemáticas avanzadas para Ingeniería, Vol.1, Tercera edición, Ed. Limusa, 1980

Hughes, D., et all, Cálculo, Primera edición, Ed. Cecsa, 1998

Edwards y Penney, Cálculo con Geometría Analítica, 4ta edición, Prentice may, 1996

Fraga, Robert, Calculus problems for a new century, The Mathematical Association of America 1999

Solow, Anita, Learning by Discovery, The Mathematical Association of America 1999

Swokowsky, E., Cálculo con Geometría Analítica, Segunda edición, Grupo Ed. Iberoamérica, 1989.

Cruise / Lehman, Lecciones de Cálculo I, Ed. Addison Wesley, Iberoamérica, 1989

ANEXO 2. HOJAS DE TRABAJO UTILIZADAS EN LA PUESTA EN ESCENA

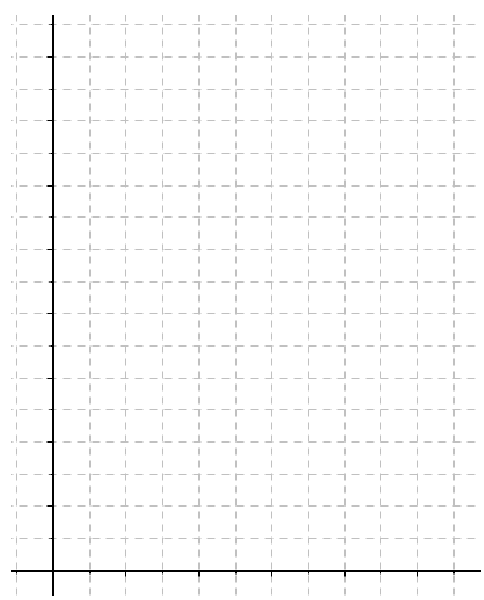
Primer Grupo. Primera actividad.

PROBLEMA DE LA CAJA SIN TAPA: De un cartón rectangular de 40 X 50 cm se quiere construir una caja sin tapa; para esto se recortarán cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas del cartón y se doblarán las cejas con el fin de formar los lados. Determine las dimensiones de la caja de volumen máximo.

1. ¿Crees que cambie el volumen de la caja si cambia la medida del lado de los cuadrados que se recortan? ¿Por qué? En el archivo "Caja sin tapa" de GeoGebra mueve el punto verde y observa lo que sucede.

2. ¿Qué volumen tendría la caja si la longitud (que llamaremos **x**) de los cuadrados que se recorten es 1, 4, 7, 10, 13, 16 y 19? Para referirnos al volumen escribiremos V(x). Puedes colocar tus resultados en la tabla y cuadrícula siguientes.
3.

Longitud *x* del lado de los cuadrados	*V(x)*= Volumen de la caja



3. Escribe una fórmula para calcular el largo, el ancho y el volumen de la caja, en dependencia de la longitud x del lado del cuadrado recortado.

4. ¿Cuál es el valor más pequeño y cuál es el valor más grande que puede tomar x en el problema?

5. Puedes comprobar tus resultados de la tabla presionando la pestaña *vista* y seleccionando la opción *vista de hoja de cálculo* (observa las columnas B y C). Presiona también la casilla "Mostrar puntos de la tabla" y la casilla "Mostrar gráfica".

6. ¿Para qué valor de x de la tabla (que llenaste en la pregunta 2) se obtuvo el mayor volumen? ¿Será tal valor de x la solución al problema? Explica tu respuesta.

7. ¿Crees que haya otro valor de x con el cual se obtenga una caja de volumen mayor? ¿Por qué? Sugerencia: en la celda A2 de la hoja de cálculo puedes poner el número desde el cual quieres que x tome valores. En la celda A4 puedes poner el máximo valor que quieres que tome x. En la celda A6 puedes colocar la cantidad que quieres que aumente x respecto al valor inicial. Activa la casilla "Mostrar puntos de la tabla" del archivo de GeoGebra después de llenar las celdas A2, A4 y A6. **Por ejemplo**, si quieres obtener valores de x y del volumen correspondiente, para valores de x entre 0 y 20, y quieres que el valor de x vaya aumentando 1 cada vez, coloca el 0 en la celda A2, el 20 en la celda A4, y 1 en la celda A6.

8. ¿Para cuál valor de x entre 0 y 20, con un incremento en x de 1 se obtiene el mayor volumen en la tabla de GeoGebra?

9. ¿Habrá otro valor de x que nos dé una caja de volumen mayor? Si es así ¿Entre qué números estará tal valor de x? Sugerencia: activa la casilla "Mostrar gráfica" del archivo de GeoGebra. Puedes colocar en las celdas A2 y A4 otros números entre los que estará x y elegir un incremento más pequeño varias veces. Coloca tus resultados en la tabla siguiente:

x desde	x hasta	Incremento de x	x que da el mayor volumen	Volumen de la caja V(x)

10. ¿Crees que repitiendo el proceso anterior encontrarás el valor exacto de x que nos dé el volumen máximo para la caja? ¿Por qué?

11. ¿Qué característica tiene en la gráfica el punto correspondiente al valor de x que da el mayor volumen, que lo distingue de los otros?

12. En la tabla, cuando x aumenta de valor (antes de llegar al valor que da el mayor volumen) ¿Qué pasa con el volumen de la caja? ¿Cómo se refleja esto en la gráfica?

13. Y cuando x aumenta su valor (después del valor en la tabla de GeoGebra que da el mayor volumen) ¿Qué pasa con el volumen de la caja? ¿Cómo se refleja esto en la gráfica?

14. Activa la casilla “tangente”. Mueve el punto verde y observa cómo la recta tangente recorre la gráfica. “m” representa la pendiente de la recta tangente. ¿Qué diferencia encuentras en las rectas tangentes antes del punto más alto y después de éste?

15. ¿Qué relación hay entre tu respuesta a la pregunta anterior y las respuestas de las preguntas 12 y 13?

16. ¿Cómo son las rectas tangentes en los puntos donde el volumen está creciendo? ¿Cómo es en el punto más alto de la gráfica? ¿Cómo son las rectas tangentes en los puntos donde el volumen está decreciendo?

17. ¿Cómo plantearías en la gráfica el problema de encontrar el valor de x que hace máximo el volumen de la caja?

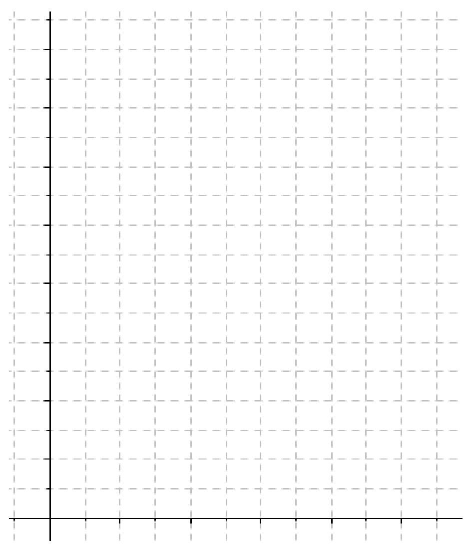
Primer grupo. Segunda actividad.

PROBLEMA DE LA VIGA MÁS RESISTENTE: La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto del ancho y el cuadrado de la altura de su sección transversal. Determine las dimensiones de la viga más resistente que se pueda obtener de un tronco circular de 30 cm de radio.

1. ¿Puedes calcular el alto de la viga, para un valor específico del ancho? ¿Cómo? Sugerencia: dibuja el diámetro del tronco de manera que pase por alguno de los vértices del rectángulo.

2. ¿Cuál es la resistencia de la viga cuando su ancho x es igual a 0, 10, 20, 30, 40, 50 y 60? Puedes usar la tabla y la cuadrícula siguientes para colocar tus resultados. Podemos llamarle **y** al alto de la viga y **R(x)** a la resistencia. Escribe una fórmula para calcular la resistencia de la viga en dependencia de su ancho x.

x=ancho	y^2=(Alto)^2	R(x)=Resistencia de la viga
0		
10		
20		



Puedes comprobar tus resultados de la tabla presionando la pestaña *vista* y seleccionando la opción *vista de hoja de cálculo* (observa las columnas B y C). Presiona también la casilla “Tabla” y la casilla “Mostrar gráfica”.

3. ¿Cuál es el valor más pequeño y el valor más grande que puede tomar x en el problema?

4. ¿Para qué valor de x de la tabla (que llenaste en la pregunta 2) se obtuvo la mayor resistencia? ¿Será ese valor del ancho el que nos dé la viga de máxima resistencia? ¿Por qué?

5. ¿Entre qué números estará el valor del ancho que nos daría la viga de máxima resistencia? ¿Cómo le harías para encontrarlo? Sugerencia: en la hoja de Cálculo puedes colocar nuevos intervalos de valores para el ancho y elegir incrementos más pequeño para x. **Por ejemplo**, si quieres obtener valores de x y de la resistencia correspondiente, para valores de x entre 0 y 60, y quieres que el valor de x vaya aumentando 5 cada vez, coloca el 0 en la celda A2, el 60 en la celda A4, y 5 en la celda A6. Puedes usar la tabla siguiente:

x desde	x hasta	Incremento de x	x que da la resistencia más grande en la tabla	Resistencia R(x)

6. ¿Qué característica tiene en la gráfica el punto correspondiente al valor de x que da la mayor resistencia, que lo distingue de los otros?

7. En la tabla, cuando x aumenta de valor (**antes** de llegar al valor en la tabla de GeoGebra que da la mayor resistencia) ¿Qué pasa con la resistencia de la viga? ¿Cómo es la gráfica para estos valores?

8. Y cuando x aumenta su valor (**después** del valor en la tabla de GeoGebra que da la mayor resistencia) ¿Qué pasa con la resistencia de la viga? ¿Cómo es la gráfica para estos valores?

9. Activa la casilla “tangente”. Mueve el punto café y observa cómo la recta tangente recorre la gráfica. “m” representa la pendiente de la recta tangente. ¿Qué diferencia encuentras en la recta tangente antes del punto más alto y después de este?

10. ¿Qué relación hay entre tu respuesta a la pregunta anterior y las respuestas de las preguntas 7 y 8?

11. ¿Cómo son las pendientes de las rectas tangentes en los puntos donde la resistencia crece? ¿Cómo es la recta tangente en el punto más alto de la gráfica? ¿Cómo son las pendientes de las rectas tangentes en los puntos donde la resistencia decrece?

12. ¿Cómo plantearías en la gráfica el problema de encontrar el valor de x que hace máxima la resistencia de la viga?

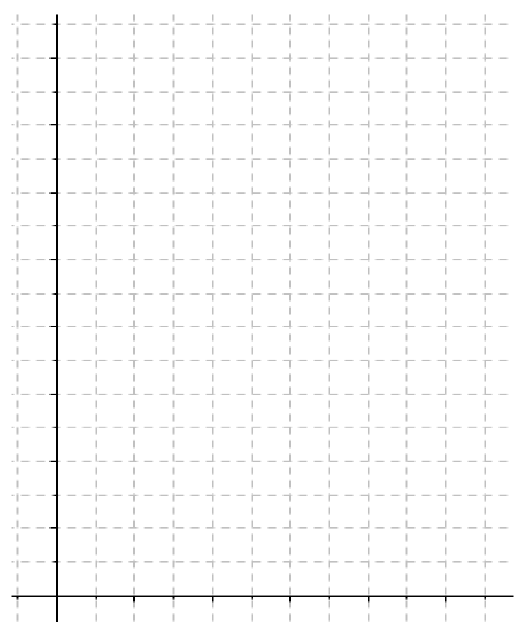
Segundo grupo. Primera actividad.

PROBLEMA DE LA ESTACIÓN DE BOMBEO: Hacia el mismo lado o margen de un río recto hay dos pueblos, los dueños desean construir una estación de bombeo que les abastezca agua. La estación de bombeo debe estar en la margen del río y los tubos deben ir directo a los pueblos. El pueblo 1 está a 4 km del río y el pueblo 2 a 2 km ¿Dónde debe estar la estación de bombeo para minimizar la longitud total del tubo si la distancia entre los pueblos (sobre el río) es de 6 km?

1. Abre el archivo "Estación de bombeo" de GeoGebra. Mueve el punto blanco y observa lo que sucede. Si x= 1 ¿Qué cantidad de tubo se requiere para conectar la estación de bombeo sólo con el pueblo 1? ¿Y con el pueblo 2?

2. ¿Qué cantidad de tubo se necesitaría en total para conectar los dos pueblos con la estación de bombeo si x= 0, 2, 4 y 6 km? Escribe una fórmula para calcular la cantidad total de tubo (a la que llamaremos T(x)) en dependencia de la distancia x.

x	T1= tubo para la casa 1	T2= tubo para la casa 2	T(x) = cantidad total de tubo
1			
2			



Puedes comprobar tus resultados de la tabla presionando la pestaña *vista* y seleccionando la opción *vista de hoja de cálculo* (observa las columnas B y C). Presiona también la casilla "Tabla" y la casilla "Mostrar gráfica".

3. ¿Cuál es el valor más pequeño y el más grande que tomar x en el problema de la estación de bombeo?

4. ¿Para qué valor de x de la tabla (que llenaste en la pregunta 2) se obtuvo la menor cantidad de tubo? ¿Será tal valor de x la menor cantidad posible de tubo o habrá otro? Explica tu respuesta.

5. ¿Entre qué números estará el valor de x que nos daría la menor cantidad posible de tubo?¿Cómo le harías para encontrarlo? Sugerencia: en la hoja de Cálculo puedes colocar nuevos intervalos de valores para x y elegir incrementos más pequeños. **Por ejemplo**, si quieres obtener valores de x y de la cantidad de tubo correspondiente, para valores de x entre 0 y 6, y quieres que el valor de x vaya aumentando .5 cada vez, coloca el 0 en la celda A2, el 6 en la celda A4, y .5 en la celda A6.
   Puedes usar la tabla siguiente para colocar tus datos:

x desde	x hasta	Incremento de x	Cantidad de tubo T(x)

6. ¿Qué característica tiene en la gráfica el punto correspondiente al valor de x que da el la menor cantidad de tubo, que lo distingue de los otros?

7. En la tabla, cuando x aumenta de valor (antes de llegar al valor que da la menor cantidad de tubo) ¿Qué pasa con la cantidad T(x) de tubo? ¿Cómo es la gráfica para estos valores?

8. Y cuando x aumenta su valor (después del valor en la tabla de GeoGebra que da la menor cantidad de tubo) ¿Qué pasa con la cantidad T(x) de tubo? ¿Cómo es la gráfica para estos valores?

9. Activa la casilla "tangente". Mueve el punto blanco y observa cómo la recta tangente recorre la gráfica. "m" representa la pendiente de la recta tangente. ¿Qué diferencia encuentras en la recta tangente antes del punto más bajo y después de éste?

10. ¿Qué relación hay entre tu respuesta a la pregunta anterior y las respuestas de las preguntas 7 y 8?

11. ¿Cómo son las rectas tangentes en los puntos donde la cantidad de tubo decrece? ¿Cómo es la recta tangente en el punto más bajo de la gráfica? ¿Cómo son las rectas tangentes en los puntos donde la cantidad de tubo crece?

12. ¿Cómo plantearías en la gráfica el problema de encontrar el valor de x que hace mínima la cantidad de tubo?

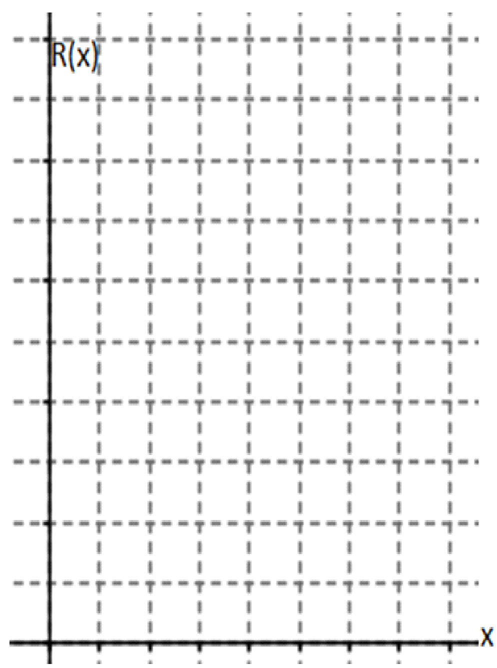
Segundo grupo. Segunda actividad.

PROBLEMA DE LA VIGA MÁS RESISTENTE: La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto del ancho y el cuadrado de la altura de su sección transversal. Determine las dimensiones de la viga más resistente que se pueda obtener de un tronco circular de 30 cm de radio.

1. ¿Puedes calcular el alto de la viga, para un valor específico del ancho? ¿Cómo? Sugerencia: dibuja el diámetro del tronco de manera que pase por alguno de los vértices del rectángulo.

2. ¿Cuál es la resistencia de la viga cuando su ancho x es igual a 0, 10, 20, 30, 40, 50 y 60? Puedes usar la tabla y la cuadrícula siguientes para colocar tus resultados. Podemos llamarle **y** al alto de la viga y **R(x)** a la resistencia.

x=ancho	y^2=(Alto)^2	R(x)=Resistencia de la viga
0		
10		
20		



Puedes comprobar tus resultados de la tabla presionando la pestaña *vista* y seleccionando la opción *vista de hoja de cálculo* (observa las columnas B y C). Presiona también la casilla "Tabla" y la casilla "Mostrar gráfica".

3. Escribe una fórmula para calcular el alto y la resistencia de la viga en dependencia de x.

4. ¿Cuál es el valor más pequeño y el valor más grande que puede tomar x en el problema?

5. ¿Para qué valor de x de la tabla (que llenaste en la pregunta 2) se obtuvo la mayor resistencia? ¿Será ese valor del ancho el que nos dé la viga de máxima resistencia? ¿Por qué?

6. ¿Entre qué números estará el valor del ancho que nos daría la viga de máxima resistencia? ¿Cómo le harías para encontrarlo? Sugerencia: en la hoja de Cálculo puedes colocar nuevos intervalos de valores para el ancho y elegir incrementos más pequeños para x. **Por ejemplo**, si quieres obtener valores de x y de la resistencia correspondiente, para valores de x entre 0 y 60, y quieres que el valor de x vaya aumentando 5 cada vez, coloca el 0 en la celda A2, el 60 en la celda A4, y 5 en la celda A6. Puedes usar la tabla siguiente:

x desde	x hasta	Incremento de x	x que da la resistencia más grande en la tabla	Resistencia R(x)

7. ¿Qué características tiene en la gráfica el punto correspondiente al valor de x que da la mayor resistencia, que lo distingue de los otros?

8. En la tabla, cuando x aumenta de valor (**antes** de llegar al valor en la tabla de GeoGebra que da la mayor resistencia) ¿Qué pasa con la resistencia de la viga? ¿Cómo es la gráfica para estos valores?

9. Y cuando x aumenta su valor (**después** del valor en la tabla de GeoGebra que da la mayor resistencia) ¿Qué pasa con la resistencia de la viga? ¿Cómo es la gráfica para estos valores?

10. Activa la casilla “tangente”. Mueve el punto café y observa cómo la recta tangente recorre la gráfica. “m” representa la pendiente de la recta tangente. ¿Qué diferencia encuentras en la recta tangente antes del punto más alto y después de este?

11. ¿Qué relación hay entre tu respuesta a la pregunta anterior y las respuestas de las preguntas 7 y 8?

12. ¿Cómo son las pendientes de las rectas tangentes en los puntos donde la resistencia crece? ¿Cómo es la recta tangente en el punto más alto de la gráfica? ¿Cómo son las pendientes de las rectas tangentes en los puntos donde la resistencia decrece?

13. ¿Cómo plantearías en la gráfica el problema de encontrar el valor de x que hace máxima la resistencia de la viga?

ANEXO 3. SOLUCIÓN GEOMÉTRICA AL PROBLEMA “LA ESTACIÓN DE BOMBEO”

El problema “La estación de bombeo” puede interpretarse geométricamente de la siguiente manera: se debe encontrar la posición del punto P (valor del segmento *x*) tal que la suma de las distancias, de P a P_1 y P_2 sea mínima (Figura 30).

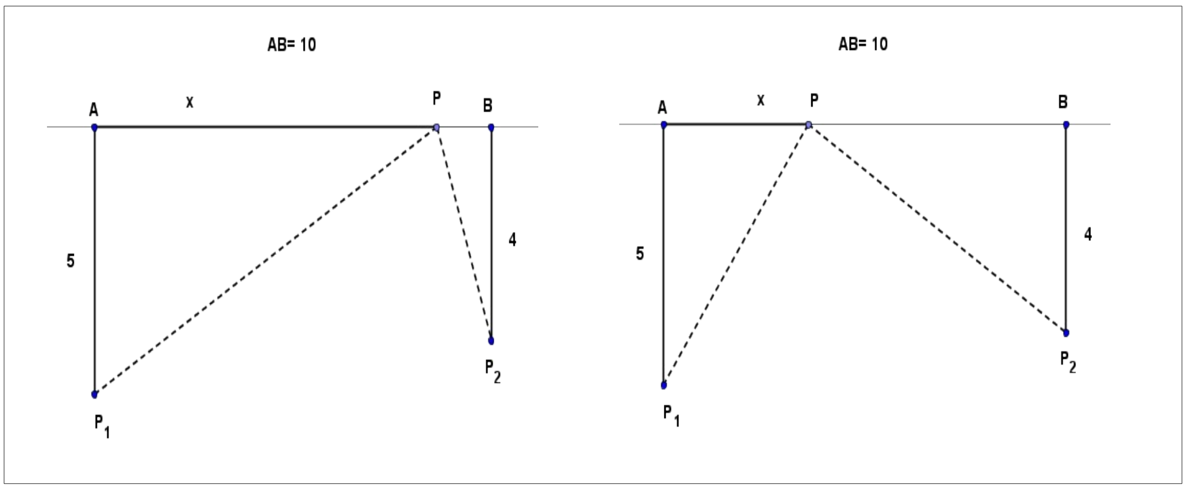


Figura 30. Punto P en diferentes posiciones.

Si se refleja el punto P_2 con respecto a la recta que pasa por A y B, y se le llama P'_2 (ver la Figura 31), la intersección de los segmento $P_1P'_2$ y AB será la posición del punto P que minimiza la distancia entre éste y los puntos P_1 y P_2, pues la mínima distancia entre dos puntos, es la longitud del segmento de recta que los une.

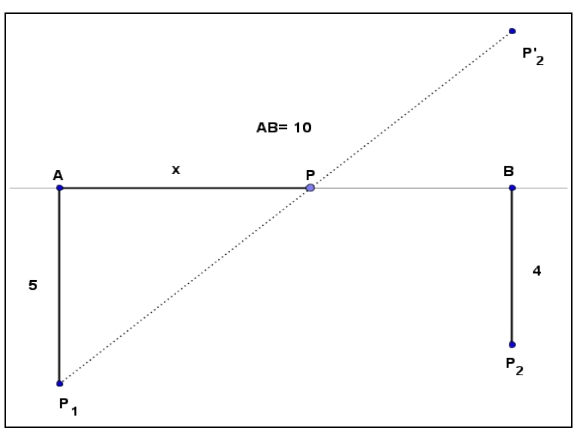


Figura 31. Solución geométrica del problema “la estación de bombeo”.

Para conocer el valor de *x,* basta con determinar la abscisa del punto de intersección de $P_1P'_2$ y el segmento AB.

Si se colocan los puntos sobre el plano coordenado, situando el punto A en el origen, es decir, A(0,0), $P_1(0, -5)$, $P'_2(10, 4)$, etc., la expresión analítica de la recta que pasa por P_1 y P'_2 será: $y=\frac{9}{10}x-5$; y la recta que pasa por A y B será $y=0$. Así, el valor *x* buscado será $x=\frac{50}{9}\approx 5.55$.