Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

"Actividades didácticas con uso de tecnología digital para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2"

TESIS

Que para obtener el Grado de:

Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Presenta:

Myriam Nohemí Cortez Martínez

Directora de Tesis:

M.C. Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez0

Hermosillo, Sonora, México Diciembre 2016

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar te agradezco a ti, Dios, por ayudarme a terminar este proyecto; gracias por darme la fuerza y el coraje para hacer este sueño realidad, por estar conmigo en cada momento de mi vida.

A mis padres, por creer en mí y por su apoyo incondicional, dándome ejemplos dignos de superación y entrega, porque en gran parte gracias a ustedes, hoy puedo ver alcanzada mi meta, ya que siempre estuvieron impulsándome en los momentos más difíciles, y porque el orgullo que sienten por mí, fue lo que me hizo ir hasta el final. Esto es por ustedes, porque admiro su fortaleza y por lo que han hecho de mí. Gracias por haber fomentado en mí el deseo de superación y el anhelo de triunfo en la vida.

A mis hermanos José David y Abigail, por ser parte importante de mi vida y motivarme para realizar este proyecto.

A Sergio, gracias por todo, por apoyarme siempre y por impulsarme a seguir adelante en los momentos difíciles.

A todos los profesores de este posgrado que aportaron a mi formación. Para quienes me enseñaron más que el saber científico, a quienes me enseñaron lo que no se aprende en el salón de clases, a compartir el conocimiento con los demás y que ahora hacen de mí una mejor persona. De manera muy especial, agradezco a mi directora de tesis la M.C. Ana Guadalupe del Castillo por guiarme durante este proceso, gracias por sus comentarios y aportaciones, por todas las facilidades que me brindó y por su trato siempre tan amable.

Gracias también a mis queridos compañeros, que me apoyaron y me permitieron entrar en su vida durante estos casi tres años de convivir dentro y fuera del salón de clase. Mil palabras no bastarían para agradecerles su apoyo, su comprensión y sus consejos en todos los momentos.

A todos, espero no defraudarlos y contar siempre con su valioso apoyo, sincero e incondicional.

RESUMEN

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 utilizando la tecnología digital. Esta propuesta está dirigida a estudiantes de nivel medio superior, particularmente del curso de Matemáticas 1. Su diseño se basa en el enfoque por competencias, de acuerdo con los planteamientos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior.

Mediante estas actividades se pretende desarrollar en los estudiantes, habilidades en la formulación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, poniendo mayor énfasis en el significado gráfico del concepto. Para el logro de este objetivo, se consideró importante el uso de la tecnología digital, de manera que para cada una de las actividades se diseñaron applets con el software GeoGebra en los que es posible coordinar el lenguaje numérico, gráfico y algebraico.

Tanto en el diseño como en la implementación y análisis de las actividades, se utilizaron algunos planteamientos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática: las nociones de Significado Referencial, Significado Pretendido e Idoneidad Didáctica, son algunas de ellas.

Entre los aspectos más destacables de los resultados obtenidos se encuentra el interés y la motivación de los estudiantes al realizar actividades matemáticas utilizando la computadora, pudimos observar que el software GeoGebra facilitó el proceso de planteamiento de las ecuaciones del sistema y la visualización gráfica de la solución. Además, los espacios de trabajo individual, en equipo y grupal permitieron superar algunas dificultades que se presentaron.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE GRÁFICAS

INTRODUCCIÓN

La Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), iniciada en México a partir del año 2008, plantea la existencia de un Marco Curricular Común (MCC) para los diversos subsistemas, caracterizado por un perfil de egreso orientado al logro de diversas competencias genéricas, disciplinares y profesionales, mismas que los estudiantes deberán consolidar durante su trayectoria escolar. Es decir, las autoridades educativas nacionales plantean la realización de una Educación Basada en Competencias (EBC) como alternativa para mejorar la formación integral de los estudiantes de bachillerato, atendiendo un MCC, pero que al mismo tiempo permita que la formulación de planteamientos curriculares respete la identidad académica, historia y cultura de las distintas instituciones educativas. Es así que la RIEMS ha movilizado los distintos subsistemas del bachillerato en México, motivados por la idea de mejorar la pertinencia, cobertura y calidad educativa que se brinda.

El impulso de la reforma del bachillerato en México ha generado que los diversos subsistemas emprendan una serie de modificaciones a los planes y programas de estudio, tratando de alinear dichos planes con el planteamiento curricular inscrito en el marco de la RIEMS.

Lograr que la educación sea pertinente y relevante demanda una participación del profesorado para traducir el currículo formal a las necesidades del aula, propiciando experiencias de aprendizaje idóneas para sus alumnos; es decir, los profesores deberán recibir actualización en el enfoque por competencias impulsado por la RIEMS, a fin de ser capaces de diseñar y conducir experiencias de aprendizaje que favorezcan el desarrollo de competencias en los estudiantes.

Tan importante como el apoyo al desarrollo profesional de la docencia, es el fortalecimiento de los materiales didácticos esenciales. Las escuelas deben contar con bibliotecas dignas, con equipos para aprender el uso de las tecnologías de la información y la comunicación, y aprovecharlas en la educación, y con laboratorios y talleres suficientemente equipados.

Además de lo anteriormente expuesto, las tecnologías digitales constituyen recursos con un valor cada vez mayor para el aprendizaje de los alumnos. Para ello es indispensable que las escuelas cuenten con el equipamiento y la infraestructura necesaria.

Además de la actualización docente en el enfoque por competencias, es fundamental el desarrollo de nuevos materiales didácticos que se sustenten en los principios que establece la RIEMS y que apoyen tanto a los docentes como a los alumnos en este proceso de transformación.

En este sentido, el objetivo de este trabajo es el diseño de materiales didácticos para el nivel medio superior que se puedan utilizar como apoyo en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, mismos que tienen aplicación en distintas áreas de conocimiento, como la ingeniería o la computación y, desde luego, en áreas de la matemática, como la geometría analítica o la investigación de operaciones, entre muchas otras.

El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales es fundamental y necesario en la formación de estudiantes. De hecho, a partir de la educación secundaria, los sistemas de ecuaciones lineales forman parte del contenido académico y su presencia en el currículo continúa hasta la educación superior.

Ahora bien, una de las dificultades por las que atraviesan profesores y alumnos en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, está relacionada con los cálculos aritméticos (Gómez, 2006). Esta situación, por un lado hace tedioso, repetitivo e insignificante el método de resolución. Y por el otro, impide y desorienta el análisis y la reflexión del proceso de resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Además, difícilmente se plantean en clase problemas reales que impliquen la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, de tal manera que al alumno le sea significativo el contenido matemático.

La propuesta que aquí se presenta está fundamentada en herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) y busca favorecer habilidades en la formulación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, a través del uso de la tecnología digital.

La estructura que tiene el documento es la siguiente:

En el capítulo 1 se presentan los antecedentes y el contexto curricular en el que se enmarca este proyecto. Se exponen también algunos elementos relacionados con la problemática del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales; mismos que justifican el diseño de esta propuesta de actividades didácticas. Asimismo, se presentan en este capítulo, el objetivo general y los objetivos específicos de este trabajo.

En el capítulo 2 se exponen los elementos teóricos de la Matemática Educativa utilizados en la fundamentación de este trabajo, así como las consideraciones metodológicas para el diseño e implementación de las actividades.

En el capítulo 3 se presenta la propuesta didáctica, se describen las características de cada una de las actividades y los análisis realizados con base en elementos teóricos del EOS.

Para valorar el diseño de las actividades, se realizó la puesta en escena de una de ellas con un grupo de alumnos de bachillerato. Esto se describe y analiza con detalle en el capítulo 4.

En el quinto y último capítulo se presentan las conclusiones a las que se llegaron una vez terminado el trabajo.

Por último se incluye la bibliografía consultada y los anexos correspondientes.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Antecedentes

1.1.1 Marco Referencial

A finales del siglo pasado, una Comisión Internacional de quince personas nombrada por la UNESCO, publica un informe (Delors et al., 1996) que invita a las autoridades a reflexionar sobre los desafíos a los que deberá hacer frente la educación en los años venideros. En este informe se señala la función indispensable que tiene la educación, como instrumento para que la humanidad pueda progresar hacia los ideales de paz, libertad y justicia social.

Para Delors, la educación debe estructurarse en torno a cuatro aprendizajes fundamentales que a lo largo de toda la vida serán los pilares del conocimiento; aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser. En esa concepción deben buscar inspiración y orientación las reformas educativas, tanto en la elaboración de los programas como en la definición de las nuevas políticas pedagógicas.

En este sentido el gobierno mexicano, a través del Plan Nacional de Desarrollo 2007-2012 y de la Secretaría de Educación Pública, inició una transformación educativa con la implementación de una reforma integral en los niveles básicos (RIEB) y en la educación media superior (RIEMS), buscando elevar la calidad educativa y proponiendo estrategias como “Actualizar los programas de estudio, sus contenidos, materiales y métodos para elevar su pertinencia y relevancia en el desarrollo integral de los estudiantes, y fomentar en éstos el desarrollo de valores, habilidades y competencias para mejorar su productividad y competitividad al insertarse en la vida económica”. (Plan Nacional de Desarrollo 2007-2012, 2007, p. 184)

En el caso particular de la Educación Media Superior, se propone un modelo que garantice que los alumnos cuenten con un mínimo de capacidades requeridas en este nivel (tronco común) que les permita transitar de una modalidad a otra.

1.1.2 Las competencias en el bachillerato

A partir del Ciclo Escolar 2009-2010, la Dirección General del Bachillerato (DGB) incorporó en su plan de estudios los principios básicos de la RIEMS que tienen como propósitos fortalecer y consolidar la identidad de este nivel educativo, en todas sus modalidades y subsistemas; proporcionar una educación pertinente y relevante al estudiante que le permita establecer una relación entre la escuela y su entorno; y facilitar el tránsito académico de los estudiantes entre los subsistemas y las escuelas.

Para el logro de las finalidades anteriores, uno de los ejes principales de la RIEMS es la definición de un Marco Curricular Común (MCC), que compartirán todas las instituciones de bachillerato. El MCC permite articular los programas de distintas opciones de educación media superior (EMS) en el país. Comprende una serie de desempeños terminales expresados como competencias genéricas, competencias disciplinares básicas, competencias disciplinares extendidas (de carácter propedéutico) y competencias profesionales (para el trabajo). Entendiendo por competencia *"la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico"* (Secretaría de Educación Pública, 2013a, p. 2).

Como parte de la formación básica del plan de estudio de la DGB, se presenta el programa de estudios de la asignatura de Matemáticas I que pertenece al campo disciplinar de Matemáticas, el cual tiene la finalidad de propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que conlleven el despliegue de distintos conocimientos, habilidades, actitudes y valores, en la resolución de problemas matemáticos que en sus aplicaciones trasciendan el ámbito escolar. La finalidad de la asignatura de Matemáticas I es la de permitir al estudiante utilizar distintos procedimientos algebraicos para representar relaciones entre magnitudes constantes y variables, y resolver problemas de la vida cotidiana (DGB, 2013, p. 6)

1.1.2.1 Competencias genéricas y disciplinares

De acuerdo con el programa de estudios de la DGB (2013), el estudiante deberá desarrollar las competencias genéricas, que son aquellas que le permiten comprender su mundo e influir en él, le brindan autonomía en el proceso de aprendizaje y favorecen el desarrollo de relaciones armónicas con quienes les rodean. Estas competencias construyen el Perfil del Egresado del Sistema Nacional de Bachillerato (SEP, 2013b, p. 1). Las actividades didácticas que se proponen contemplan las siguientes competencias genéricas:

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

2. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

3. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

4. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

5. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

6. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

   (DGB, 2013, p. 10)

Por otra parte, las competencias disciplinares básicas refieren los mínimos necesarios de cada campo disciplinar para que los estudiantes se desarrollen en diferentes contextos y situaciones a lo largo de la vida. En el módulo de Matemáticas I Bloque 7, se consigna que las competencias disciplinares a desarrollar son las siguientes:

1. Construye e interpreta sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2. Formula y resuelve sistemas de ecuaciones lineales, aplicando diferentes métodos.

3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

5. Analiza las relaciones entre dos variables de un proceso social o natural para plantear un sistema de ecuaciones lineales y así determinar o estimar su comportamiento.

6. Interpreta tablas, gráficas, y textos con símbolos matemáticos y científicos. (DGB, 2013, p. 11)

1.2 Problemática y Justificación

Los problemas de la enseñanza y el aprendizaje, particularmente para la comprensión de las matemáticas no son nuevos, están presentes desde el nivel de educación básica hasta el nivel superior.

En los recientes cambios curriculares, se observa cómo la función docente cambia desde una visión estática y de solo transmisora de los conocimientos matemáticos a una visión de su actividad como dinámica y reflexiva, por lo que el profesor tiene ahora una mayor responsabilidad dentro de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, responsabilidad que consiste en crear una clase de matemáticas como un lugar para pensar y aprender (Codina, 2011, p. 1).

También es notoria la tendencia a considerar como otro eje principal en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas la resolución de problemas y el uso de las nuevas tecnologías.

En esta propuesta se considera emplear la resolución de problemas como herramienta de construcción de conocimientos matemáticos, utilizando problemas en un contexto significativo para los estudiantes, y cuya solución requiera el planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 y que a través de la herramienta computacional puedan apoyarse en el proceso, de manera que se enriquezca el significado de los conceptos matemáticos implícitos al resolver un sistema de este tipo como las incógnitas, coeficientes, términos independientes y soluciones del sistema.

1.2.1 Dificultades reportadas en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales

Este trabajo se apoyará en los resultados de investigaciones que se han realizado en torno a la enseñanza y el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales. Realizando la búsqueda de bibliografía relacionada, se ha observado que existe una gran diversidad de trabajos al respecto. A continuación se describen brevemente las características de algunos de estos trabajos, cuya temática se encuentra estrechamente relacionada con la del presente proyecto.

- **Oaxaca, De la Cruz y Sánchez (2002).** En este trabajo de investigación se analizan las dificultades que tiene el alumno de primer semestre de ingeniería al resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas: ellos conocen los métodos de solución, pero tienen dificultades para interpretar modelos matemáticos a partir de su gráfica o expresiones algebraicas lineales.

  Además, los autores afirman que existe una separación entre el pensamiento sintético-geométrico y el analítico-aritmético, para que los alumnos lo usen sin ninguna dificultad. Entre sus conclusiones, señalan lo siguiente:

- El alumno tiene la creencia de que la solución gráfica de una ecuación está en la intersección con los ejes x y y.
- La solución del sistema de ecuaciones lo asocia con el valor de x o de y pero no interpretan el punto asociado a esta pareja.
- El profesor en el aula induce a los alumnos a conocer los diferentes métodos particulares que existen para resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero se olvida de instruirlos en sus representaciones geométricas para obtener su ecuación a partir de su gráfica.
- Los libros de texto de bachillerato se inclinan por el pensamiento analítico-aritmético o únicamente presentan una introducción a las representaciones de situaciones gráficas y continúan resolviendo los problemas en forma algorítmica, provocando que el alumno memorice o mecanice los métodos. (Oaxaca et al., 2002, p. 5)

- **Segura (2004).** Este trabajo consiste en el diseño de una secuencia didáctica para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. La secuencia didáctica se presentó a alumnas de 15 años (tercer año de enseñanza media en el sistema escolar argentino). El autor señala que existen dificultades para trabajar problemas dados en registro verbal que involucran sistemas de ecuaciones, menciona que los estudiantes no realizan en forma correcta el pasaje del registro verbal al algebraico y que no efectúan representaciones y resoluciones gráficas de sistemas de ecuaciones lineales.

- **Cutz (2005).** Analiza algunos fenómenos relacionados con la representación geométrica del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas, y las dificultades de los estudiantes de licenciatura relativas al tránsito entre diferentes representaciones de los sistemas de ecuaciones lineales: la geométrica y la analítica. Cutz concluye que la mayoría de los estudiantes entrevistados experimentó una gran dificultad para lograr un tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales tanto de dos como de tres incógnitas. En particular, los estudiantes presentan problemas con el concepto de solución en el momento de efectuar el pasaje del modo geométrico al analítico. Recomienda relacionar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con su representación gráfica y poner mayor atención al significado del concepto, evitando que la explicación quede sujeta a los métodos de resolución. Sugiere buscar estrategias que favorezcan el tratamiento de los sistemas en los diferentes modos de pensamiento y proponer actividades a los estudiantes que requieran el tránsito entre ellos.

- **Ramírez, Oktaç y García (2005).** En su trabajo se presentan algunas dificultades que tienen los estudiantes en la representación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. En esta investigación se observa que la mayoría de los estudiantes presentan dificultad en el modo de pensamiento sintético-geométrico y además no muestran un vínculo adecuado entre los modos sintético y analítico. Los autores creen que en la enseñanza se deben de tomar en cuenta las características de los objetos matemáticos en cada modo de pensamiento, para ayudar a los estudiantes a hacer las interpretaciones necesarias y poder transitar entre los distintos modos. Asimismo, consideran que valdría la pena discutir con los estudiantes el caso de los sistemas de ecuaciones lineales que representan infinidad de soluciones, poniendo énfasis en ambos modos de pensamiento (Ramírez et al., 2005, p. 418).

- **Arellano y Oktaç (2009).** Frecuentemente se hace énfasis, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en movilizar diversos registros de representación. Sin embargo, el tratamiento de conversión de una representación a una representación de otro registro no es fácil y en ocasiones hasta imposible. Al respecto Duval (1988, citado por Arellano y Oktaç, 2009, p.1) señala: “cuando se efectúa la conversión ecuación → gráfico no surge ninguna dificultad, pero todo cambia cuando se hace la conversión inversa”. Esta investigación estuvo enfocada en identificar algunas dificultades que puedan presentar los estudiantes al tratar de poner en correspondencia el registro gráfico con el algebraico. Los autores reportan que a los alumnos se les dificulta asignar un sistema de ecuaciones lineales a un gráfico dado. Al plantear ejercicios como: ¿cuál es el sistema de ecuaciones lineales con dos variables para el gráfico?, muchos de los estudiantes no pueden asignar el sistema adecuado.

- **Garcés (2009).** El propósito de su trabajo de investigación es reflexionar sobre la incidencia que puede tener el software de geometría dinámica GeoGebra, en la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales 2x2, con alumnos de entre 15 y 17 años. En su trabajo de investigación el autor ha notado la desmotivación, el desinterés y la apatía de las nuevas generaciones frente a los modelos de formación que el sistema tradicional les ha ofrecido. Esto exige a docentes, investigadores, directivos y a toda la sociedad a asumir el reto de crear nuevas opciones de enseñanza y de estar en permanente actualización con los avances pedagógicos y tecnológicos. Es necesario desarrollar materiales, estrategias metodológicas y ambientes para diseñar procesos de enseñanza y aprendizaje que motiven y comprometan el espíritu y la voluntad de los alumnos. Frente a estos retos, las nuevas tecnologías de la información y la comunicación son de mucha ayuda, por ejemplo el uso del software matemático GeoGebra. Entre sus conclusiones señala que trabajar con el software GeoGebra favorece el desarrollo de la competencia visual en los estudiantes, permite la articulación de los diferentes registros de representación, favorece el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes a través de la resolución de problemas, motiva a los estudiantes, ya que les ofrece otras alternativas para aprender, lo cual se complementa con los métodos tradicionales y contribuye al logro de un aprendizaje significativo.

- **Trejo y Camarena (2011).** Esta investigación forma parte de un estudio cualitativo, realizado en una Universidad Tecnológica del estado de Hidalgo, México. El estudio está enmarcado en la línea de investigación de la Matemática en el contexto de las ciencias en la fase de formación docente y busca entender como las concepciones de los profesores pueden impactar directamente en el aprendizaje de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con dos incógnitas. Durante las entrevistas con los docentes de matemáticas se observó que la enseñanza del objeto matemático Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene las siguientes particularidades:
    - Predomina la enseñanza basada en concepciones tradicionales donde el profesor es el que enseña, el que sabe, y el estudiante, el que aprende y debe tener una actitud pasiva.
    - Se apreció claramente que la enseñanza del objeto matemático es entendida como la transmisión de contenidos, lo cual se manifestó mediante el tipo de ejercicios realizados en el aula y la motivación como requisito indispensable para que los estudiantes capten los contenidos.
    - En la enseñanza del objeto matemático de interés predomina la matemática con visión instrumentalista, es decir, como un conjunto de reglas y procedimientos; la enseñanza predominante es mediante la repetición y el uso de la memoria.

- **Trigueros (2012).** En su trabajo de investigación analiza las muchas dificultades que los estudiantes de secundaria y bachillerato enfrentan al resolver sistemas de ecuaciones. Muestra de ello es que suelen memorizar estrategias de solución sin comprender su significado, ni tampoco el conjunto solución. Además, los estudiantes avanzados o de nivel universitario siguen teniendo dificultades para entender el concepto de solución de un sistema de ecuaciones, así como para decidir el número de soluciones que tiene un sistema dado, y para representar las soluciones geométricamente. Este trabajo estuvo enfocado hacia el análisis de la comprensión de los estudiantes de enseñanza media e inicios de la enseñanza universitaria, así como en la naturaleza de sus dificultades. Con base en las conclusiones de ésta y otras investigaciones, además de investigaciones relacionadas con el uso de modelación, se diseñó una estrategia de enseñanza con el fin de favorecer una mejor construcción del concepto de sistema de ecuaciones y del concepto de conjunto solución.

- **Flores y Neira (2013).** Esta investigación tiene por objetivo identificar algunas deficiencias que presentan los alumnos al modelar problemas contextualizados mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. La investigación se realizó con 9 estudiantes del primer año de Ciencias Administrativas de una universidad privada de Lima. Se les propusieron tres categorías de problemas para que los modelaran usando sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Los autores señalan que la etapa de la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático es fundamental para la modelación de problemas contextualizados mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Se pudo observar en este análisis que los alumnos no validan la relación matemática que modela al problema, ni verifican o interpretan los resultados. También observaron que a medida que aumenta la dificultad de los problemas contextualizados, el número de estudiantes que entienden y traducen del lenguaje natural al matemático, dichos problemas, disminuye. Se observó que la mayoría de alumnos hicieron los problemas de la primera categoría pero ya no hicieron los problemas de la segunda. Además pudieron constatar que el conocimiento del contexto juega un papel primordial para el éxito de la resolución de situaciones contextualizadas.

- **Bozzalla y García (2014).** Este trabajo surge del deseo de colaborar con el proceso de comprensión y apropiación del concepto de sistemas de ecuaciones lineales 2x2. El abordaje tradicional de la temática ubica a los alumnos en un lugar estático, meramente algorítmico, con escasas situaciones de transferencia y en contextos carentes de variedad. Este escueto panorama motivó a los autores a diseñar estrategias didácticas, en las cuales el tema sea indagado desde distintos sistemas de representación. El interés que convocó a realizar este trabajo radica en la necesidad de elaborar una secuencia didáctica que facilite el aprendizaje del objeto matemático: sistemas de ecuaciones lineales. Consultando con algunos textos usados en la escuela media (destinada a alumnos de 13 a 17 años), se observó que el recorrido más habitual, en la presentación de la temática, comienza con la especificación de los métodos particulares utilizados en la resolución de sistemas, siguiendo con la verificación de los resultados obtenidos a través de la representación gráfica y por último, la presentación de algunos problemas para que el alumno modele a través de un sistema lineal. Partiendo de este panorama, se generó una secuencia didáctica donde el eje constructor de la misma radica en la circulación, en ambos sentidos, de los distintos registros de representación: registros verbales (RV), algebraicos (RA) y gráficos (RG). Según Duval (1999), la relación entre las representaciones y los diferentes registros genera una interpretación semiótica del vínculo entre los diferentes sistemas de signos que simbolizan el mismo objeto.

  Los autores señalan que los alumnos presentan importantes dificultades a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales; los mismos radican en problemas sobre la manipulación aritmética del sistema, en la verbalización de las ecuaciones involucradas y en la resolución gráfica del sistema presentado. Además, los alumnos no son capaces de verificar la solución obtenida y en pocas ocasiones, a partir del análisis gráfico, pasan al abordaje algebraico. Por otro lado, en general, los alumnos presentan dificultades en el tratamiento y en la expresión de la solución de una ecuación con infinidad de soluciones.

Considerando los resultados de los trabajos anteriores, las dificultades que presentan los estudiantes en el estudio de este tema consisten principalmente en el tránsito entre diferentes representaciones para los sistemas de ecuaciones lineales, sobre todo, en el uso del registro gráfico para representar las soluciones de un sistema y asociarlo con su representación algebraica. Además de esto, por lo general el estudio de este tema está centrado en los procedimientos algebraicos que dan poco sentido al trabajo de los estudiantes, dando poca importancia al uso de las representaciones gráficas. Por otro lado, los estudiantes presentan dificultades al tratar problemas enunciados en el registro verbal, dado que no realizan de forma correcta la conversión al registro algebraico. Tomando en cuenta estos factores, en el diseño de las actividades didácticas hemos propuesto estrategias que favorezcan el tratamiento de los sistemas en sus diferentes representaciones, todo ello apoyado por las ventajas que ofrece el software GeoGebra, contribuyendo a un aprendizaje más significativo.

1.2.2 La importancia de los sistemas de ecuaciones lineales

Las dificultades encontradas en el estudio de este tema pudiera ser razón suficiente para justificar este proyecto; sin embargo, no es la única. A continuación, presentamos las diversas aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales.

Una amplia selección de aplicaciones ilustra el poder del álgebra lineal en cuyo corazón se encuentran los sistemas de ecuaciones lineales, útiles para simplificar los cálculos en ingeniería, ciencia computacional, matemáticas, física, biología, economía y estadística (Lay, 2007).

Además, los sistemas de ecuaciones lineales son importantes por su aplicación en distintas disciplinas como la ingeniería: flujo vehicular y circuitos eléctricos, la economía: curva de oferta-demanda y el modelo económico de

Leontief (Lay, 2007); la computación: los motores de búsqueda, e. g. Google (Page y Brin, 1999) o la restauración de imágenes digitales (Mery y López, 2003).

Otros ejemplos que muestran la aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales son:

- **Exploración petrolera.** Cuando un barco busca depósitos submarinos de petróleo, diariamente sus computadoras resuelven miles de sistemas de ecuaciones lineales por separado. La información sísmica para elaborar las ecuaciones se obtiene a partir de ondas de choque submarinas creadas mediante explosiones con pistolas de aire. Las ondas rebotan en las rocas que hay bajo la superficie marina y se miden empleando geófonos conectados a extensos cables instalados debajo del barco.

- **Redes eléctricas.** Los ingenieros utilizan programas de cómputo de simulación para diseñar circuitos eléctricos y microchips que incluyen millones de transistores. Estos programas utilizan técnicas de álgebra lineal y sistemas de ecuaciones lineales.

- **Programación lineal.** En la actualidad, muchas decisiones administrativas importantes se toman con base en modelos de programación lineal que utilizan cientos de variables. Por ejemplo, la industria de las aerolíneas emplea programas lineales para crear los itinerarios de las tripulaciones de vuelo, monitorear las ubicaciones de los aviones, o planear los diversos programas de servicios de apoyo como mantenimiento y operaciones en terminal.

- **Motores de búsqueda.** Cada motor de búsqueda necesita tres elementos básicos: un rastreador web, una base de datos para almacenar la información que encuentra, y un algoritmo para determinar el orden de las páginas devueltas por cualquier consulta de búsqueda. Los dos primeros elementos se pueden automatizar fácilmente, el problema principal radica en el tercero, y aquí es donde las herramientas matemáticas son la clave para la solución. Sin duda uno de los motores de búsqueda de mayor éxito es Google, y su éxito se atribuye principalmente, a su algoritmo de búsqueda, que muestra primeramente los resultados más relevantes. El núcleo de este algoritmo, conocido como PageRank, evalúa cada página web y calcula su importancia en relación con otras páginas web, donde la importancia de una página web puede ser determinada por la importancia de las páginas que la referencian. El algoritmo PageRank de Google utiliza sistemas de ecuaciones lineales para encontrar la página más importante de la búsqueda.

- **Balanceo de reacciones químicas.** Una aplicación sencilla de los sistemas de ecuaciones se da en el balanceo de reacciones químicas. La problemática consiste en determinar el número entero de moléculas que intervienen en una reacción química cuidando siempre que el número de átomos de cada sustancia se preserve.

Son múltiples las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales por esto, estudiarlos tiene sentido práctico, y sobre todo estudiar los distintos modos de representación de los sistemas de ecuaciones lineales (tabular, algebraico, gráfico).

Dado que el interés de mi trabajo es el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, se consideró conveniente revisar la situación curricular de este contenido matemático para conformar un panorama del mismo.

1.2.3 Los sistemas de ecuaciones lineales en el currículo educativo

En México, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales se enseña desde la educación secundaria; evidencia de ello se encuentra en la Reforma a la Educación Básica 2011 (SEP, 2011a) nivel secundaria, donde el programa de estudios de segundo grado contiene en el *Bloque V*, el aprendizaje esperado: *resuelve problemas que implican el uso de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas*, correspondiente al eje Sentido numérico y pensamiento algebraico (SEP, 2011b, p. 43). Este bloque sugiere enseñar la resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones 2x2 con coeficientes enteros, utilizando el método más pertinente (suma y resta, igualación o sustitución). También se estudia la representación gráfica de un sistema de ecuaciones 2x2 con coeficientes enteros, reconociendo el punto de intersección de sus gráficas como la solución del sistema.

El tema continúa apareciendo en el tercer grado de secundaria, específicamente en el *Bloque V* (SEP, 2011b, p. 51). El primer aprendizaje esperado para este bloque consiste en *resolver y plantear problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado*.

Tanto en el segundo como en el tercer grado, los sistemas están formados por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y coeficientes enteros.

Por otro lado, su estudio continúa en la educación media superior. De acuerdo con el programa de estudio Matemáticas I de la Dirección General del Bachillerato, en los *Bloques VII y VIII* se estudian los sistemas de ecuaciones 2x2 y 3x3, respectivamente (DGB, 2013).

En la formación escolar de un individuo, los sistemas de ecuaciones lineales son un tema repetido y fundamental; sin embargo, la experiencia y las investigaciones muestran que, aún en el nivel superior, persisten las dificultades con los cálculos aritméticos e interpretaciones erróneas sobre conceptos como solución o sistema de ecuaciones lineales (Trigueros, 2012); además del escaso análisis del funcionamiento del método de resolución utilizado, el cual regularmente se enseña como una receta para ser aplicada mecánicamente.

1.2.4 Software dinámico como herramienta didáctica

En la época actual la tecnología ha pasado a ser de un lujo a una necesidad: la sociedad depende mucho de ella para poder funcionar. Así es como hoy en día utilizamos las tecnologías, ya sea para poder transportarnos al lugar de trabajo o al supermercado, para informarnos de los acontecimientos del mundo, e incluso para preparar una taza de café. Tanto se han acortado las distancias gracias a las tecnologías de la información que nos podemos enterar de lo sucedido en el otro lado del mundo, con un solo clic, minutos e incluso segundos después de ocurrido.

Así como la tecnología ha envuelto de tal manera al ser humano desde muchos aspectos (como en la comunicación, el trabajo, entretenimiento) era normal que su potencial llegara al ámbito educativo, ofreciendo la oportunidad de permitir nuevas y mejores formas de que el estudiante aprenda, específicamente desde el punto de vista exploratorio, es decir, que el estudiante, mediante la manipulación de un software educativo pueda logra un mejor aprendizaje, y en el mejor de los casos, llegar a sus propias conclusiones. (Arias y Leiva, 2013).

Sin embargo, la línea que separa el empleo de las tecnologías digitales como medio y como fin es muy delgada, tanto así que, cuando se utiliza un software didáctico para las lecciones de matemáticas, es muy fácil que los docentes terminen enseñando a sus estudiantes a utilizar sus herramientas, cómo realizar construcciones, etc. en lugar de utilizarlo para lograr un objetivo cognitivo o una habilidad en el alumno.

Un error común que lamentablemente es habitual notarlo en docentes, es utilizar una computadora y un proyector para explicar un concepto concreto, pero sin cambiar realmente la manera de enseñar, es decir, haciendo lo mismo que se hubiera hecho en un pizarrón, por lo que no hay ganancia alguna al utilizar las tecnologías digitales, sino más bien hay pérdidas y contratiempos, pensando en por ejemplo, gasto de electricidad innecesaria, tiempo preparando el trabajo que presentará en la computadora, tiempo en preparar el equipo conectándolo y luego desconectándolo, entre otros aspectos.

A través del uso de tecnología digital para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas puede promoverse el trabajo en red y colaborativo, la discusión y el intercambio de ideas, la realización en conjunto de la propuesta y la autonomía de los alumnos. Es importante que el estudiante sea acompañado por una o varias preguntas que le ayuden a dirigir su atención hacia aquel objetivo que el docente desea que el estudiante logre ya que, sin esta guía, puede que el alumno no llegue a ese cierre o aprendizaje esperado.

Por otra parte, existe en el mercado una gran variedad de software dinámico; uno de ellos es GeoGebra que combina, dinámicamente, geometría, álgebra, análisis y estadística. Además de ser un software gratuito, la característica más destacable de GeoGebra es la múltiple percepción de los objetos, ya que cada objeto tiene varias representaciones que se pueden apreciar desde la vista gráfica, icónica, algebraica y tabular. De esta forma, se establece una permanente conexión entre los símbolos algebraicos, las representaciones gráficas y las representaciones tabulares. GeoGebra posee múltiples ventajas entre ellas las siguientes:

1.2.4.1 Ventajas del uso del software GeoGebra

1) Es un software libre

Puede ser descargado libremente de la página web sin necesidad de pagar por una licencia para su uso.

2) Es multiplataforma

Existen instaladores del software para diversas plataformas, tales como Windows, Ubuntu, Mac, e incluso tabletas bajo el sistema Android.

3) Multiárea

GeoGebra trabaja tanto en el área de Geometría (su principal fortaleza), como también en otras áreas, tales como Trigonometría, Álgebra, Funciones, Estadística, Probabilidad, entre otros.

4) Aspecto motivacional

El simple hecho de utilizar una computadora en una clase de matemática puede crear un efecto motivacional en los estudiantes.

5) Apto para demostraciones visuales

Al ser GeoGebra un software dinámico educativo, permite poder realizar demostraciones visuales y dinámicas para un uso práctico y ameno en las clases de matemática, esto gracias a herramientas tales como deslizadores y creación de botones.

6) Actualización constante

Hay un gran grupo de investigadores que trabajan constantemente y sin fines de lucro en el software, con la finalidad de agregar nuevas funciones o mejorar las que ya cuenta.

7) Applets

GeoGebra cuenta con una opción en la que puede crear un applet con la construcción de manera que puede ser subida a internet y ser trabajada desde allí sin necesidad de tener instalado el software en la computadora, pudiendo acceder a sus herramientas desde cualquier lugar y a cualquier hora.

GeoGebra permite abordar los contenidos matemáticos desde una forma dinámica e interactiva que ayuda a los estudiantes a visualizar los contenidos que son más complicados de afrontar desde un dibujo estático.

Por lo anterior, hemos decidido utilizar el software GeoGebra para soportar el diseño de actividades didácticas con el uso de la tecnología en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, de manera que se promueva la visualización en los estudiantes y el tránsito entre la representación tabular, algebraica y gráfica.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Diseñar actividades didácticas mediadas por el uso de la tecnología digital, que promuevan el desarrollo de habilidades en la formulación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 en el nivel medio superior.

1.3.2 Objetivos Específicos

Para alcanzar el objetivo general se plantean los siguientes objetivos específicos:

Contar con:

- Problemas provenientes de contextos extra-matemáticos sencillos que para su solución requieran la formulación de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

- Planteamientos adecuados para el nivel de los estudiantes acordes a los contextos seleccionados.

- Applets diseñados de acuerdo con los planteamientos de los problemas seleccionados que involucren el uso de diferentes representaciones dinámicas elaboradas con el software GeoGebra.

CAPÍTULO 2. ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En este capítulo se presentan las fundamentaciones teórica y metodológica que sustentan este proyecto de tesis. Dicho capítulo se encuentra dividido en dos apartados: el primero de ellos corresponde a los elementos teóricos utilizados en el diseño y valoración de las actividades didácticas para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2. El segundo apartado muestra los aspectos metodológicos que corresponden a las fases y actividades realizadas para lograr los objetivos establecidos.

2.1 Elementos teóricos

2.1.1 Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática

En este trabajo consideramos algunos de los elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática desarrollado por Godino y colaboradores (2002), denotado también como EOS. Consiste en un marco teórico que permite analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le sirven de soporte, así como las situaciones y factores que condicionan su desarrollo. Este enfoque teórico se designa como ontosemiótico por el papel esencial que se le atribuye al lenguaje y a la categorización de los diferentes tipos de objetos que emergen de la actividad matemática. Se concibe el lenguaje matemático de una manera general, incluyendo como tal la variedad de medios de expresión simbólica, gráfica, etc., y considera como objeto matemático cualquier tipo de entidad real o imaginaria al cual nos referimos cuando realizamos, comunicamos o aprendemos matemáticas.

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática: como actividad de resolución de problemas, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado.

En términos teóricos el EOS asume una visión pragmática del significado, que implica concebir a los objetos matemáticos como herramientas conceptuales que surgen y se desarrollan a través de su uso.

Para este trabajo se consideran algunas nociones teóricas que este enfoque nos aporta; entre ellas están las prácticas y los sistemas de prácticas, los objetos personales e institucionales y sus significados, las configuraciones epistémicas, los tipos de significado institucionales y personales, y los niveles de análisis didáctico. Estas herramientas teóricas son fundamentales para analizar la actividad matemática y los objetos involucrados en la misma.

2.1.1.1 Sistemas de prácticas

Anteriormente se ha mencionado que el EOS asume una concepción pragmática de los significados, ligada a las prácticas matemáticas desarrolladas por los individuos y las instituciones cuando resuelven situaciones problemáticas.

Entenderemos como *práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas* (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas.

Para efectos de este trabajo, se considera de gran importancia conocer las prácticas matemáticas que se ponen de manifiesto cuando se resuelven situaciones problemáticas que son modeladas a través de SEL 2x2, ya que el significado de este objeto se define en términos de las prácticas matemáticas asociadas a éste.

2.1.1.2 Significados personales e institucionales

Debido a que los sistemas de prácticas promovidos cambian de una institución (o persona) a otra, los significados que se tienen de los objetos también varían. Por ejemplo, en una comunidad se puede promover la resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2X2 de forma algebraica por los métodos más comunes (suma o resta, igualación y sustitución), mientras que para otra comunidad el sistema de prácticas consiste en modelar y resolver SEL 2x2 a través de métodos gráficos o numéricos, lo cual conlleva a que el mismo objeto matemático adquiera distintos significados.

Se considera al *significado personal o significado institucional de un objeto matemático al sistema de prácticas operativas y discursivas que hace una persona o una institución para resolver un campo de problemas* asociado a éste, (Godino y Batanero, 1994, p.340).

Al diseñar un proceso de enseñanza sobre algún objeto matemático es necesario tener en cuenta el significado que se pretende promover en la institución en la que se implementará tal proceso. En este caso, la propuesta didáctica va dirigida a estudiantes de nivel medio superior, para el curso de Matemáticas I en el estudio del contenido del bloque 7 correspondiente a los sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

Los planes y programas de estudios de la DGB (Dirección General de Bachillerato) propuestos para la materia, el libro de texto sugerido y los profesores que diseñaron estos materiales nos pueden proporcionar información sobre las prácticas matemáticas, los tipos de problemas y, por tanto, sobre los significados que se quieren promover en los estudiantes de esta institución.

Analizando el programa de estudios, algunas de las prácticas que se desean promover en los estudiantes son las siguientes: resolver e interpretar sistemas de ecuaciones con dos incógnitas mediante métodos numéricos (determinantes), algebraicos (eliminación por igualación, suma o resta y sustitución) y gráficos; expresar y solucionar situaciones utilizando sistemas de ecuaciones con dos incógnitas; identificar gráficamente sí un sistema de ecuaciones simultáneas tiene una, ninguna o infinidad de soluciones; resolver problemas que se plantean en lenguaje algebraico utilizando métodos algebraicos, numéricos y gráficos; elaborar o interpretar gráficas, tablas y mapas, para resolver situaciones diversas que conllevan el uso de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

2.1.1.3 Objetos matemáticos

Las prácticas mencionadas en el párrafo anterior involucran un conjunto de objetos: ecuación lineal, sistemas de ecuaciones lineales, incógnitas, coeficientes del sistema, constantes, método de sustitución, método de igualación, método de suma y resta, gráficas de las ecuaciones en el plano cartesiano, solución del sistema, determinante del sistema. Podemos decir que para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema, como plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, vemos el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica son satisfactorias**.**

Designaremos como un *objeto matemático a todo lo que es indicado, señalado, o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas*, (Godino, 2002). Si los objetos son propios de un individuo, los denominaremos *objetos personales*; en caso contrario, si son compartidos en el seno de una institución o comunidad, serán *objetos matemáticos institucionales*. Una *institución* está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas.

En el proceso de resolución de una situación problemática, el sujeto realiza una serie de actividades cognitivas, algunas de ellas son *ostensibles* (observables), tales como: hacer un diagrama, efectuar una operación, comunicar una idea; otras son acciones interiorizadas *no ostensibles*, tales como: hacer comparaciones, analogías, deducciones, conjeturas, generalizaciones, entre otras.

Los sistemas de prácticas implicados en la resolución de cierto tipo de problemas requieren el uso de un lenguaje especial: tablas de valores, gráficas, expresiones algebraicas, etc.; definiciones de los objetos matemáticos, proposiciones, procedimientos y argumentos que justifican y validan las acciones; a su vez, durante la realización de estas prácticas se crea nuevo lenguaje, nuevas definiciones, se utilizan nuevos procedimientos y se utilizan otros argumentos; es decir, de un sistema de prácticas emergen objetos matemáticos que modifican o complementan los existentes.

Dichos objetos matemáticos, son conocidos en el EOS como objetos primarios y se clasifican de la siguiente manera:

1. *Lenguaje.* Son todos aquellos términos, expresiones, notaciones, gráficos, en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,...).
2. *Situaciones – problemas.* Aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, etc.
3. *Conceptos.* Son todos aquellos introducidos mediante definiciones o descripciones, por ejemplo: recta, punto, número, media, función, ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales.
4. *Proposiciones.* Enunciados sobre conceptos.
5. *Procedimientos.* Se consideran los algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.
6. *Argumentos.* Enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos.

En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando *configuraciones epistémicas*, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.

2.1.1.4 Tipología de Significados

Son varios los elementos que se consideran de importancia tanto en el diseño como en la planeación de actividades didácticas; uno de ellos es la elección de los sistemas de prácticas que se promoverán sobre un conjunto de objetos matemáticos, para que los estudiantes los conozcan y los utilicen en la resolución de cierto tipo de problemas.

Los objetos matemáticos adquieren su significado de acuerdo con el sistema de prácticas asociados a ellos; dichos sistemas de prácticas pueden ser compartidos por una institución (significados institucionales) o realizados por una persona en particular (significados personales). En este caso, es necesario presentar una tipología para referirse a ellos, según su uso.

Con relación a los significados institucionales se presentan los siguientes tipos:

- *Referencial:* sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido.
- *Pretendido:* sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- *Implementado:* Es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- *Evaluado:* el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

Para la elaboración de este proyecto, tomaremos en cuenta los sistemas de prácticas que solicita el programa de estudios de la Dirección General del Bachillerato para Matemáticas I, la bibliografía sugerida en el programa y el libro de texto Matemáticas 1 de COBACH. Estos sistemas de prácticas conformarán el *significado institucional de referencia.*

Considerar el diseño de actividades didácticas para promover la construcción de significados para todos los objetos matemáticos incluidos en el programa de estudios y libros de texto sugeridos para el curso, rebasaría los objetivos de este trabajo, además implicaría una gran responsabilidad y tiempo para su culminación, por lo tanto, es necesario realizar una selección de los sistemas de prácticas que conforman el *significado institucional de referencia* y elegir sólo los que deseamos promover mediante las actividades didácticas.

Al sistema de prácticas matemáticas que planeamos promover con nuestra propuesta didáctica, el cual está formado por la selección de prácticas matemáticas que hicimos del significado institucional de referencia, le llamamos *significado institucional pretendido*.

2.1.1.5 Conflictos semióticos

Las investigaciones realizadas en el marco del EOS han puesto de manifiesto un fenómeno relevante para la didáctica de las matemáticas:

"...la realización de la mayoría de prácticas matemáticas conlleva una complejidad semiótica importante y las representaciones utilizadas son determinantes, tanto para reducir o aumentar esta complejidad, como para la realización efectiva de la práctica" (Font, 2005, p. 121).

Según como se gestione en el proceso de instrucción la complejidad semiótica asociada a las prácticas matemáticas, se puede facilitar (o no) la aparición de *conflictos semióticos*, entendidos como*:*

> *"...disparidad o desajuste entre los contenidos atribuidos a una misma expresión por el alumno y la institución"* (Godino, 2002, p. 258).

2.1.1.6 Niveles de análisis didáctico de los procesos de estudio matemático

Por último, con el propósito de describir, explicar y valorar un proceso de instrucción, el EOS señala cinco niveles de análisis didáctico, de los cuales se estarán considerando los siguientes:

- *Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas,* el cual se orienta a estudiar las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de estudio analizado.
- *Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos,* el cual se centra en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas y también que emergen de ellas.

- *Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio,* el cual constituye una síntesis final orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

El EOS proporciona una herramienta muy útil para valorar la pertinencia de un proceso de instrucción desde su diseño hasta su implementación; esta herramienta es la noción de idoneidad didáctica, que se define como la articulación de seis idoneidades parciales: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica. (Godino, 2011)

Para cada una de las seis idoneidades parciales se presentan una serie de componentes y descriptores que facilitan la valoración de tales idoneidades.

Los descriptores de las distintas idoneidades parciales, y las interacciones entre las mismas, serán de gran utilidad como guía para el diseño de las actividades didácticas en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

A continuación se presentan estas idoneidades, sus componentes y descriptores.

1. Idoneidad epistémica: Grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

COMPONENTES	DESCRIPTORES
Situaciones-problemas	-Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. -Propuesta de situaciones de generación de problemas (problematización).

Lenguaje	-Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), traducciones y conversiones entre los mismos. -Nivel del lenguaje adecuado a quienes se dirige. -Propuesta de situaciones de expresión e interpretación.
Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	-Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. -Presentación de los enunciados y procedimientos fundamentales del tema según el significado de referencia y el nivel educativo. -Propuesta de situaciones para la generación y negociación de las reglas.
Argumentos	-Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen. -Se promueven momentos de validación.
Relaciones (conexiones, significados)	-Relación y articulación significativa de los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.

Tabla 1. Componentes y descriptores de la idoneidad epistémica.

2. Idoneidad cognitiva: Grado en que los significados implementados (pretendidos) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.

COMPONENTES	DESCRIPTORES
Conocimientos previos (Componentes similares a la	-Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio).

dimensión epistémica)	-Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	-Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.
Aprendizaje	-Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidas o implementadas.

Tabla 2. Componentes y descriptores de la idoneidad cognitiva.

3. Idoneidad mediacional: Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

COMPONENTES	DESCRIPTORES
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	-Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido. -Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	-El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. - El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). -El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (De enseñanza colectiva	-Adecuación de los significados pretendidos /implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial).

/tutorización; tiempo de aprendizaje)	-Inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema. -Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Tabla 3. Componentes y descriptores de la idoneidad mediacional.

4. Idoneidad emocional*:* Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes.

COMPONENTES	DESCRIPTORES
Intereses y necesidades	-Selección de tareas de interés para los alumnos. -Proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	-Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. -Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	-Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. -Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Tabla 4. Componentes y descriptores de la idoneidad emocional.

5. Idoneidad interaccional: Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.

COMPONENTES	DESCRIPTORES
Interacción docente-discente	-El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.).

	-Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.). -Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento. -Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. -Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión.
Interacción entre discentes	-Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. -Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	-Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación).
Evaluación formativa	-Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.

Tabla 5. Componentes y descriptores de la idoneidad interaccional.

6. Idoneidad ecológica: Grado de adaptación curricular, socio-profesional y conexiones intra e interdisciplinares.

COMPONENTES	DESCRIPTORES
Adaptación al currículo	-Los significados, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	-Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. -Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.

Adaptación socio-profesional y cultural	-Los significados contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
Conexiones intra e interdisciplinares	-Los significados se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

Tabla 6. Componentes y descriptores de la idoneidad ecológica.

2.2 Consideraciones metodológicas

2.2.1 Metodología del diseño

La metodología toma sentido de acuerdo con el marco teórico utilizado. Las acciones metodológicas contempladas para este proyecto son las siguientes:

- **Revisión Bibliográfica.** Revisión de tesis y reportes de investigación que permitió identificar dificultades en la enseñanza y aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Esto nos brindó elementos que han servido de guía para el diseño de las actividades didácticas propuestas.

- **Determinación del Significado Institucional de Referencia.** Se revisaron los planes y programas de estudio de la Dirección General del Bachillerato, del libro de texto Matemáticas 1 (Vargas et al., 2014) y de la bibliografía sugerida en el programa, para identificar las prácticas matemáticas y los tipos de problemas.

- **Determinación del Significado Institucional Pretendido.** Se seleccionaron las prácticas matemáticas y los problemas identificados como parte del significado institucional de referencia para plantear el significado institucional pretendido; es decir, los sistemas de prácticas que deseamos promover.

- **Diseño de las actividades didácticas.** Se diseñaron las actividades, los applets y las hojas de trabajo de acuerdo con los problemas seleccionados y los componentes y descriptores de la idoneidad didáctica.

- **Análisis y valoración a priori de las actividades didácticas.** Realización de análisis y valoración de las actividades antes de su puesta en escena, donde se han contemplado las componentes de la idoneidad didáctica propuestas por Godino (2011).

- **Puesta en escena.** Puesta en escena de las actividades didácticas a un grupo de estudiantes para identificar errores y debilidades en el diseño, así como conflictos semióticos potenciales.

- **Análisis y valoración a posteriori de las actividades didácticas.** Realización de análisis y valoración de las actividades, posteriores a la implementación, utilizando para ello los criterios de idoneidad didáctica.

- **Refinamiento de las actividades didácticas.** Se incorporaron las modificaciones a las actividades didácticas con base en las observaciones y el análisis de la puesta en escena.

2.2.2 Metodología para la puesta en escena de las actividades didácticas

Como medio para refinar las actividades didácticas diseñadas, consideramos necesario realizar la puesta en escena con estudiantes de bachillerato.

Durante la puesta en escena fue indispensable la toma de datos que nos permitió contar con elementos para realizar modificaciones y mejoras en la estructura y diseño de dichas actividades. Con base en esta necesidad, decidimos utilizar una herramienta de recolección de datos y dado que nos interesó obtener información sobre el trabajo de los estudiantes y las dificultades que se presentaron en la realización de las actividades, este instrumento consistió en las hojas de trabajo que han sido diseñadas para el estudio de este tema y que los estudiantes utilizaron durante esta fase de experimentación.

A continuación se describe la planeación general de la toma de datos de la puesta en escena de las actividades, necesaria para el análisis, tanto del proceso de aprendizaje, como de las actividades didácticas y el uso del software GeoGebra que las complementan.

2.2.2.1 Planeación de la puesta en escena de las actividades didácticas y la toma de datos

En esta fase, se realizó la aplicación o la puesta en escena de las actividades diseñadas y la toma de datos respecto al desempeño, dificultades y logros de los alumnos en cada una de las actividades aplicadas.

Consideramos a priori que al poner en escena las actividades didácticas de nuestra propuesta podríamos obtener información sobre los siguientes aspectos:

1. Conocer si las situaciones extra-matemáticas despiertan el interés de los estudiantes.
2. Conocer el grado en que se alcanzaron los objetivos de las actividades y cómo estas contribuyen a enriquecer el significado de los estudiantes con relación al objeto matemático.
3. Constatar si la redacción de las preguntas e instrucciones de las hojas de trabajo son entendibles y claras.
4. Qué tan adecuados fueron los applets creados con GeoGebra para favorecer la construcción de los significados pretendidos y qué cambios requerirían.
5. Conocer los tiempos estimados para las actividades.
6. Identificar posibles conflictos semióticos

Para el logro de lo arriba planteado, se observó la dinámica de los estudiantes en los espacios asignados para el trabajo individual, en equipo y grupal.

2.2.2.2 Instrumento de recolección de datos

Como se ha mencionado anteriormente, el instrumento que se utilizó para la toma de datos, fueron las hojas de trabajo para los estudiantes que contienen el enunciado del problema y varios puntos con preguntas e instrucciones. En éstas, se solicitó a los estudiantes que realizaran todas las anotaciones y comentarios escritos posibles, respecto a las dificultades que presentaron, problemas para entender las instrucciones o preguntas, procedimientos que utilizaron para responder alguna cuestión y argumentos o justificaciones solicitadas en algunas preguntas.

El interés por estudiar y analizar las hojas de trabajo consistió en obtener evidencia detallada del trabajo de los estudiantes en las actividades propuestas, donde las observaciones hechas contribuyeron a mejorar el diseño de las mismas.

Además, se utilizó un cuestionario para obtener información adicional, con respecto al uso del software, al trabajo en equipo y grupal, entre otros aspectos (Anexo 2).

2.2.2.3 Características del escenario

La puesta en escena se realizó en una institución de nivel medio superior y con alumnos del segundo semestre, por el periodo de realización de la misma. Para ello se tomaron en cuenta las siguientes condiciones:

- Las actividades propuestas se aplicaron a un grupo de estudiantes de segundo semestre de bachillerato.
- La puesta en escena fue conducida por la diseñadora de las actividades.
- Durante la implementación de las actividades didácticas de la propuesta, se consideró que lo más favorable era trabajar en un centro de cómputo,

donde se contara con al menos una computadora por cada dos estudiantes, y que las computadoras tuvieran instalado el software de geometría dinámica GeoGebra.

- Que cada estudiante contara con las hojas de trabajo correspondientes a las actividades didácticas.

2.2.2.4 Análisis de la información e implicaciones para el diseño

Aplicadas las actividades, las hojas de trabajo fueron recolectadas para realizar el análisis de las respuestas y notas hechas por los estudiantes, de manera que ello permitiera tomar decisiones o realizar las acciones convenientes, respecto al diseño de las hojas de trabajo y los applets de GeoGebra.

Las respuestas de los estudiantes fueron analizadas, observando si respondían lo que se esperaba en cada pregunta. Además, se analizó si las preguntas siguieron una secuencia adecuada, de manera que los estudiantes no presentaran dificultades en el tránsito entre una y otra.

A lo largo del desarrollo de las actividades se promovió la argumentación de las respuestas de los estudiantes, analizando en qué medida lo lograron e hicieron lo posible para justificar sus respuestas de alguna forma, de tal manera que estos apartados no quedaran vacíos.

De igual forma, se pretendió identificar conflictos semióticos que pudieran presentar los estudiantes.

Al finalizar el análisis de la puesta en escena, se realizaron las modificaciones necesarias, tanto a las hojas de trabajo como a los applets diseñados, con el fin de mejorar las actividades propuestas.

CAPÍTULO 3. EL DISEÑO Y ANÁLISIS DE LA PROPUESTA

En los capítulos anteriores se presentaron los resultados de los análisis preliminares necesarios para la realización de este proyecto; entre los cuales podemos mencionar la revisión y análisis de resultados de investigaciones sobre las dificultades reportadas en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, la investigación sobre sus aplicaciones, el análisis curricular de la presencia del tema en los diferentes niveles educativos, la selección de los elementos teóricos y la formulación tanto del objetivo general como de los objetivos específicos, los cuales pudimos lograr a través de las acciones metodológicas que también han sido precisadas con anterioridad.

En este capítulo se describen las acciones que, de igual forma, se consideraron necesarias para realizar el diseño de las actividades didácticas: se realizó el análisis de los *Significados Institucionales de Referencia y Pretendido*; posteriormente se realizó el diseño de las hojas de trabajo y los archivos necesarios creados con el software GeoGebra.

A continuación se describe con detalle la caracterización de estos significados.

3.1 Significado Institucional de Referencia

La revisión de documentos de investigación relacionados con las dificultades de los alumnos en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, del programa de estudios para Matemáticas I de la DGB y de la bibliografía sugerida para el bloque, el análisis de las prácticas matemáticas y objetos primarios presentes en el libro de texto Matemáticas 1 de COBACH, así como el análisis de la idoneidad didáctica en sus diferentes dimensiones, permitieron caracterizar el S*ignificado Institucional de Referencia* para los sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

3.1.1 Revisión del programa de estudios para Matemáticas I de la DGB

En este programa se consignan las competencias genéricas y disciplinares básicas relativas a la asignatura de Matemáticas I que se desean promover en cada bloque. Para este diseño, se han revisado las competencias genéricas y disciplinares específicas del *Bloque 7* (Anexo 4), así como los desempeños esperados del estudiante al concluir el bloque, los cuales se enlistan a continuación:

- Reconoce el modelo algebraico de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.
- Resuelve e interpreta sistemas de ecuaciones con dos incógnitas mediante métodos:

  -Numérico: Determinantes.

  -Algebraicos: Eliminación por igualación, reducción (suma y resta) y sustitución.

  -Gráficos.
- Expresa y soluciona situaciones utilizando sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.
- Identifica gráficamente si un sistema de ecuaciones simultáneas tiene una, ninguna o infinitas soluciones.
- Resuelve problemas que se plantean en el lenguaje algebraico utilizando métodos algebraicos, numéricos y gráficos.
- Elabora o interpreta gráficas, tablas y mapas, para resolver situaciones diversas que conllevan el uso de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. (DGB, 2013, p. 37)

3.1.2 Análisis de las prácticas matemáticas y los objetos primarios presentes en el libro de texto Matemáticas 1

Uno de los subsistemas de nivel medio superior más representativos del estado es el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH), que ha adoptado un modelo educativo basado en competencias, de acuerdo con los requerimientos de la RIEMS. Bajo esta perspectiva fue elaborado para esta institución el libro de texto *Matemáticas 1* (Vargas et al., 2014) por académicos del grupo de trabajo en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora.

Considerando que este libro de texto es uno de los más recientes y se diseñó con base en los planteamientos de la RIEMS, se eligió para realizar el análisis de las prácticas matemáticas y los significados que se promueven para los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 en este nivel educativo.

La versión que analizamos es la correspondiente a la primera edición del 2014, en la cual se declara que el módulo se desarrolla considerando el modelo educativo basado en competencias, de acuerdo con los cambios curriculares impulsados en el país. Además, se declara que la visión se centra en la resolución de problemas como estrategia para aprender, dejando atrás el aprendizaje memorístico. (Vargas et al., 2014, p. X)

El módulo está dividido en 9 bloques temáticos. Se centra, en su parte matemática, en el desarrollo de competencias ligadas a conocimientos básicos de álgebra. En cada bloque se presentan algunas secuencias de actividades didácticas que se organizan en tres secciones: de *inicio*, donde las actividades que se proponen tienen el propósito de motivar los conocimientos, actitudes y habilidades que se requieren para el nuevo conocimiento a estudiar; de *desarrollo*, donde se plantean situaciones o problemas que conducirán a construir nuevos conocimientos y desarrollar nuevas habilidades, en concordancia con la temática central del bloque; y de *cierre*, donde se hace un recuento de lo aprendido en las actividades de desarrollo, se organizan y sistematizan todos los conocimientos matemáticos que surgieron en la secuencia.

De acuerdo con el marco teórico EOS, el significado de un objeto matemático puede variar en distintas instituciones. El propósito de este apartado es describir el *Significado Institucional de Referencia* de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 a partir del análisis ontológico-semiótico, identificando los objetos primarios que se involucran en las prácticas matemáticas del *Bloque 7. Resuelve Ecuaciones Lineales II*.

Prácticas matemáticas

- Leer e interpretar textos para resolver problemas que conllevan el uso de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.
- Calcular porcentajes.
- Utilizar tablas de valores numéricos como apoyo para el planteamiento algebraico de las condiciones del problema.
- Reconocer las relaciones lineales entre los datos de un problema y expresarlas mediante lenguaje algebraico.
- Argumentar la validez de los valores numéricos propuestos en las tablas de valores.
- Modelar algebraicamente las condiciones del problema mediante dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Graficar ecuaciones lineales en el plano cartesiano.
- Obtener las coordenadas del punto de intersección de las rectas.
- Obtener la expresión algebraica que representa a una ecuación a partir de su gráfica.
- Utilizar los métodos algebraicos (sustitución, igualación y suma o resta) para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2.
- Justificar los pasos de los procedimientos algebraicos para resolver un SEL 2x2.
- Explicar e interpretar los resultados obtenidos.
- Identificar gráficamente si un sistema de ecuaciones lineales 2x2 tiene una, ninguna o infinidad de soluciones.
- Utilizar la Regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Calcular el determinante del sistema.
- Encontrar el sistema de ecuaciones 2x2 a partir de su solución.

Situaciones

- Resolución de problemas que requieren la formulación y resolución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2:
  - Problema del laboratorista.
  - Mezcla de dos tipos de aceite.
  - Fabricación de joyeros de madera.
  - Números capicúas.
  - Mezcla de dos tipos de alimentos para ganado.
  - Negocio de artículos electrónicos.

- Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Resolución algebraica de sistemas de ecuaciones 2x2 por los métodos algebraicos (sustitución, igualación y suma o resta).
- Interpretación de los resultados obtenidos al resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2 por los métodos algebraicos.
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 utilizando la Regla de Cramer.
- Reconocer el sistema de ecuaciones lineales a partir de su solución.
- A partir de la gráfica de una ecuación lineal, graficar otra recta para que el sistema tenga sólo dos soluciones, para que la solución sea (1,1) y una recta para que el sistema tenga infinidad de soluciones.
- Identificar gráficamente cuántas soluciones tiene un sistema de tres ecuaciones lineales.
- A partir de las gráficas presentadas explicar cuál de ellas corresponde a un sistema de ecuaciones lineales.
- Sin resolverlo, determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene o no solución.

Conceptos

- Tabla de valores.
- Ecuación de primer grado con una incógnita.
- Ecuación de primer grado con dos incógnitas.
- Ecuaciones lineales equivalentes.
- Porcentaje.
- Sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Plano cartesiano.
- Recta.
- Gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas.
- Forma genérica de un sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Incógnitas.
- Coeficientes.
- Constantes.
- Métodos de sustitución.
- Método de igualación.
- Método de suma o resta.
- Sistema de ecuaciones lineales 2x2 con solución única.
- Sistema de ecuaciones lineales 2x2 sin solución.
- Sistema de ecuaciones lineales 2x2 con infinidad de soluciones.
- Coordenadas del punto de intersección de las rectas.
- Rectas paralelas.
- Rectas oblicuas.
- Rectas coincidentes.
- Gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Determinante del Sistema.
- Regla de Cramer.

Procedimientos

- Cálculo de porcentajes.
- Interpretación de tablas con datos numéricos.
- Formulación de las ecuaciones que forman el sistema 2x2.
- Graficación de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Obtención de las coordenadas del punto de intersección de las rectas.
- Encontrar la solución mediante la graficación de las dos ecuaciones que forman al sistema de ecuaciones lineales.
- Método de sustitución.
- Método de igualación.
- Método de suma o resta.
- Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Comprobación de la validez de la solución obtenida para un SEL 2x2.
- Visualización de las rectas en el plano cartesiano.
- Identificación de un sistema de ecuaciones lineales con solución, sin solución y con infinidad de soluciones.
- Cálculo del determinante del sistema.
- Regla de Cramer.

Proposiciones

- Resolver un sistema de ecuaciones lineales 2x2 requiere encontrar el conjunto de pares ordenados que satisfacen a las dos ecuaciones simultáneamente.
- La solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2, desde el punto de vista geométrico, es el conjunto de pares ordenados que pertenecen a las dos líneas rectas que representan gráficamente a las ecuaciones que forman el sistema.
- Si el SEL 2x2 tiene solución única, la representación gráfica correspondiente son dos rectas que se intersecan en un único punto.

- Si un SEL 2x2 no tiene solución, su representación gráfica correspondiente serán dos rectas paralelas.
- Si el sistema tiene una infinidad de soluciones, tendremos la gráfica de dos rectas que son coincidentes, es decir, una está sobre la otra.
- Si al resolver un sistema 2x2 calculamos el determinante del sistema (el formado por los coeficientes de las incógnitas), y éste tiene valor diferente de cero, podemos concluir que este sistema tiene solución única, pudiéndose obtener dicha solución por la Regla de Cramer o por cualquier otro método.
- Si el determinante de un sistema resulta ser igual a cero, entonces el sistema no tiene solución o su solución no es única.

Argumentos

- Argumentación sobre la validez de los valores propuestos en las tablas, de acuerdo con las condiciones del problema.
- Justificación de la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales.
- Justificación de los procedimientos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Justificación de la solución obtenida para el problema del laboratorista.
- Argumentación sobre el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales 2x2, al resolverlo gráficamente.
- A partir de tres gráficas diferentes, argumentar cuál de ellas corresponde a un sistema de ecuaciones lineales.

Lenguaje

- **Verbal:** Problemas dados en lenguaje verbal, designaciones de conceptos y proposiciones, así como de los argumentos que los explican o justifican.

- **Numérico:** Tablas de valores numéricos para el número de litros de solución en el problema del laboratorista.

- **Gráfico:** Gráficas de las ecuaciones del sistema en el plano cartesiano e interpretación gráfica de su solución.

- **Algebraico:** Ecuaciones que modelan las condiciones del problema, representación algebraica de un sistema de ecuaciones lineales 2x2, resolución algebraica de un sistema de ecuaciones lineales.

3.1.3 Análisis de la idoneidad didáctica del libro de texto Matemáticas 1

El propósito del análisis didáctico de un proceso de instrucción es el de obtener elementos para identificar los aspectos que, desde la óptica del que analiza, pudieran calificarse como fortalezas o debilidades, en términos didácticos.

Con el propósito de identificar cómo el libro de texto atiende las dificultades reportadas en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y ver de qué manera se atienden las demandas de la RIEMS para este nivel educativo, se realizó un análisis de idoneidad didáctica utilizando las tablas de componentes y descriptores propuestas por el EOS (Anexo 1). Los resultados generales de este análisis se describen enseguida.

1. Idoneidad Epistémica

A partir del análisis de idoneidad epistémica nos hemos percatado que el libro de texto de *Matemáticas 1*, cumple con la mayoría de los descriptores que proporciona la tabla de idoneidad proporcionada por el EOS; sin embargo, hay algunos aspectos que podrían mejorarse.

En cuanto al uso del lenguaje en términos del EOS y de acuerdo con investigaciones relacionadas, los estudiantes manifiestan numerosas deficiencias al modelar problemas contextualizados mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, es decir, se les dificulta la etapa de la traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico.

El libro de texto apoya al estudiante en este proceso de traducción sólo en el problema del laboratorista de la Secuencia 1, y es por ello que consideramos recomendable proponer otras actividades en las que también se les apoye en este proceso, que resulta un tanto complicado para la mayoría de los alumnos, de manera que puedan modelar otros sistemas de ecuaciones lineales 2x2 en varios contextos antes de llegar a la sección de problemas, en la que será fundamental traducir del lenguaje verbal al lenguaje algebraico.

Además, este descriptor podría mejorarse promoviendo el uso del método gráfico no sólo como complemento a los métodos algebraicos, sino promoviendo el uso de dicho método para resolver un sistema de ecuaciones de manera que se relacione a la solución con su representación gráfica poniendo mayor atención al significado del concepto, evitando que la explicación quede sujeta a los métodos de resolución algebraicos, y promoviendo el uso de distintos registros de representación, aprovechando las ventajas que el software GeoGebra nos ofrece.

2. Idoneidad Cognitiva

A través del análisis de los descriptores y componentes de esta idoneidad se observó que el libro de texto considera como *conocimientos previos* los que fueron estudiados en niveles académicos previos y en los bloques anteriores de la asignatura. Además, se proponen algunos apartados de ejercitación y resolución de problemas, pero no se incluyen materiales de apoyo o sitios web de consulta que puedan utilizar los alumnos en algún momento. A partir de esto, consideramos pertinente contar con actividades con uso de tecnología que puedan servir para enriquecer los conocimientos adquiridos con las actividades del bloque.

3. Idoneidad Mediacional

Uno de los planteamientos de la RIEMS, es el de utilizar las tecnologías digitales como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje en el aula. La principal debilidad que se ha encontrado en este caso es referente al uso de tecnologías digitales, ya que no se promueve su uso en ninguna de las actividades. Tomando en cuenta las investigaciones realizadas sobre el tema, encontramos que los alumnos muestran desmotivación, desinterés y apatía frente a nuevos conocimientos, asuntos que pueden ser afrontados desarrollando materiales que hagan uso de este tipo de tecnologías; en este caso proponemos el uso de GeoGebra, que favorece el desarrollo de la competencia visual en los estudiantes y que permite la articulación de los diferentes registros de representación, lo cual puede contribuir al logro de un aprendizaje significativo.

4. Idoneidad Emocional

En el aspecto que se propone contribuir para aumentar la idoneidad didáctica en la dimensión emocional es a través de tareas sobre sistemas de ecuaciones lineales 2x2, que sean de interés para los estudiantes, aportando algunos contextos distintos a los presentados en el libro de texto, de manera que se aprecie su utilidad en otras áreas. Los contextos que se utilizan pueden ser interesantes para los estudiantes, pero es posible aumentar su interés incluyendo actividades que involucren el uso de GeoGebra. (Garcés, 2009)

5. Idoneidad Interaccional

El libro de texto promueve la mayoría de los descriptores de esta idoneidad, mismos que son considerados también para el diseño de las actividades. Por ejemplo, notamos que durante las dos secuencias didácticas se promueve el trabajo en equipo y grupal para compartir ideas, respuestas y procedimientos utilizados.

Además, la argumentación es algo que está presente a lo largo del bloque y se considera importante promoverla en las actividades didácticas, especialmente en las preguntas abiertas en las que se tiene mayor oportunidad para opinar, explicar, argumentar o fundamentar las ideas.

Por otro lado, se promueve el trabajo individual por parte de los alumnos de manera que, en la medida de lo posible, cada uno pueda interactuar con el software GeoGebra y trate de responder a las preguntas de manera personal antes de conocer la opinión de sus compañeros.

6. Idoneidad Ecológica

Para aumentar la idoneidad ecológica, se toma en cuenta la integración de la tecnología digital en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, ya que como mencionamos anteriormente no se promueve su uso en ninguna de las actividades de las secuencias didácticas del bloque.

3.2 Significado Institucional Pretendido

Para caracterizar el *Significado Institucional Pretendido* hemos seleccionado un subsistema de prácticas del *Significado Institucional de Referencia*. Los resultados de los análisis previos nos llevaron a determinar que para el diseño de las actividades didácticas, era fundamental promover el tránsito entre diferentes representaciones para los sistemas de ecuaciones lineales, sobre todo en el manejo del registro gráfico para representar las soluciones de un sistema y asociarlo con su representación algebraica. De igual manera, consideramos que era relevante apoyar la actividad del estudiante en el proceso de traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, haciendo uso de las diferentes vistas que integra el software GeoGebra, todo esto, siguiendo los componentes y descriptores de las idoneidades didácticas propuestos por el EOS como guía para el diseño.

En cuanto a los desempeños del estudiante al concluir el bloque, seleccionamos sólo aquellos referentes a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método gráfico, ya que en el diseño de las actividades el software GeoGebra estará jugando un papel primordial en la visualización de la solución del sistema a través de las gráficas de las ecuaciones lineales. Además, se estará promoviendo el uso del lenguaje numérico y gráfico, de manera que el estudiante pueda reconocer la relación entre los datos que registre en la tabla de valores, con las coordenadas de los puntos que se estarán graficando de manera automática, de tal forma que pueda plantear las ecuaciones que satisfacen las condiciones del problema, así como identificar las coordenadas de los puntos que solucionan dichas ecuaciones.

El *Significado Institucional Pretendido* se describe de la siguiente manera:

Situaciones

Las situaciones cuya resolución origina la realización de prácticas matemáticas y la emergencia de los objetos primarios, son los problemas extra matemáticos que se han seleccionado y que se presentan a continuación.

- **SIX FLAGS.** La familia López tuvo una reunión familiar en la Cd. de México. Compró boletos para visitar el parque de diversiones Six-Flags. Los boletos de adulto tienen un costo de $600 y los de niños $400. Se compraron 22 boletos y el costo total fue $9600. ¿Cuántos boletos de adulto y cuántos de niño se compraron?

Tomada del texto de Allen (2012, p. 544), se modificaron los datos numéricos y el contexto de la situación.

- **INVERSIONES BANCARIAS.** A José le interesa conocer los rendimientos que puede obtener al depositar su dinero en una institución bancaria que ofrece varios tipos de cuentas de inversión. La cuenta A permite disponer del dinero en cualquier momento pero ofrece sólo el 2.62% de interés simple anual. Por el contrario, la cuenta B sólo permite disponer del dinero después de un año pero ofrece el 5% de interés simple. Él podría obtener un rendimiento de $2000 al término de un año, depositando un total de $55000 si no retira ni aumenta el monto inicialmente depositado ¿Cuánto necesitaría invertir en cada cuenta para obtener ese rendimiento?

Esta situación se tomó del texto de Jiménez (2011, p. 171), se cambiaron algunos datos de manera que la situación fuera más cercana para los estudiantes.

- **COMPRAS EN EL MERCADO.** Sofía le dijo a Pedro que había ido al mercado y que compró 2.8 kg de manzana y 2.1 kg de plátano por lo que pagó $119.70. Ella pensó que a Pedro le gustaría tener algunas frutas, así que regresó al mercado y compró 2 kg de manzana y 1.5 kg de plátano más. Pedro agradeció a Sofía, pero le dijo que no le gustaban los plátanos y que sólo le pagaría los 2 kg de manzana. Sofía le dijo que la segunda vez había pagado $82 de frutas. Ayuda a Pedro a descubrir cuánto le debe pagar a Sofía por los 2 kg de manzana.

Situación tomada del libro CK-12 Algebra I (2012, p. 489), se modificó la redacción y los datos numéricos para propiciar un sistema de ecuaciones lineales sin solución.

- **DIETA PARA EL GANADO.** Un granjero sabe que debe alimentar a su ganado de forma balanceada y ha averiguado que las kilocalorías (kcal) son la fuente básica de energía para el tipo de animales que cría. Él tiene a su disposición dos tipos de alimento y sabe que la mezcla de 29.6 kg del alimento A y 44.4 kg de alimento B le aporta 5328 kcal a cada animal. Por otro lado, la mezcla de 88.8 kg del alimento A y de 133.2 kg del alimento B le aporta 15984 kcal. ¿Cuántas kilocalorías por kilogramo aporta el alimento A y cuántas el alimento B?

Tomada del texto de Barnett (1992, p. 26), el contexto y los datos numéricos fueron modificados con la intención de obtener ecuaciones equivalentes.

Las situaciones anteriores son las que se han seleccionado como contextos extra matemáticos para las actividades. A través de estas situaciones también emergen los siguientes elementos:

- Planteamiento de las ecuaciones que forman el sistema 2x2.
- Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Visualización de las gráficas de las ecuaciones lineales.
- Obtención de las coordenadas del punto de intersección de las rectas.
- Clasificación de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 de acuerdo con la gráfica resultante.
- Validación de la solución en el contexto de la situación inicial.

Conceptos

- Tabla de valores.
- Ecuación de primer grado con dos incógnitas.
- Ecuaciones lineales equivalentes.
- Sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Plano cartesiano.
- Recta.
- Gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas.
- Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Incógnitas.
- Coeficientes.
- Constantes.
- Sistema de ecuaciones lineales 2x2 con solución única.
- Sistema de ecuaciones lineales 2x2 sin solución.
- Sistema de ecuaciones lineales 2x2 con infinidad de soluciones.
- Coordenadas del punto de intersección de las rectas.
- Rectas paralelas.
- Rectas oblicuas.
- Rectas coincidentes.
- Gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 2x2.

Procedimientos

- Interpretación de tablas con datos numéricos.
- Planteamiento de las ecuaciones que forman el sistema 2x2.
- Graficación de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Obtención de las coordenadas del punto de intersección de las rectas.
- Encontrar la solución mediante la graficación de las dos ecuaciones que forman al sistema de ecuaciones lineales.
- Comprobación de la validez de la solución obtenida para un SEL 2x2.
- Visualización de las rectas en el plano cartesiano.

- Identificación de un sistema de ecuaciones lineales con solución única, sin solución y con infinidad de soluciones.
- Establecer las relaciones entre los coeficientes y términos independientes del sistema de ecuaciones lineales 2x2 que hacen que el sistema tenga una, ninguna o infinidad de soluciones.
- Formular sistemas de ecuaciones lineales 2x2 (con una, ninguna o infinidad de soluciones) considerando las relaciones entre los coeficientes y términos independientes.

Proposiciones

- Resolver un sistema de ecuaciones lineales 2x2 requiere encontrar el conjunto de pares ordenados que satisfacen a las dos ecuaciones simultáneamente.

- La solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2, desde el punto de vista geométrico, es el conjunto de pares ordenados que pertenecen a las dos líneas rectas que representan gráficamente a las ecuaciones que forman el sistema.

- Si el SEL 2x2 tiene solución única, su representación gráfica correspondiente son dos rectas que se intersecan en un único punto.

- Si un sistema 2x2 no tiene solución, su representación gráfica correspondiente serán dos rectas paralelas.

- El sistema tiene infinidad de soluciones, y en este caso, tendremos la gráfica de dos rectas que son coincidentes, es decir, una está sobre la otra.

- En un sistema de dos ecuaciones lineales con solución única, los respectivos coeficientes de x e y de las dos ecuaciones no son proporcionales.

- En un sistema de dos ecuaciones lineales sin solución, los respectivos coeficientes de x e y de una ecuación son proporcionales a los de la otra, mientras que los términos independientes no lo son.

- En un sistema de dos ecuaciones lineales con infinidad de soluciones, los coeficientes de x e y, y el término independiente de una ecuación, son proporcionales a los de la otra.

Argumentos

- Argumentación sobre la validez de los valores numéricos propuestos en las tablas, de acuerdo con las condiciones del problema.

- Justificación de la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales.

- Justificación de la solución obtenida para los problemas propuestos.

- Argumentación sobre el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales 2x2, al resolverlo gráficamente.

- Argumentación sobre la clasificación de un sistema de ecuaciones lineales 2x2, en relación con los coeficientes y términos independientes.

- Argumentaciones sobre las respuestas a las preguntas de las hojas de trabajo.

Lenguaje

- **Verbal:** Problemas dados en lenguaje verbal, designaciones de conceptos y proposiciones, así como de los argumentos que los explican o justifican.

- **Numérico:** Tablas de valores para observar las relaciones entre los datos de los problemas propuestos.

- **Gráfico:** Gráficas de las ecuaciones del sistema en el plano cartesiano e interpretación gráfica de su solución.

- **Algebraico:** Ecuaciones que modelan las condiciones del problema, representación algebraica de un sistema de ecuaciones lineales 2x2.

3.3 Características de la propuesta

Cada actividad didáctica da inicio con un momento de diálogo grupal, que el profesor puede utilizar ya sea para rescatar los conocimientos previos necesarios para abordar la actividad, o para comentar de manera breve el contexto extra-matemático de la situación que se propone. Concluida la fase de diálogo grupal, se propone el trabajo individual del alumno. Se espera que las indicaciones impresas en las hojas de trabajo sean claras y suficientes para guiar a los estudiantes en la realización de las tareas, de manera que exista el mayor grado de reflexión posible antes de las intervenciones que pudiera realizar el profesor. Se propone también el trabajo en equipo, para que los estudiantes puedan comparar sus respuestas y compartir sus ideas y argumentos en relación con la actividad. Al final de las actividades, se discutirán los diferentes resultados obtenidos en las hojas de trabajo de manera grupal y el docente conducirá la discusión. El diálogo grupal tiene la finalidad de contrastar los conocimientos de los alumnos, y con ello enriquecer y promover la construcción compartida de conocimientos.

Cada una de las actividades está conformada por los siguientes elementos:

- *Applets de GeoGebra:* En todas las actividades se hace uso de ambientes dinámicos creados con el software GeoGebra, que se encuentran disponibles en el sitio web de GeoGebraTube (Anexo 4, p. XIII). Cada applet muestra una tabla de valores creada en la Hoja de Cálculo que ofrece el software y a su vez se muestra la Vista Gráfica, donde aparecerán los puntos cuyas coordenadas serán los datos numéricos que los estudiantes ingresen en las tablas de valores. Cabe mencionar que los puntos se graficarán en dos colores distintos. Por un lado, los puntos de color rojo serán aquellos que no cumplan con las condiciones de la ecuación. Los puntos de color azul serán aquellos que sí son solución de la ecuación y que por lo tanto, generan la gráfica de la ecuación de la recta. Con la incorporación de estos archivos dinámicos, deseamos contribuir en la etapa de la formulación de las ecuaciones que formarán el sistema.

- *Hojas de Trabajo:* Las hojas de trabajo constituyen el material impreso y diseñado para conducir la actividad del estudiante. Este documento contiene las instrucciones y preguntas guía para el alumno. Las actividades están divididas en varios momentos, que corresponden al trabajo individual por parte del estudiante, trabajo en equipo y trabajo grupal. Además de esto, se han diseñado las hojas con las orientaciones didácticas que acompañan cada actividad, en las cuales se describen los objetivos de las actividades, los contenidos previos necesarios, los recursos materiales que se utilizarán, entre otros. Las hojas de trabajo se encuentran disponibles en la dirección electrónica: https://drive.google.com/open?id=0B9OB0GhKcYLGaTBwbEhuOXNHOVE

3.3.1 Descripción de las actividades didácticas

Nuestra propuesta didáctica quedó conformada por seis actividades dirigidas a estudiantes de bachillerato, para el *Bloque 7* de la asignatura de *Matemáticas 1*. En la siguiente tabla se describen las características generales de cada actividad (Tabla 7).

MATEMATICAS 1			
BLOQUE 7. RESUELVE ECUACIONES LINEALES II			
Actividad	**Contenido disciplinar**	**Recursos**	**Tiempo estimado**
Actividad 1. “Six Flags” **Actividad 2. “Inversiones Bancarias”**	Sistema de ecuaciones lineales 2x2 con solución única	• Pizarrón • Hojas de trabajo y lápiz • Software GeoGebra	2 horas 20 minutos
Actividad 3. “Compras en el mercado”	Sistemas de ecuaciones lineales 2x2 sin solución	• Pizarrón • Hojas de trabajo y lápiz • Software GeoGebra	2 horas 20 minutos
Actividad 4. “Dieta para el ganado”	Sistemas de ecuaciones lineales 2x2 con infinidad de soluciones	• Pizarrón • Hojas de trabajo y lápiz • Software GeoGebra	2 horas 20 minutos
Actividad 5. “Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2”	Sistema de ecuaciones lineales 2x2 con una, ninguna o infinidad de soluciones	• Pizarrón • Hojas de trabajo y lápiz • Software GeoGebra	2 horas
Actividad 6. “Relación entre los coeficientes y términos	Relación entre los coeficientes y términos independientes que	• Pizarrón • Hojas de trabajo y lápiz • Software	2 horas 20 minutos

independientes de un SEL 2x2”	hacen que el sistema tenga una, ninguna o infinidad de soluciones	GeoGebra	

Tabla 7. Características generales de las actividades didácticas diseñadas

Mediante estas actividades pretendemos promover el desarrollo de habilidades en la formulación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, poniendo énfasis en el significado gráfico del objeto matemático y haciendo uso del software GeoGebra. A continuación se describe la estructura de las actividades didácticas, ejemplificando cómo se busca promover las competencias genéricas y disciplinares y el papel de los applets en cada una de ellas, luego se presenta el análisis de la propuesta para valorar a priori la idoneidad didáctica de la misma.

Actividad 1. “Six-Flags”

Una de las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales es en el área de las compras. En esta actividad, el estudiante resolverá una situación en contexto extra-matemático, mediante el planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 con solución única.

Los objetivos de esta actividad son:

- Reconocer las relaciones lineales entre los datos de un problema y expresarlas mediante el lenguaje algebraico.
- Modelar la situación mediante un sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Representar gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Interpretar la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 utilizando el software GeoGebra.
- Determinar si un par ordenado es una solución de un sistema de ecuaciones.
- Analizar la validez de la solución en el contexto de la situación modelada.

- Desarrollar habilidades de expresión oral y escrita.
- Desarrollar actitudes positivas para el trabajo en equipo.

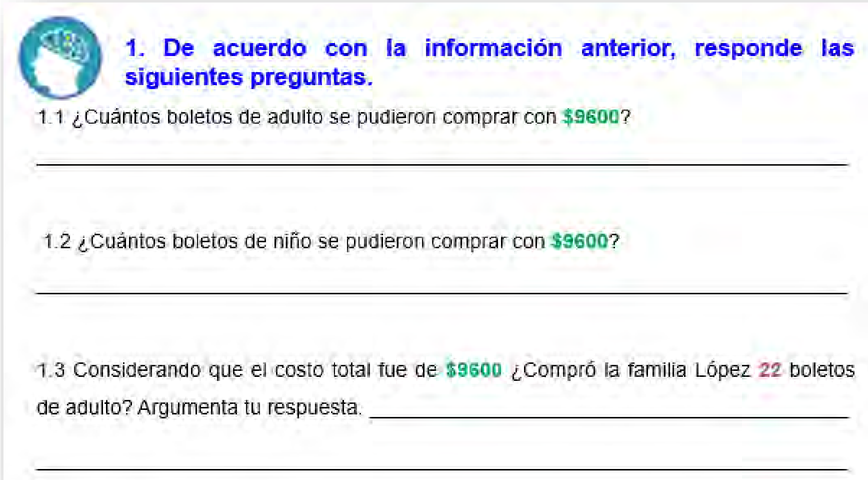
La actividad da inicio con el diálogo grupal entre el profesor y los estudiantes. La idea es que los estudiantes conozcan el contexto de la situación-problema y se familiaricen con la actividad, además de promover la cuarta competencia genérica del MCC: *“Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, de códigos y herramientas apropiados”* (SEP, 2013b, p. 1).

Una vez concluida esta fase inicial, se propone la lectura individual de la siguiente situación:

La familia López tuvo una reunión familiar en la Cd. de México. Compró boletos para visitar el parque de diversiones Six-Flags. Los boletos de adulto tienen un costo de $600 y los de niños $400. Se compraron 22 boletos y el costo total fue $9600. ¿Cuántos boletos de adulto y cuántos de niño se compraron?

Después de que el alumno haya leído la situación anterior, se plantea una serie de preguntas relacionadas con este contexto, para promover su reflexión e interpretación de los datos iniciales que la situación le ofrece, promoviendo el aprendizaje autónomo y contribuyendo al desarrollo de la séptima competencia genérica del MCC: *“Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida”* (SEP, 2013b, p. 1).

La intención es que cada estudiante reflexione de manera individual antes de intercambiar ideas con sus compañeros, que pudieran influir en su interpretación personal del problema.



1. De acuerdo con la información anterior, responde las siguientes preguntas.

1.1 ¿Cuántos boletos de adulto se pudieron comprar con $9600?

____

1.2 ¿Cuántos boletos de niño se pudieron comprar con $9600?

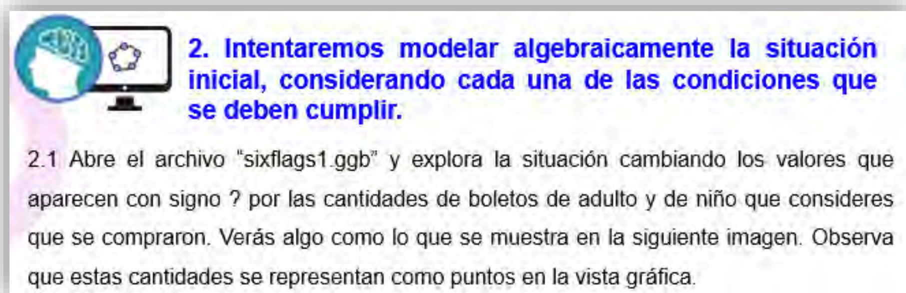
____

1.3 Considerando que el costo total fue de $9600 ¿Compró la familia López 22 boletos de adulto? Argumenta tu respuesta. ______________________________

____

Figura 1. Preguntas iniciales para la actividad "Six-Flags"

El siguiente apartado, al igual que el anterior, consiste en un trabajo individual, la variación de este apartado está en la manipulación de algunos applets creados con GeoGebra. La intención es que cada estudiante pueda interactuar con el software e intente formular algebraicamente la situación presentada, considerando cada una de las condiciones que se deben cumplir. Para ello se le da la siguiente indicación:



2. Intentaremos modelar algebraicamente la situación inicial, considerando cada una de las condiciones que se deben cumplir.

2.1 Abre el archivo "sixflags1.ggb" y explora la situación cambiando los valores que aparecen con signo ? por las cantidades de boletos de adulto y de niño que consideres que se compraron. Verás algo como lo que se muestra en la siguiente imagen. Observa que estas cantidades se representan como puntos en la vista gráfica.

Figura 2. Actividad "Six-Flags". Punto 2.1.

En este apartado se desea contribuir al desarrollo de la quinta competencia genérica: *"Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos"* (SEP, 2013b, p. 1), promoviendo el uso de la tecnología digital.

El objetivo de este applet creado con GeoGebra es que el estudiante observe la relación entre los datos que cumple la primera condición del problema, promoviendo de esta manera la cuarta competencia disciplinar: *“Analiza las relaciones entre dos variables de un proceso social o natural para plantear un sistema de ecuaciones lineales y así determinar o estimar su comportamiento”* (DGB, 2013, p. 11).

La utilidad de este ambiente dinámico se refleja en la correspondencia entre el lenguaje numérico y el lenguaje gráfico, ya que los valores que ingrese el estudiante se estarán graficando automáticamente en el plano cartesiano, además, los puntos que se generen se mostrarán en colores distintos; azules los puntos cuyas coordenadas cumplen la condición y rojos los que no la satisfacen.

En este archivo se le pide al estudiante que modifique los valores numéricos de la tabla, cambiándolos por los que considere son los que pueden cumplir con las cantidades de boletos que se compraron. Lo cual generaría algo similar a lo que se muestra en la figura siguiente:

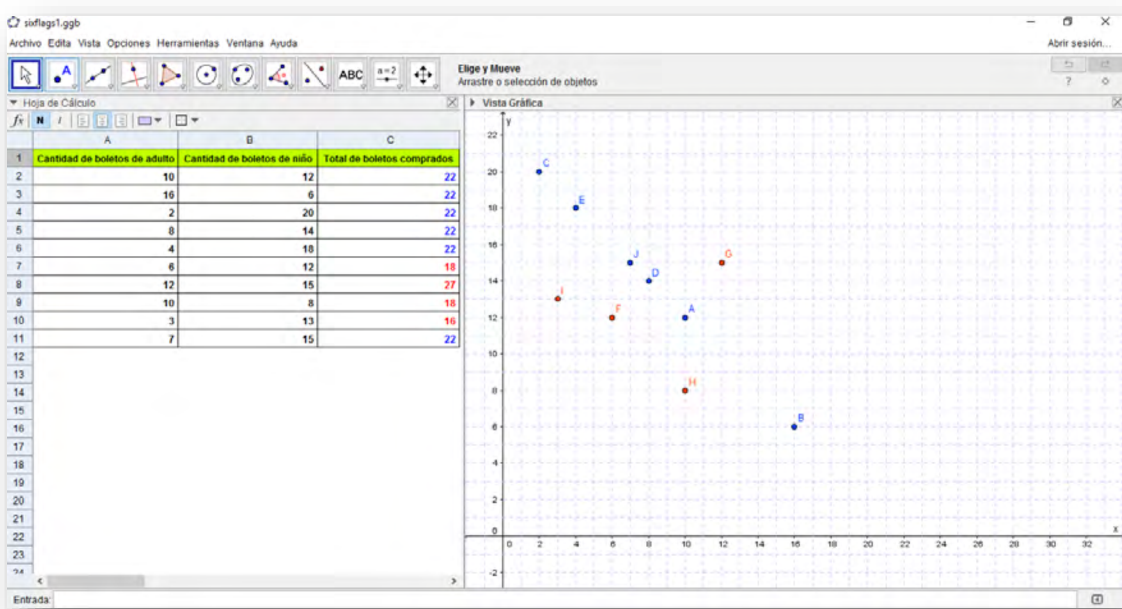


Figura 3. Manipulación del archivo “sixflags1.ggb”

Una vez que el estudiante completó la tabla que muestra la figura anterior se prosigue con preguntas relativas a lo que sucede al explorar la situación en el applet. Preguntas como las siguientes son las que se formulan.

2.2 ¿La cantidad de boletos de adulto corresponde a la coordenada en x o la coordenada en y de los puntos que aparecen en la gráfica?________________________________

2.3 ¿Y la cantidad de boletos de niño?_______________________________________

2.4 Mueve el punto **J** en la vista gráfica y describe lo que observas en la tabla.
____

2.5 ¿Qué relación encuentras entre las coordenadas del punto **J** y los datos que aparecen en la tabla?____

2.6 ¿Por qué algunos puntos aparecen de color **azul** y otros de color **rojo**? Explica esto en términos de las coordenadas de los puntos y el total de boletos comprados.________

Figura 4. Preguntas relacionadas con el archivo “sixflags1.ggb

En la mayoría de las preguntas se solicita al alumno que justifique sus respuestas, esto por un lado favorece las habilidades de expresión oral y escrita y, por otro, nos da la posibilidad de conocer los argumentos que utiliza y la interpretación que realiza de lo que observa en el ambiente dinámico, promoviendo de esta manera la cuarta competencia disciplinar básica del MCC: “*Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación”* (DGB, 2013, p. 11).

Continuando con la actividad, se le pregunta al alumno: ¿Qué trazo siguen los puntos azules? De manera que si observa y analiza la posición de los puntos azules en el plano cartesiano, pueda responder que están sobre una recta, promoviendo la quinta competencia disciplinar del MCC: *“Interpreta tablas, gráficas, y textos con símbolos matemáticos y científicos”* (DGB, 2013, p. 11).

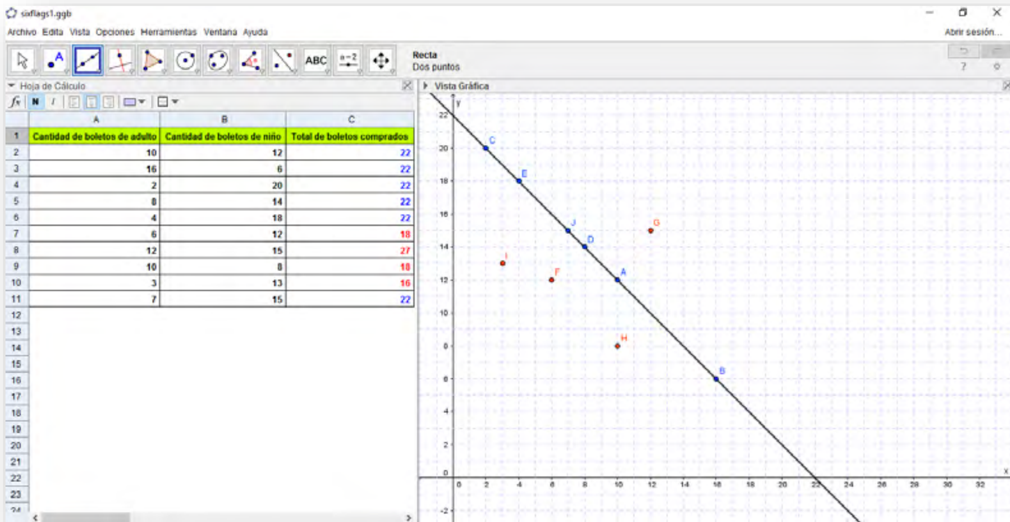
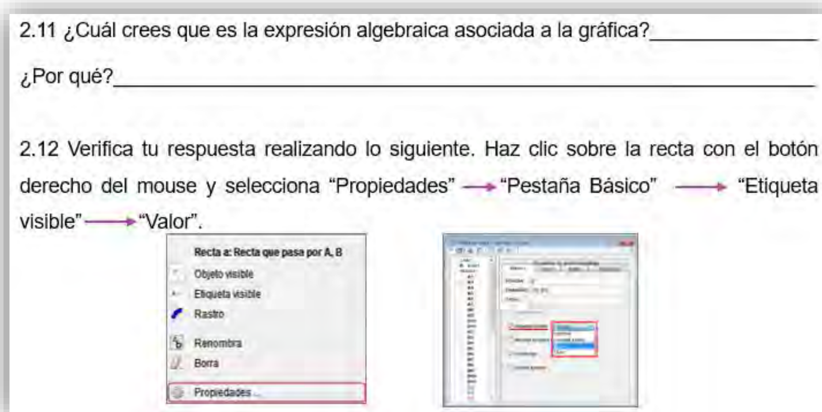


Figura 5. Gráfica que representa el total de boletos comprados

Una vez obtenida la gráfica anterior, se desea que el estudiante pueda encontrar la expresión algebraica que modela la primera condición. Para ello se continúa con preguntas como las siguientes.


2.11 ¿Cuál crees que es la expresión algebraica asociada a la gráfica?_______________

¿Por qué?____

2.12 Verifica tu respuesta realizando lo siguiente. Haz clic sobre la recta con el botón derecho del mouse y selecciona "Propiedades" → "Pestaña Básico" → "Etiqueta visible" → "Valor".

Figura 6. Indicaciones en la actividad "Six-Flags". Puntos 2.11 y 2.12

Con la ayuda de GeoGebra, el alumno encontrará la ecuación de la recta y realizará la comparación entre la ecuación que él propuso y la que obtiene a través de la indicación anterior (Figura 6). La actividad continúa de manera muy similar a los apartados anteriores. El alumno realizará lo mismo pero ahora en el archivo "sixflags2.ggb, en el que tendrá la posibilidad de identificar la relación entre los datos de la tabla y la segunda condición que se debe cumplir en el problema que se desea modelar. Al igual que en el applet anterior, se graficarán automáticamente los puntos en color azul y rojo.

Los puntos siguientes, tienen la finalidad de ayudar al alumno a encontrar la ecuación que modela la segunda condición del problema. Una vez obtenida, se le solicita ingresarla en la barra de entrada, de manera que si la obtuvo correctamente, todos los puntos azules deberán quedar sobre la recta que se genera.

2.21 Si llamamos y a la cantidad de boletos de niño, ¿Cómo expresarías algebraicamente el costo de los boletos de niño?________________________________

2.22 Escribe una ecuación que modele la cantidad total que se gastó en la compra de los boletos de adulto y de niño____

Figura 7. Preguntas enfocadas al planteamiento de la ecuación 2 del sistema

Una vez que el alumno haya explorado la situación en los applets que se mostraron con anterioridad, se le solicita que anote las ecuaciones que encontró para formar el sistema de ecuaciones lineales 2x2, de esta manera se promueve la segunda competencia disciplinar del MCC: *"Formula y resuelve sistemas de ecuaciones lineales, aplicando diferentes métodos"* (DGB, 2013, p. 11).

2.26 Las ecuaciones que obtuviste en el archivo "sixflags1.ggb" y "sixflags2.ggb", son las ecuaciones que modelan la situación de la compra de boletos de la familia López. Escríbelas a continuación para representar el sistema que forman.

Sistema de ecuaciones lineales
- Ecuación 1 ______________________
- Ecuación 2 ______________________

Figura 8. Sistema de ecuaciones lineales 2x2

En la tercera parte de esta actividad, se utilizará el archivo "sixflags3.ggb", que ha sido creado para graficar las ecuaciones obtenidas. La vista gráfica se encuentra preparada con la escala adecuada para visualizar las gráficas al ingresar las ecuaciones. El objetivo del siguiente apartado de la actividad es visualizar y obtener el punto de intersección de las rectas, utilizando la herramienta que se indica en la hoja de trabajo.

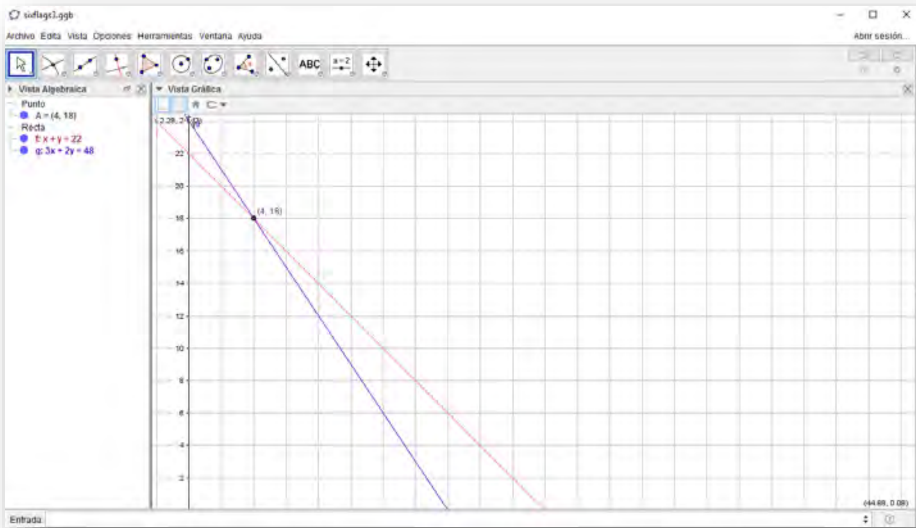


Figura 9. Obtención de las coordenadas del punto de intersección de las rectas

Las preguntas del siguiente apartado se responderán por equipo (Figura 10). La intención es que los estudiantes compartan sus opiniones y experiencias de los apartados previos, así como los resultados obtenidos y puedan juntos interpretar la solución gráfica obtenida y la validez en el contexto del problema inicial.

En este apartado se promueve el trabajo colaborativo*, "Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos"* (SEP, 2013b, p. 1), octava competencia genérica del MCC y a su vez la tercera competencia disciplinar *"Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales"* (DGB, 2013, p. 11).

4. En equipo comparen las respuestas de los apartados anteriores, después responde las siguientes preguntas y expresa tus argumentos cuando no estés de acuerdo con lo que plantean tus compañeros de equipo. Al responder las preguntas es importante argumentar en caso de ser necesario.

4.1 ¿Qué representa el valor de la abscisa x del punto de intersección de las rectas en el contexto de los boletos comprados?______________________________

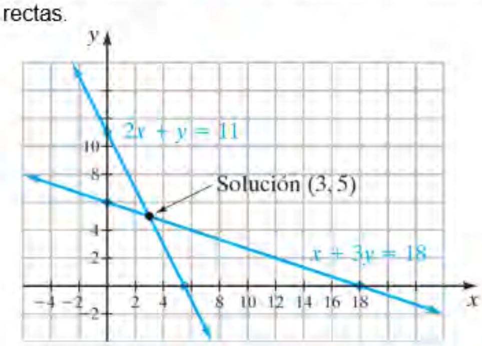
4.2 ¿Qué representa el valor de la ordenada y del punto de intersección de las rectas en el contexto de los boletos comprados?______________________________

4.3 A partir de lo que observas en la gráfica, ¿puedes decir cuántos boletos de adulto y cuántos de niño se compraron?______________________________

Figura 10. Preguntas relacionadas con la solución obtenida

Como cierre e institucionalización de los conceptos involucrados en los apartados previos, se propone un apartado de trabajo grupal que estará dirigido por el profesor, cuyo objetivo es organizar y concluir con los conocimientos matemáticos que se involucraron y surgieron a lo largo de la actividad (Figura 11).

La ***solución de un sistema de ecuaciones*** es el conjunto de pares ordenados que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones del sistema. Gráficamente, la solución para el sistema anterior es (**3**, **5**), es decir, las coordenadas del punto de intersección de las rectas.



Comprobación	En la ecuación (1)	En la ecuación (2)
	$(3, 5)$	$(3, 5)$
	$x + 3y = 18$	$2x + y = 11$
	$3 + 3(5) = 18$	$2(3) + 5 = 11$
	$3 + 15 = 18$	$6 + 5 = 11$
	$18 = 18$ Verdadero	$11 = 11$ Verdadero

Figura 11. Etapa de institucionalización de los conceptos involucrados

Por último, se propone una actividad individual en la que cada estudiante deberá asociar un sistema de ecuaciones lineales con la gráfica que se muestra en la imagen, en este apartado se pretende observar si el alumno asocia la solución del sistema como el punto de intersección de las rectas.

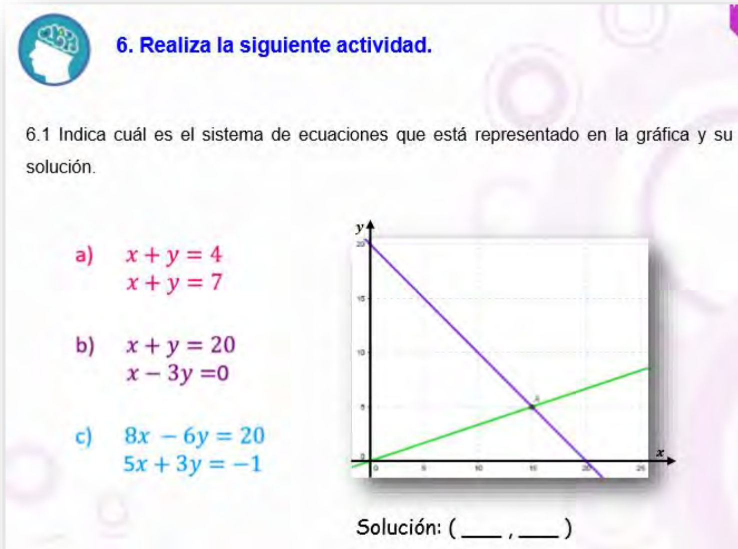


Figura 12. Asociación de un sistema de ecuaciones lineales con una gráfica

Además se desea que el alumno sea capaz de determinar si un par ordenado es solución de un sistema de ecuaciones lineales (Figura 13).

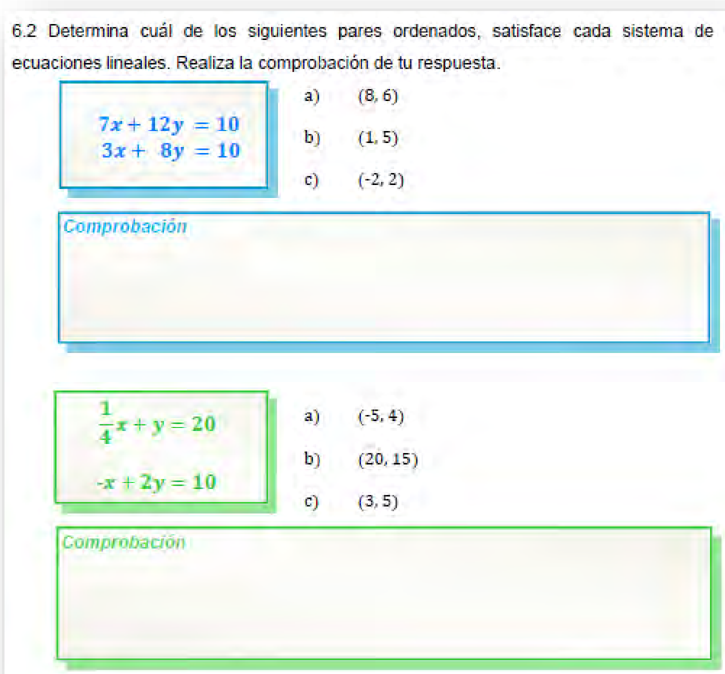


Figura 13. Determinar si un par ordenado es solución de un sistema de ecuaciones lineales

Actividad 2. “Inversiones bancarias”

Esta actividad se desarrolla en el contexto de las finanzas, donde resulta útil el conocimiento de sistemas de ecuaciones lineales. Al igual que en la anterior, en esta actividad se aborda una situación en la que el alumno realizará el planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 con solución única.

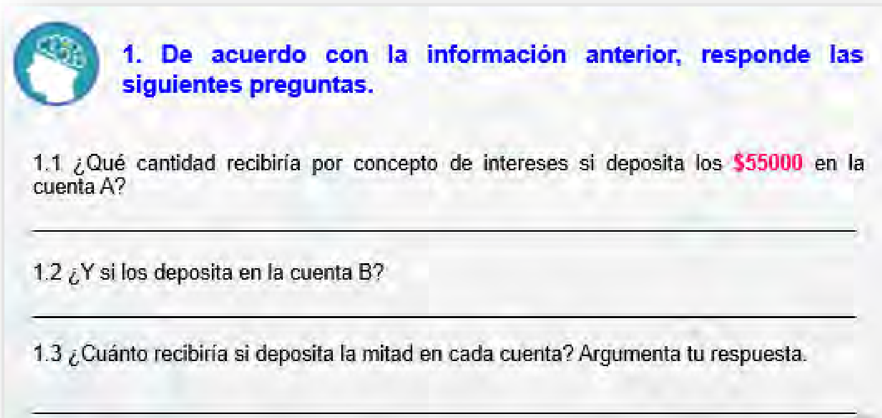
Los objetivos de esta actividad son:

- Reconocer las relaciones lineales entre los datos de un problema y expresarlas mediante el lenguaje algebraico.
- Modelar la situación mediante un sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Representar gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Interpretar la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 utilizando el software GeoGebra.
- Determinar si un par ordenado es una solución de un sistema de ecuaciones.
- Analizar la validez de la solución en el contexto de la situación modelada.
- Desarrollar habilidades de expresión oral y escrita.
- Desarrollar actitudes positivas para el trabajo en equipo.

Al igual que en la actividad 1, esta actividad inicia con el diálogo grupal, cuyo objetivo es crear un ambiente de confianza e involucrar a los estudiantes en el contexto de la situación-problema, para continuar con la lectura individual de la siguiente situación-problema:

A José le interesa conocer los rendimientos que puede obtener al depositar su dinero en una institución bancaria que ofrece varios tipos de cuentas de inversión. La cuenta A permite disponer del dinero en cualquier momento pero ofrece sólo el 2.62% de interés simple anual. Por el contrario, la cuenta B sólo permite disponer del dinero después de un año pero ofrece el 5% de interés simple. Él podría obtener un rendimiento de $2000 al término de un año, *depositando un total de $55000 si no retira ni aumenta el monto inicialmente depositado ¿Cuánto necesitaría invertir en cada cuenta para obtener ese rendimiento?*

A continuación, se formula una serie de preguntas relacionadas con el contexto anterior, de manera que el estudiante interprete los datos que se le proporcionan (Figura 14).



1. De acuerdo con la información anterior, responde las siguientes preguntas.

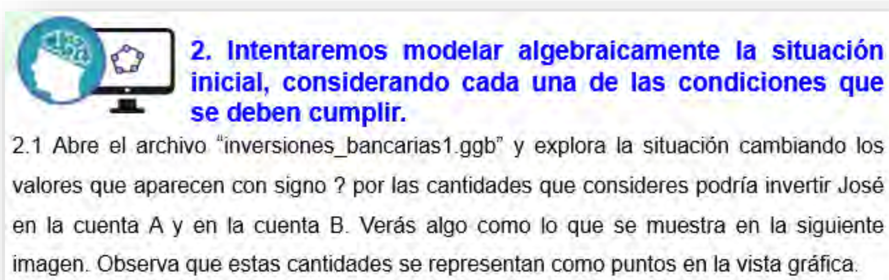
1.1 ¿Qué cantidad recibiría por concepto de intereses si deposita los $55000 en la cuenta A?

1.2 ¿Y si los deposita en la cuenta B?

1.3 ¿Cuánto recibiría si deposita la mitad en cada cuenta? Argumenta tu respuesta.

Figura 14. Preguntas iniciales para la actividad “Inversiones Bancarias”

El siguiente apartado se propone realizarlo de manera individual. El objetivo es que cada estudiante pueda explorar la situación manipulando el applet de GeoGebra que se indica en la siguiente ilustración (Figura 15).



2. Intentaremos modelar algebraicamente la situación inicial, considerando cada una de las condiciones que se deben cumplir.

2.1 Abre el archivo “inversiones_bancarias1.ggb” y explora la situación cambiando los valores que aparecen con signo ? por las cantidades que consideres podría invertir José en la cuenta A y en la cuenta B. Verás algo como lo que se muestra en la siguiente imagen. Observa que estas cantidades se representan como puntos en la vista gráfica.

Figura 15. Actividad “Six-Flags”. Punto 2.1.

Durante la exploración de la situación con el applet anterior, el estudiante tendrá la posibilidad de establecer la correspondencia entre el lenguaje numérico y el lenguaje gráfico, además de propiciarle un ambiente en el que pueda relacionar los datos numéricos con la primera condición del problema inicial.

En este applet se le solicita al estudiante que explore la situación, cambiando los valores de la tabla por las cantidades que considere se podrían invertir en la cuenta A y en la cuenta B (Figura 16).

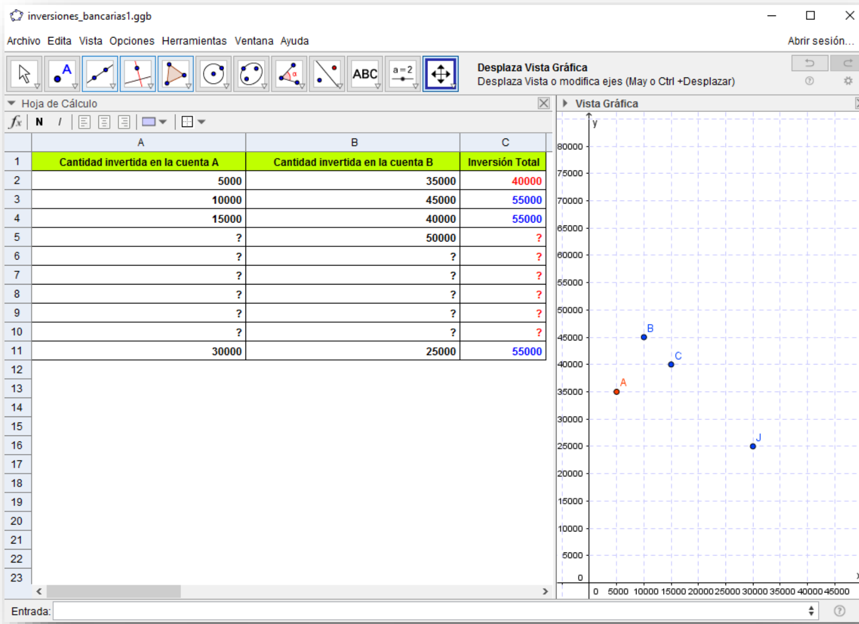


Figura 16. Manipulación del archivo "inversiones_bancarias1.ggb"

Las preguntas que se muestran en la siguiente figura, tienen por objetivo guiar el trabajo del estudiante en relación con el applet para promover su reflexión sobre los datos que ingresó, y la relación que guardan con las coordenadas de los puntos en la vista gráfica.

2.2 ¿La cantidad invertida en la cuenta A corresponde a la coordenada en x o la coordenada en y de los puntos que aparecen en la gráfica?________________________

2.3 ¿Y la cantidad invertida en la cuenta B?____________________________________

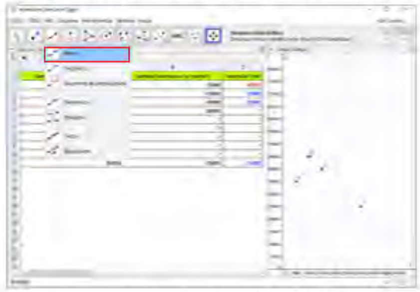
2.4 Mueve el punto **J** en la vista gráfica y describe lo que observas en la tabla.
____

2.5 ¿Qué relación encuentras entre las coordenadas del punto **J** y los datos que aparecen en la tabla?____

Figura 17. Preguntas relacionadas con el archivo "inversiones_bancarias1.ggb"

Una vez que el estudiante ha explorado el applet, se le cuestiona sobre el trazo que siguen los puntos azules en el plano. Después utilizará la herramienta *Recta* como se observa a continuación, para obtener la gráfica.

2.9 Haz clic sobre la vista gráfica, selecciona la herramienta *Recta* y haz clic sobre dos de los puntos azules.



inversiones_bancarias1.ggb (Recta)

2.10 ¿Cómo es la gráfica resultante?_______________________________________

Figura 18. Herramienta *Recta* para generar la gráfica

A continuación, se espera que el estudiante pueda encontrar la expresión algebraica que modela la primera condición, para esto se utilizarán las herramientas del software GeoGebra (Figura 19).

2.11 ¿ Cuál crees que es la expresión algebraica asociada a la gráfica?_____________

¿Por qué?____

2.12 Verifica tu respuesta realizando lo siguiente. Haz clic sobre la recta con el botón derecho del mouse y selecciona "Propiedades" → "Pestaña Básico" → "Etiqueta visible" → "Valor".

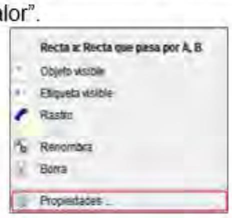
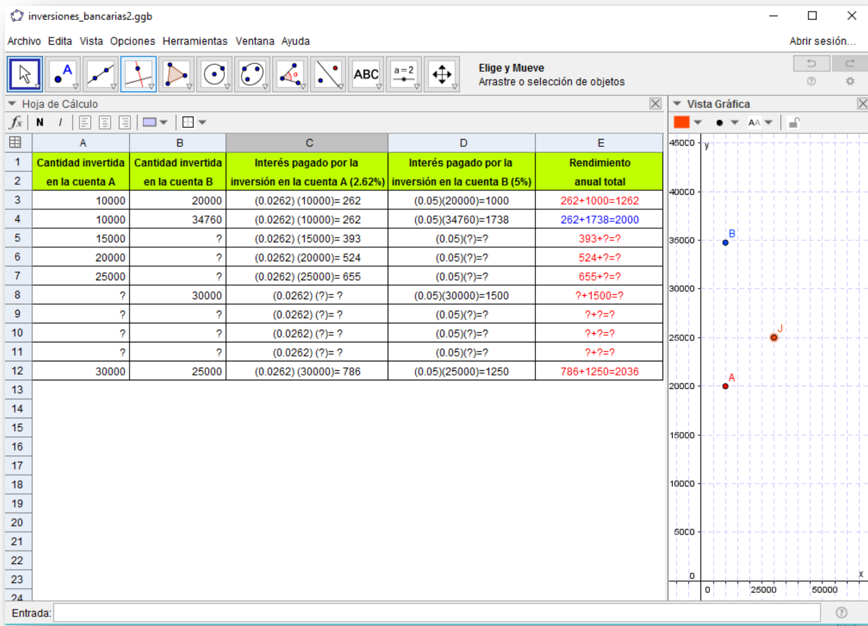


Figura 19. Indicaciones en la actividad "Inversiones Bancarias". Puntos 2.11 y 2.12

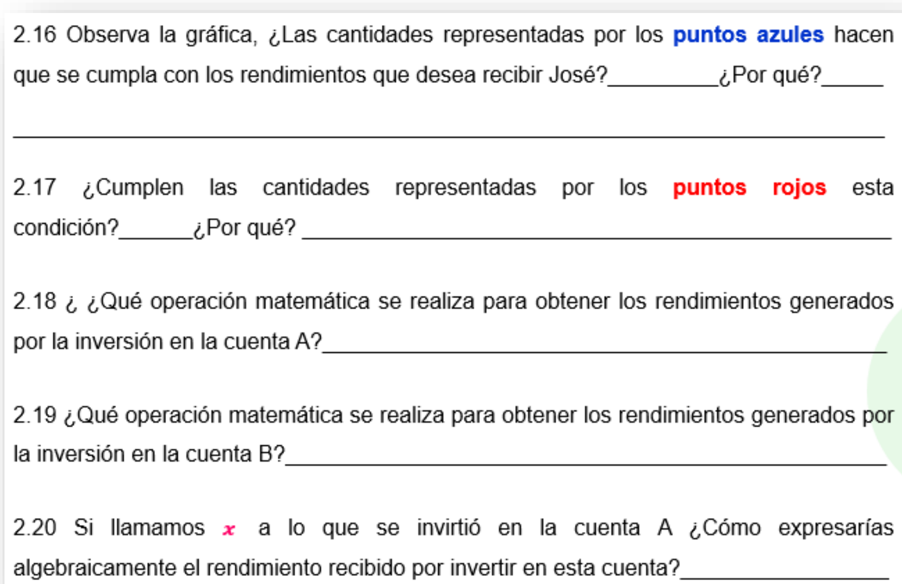
La actividad continúa de manera muy similar a los apartados anteriores. El alumno continuará con la exploración del applet "inversiones_bancarias2.ggb", cuyo objetivo es que pueda observar los rendimientos que se generan por la inversión en cada una de las cuentas bancarias.



	A	B	C	D	E
1–2	Cantidad invertida en la cuenta A	Cantidad invertida en la cuenta B	Interés pagado por la inversión en la cuenta A (2.62%)	Interés pagado por la inversión en la cuenta B (5%)	Rendimiento anual total
3	10000	20000	(0.0262) (10000)= 262	(0.05)(20000)=1000	262+1000=1262
4	10000	34760	(0.0262) (10000)= 262	(0.05)(34760)=1738	262+1738=2000
5	15000	?	(0.0262) (15000)= 393	(0.05)(?)=?	393+?=?
6	20000	?	(0.0262) (20000)= 524	(0.05)(?)=?	524+?=?
7	25000	?	(0.0262) (25000)= 655	(0.05)(?)=?	655+?=?
8	?	30000	(0.0262) (?)= ?	(0.05)(30000)=1500	?+1500=?
9	?	?	(0.0262) (?)= ?	(0.05)(?)=?	?+?=?
10	?	?	(0.0262) (?)= ?	(0.05)(?)=?	?+?=?
11	?	?	(0.0262) (?)= ?	(0.05)(?)=?	?+?=?
12	30000	25000	(0.0262) (30000)= 786	(0.05)(25000)=1250	786+1250=2036

Figura 20. Exploración del applet "inversiones_bancarias2.ggb"

Con las siguientes preguntas (Figura 21), se espera que el estudiante pueda plantear la segunda ecuación que conformará el sistema de ecuaciones lineales.



2.16 Observa la gráfica, ¿Las cantidades representadas por los **puntos azules** hacen que se cumpla con los rendimientos que desea recibir José?_________¿Por qué?_____

____

2.17 ¿Cumplen las cantidades representadas por los **puntos rojos** esta condición?______¿Por qué? ______________________________

2.18 ¿ ¿Qué operación matemática se realiza para obtener los rendimientos generados por la inversión en la cuenta A?______________________________

2.19 ¿Qué operación matemática se realiza para obtener los rendimientos generados por la inversión en la cuenta B?______________________________

2.20 Si llamamos x a lo que se invirtió en la cuenta A ¿Cómo expresarías algebraicamente el rendimiento recibido por invertir en esta cuenta?__________________

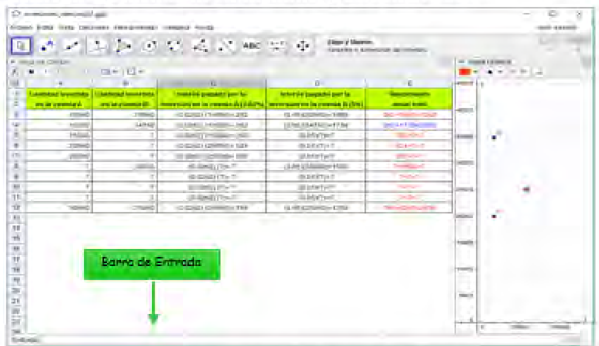
Figura 21. Preguntas enfocadas a la formulación de la ecuación 2 del sistema

Estas preguntas, están relacionadas con el applet anterior en cuanto a la gráfica y a la relación con los datos de la tabla.

A continuación, el estudiante deberá ingresar la expresión algebraica que obtuvo a través de la barra de entrada de GeoGebra, obteniendo de esta manera la gráfica de la segunda ecuación lineal.

2.22 Escribe una ecuación que modele la cantidad total de rendimientos que recibiría José por invertir en la cuenta A y en la cuenta B ______________________________

2.23 Ingresa en la barra de entrada la ecuación que obtuviste.



inversiones_bancarias2.ggb

2.24 Describe lo que observas en la Vista Gráfica______________________________

____

Figura 22. Obtención de la gráfica de la segunda ecuación lineal. Actividad 2

Hasta este punto, se espera que el estudiante haya obtenido las dos ecuaciones lineales que modelan la situación de la inversión bancaria inicial. Enseguida se le solicita que las escriba en el siguiente recuadro (Figura 23), para representar el sistema que forman.

Sistema de ecuaciones lineales { Ecuación 1 ______________________________
Ecuación 2 ______________________________

Figura 23. Sistema de ecuaciones lineales 2x2

La tercera parte de esta actividad continua con el trabajo individual del estudiante, utilizando el applet “inversiones_bancarias3.ggb”. En este applet se espera que el estudiante pueda generar las gráficas de las ecuaciones que obtuvo con anterioridad, utilizando la barra de entrada del software.

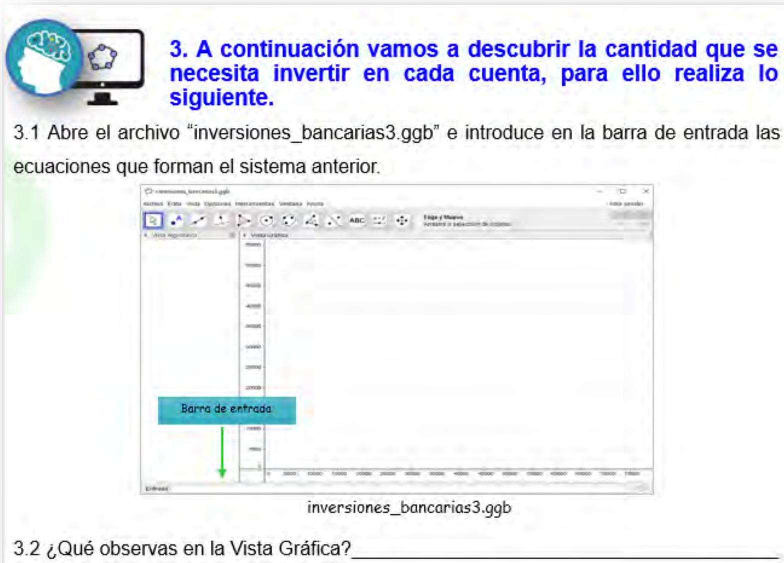


Figura 24. Applet “inversiones_bancarias3.ggb”

Enseguida, se desea que el alumno obtenga las coordenadas del punto de intersección de las rectas, utilizando las herramientas de GeoGebra como se indica en las hojas de trabajo.

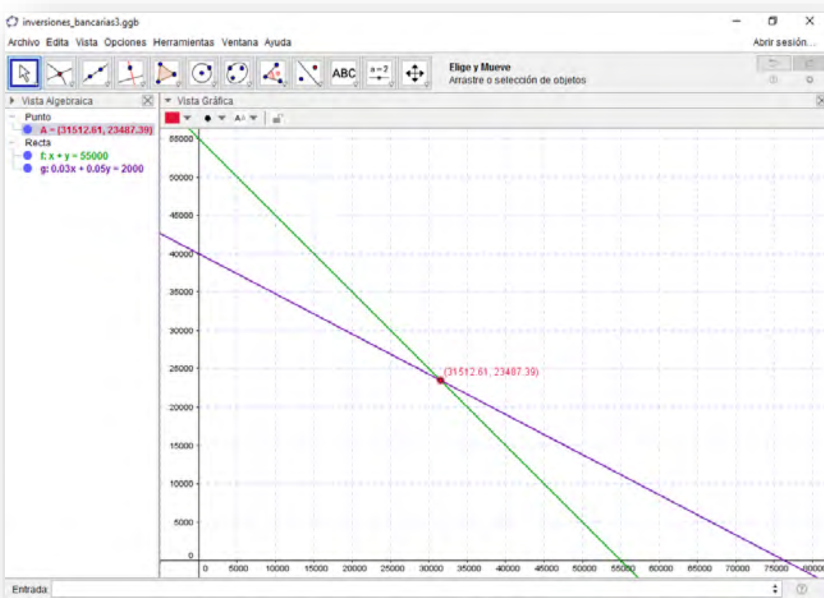
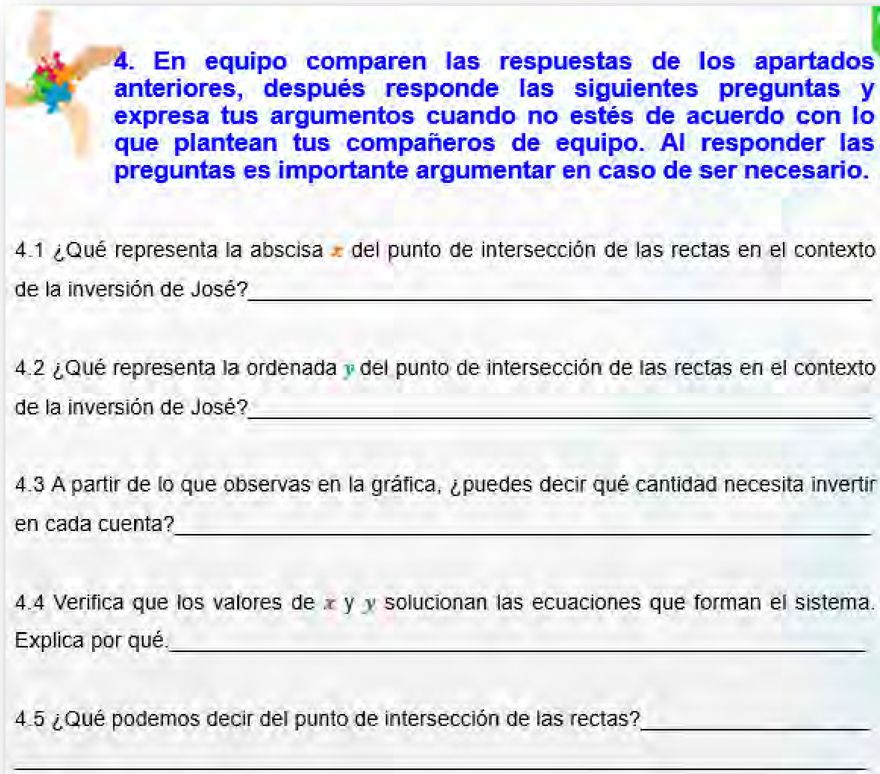


Figura 25. Obtención de las coordenadas del punto de intersección de las rectas

El siguiente apartado de la actividad corresponde con un momento de trabajo en equipo. El propósito de esta sección es que los estudiantes compartan sus experiencias de los apartados previos e intercambien sus respuestas y argumentos.

A su vez, se espera que juntos puedan interpretar la solución obtenida y verifiquen su validez en el contexto del problema inicial (Figura 26).



4. En equipo comparen las respuestas de los apartados anteriores, después responde las siguientes preguntas y expresa tus argumentos cuando no estés de acuerdo con lo que plantean tus compañeros de equipo. Al responder las preguntas es importante argumentar en caso de ser necesario.

4.1 ¿Qué representa la abscisa x del punto de intersección de las rectas en el contexto de la inversión de José?______________________________

4.2 ¿Qué representa la ordenada y del punto de intersección de las rectas en el contexto de la inversión de José?______________________________

4.3 A partir de lo que observas en la gráfica, ¿puedes decir qué cantidad necesita invertir en cada cuenta?______________________________

4.4 Verifica que los valores de x y y solucionan las ecuaciones que forman el sistema. Explica por qué.______________________________

4.5 ¿Qué podemos decir del punto de intersección de las rectas?____________________

Figura 26. Preguntas relacionadas con la solución obtenida

Al concluir con las secciones que hasta el momento se han presentado, se propone un momento de trabajo grupal a cargo del profesor, donde se busca organizar y concluir juntos con los conocimientos matemáticos y tecnológicos que se involucraron y surgieron en esta actividad. Para ello, se proporciona la sección “A lo que llegamos”, donde se definen de manera formal estos conceptos (Figura 27).

5. Comenta con tus compañeros y profesor las conclusiones a las que llegaron en la actividad anterior.

En ocasiones es necesario determinar una solución común a dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Nos referimos a estas como un *sistema de ecuaciones lineales 2x2*. Un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} (1)\quad x + 3y &= 18 \\ (2)\quad 2x + y &= 11 \end{aligned}\right]\text{— Sistema de ecuaciones lineales}$$

La *solución de un sistema de ecuaciones* es el conjunto de pares ordenados que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones del sistema. Gráficamente, la solución para el sistema anterior es (3, 5), es decir, las coordenadas del punto de intersección de las rectas.

Comprobación	En la ecuación (1)	En la ecuación (2)
	(3, 5)	(3, 5)
	$x + 3y = 18$	$2x + y = 11$
	$3 + 3(5) = 18$	$2(3) + 5 = 11$
	$3 + 15 = 18$	$6 + 5 = 11$
	$18 = 18$ Verdadero	$11 = 11$ Verdadero

Puesto que el par ordenado (3, 5) satisface ambas ecuaciones, es una solución para el sistema de ecuaciones y gráficamente es el punto que pertenece a ambas rectas.

Figura 27. Etapa de institucionalización

Por último, para verificar si el estudiante puede asociar una gráfica con el sistema de ecuaciones que le corresponde, se diseñó la siguiente sección de trabajo individual (Figura 28). En este apartado, se puede constatar si el estudiante asocia la solución del sistema como las coordenadas del punto de intersección de las rectas.

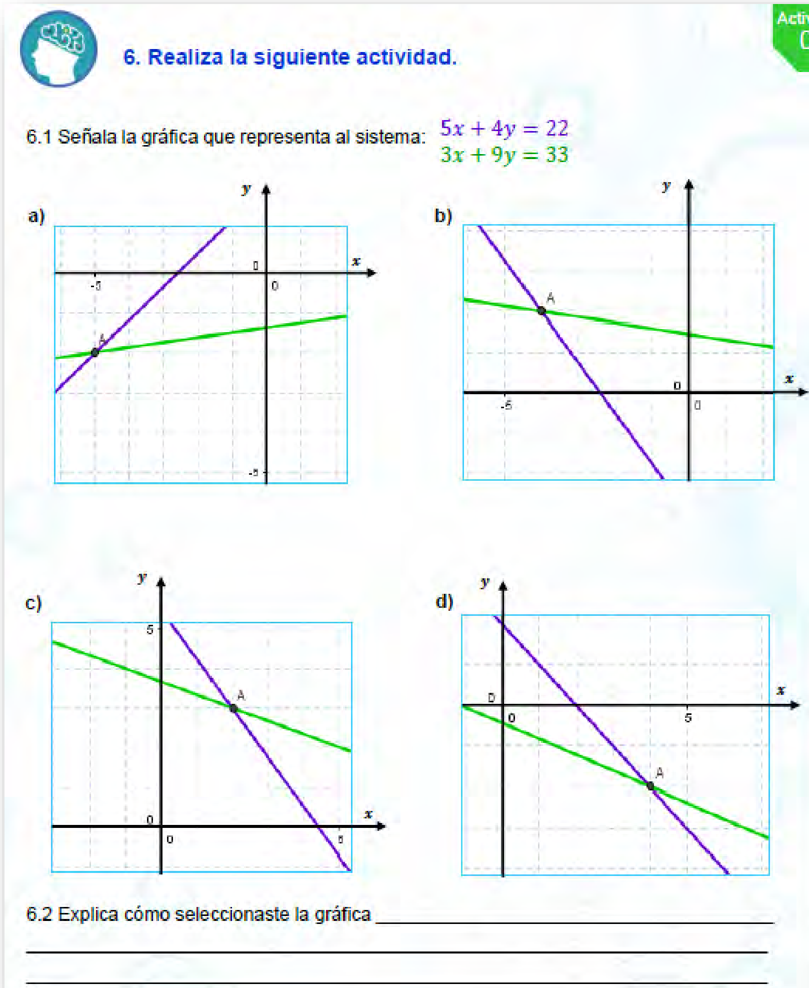


Figura 28. Asociación de una gráfica a un sistema de ecuaciones lineales 2x2

Actividad 3. "Compras en el mercado"

En esta actividad se presenta una situación relacionada con las compras en el mercado, que será modelada mediante un sistema de ecuaciones lineales 2x2 y que conducirá al estudiante a la representación gráfica de un sistema de ecuaciones sin solución. Los objetivos de esta actividad son:

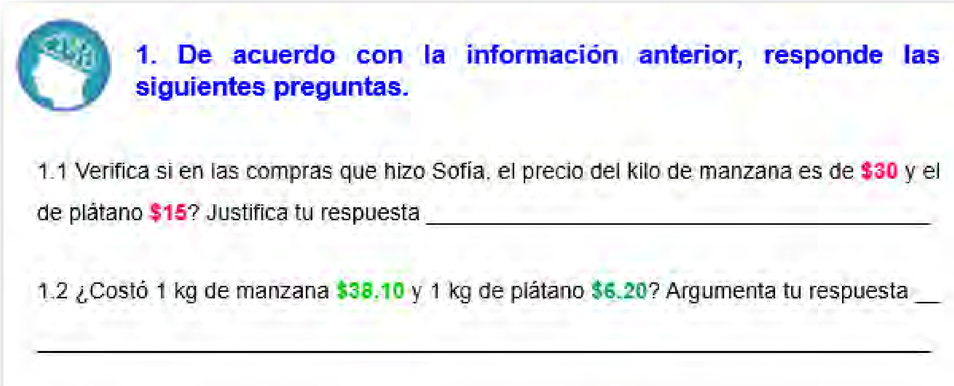
- Reconocer las relaciones lineales entre los datos de un problema y expresarlas mediante el lenguaje algebraico.
- Modelar la situación mediante un sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Descubrir que si al graficar un sistema de ecuaciones se obtienen dos rectas paralelas, el sistema no tiene solución.

El primer apartado, como en las actividades anteriores, es el de diálogo grupal. En éste se espera que los estudiantes puedan comentar aspectos relacionados con el contexto o con algunos conocimientos previos necesarios que el profesor considere pertinentes. Además de promover un ambiente de confianza y de expresión en los estudiantes, favoreciendo competencias comunicativas como *“Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, de códigos y herramientas apropiados”* (SEP, 2013b, p. 1).

Una vez concluida esta fase inicial, se propone la lectura individual de la siguiente situación:

Sofía le dijo a Pedro que había ido al mercado y que compró 2.8 kg de manzana y 2.1 kg de plátano por lo que pagó $119.70. Ella pensó que a Pedro le gustaría tener algunas frutas, así que regresó al mercado y compró 2 kg de manzana y 1.5 kg de plátano más. Pedro agradeció a Sofía, pero le dijo que no le gustaban los plátanos y que sólo le pagaría los 2 kg de manzana. Sofía le dijo que la segunda vez había pagado $82 de frutas. Ayuda a Pedro a descubrir cuánto le debe pagar a Sofía por los 2 kg de manzana.

Después de la lectura individual de la situación anterior, el alumno responderá las preguntas que se muestran a continuación (Figura 29). El objetivo de éstas, es que el alumno reflexione sobre la situación y a su vez que interprete los datos que se le proporcionan, promoviendo de esta manera la competencia de la autonomía en su aprendizaje y la capacidad de expresión y argumentación en sus respuestas.



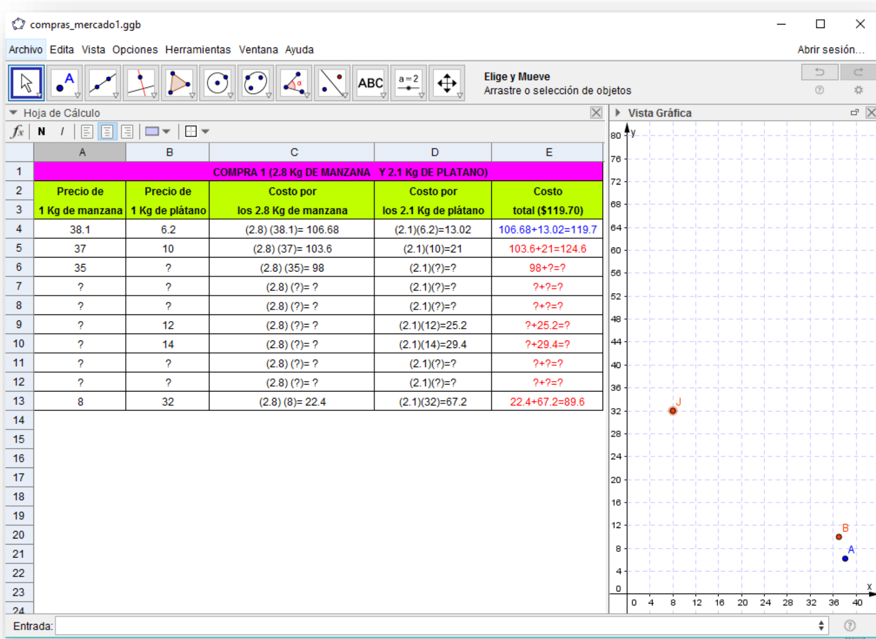
1. De acuerdo con la información anterior, responde las siguientes preguntas.

1.1 Verifica si en las compras que hizo Sofía, el precio del kilo de manzana es de **$30** y el de plátano **$15**? Justifica tu respuesta ______________________________

1.2 ¿Costó 1 kg de manzana **$38.10** y 1 kg de plátano **$6.20**? Argumenta tu respuesta ______________________________

Figura 29. Preguntas iniciales para la actividad "Compras en el mercado"

Al responder estas preguntas también se desea que el alumno pueda percartarse que es necesario encontrar el costo de las manzanas y de los plátanos que hagan que se cumplan las condiciones de ambas compras. Respondidos los cuestionamientos anteriores, se procede a la manipulación del primer applet de esta actividad, donde el alumno explorará la situación inicial proponiendo precios que hagan que se cumpla la condición de la primera compra. En la siguiente figura se muestra el applet y el trabajo que se espera realice el alumno.



	A	B	C	D	E
1	COMPRA 1 (2.8 Kg DE MANZANA Y 2.1 Kg DE PLATANO)				
2–3	Precio de 1 Kg de manzana	Precio de 1 Kg de plátano	Costo por los 2.8 Kg de manzana	Costo por los 2.1 Kg de plátano	Costo total ($119.70)
4	38.1	6.2	(2.8) (38.1)= 106.68	(2.1)(6.2)=13.02	106.68+13.02=119.7
5	37	10	(2.8) (37)= 103.6	(2.1)(10)=21	103.6+21=124.6
6	35	?	(2.8) (35)= 98	(2.1)(?)=?	98+?=?
7	?	?	(2.8) (?)= ?	(2.1)(?)=?	?+?=?
8	?	?	(2.8) (?)= ?	(2.1)(?)=?	?+?=?
9	?	12	(2.8) (?)= ?	(2.1)(12)=25.2	?+25.2=?
10	?	14	(2.8) (?)= ?	(2.1)(14)=29.4	?+29.4=?
11	?	?	(2.8) (?)= ?	(2.1)(?)=?	?+?=?
12	?	?	(2.8) (?)= ?	(2.1)(?)=?	?+?=?
13	8	32	(2.8) (8)= 22.4	(2.1)(32)=67.2	22.4+67.2=89.6

Figura 30. Manipulación del applet "compras_mercado1.ggb"

En este apartado se desea contribuir al desarrollo de la quinta competencia genérica: *“Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos”* (SEP, 2013b, p. 1), promoviendo en el alumno el uso de la tecnología digital y siguiendo instrucciones y procedimientos de manera reflexiva.

Una vez que el estudiante completó la tabla que muestra la figura anterior, se prosigue con preguntas relacionadas a lo que sucede al explorar la situación en el applet, promoviendo el *análisis de las relaciones entre dos variables de un proceso social o natural para plantear un sistema de ecuaciones lineales*, cuarta competencia disciplinar en matemáticas.

2.2 ¿El precio de las manzanas corresponde a la coordenada en x o la coordenada en y de los puntos que aparecen en la gráfica?____________________

2.3 ¿Y el de los plátanos?____________________

2.4 Mueve el punto **J** en la vista gráfica y describe lo que observas en la tabla.
____

2.5 ¿Qué relación encuentras entre las coordenadas del punto **J** y los datos que aparecen en la tabla?____________________

2.6 ¿Por qué algunos puntos aparecen de color **azul** y otros de color **rojo**? Explica esto en términos de las coordenadas de los puntos y el costo total de la compra. __________
____

Figura 31. Preguntas relacionadas con el applet “compras_mercado1.ggb”

Como puede observarse, las preguntas anteriores están relacionadas con las coordenadas de los puntos que se generan automáticamente en el applet y constantemente se busca promover en el alumno las habilidades de argumentación de las respuestas que proporciona.

A continuación, se promueve que el estudiante analice la posición de los puntos azules en el plano. A su vez, se espera que se analicen las coordenadas que generan estos puntos, para poder establecer la expresión algebraica asociada a la gráfica. Lo anterior se realizará utilizando las herramientas que proporciona GeoGebra (Figura 32).

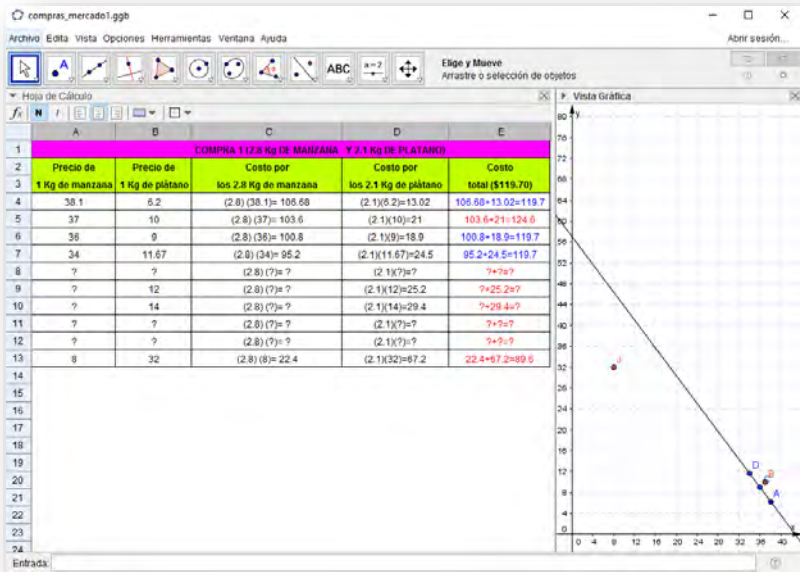


Figura 32. Exploración y gráfica en el applet "compras_mercado1.ggb"

Este apartado de trabajo individual, tiene el propósito de ayudar al alumno a modelar la situación-problema inicial a través de un sistema de ecuaciones lineales 2x2, por lo cual, las indicaciones y preguntas que continúan en esta sección son muy similares al trabajo previo que se ha presentado. A continuación, el estudiante explorará la segunda condición del problema a través del applet "compras_mercado2.ggb". Al igual que en el applet anterior, se graficarán automáticamente los puntos en color azul y rojo (Figura 33).

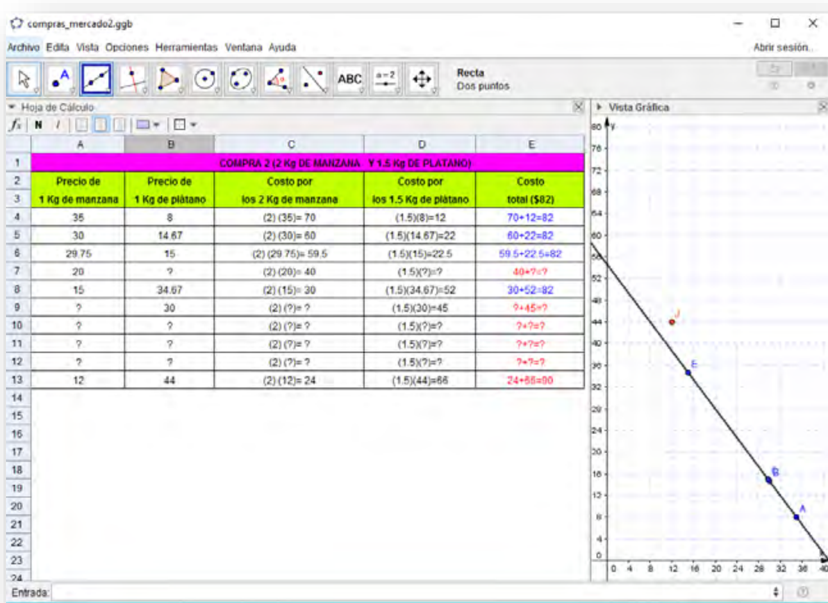


Figura 33. Exploración y gráfica en el applet "compras_mercado2.ggb"

Una vez que el alumno haya explorado la situación en los applets que se mostraron con anterioridad, se le solicita que anote las ecuaciones que encontró para formar el sistema de ecuaciones lineales 2x2, de esta manera se promueve la segunda competencia disciplinar del MCC: *"Formula y resuelve sistemas de ecuaciones lineales, aplicando diferentes métodos"* (DGB, 2013, p. 11).

2.26 Las ecuaciones que obtuviste en el archivo "compras_mercado1.ggb" y "compras_mercado2.ggb", son las ecuaciones que modelan la situación de Sofía y Pedro. Escríbelas a continuación para representar el sistema que forman.

Sistema de ecuaciones lineales
Ecuación 1 ______________________
Ecuación 2 ______________________

Figura 34. Sistema de ecuaciones lineales 2x2

Planteado el sistema de ecuaciones lineales 2x2, la actividad continúa con un apartado de trabajo en equipo. Un tercer applet ("compras_mercado3.ggb") ha sido diseñado para graficar de manera simultánea las ecuaciones obtenidas previamente. El objetivo de este archivo es que el alumno visualice la posición de las rectas en el plano cuando un sistema de ecuaciones lineales 2x2 no tiene solución.

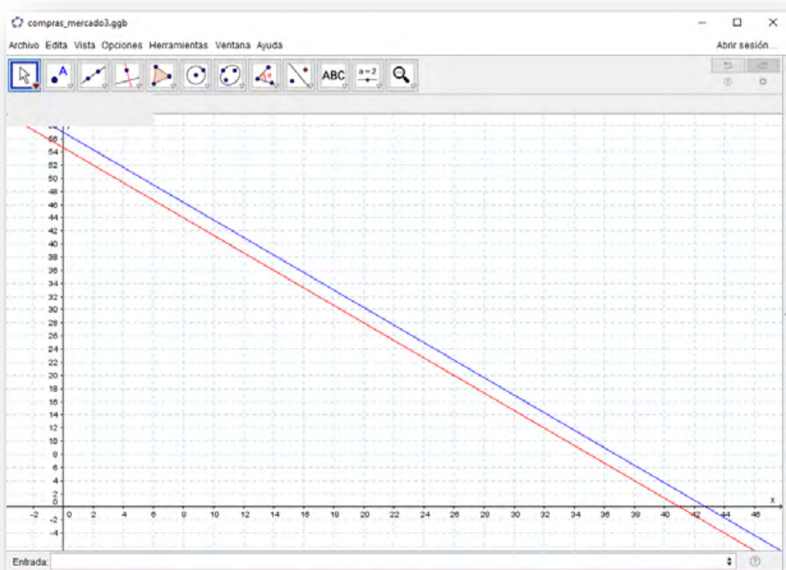


Figura 35. Gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 sin solución

El trabajo de los estudiantes con relación a las gráficas anteriores, es guiado con preguntas como las siguientes:

3.2 ¿Qué observan en la Vista Gráfica?____________________________________

3.3 ¿Cómo son entre sí las rectas que aparecen?______________________________

3.4 ¿Existirá algún punto común a las dos rectas?_______ ¿Cuál?__________________

3.5 ¿Tiene solución el sistema?_______ ¿Por qué?______________________________

3.6 A partir de lo que observan en la gráfica, ¿pueden decir cuánto debe pagarle Pedro a Sofía por los **2 kg** de manzana?_____ ¿Por qué?______________________________

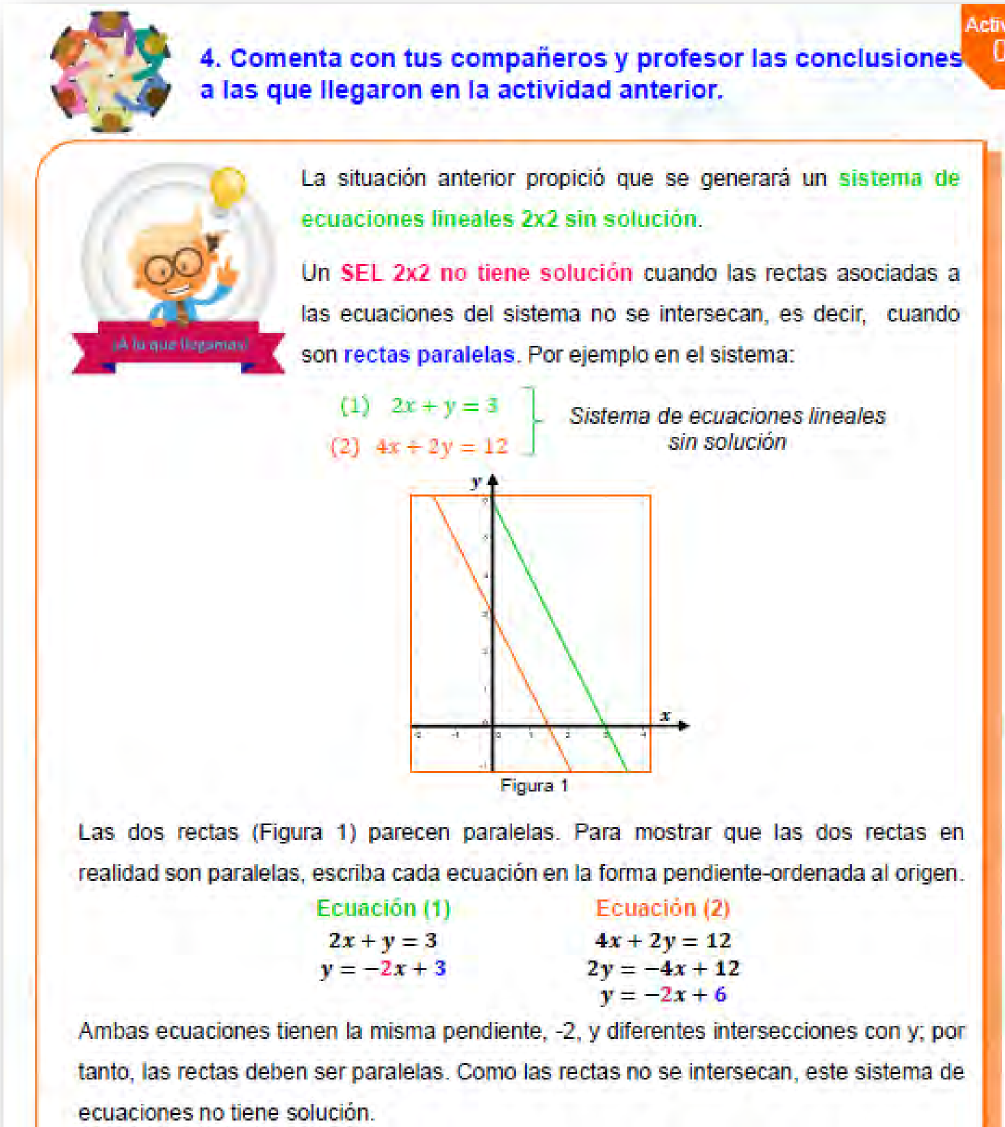
3.7 ¿Qué pueden expresar con relación a los datos que proporciona la situación de las compras en el mercado?____

Figura 36. Preguntas relacionadas con el archivo “compras_mercado3”

Con las preguntas anteriores se espera que los estudiantes puedan compartir sus argumentos e ideas con respecto a la gráfica que obtuvieron, de tal manera que observen que no existe ningún punto en común para las rectas y que este sistema no tiene solución. Para el caso de la situación de Sofía y Pedro no es posible determinar el precio de las manzanas y de los plátanos con los datos que se proporcionan y pudieran concluir que el precio de la fruta cambió de una compra a otra o que los datos proporcionados son incorrectos.

En este apartado se promueve el trabajo colaborativo*, “Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos”* (SEP, 2013b, p. 1), octava competencia genérica del MCC y a su vez la tercera competencia disciplinar *“Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales”* (DGB, 2013, p. 11).

Como cierre e institucionalización de los conceptos involucrados en los apartados previos, se propone un apartado de trabajo grupal que estará dirigido por el profesor, cuyo objetivo es organizar y concluir con los conocimientos matemáticos que se involucraron y surgieron a lo largo de la actividad (Figura 37).



Activ 0

4. Comenta con tus compañeros y profesor las conclusiones a las que llegaron en la actividad anterior.

¡A lo que llegamos!

La situación anterior propició que se generará un sistema de ecuaciones lineales 2x2 sin solución.

Un SEL 2x2 no tiene solución cuando las rectas asociadas a las ecuaciones del sistema no se intersecan, es decir, cuando son rectas paralelas. Por ejemplo en el sistema:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & 2x+y=3\\(2) & 4x+2y=12\end{array}\right\}\ \textit{Sistema de ecuaciones lineales sin solución}$$

Figura 1

Las dos rectas (Figura 1) parecen paralelas. Para mostrar que las dos rectas en realidad son paralelas, escriba cada ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen.

Ecuación (1)	Ecuación (2)
$2x+y=3$	$4x+2y=12$
$y=-2x+3$	$2y=-4x+12$
	$y=-2x+6$

Ambas ecuaciones tienen la misma pendiente, -2, y diferentes intersecciones con y; por tanto, las rectas deben ser paralelas. Como las rectas no se intersecan, este sistema de ecuaciones no tiene solución.

Figura 37. Etapa de institucionalización de los conceptos involucrados

Por último, se propone un pequeño apartado de trabajo individual, en el que cada estudiante deberá elegir el sistema de ecuaciones lineales que no tiene solución, con base en la gráfica que se muestra en la imagen (Figura 38).

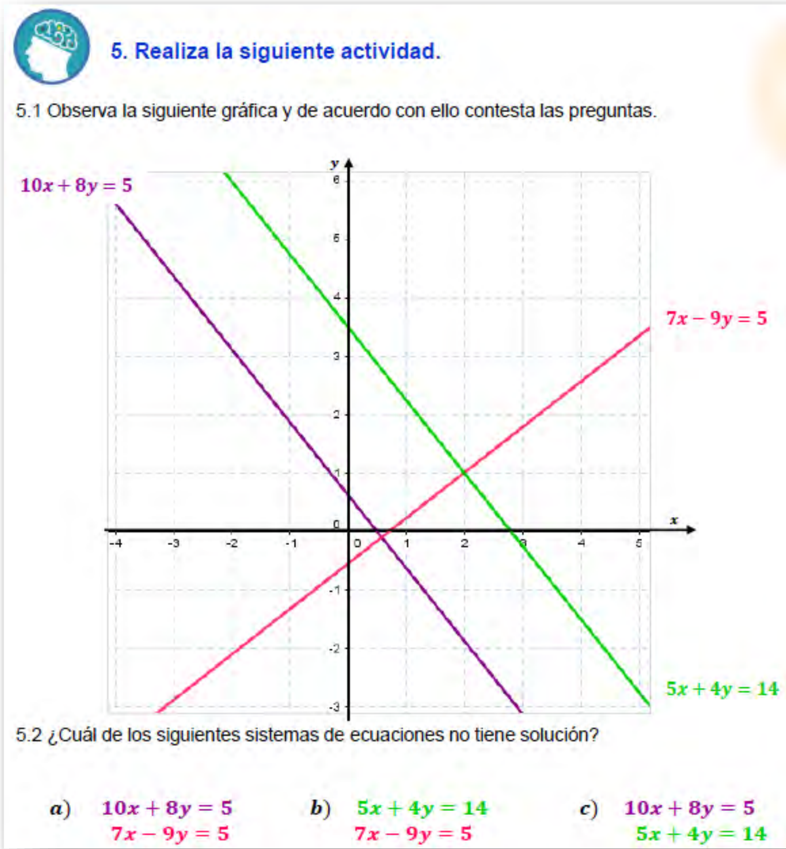


Figura 38. Asociación de una gráfica a un sistema de ecuaciones lineales 2x2 sin solución

Actividad 4. "Dieta para el ganado"

Los problemas de mezclas se dan en muchas situaciones, como cuando se combinan soluciones en un laboratorio de química o cuando se añaden ingredientes a una receta. En esta actividad se presenta una situación relacionada con la mezcla de alimentos para el ganado, contexto que nos pareció interesante para los estudiantes.

Esta situación será modelada mediante un sistema de ecuaciones lineales 2x2 y conducirá al estudiante a la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con infinidad de soluciones.

Los objetivos de esta actividad son:

- Reconocer las relaciones lineales entre los datos de un problema y expresarlas mediante lenguaje algebraico.

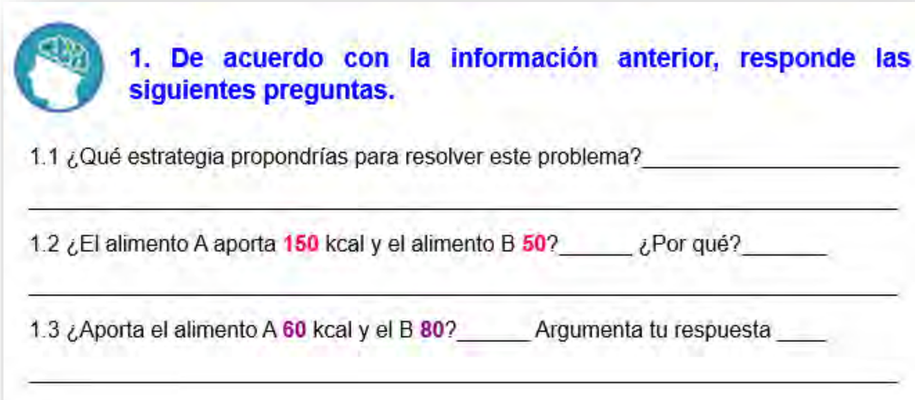
- Modelar la situación mediante un sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Descubrir que si al graficar un sistema de ecuaciones se obtienen dos rectas coincidentes, el sistema tiene infinidad de soluciones.
- Analizar la validez de la solución en el contexto de la situación modelada.

Como en las actividades previas, en esta actividad se propone iniciar con un momento de diálogo grupal. Este apartado tiene el propósito de rescatar los conocimientos, actitudes y habilidades que se requieren para el nuevo conocimiento a estudiar. Además de servir como etapa de ambientación para motivar a los alumnos a iniciar con la actividad. Se busca también que los alumnos opinen sobre algunos aspectos relacionados con el contexto de la actividad, de manera que se promueva un ambiente de confianza entre los estudiantes y el profesor.

Enseguida, cada alumno deberá leer la siguiente situación-problema de manera individual:

Un granjero sabe que debe alimentar a su ganado de forma balanceada y ha averiguado que las kilocalorías (kcal) son la fuente básica de energía para el tipo de animales que cría. Él tiene a su disposición dos tipos de alimento y sabe que la mezcla de 29.6 kg del alimento A y 44.4 kg de alimento B le aporta 5328 kcal a cada animal. Por otro lado, la mezcla de 88.8 kg del alimento A y de 133.2 kg del alimento B le aporta 15984 kcal. ¿Cuántas kilocalorías por kilogramo aporta el alimento A y cuántas el alimento B?

Con el objetivo de promover la interpretación por parte del alumno de los datos que se proporcionan en la situación, se realizan las siguientes preguntas iniciales (Figura 39).



1. De acuerdo con la información anterior, responde las siguientes preguntas.

1.1 ¿Qué estrategia propondrías para resolver este problema?__________________

____

1.2 ¿El alimento A aporta 150 kcal y el alimento B 50?______ ¿Por qué?_______

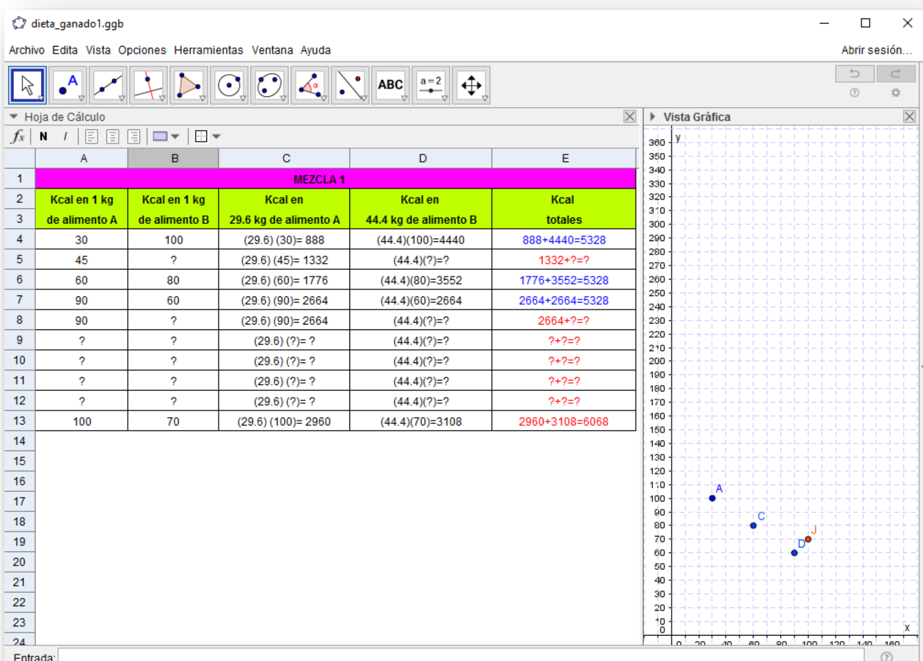
____

1.3 ¿Aporta el alimento A 60 kcal y el B 80?______ Argumenta tu respuesta ____

____

Figura 39. Preguntas iniciales para la actividad “Dieta para el ganado”

A continuación, se prosigue con un apartado de trabajo individual con el software GeoGebra. En este apartado, el estudiante explorará la primera condición del problema mediante el applet “dieta_ganado1.ggb”, proponiendo valores numéricos en la tabla e interpretando su relación con las coordenadas de los puntos azules y rojos que se generan.



	A	B	C	D	E
1	MEZCLA 1				
2	Kcal en 1 kg	Kcal en 1 kg	Kcal en	Kcal en	Kcal
3	de alimento A	de alimento B	29.6 kg de alimento A	44.4 kg de alimento B	totales
4	30	100	(29.6) (30)= 888	(44.4)(100)=4440	888+4440=5328
5	45	?	(29.6) (45)= 1332	(44.4)(?)=?	1332+?=?
6	60	80	(29.6) (60)= 1776	(44.4)(80)=3552	1776+3552=5328
7	90	60	(29.6) (90)= 2664	(44.4)(60)=2664	2664+2664=5328
8	90	?	(29.6) (90)= 2664	(44.4)(?)=?	2664+?=?
9	?	?	(29.6) (?)= ?	(44.4)(?)=?	?+?=?
10	?	?	(29.6) (?)= ?	(44.4)(?)=?	?+?=?
11	?	?	(29.6) (?)= ?	(44.4)(?)=?	?+?=?
12	?	?	(29.6) (?)= ?	(44.4)(?)=?	?+?=?
13	100	70	(29.6) (100)= 2960	(44.4)(70)=3108	2960+3108=6068

Figura 40. Exploración del applet “dieta_ganado1.ggb”

El trabajo en este applet es guiado con cuestionamientos como los siguientes (Figura 41).

2.2 ¿Las kcal en el alimento A corresponden a la coordenada en ***x*** o la coordenada en ***y*** de los puntos que aparecen en la gráfica?__________________________________

2.3 ¿Y las kcal en el alimento B?____

2.4 Mueve el punto **J** en la vista gráfica y describe lo que observas en la tabla. ____

2.5 ¿Qué relación encuentras entre las coordenadas del punto **J** y los datos que aparecen en la tabla?____

2.6 ¿Por qué algunos puntos aparecen de color **azul** y otros en color **rojo**? Explica esto en términos de las coordenadas de los puntos y las kilocalorías totales. _______________ ____

Figura 41. Preguntas relacionadas con el applet “dieta_ganado1.ggb”

Mediante el applet y las preguntas anteriores se promueve también la cuarta competencia disciplinar: *“Analiza las relaciones entre dos variables de un proceso social o natural para plantear un sistema de ecuaciones lineales y así determinar o estimar su comportamiento”* (DGB, 2013, p. 11).

La utilidad de este ambiente dinámico se refleja en la correspondencia entre el lenguaje numérico y el lenguaje gráfico, ya que los valores que ingrese el estudiante se estarán graficando automáticamente en el plano cartesiano, además, los puntos que se generen se mostrarán en colores distintos; azules los puntos cuyas coordenadas cumplen la condición y rojos los que no la satisfacen.

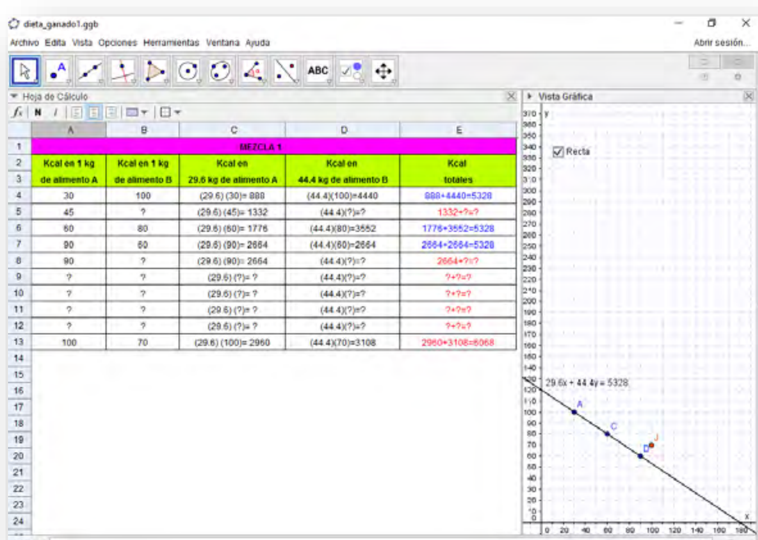
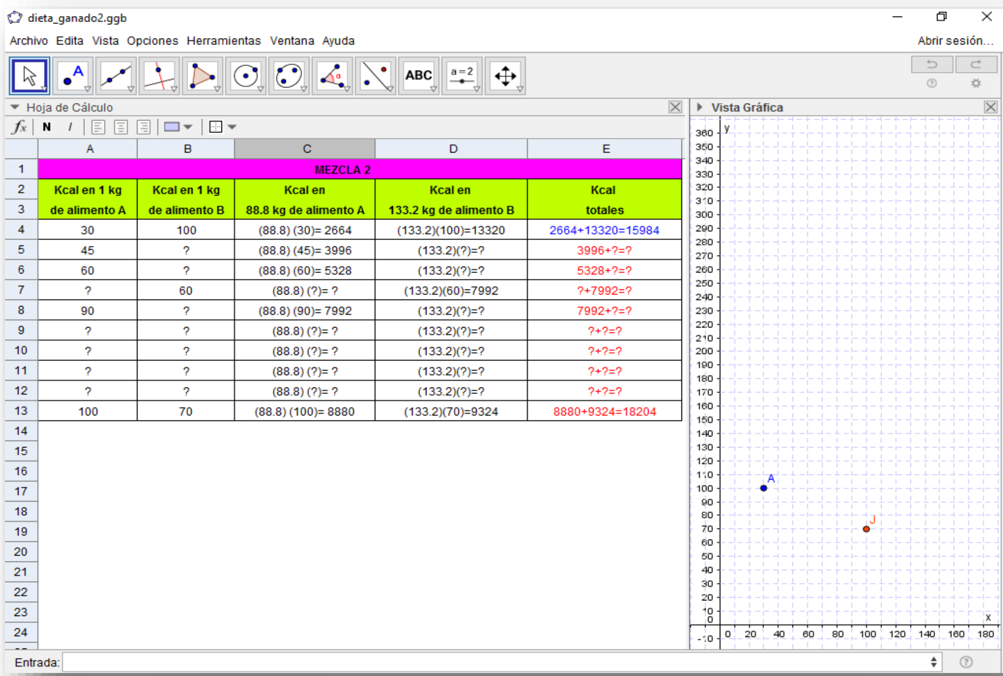


Figura 42. Gráfica y expresión algebraica que modela la primera condición del problema

Se espera que el estudiante pueda *“Interpretar tablas, gráficas, y textos con símbolos matemáticos y científicos”* (DGB, 2013, p. 11), para lo cual se prosigue con preguntas e indicaciones con la finalidad de obtener la gráfica que se genera al unir los puntos azules, así como la expresión algebraica asociada a ella.

La actividad continúa de manera muy similar a los apartados anteriores. El alumno realizará lo mismo pero ahora en el archivo “dieta_ganado2.ggb, en el que tendrá la posibilidad de identificar la relación entre los datos de la tabla y la segunda condición que se debe cumplir en el problema que se desea modelar. Al igual que en el applet anterior, se graficarán automáticamente los puntos en color azul y rojo.



	A	B	C	D	E
1	MEZCLA 2				
2–3	Kcal en 1 kg de alimento A	Kcal en 1 kg de alimento B	Kcal en 88.8 kg de alimento A	Kcal en 133.2 kg de alimento B	Kcal totales
4	30	100	(88.8) (30)= 2664	(133.2)(100)=13320	2664+13320=15984
5	45	?	(88.8) (45)= 3996	(133.2)(?)=?	3996+?=?
6	60	?	(88.8) (60)= 5328	(133.2)(?)=?	5328+?=?
7	?	60	(88.8) (?)= ?	(133.2)(60)=7992	?+7992=?
8	90	?	(88.8) (90)= 7992	(133.2)(?)=?	7992+?=?
9	?	?	(88.8) (?)= ?	(133.2)(?)=?	?+?=?
10	?	?	(88.8) (?)= ?	(133.2)(?)=?	?+?=?
11	?	?	(88.8) (?)= ?	(133.2)(?)=?	?+?=?
12	?	?	(88.8) (?)= ?	(133.2)(?)=?	?+?=?
13	100	70	(88.8) (100)= 8880	(133.2)(70)=9324	8880+9324=18204

Figura 43. Exploración del applet “dieta_ganado2.ggb”

El trabajo del alumno con relación al applet anterior, es guiado con preguntas como las que aparecen a continuación.

2.16 Observa la gráfica, ¿Las kilocalorías representadas por los **puntos azules** hacen que se cumpla con el total de kilocalorías en la mezcla 2?_____ ¿Por qué?___________

____

2.17 ¿Cumplen las cantidades representadas por los **puntos rojos** esta condición?______ ¿Por qué? ____

2.18 ¿Qué operación matemática se realiza para obtener las kilocalorías en los **88.8 kg** del alimento A?____

2.19 ¿Qué operación matemática se realiza para obtener las kilocalorías en los **133.2 kg** del alimento B?____

2.20 Si llamamos x a las kcal en el alimento A, ¿Cómo expresarías algebraicamente las kcal en **88.8 kg** de alimento A?____

Figura 44. Preguntas enfocadas a la formulación de la segunda ecuación del sistema

La finalidad de las preguntas anteriores es ayudar al alumno a encontrar la ecuación que modela la segunda condición del problema. Una vez obtenida, se le solicita ingresarla en la barra de entrada, de manera que si la obtuvo correctamente, todos los puntos azules deberán quedar sobre la recta que se genera.

Una vez que el alumno haya explorado la situación en los applets que se mostraron con anterioridad, se le solicita que anote las ecuaciones que encontró para formar el sistema de ecuaciones lineales 2x2, de esta manera se promueve la segunda competencia disciplinar del MCC: *"Formula y resuelve sistemas de ecuaciones lineales, aplicando diferentes métodos"* (DGB, 2013, p. 11).

2.26 Las ecuaciones que obtuviste en el archivo "dieta_ganado1.ggb" y "dieta_ganado2.ggb", son las ecuaciones que modelan la situación de la mezcla de alimentos. Escríbelas a continuación para representar el sistema que forman.

Sistema de ecuaciones lineales
- Ecuación 1 ____________________________
- Ecuación 2 ____________________________

Figura 45. Sistema de ecuaciones lineales 2x2

En la tercera parte de esta actividad, se utilizará el archivo "dieta_ganado3.ggb", que ha sido creado para graficar de manera simultánea las ecuaciones obtenidas con anterioridad. La vista gráfica se encuentra preparada con la escala adecuada para visualizar las gráficas al ingresar las ecuaciones. El objetivo de este apartado es conducir a los alumnos a la representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 con infinidad de soluciones a través del trabajo en equipo y con la ayuda de GeoGebra (Figura 46).

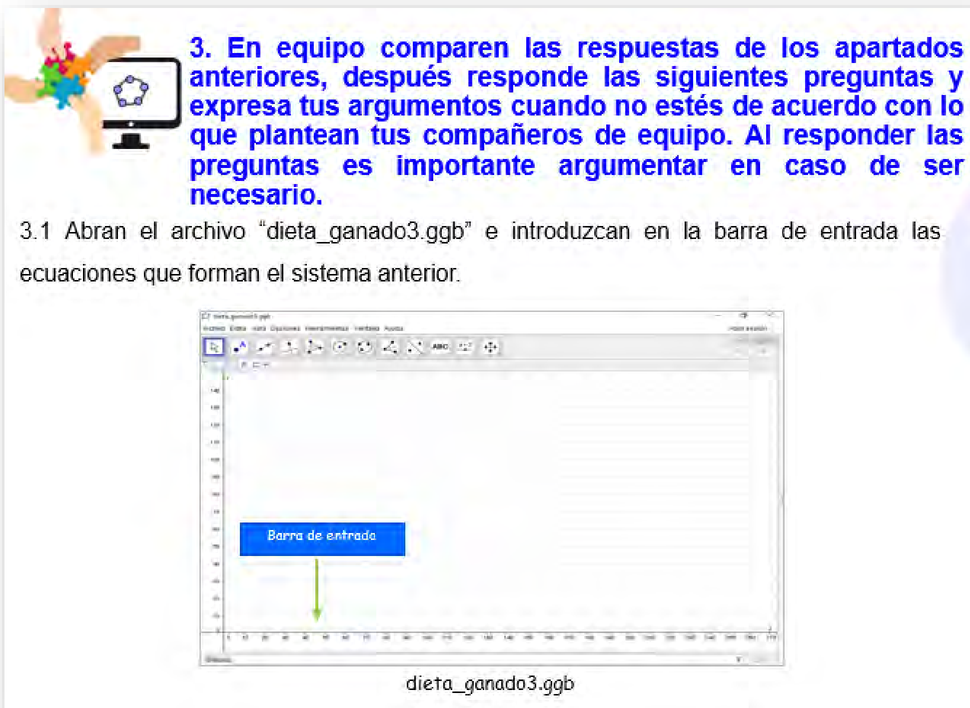


Figura 46. Trabajo en equipo. Actividad 4

Al ingresar las ecuaciones que forman el sistema, se espera que los alumnos puedan visualizar que las rectas son coincidentes en todos sus puntos. Tanto la Vista Gráfica como la Vista Algebraica del software se encuentran visibles con la intención de que el alumno pueda observar que las ecuaciones son equivalentes.

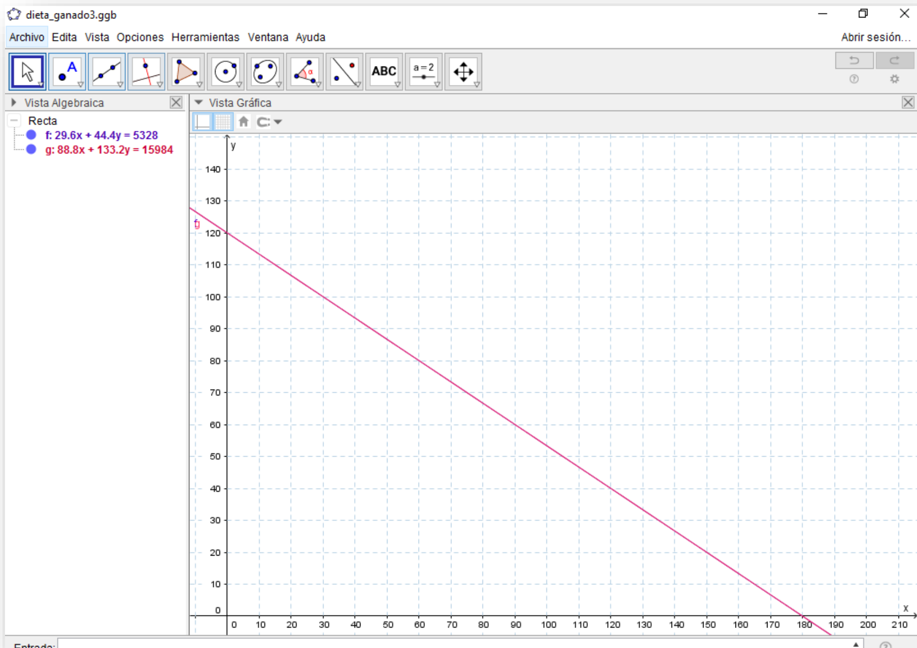


Figura 47. Sistema de ecuaciones lineales 2x2 con infinidad de soluciones

Las preguntas que guían a los estudiantes en relación con el applet anterior, se muestran en la siguiente figura.

3.2 ¿Qué observan en la Vista Gráfica?_______________________________________

3.3 ¿Cómo son entre sí las rectas que aparecen?______________________________

3.4 Coloca el cursor sobre la Recta sin hacer clic, ¿Qué aparece?__________________

____

3.5 ¿Habrá algún punto de la Recta a que no pertenezca a la Recta b?______________

¿Cuál?_________ Argumenten su respuesta__________________________________

____

3.6 ¿Tiene solución el sistema?________¿Por qué?_____________________________

Figura 48. Preguntas relacionadas con el archivo “dieta_ganado3.ggb”

Si hasta este punto, los estudiantes aún no han podido identificar las múltiples soluciones que el sistema de ecuaciones tiene, se les proporciona la tabla siguiente (Figura 49), de manera que puedan elegir diferentes coordenadas de puntos que sean solución del sistema, contribuyendo de esta manera al concepto de infinidad de soluciones y promoviendo también sus habilidades de argumentación en las respuestas que brinda.

3.8 Con ayuda del applet llenen la siguiente tabla, eligiendo puntos que pertenecen a ambas rectas. Observen el ejemplo.

Kcal en alimento A	Kcal en alimento B	Kcal totales en mezcla 1 $29.6x + 44.4y = 5328$	Kcal totales en mezcla 2 $88.8x + 133.2y = 15984$	¿Es solución del sistema?
30	100	$29.6(30) + 44.4(100) = 5328$ $888 + 4440 = 5328$ $5328 = 5328$ *Verdadero*	$88.8(30) + 133.2(100) = 15984$ $2664 + 13320 = 15984$ $15984 = 15984$ *Verdadero*	Como **(30, 100)** satisface ambas ecuaciones, es una solución para el sistema de ecuaciones lineales.

Figura 49. Trabajo relacionado con el concepto de sistema de ecuaciones lineales 2x2 con infinidad de soluciones

Con el trabajo previo, se desea que el estudiante pueda responder y argumentar las preguntas siguientes.

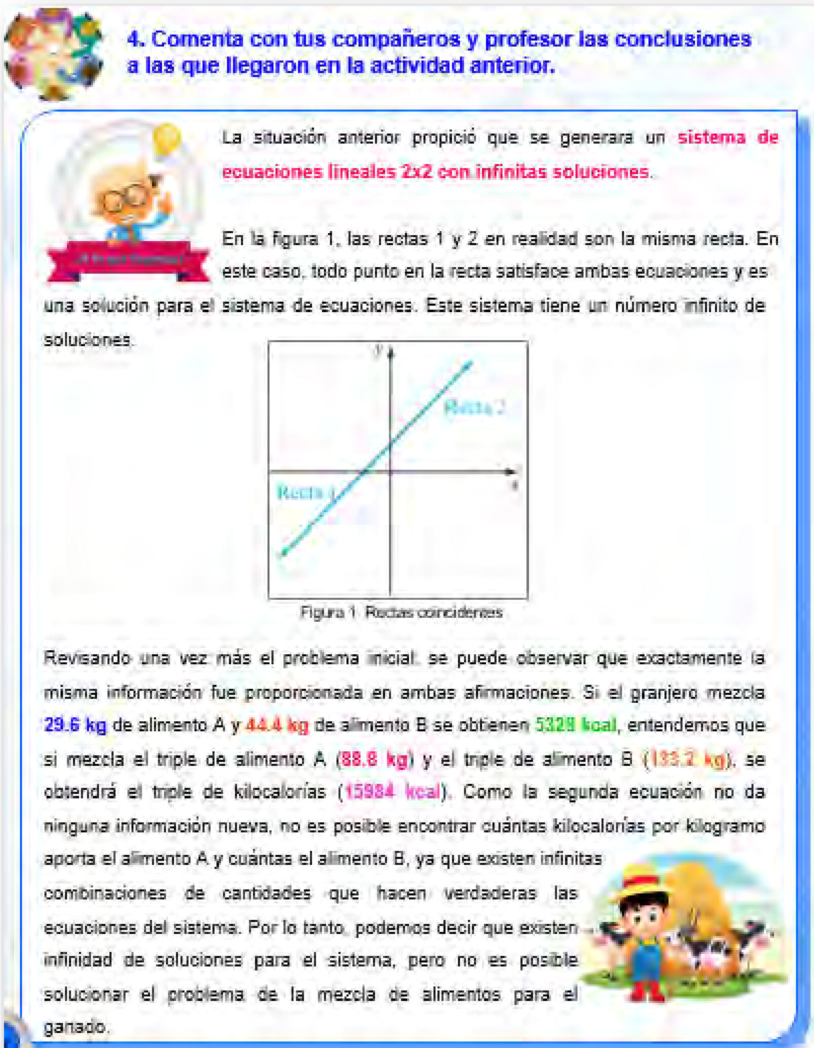
3.9 ¿Cuántos puntos comparten la Recta a y b?______________________________

3.10 ¿Cuántas soluciones tiene un sistema cuando la recta que corresponde a una ecuación es la misma que la recta que corresponde a la otra ecuación?_____________

Explica tu respuesta ____

Figura 50. Preguntas con relación al concepto de sistema de ecuaciones lineales 2x2 con infinidad de soluciones

Como cierre e institucionalización de los conceptos involucrados en los apartados previos, se propone un apartado de trabajo grupal que estará dirigido por el profesor, cuyo objetivo es organizar y concluir con los conocimientos matemáticos que se involucraron y surgieron a lo largo de la actividad (Figura 51).


4. Comenta con tus compañeros y profesor las conclusiones a las que llegaron en la actividad anterior.

La situación anterior propició que se generara un **sistema de ecuaciones lineales 2x2 con infinitas soluciones.**

En la figura 1, las rectas 1 y 2 en realidad son la misma recta. En este caso, todo punto en la recta satisface ambas ecuaciones y es una solución para el sistema de ecuaciones. Este sistema tiene un número infinito de soluciones.

Figura 1. Rectas coincidentes

Revisando una vez más el problema inicial, se puede observar que exactamente la misma información fue proporcionada en ambas afirmaciones. Si el granjero mezcla **29.6 kg** de alimento A y **44.4 kg** de alimento B se obtienen **5328 kcal**, entendemos que si mezcla el triple de alimento A (**88.8 kg**) y el triple de alimento B (**133.2 kg**), se obtendrá el triple de kilocalorías (**15984 kcal**). Como la segunda ecuación no da ninguna información nueva, no es posible encontrar cuántas kilocalorías por kilogramo aporta el alimento A y cuántas el alimento B, ya que existen infinitas combinaciones de cantidades que hacen verdaderas las ecuaciones del sistema. Por lo tanto, podemos decir que existen infinidad de soluciones para el sistema, pero no es posible solucionar el problema de la mezcla de alimentos para el ganado.

Figura 51. Etapa de cierre de la actividad 4

Como puede observarse en la figura previa, los alumnos tendrán la posibilidad de observar que en el problema inicial la información proporcionada fue la misma en ambas afirmaciones, lo que condujo a obtener ecuaciones equivalentes. Por lo tanto, existen infinidad de soluciones para el sistema pero no es posible solucionar el problema de la mezcla de alimentos para el ganado.

Por último y con la finalidad de conocer el significado adquirido por parte del alumno con relación a un sistema de ecuaciones lineales 2x2 con infinidad de soluciones, se propone un trabajo individual en la que cada estudiante deberá responder las siguientes preguntas.

5. Responde las siguientes preguntas.

5.1 Cuando graficamos un sistema de dos ecuaciones lineales con infinitas soluciones, ¿cuál será el resultado?____________________

5.2 Si un sistema de ecuaciones lineales 2x2 tiene soluciones (4, 3) y (6, 5) ¿cuántas soluciones tendrá el sistema? Explique por qué____________________

5.3 Con ayuda de GeoGebra determinen, de forma gráfica, la solución para cada sistema de ecuaciones. Marque sólo aquellos con infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{3}x + y = 6 \\ 2x + 6y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 5 \\ x + \frac{1}{2}y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{5}{8}x - 7y = 1 \\ 9x + 3y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{4}{6}x + \frac{8}{10}y = 6 \\ \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y = 3 \end{cases}$$

Figura 52. Trabajo individual y cierre de Actividad 4

Se desea observar también a qué tipo de argumentos recurre el estudiante para responder las preguntas anteriores.

Actividad 5. “Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2”

Con el propósito de integrar en una misma actividad la clasificación de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 según sus soluciones, así como sus representaciones gráficas, hemos diseñado la actividad que se presenta en esta sección.

En esta actividad el contexto utilizado es intra-matemático y conducirá al estudiante a la representación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, lo que permitirá clasificarlos de acuerdo con sus soluciones.

Los objetivos de esta actividad son:

- Resolver gráficamente un sistema de ecuaciones lineales 2x2.
- Identificar gráficamente si un sistema de ecuaciones simultáneas tiene una, ninguna o infinidad de soluciones.
- Interpretar la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 utilizando el software GeoGebra.

La fase inicial que se propone para esta actividad, consiste en un diálogo de manera grupal entre profesor y alumnos. Para esta etapa lo ideal sería que, previamente, los estudiantes conocieran el concepto de sistema de ecuaciones lineales 2x2 y de ser posible lo hayan utilizado en algún contexto extra-matemático, esto con la finalidad de estudiarlos con mayor sentido antes de realizar la actividad que aquí se presenta.

En esta etapa, el profesor puede iniciar cuestionando a los estudiantes sobre su concepto de sistema de ecuaciones lineales 2x2 y posteriormente, iniciar con la actividad, para conocer con mayor detalle la clasificación que éstos hacen, de acuerdo con sus soluciones.

Para comenzar, se presentan los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con los que trabajará el estudiante en la primera parte de la actividad (Figura 53).

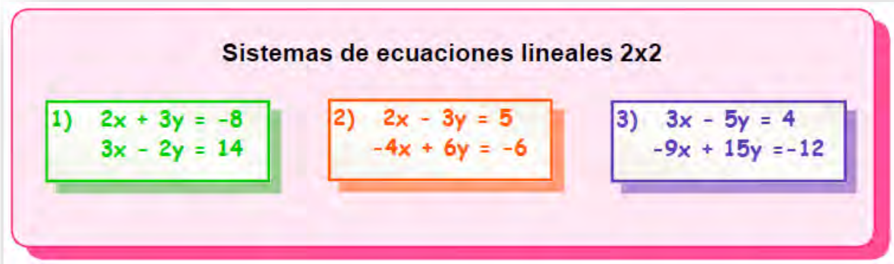


Figura 53. Sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Actividad 5

Los sistemas de ecuaciones que se muestran en la figura anterior, han sido seleccionados para conducir a los alumnos a la representación gráfica de un sistema con una, ninguna e infinidad de soluciones, respectivamente.

Para esto, se propone la primera etapa de trabajo individual, utilizando el software GeoGebra para obtener la gráfica de cada uno de los sistemas anteriores.

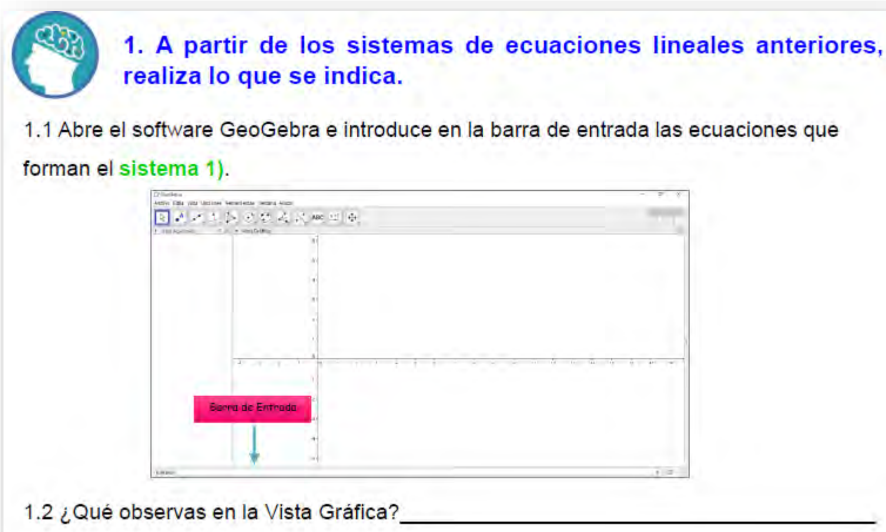


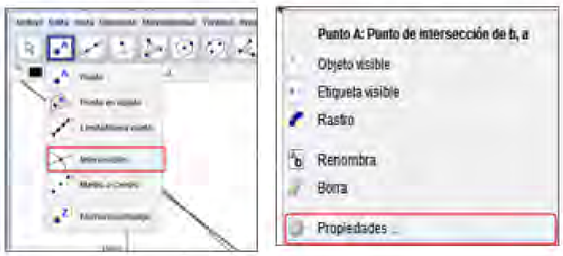
Figura 54. Trabajo individual. Actividad 5

El trabajo que realiza el estudiante con relación al manejo de GeoGebra, es guiado con preguntas cuya intención es promover su reflexión sobre el tipo de gráficas que se obtienen, las coordenadas de los puntos que tienen en común y los argumentos que se producen de acuerdo con sus interpretaciones.

En el caso del trabajo con el sistema 1, se promueve en el estudiante la obtención de las coordenadas del punto de intersección de las rectas con el apoyo de las herramientas de GeoGebra, tal como se muestra en la figura siguiente.

1.4 ¿Existe algún punto común a las dos rectas?_______ ¿Cuál?__________________

1.5 Selecciona la herramienta *"Intersección"*, haz clic sobre una de las rectas y después sobre la otra. Enseguida haz clic en el punto de intersección de las rectas con el botón derecho del mouse y selecciona "Propiedades" → "Etiqueta visible" → "Valor".



1.6 ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección?

Coordenada en x __________ Coordenada en y __________

Figura 55. Obtención de las coordenadas del punto de intersección de las rectas. Actividad 5

Posteriormente, se le solicita al alumno sustituir el valor de las coordenadas del punto de intersección por x y y en las ecuaciones del sistema 1, para verificar que efectivamente es solución del sistema.

Para el siguiente sistema de ecuaciones, el estudiante ingresará en la barra de entrada del software las ecuaciones correspondientes, para responder a preguntas como las siguientes.

1.9 Ahora introduce en la barra de entrada las ecuaciones que forman el **sistema 2)**.

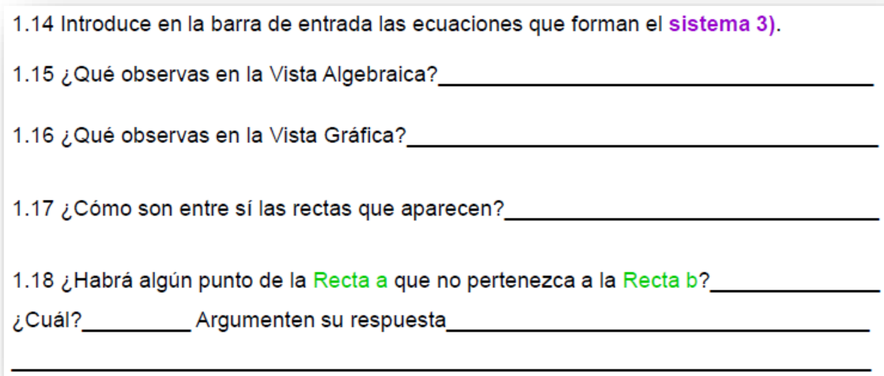
1.10 ¿Qué observas en la Vista Gráfica?____

1.11 ¿Cómo son entre sí las rectas que aparecen?_______________________________

Figura 56. Preguntas relacionadas con el sistema 2. Actividad 5

En esta ocasión, el alumno podrá visualizar dos rectas paralelas, por lo que no existen coordenadas de algún punto común para ambas rectas, a diferencia del sistema 1.

Para el sistema de ecuaciones lineales 3, el trabajo por parte del estudiante es muy similar, de manera que a través de la barra de entrada de GeoGebra, generará la gráfica correspondiente.



1.14 Introduce en la barra de entrada las ecuaciones que forman el **sistema 3)**.

1.15 ¿Qué observas en la Vista Algebraica?________________________________

1.16 ¿Qué observas en la Vista Gráfica?________________________________

1.17 ¿Cómo son entre sí las rectas que aparecen?________________________________

1.18 ¿Habrá algún punto de la Recta a que no pertenezca a la Recta b?____________

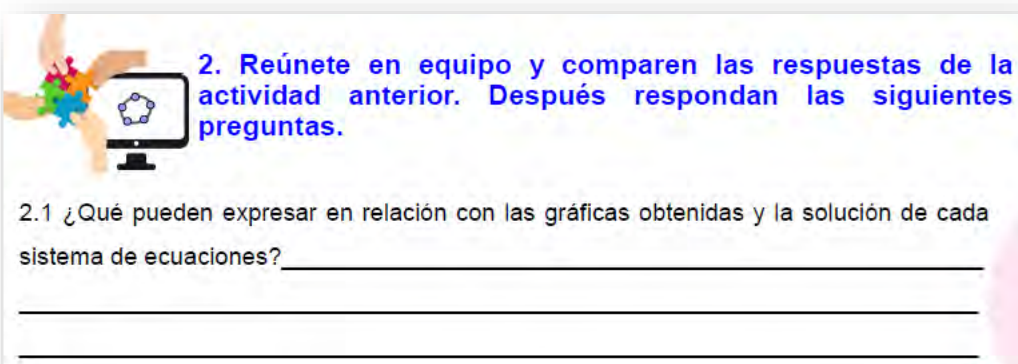
¿Cuál?_________ Argumenten su respuesta________________________________

____

Figura 57. Preguntas relacionadas con el sistema 3. Actividad 5

En esta ocasión, la gráfica corresponde a dos rectas coincidentes ya que las ecuaciones son equivalentes, lo que podrá observarse también en la Vista Algebraica.

Al finalizar con esta etapa, se propone un apartado de trabajo en equipo. La intención es que los estudiantes compartan sus opiniones y argumentos con el trabajo previo y puedan juntos responder preguntas como la siguiente.



2. Reúnete en equipo y comparen las respuestas de la actividad anterior. Después respondan las siguientes preguntas.

2.1 ¿Qué pueden expresar en relación con las gráficas obtenidas y la solución de cada sistema de ecuaciones?____

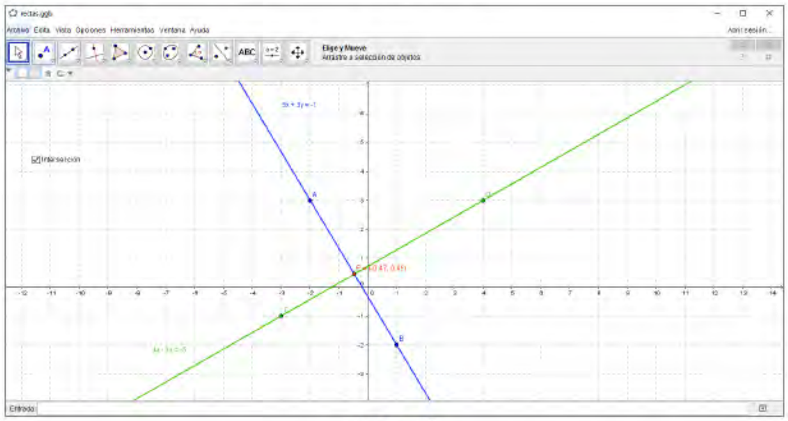
____

____

Figura 58. Trabajo en equipo. Actividad 5

A continuación, los estudiantes utilizarán el applet “rectas.ggb” para realizar lo que se indica en las hojas de trabajo (Figura 59).

2.2 Abre el applet “rectas.ggb” y realiza lo siguiente.



rectas.ggb

2.3 Mueve los puntos de cada una de las rectas de tal manera que obtengas un sistema de ecuaciones lineales 2x2 cuya única solución sea el punto (1, 1). Escríbelo a continuación y explica cómo lo obtuviste. ______________________________

____

Figura 59. Applet “rectas.ggb”. Actividad 5

La intención de la indicación 2.3, es conocer el significado que los estudiantes atribuyen a un sistema de ecuaciones lineales con solución única, así como las estrategias que utilizan para posicionar las rectas de manera que ambas pasen por el punto (1,1).

Con el apoyo de este applet, los alumnos deberán obtener también un sistema de ecuaciones sin solución y uno con infinidad de soluciones y responder a las preguntas de las hojas de trabajo con relación a la gráfica generada. A continuación se muestra un fragmento de las hojas de trabajo.

2.5 Ahora mueve los puntos nuevamente de tal manera que obtengas un sistema de ecuaciones lineales 2x2 sin solución. Escríbelo a continuación y explica cómo lo obtuviste. ______________________________

____

2.6 ¿Cómo son entre sí las gráficas de las ecuaciones?______________________________

Figura 60. Trabajo relacionado con el applet “rectas.ggb”. Actividad 5

Enseguida y también por equipos, los alumnos relacionaran las siguientes gráficas con el tipo de sistema al que pertenecen.

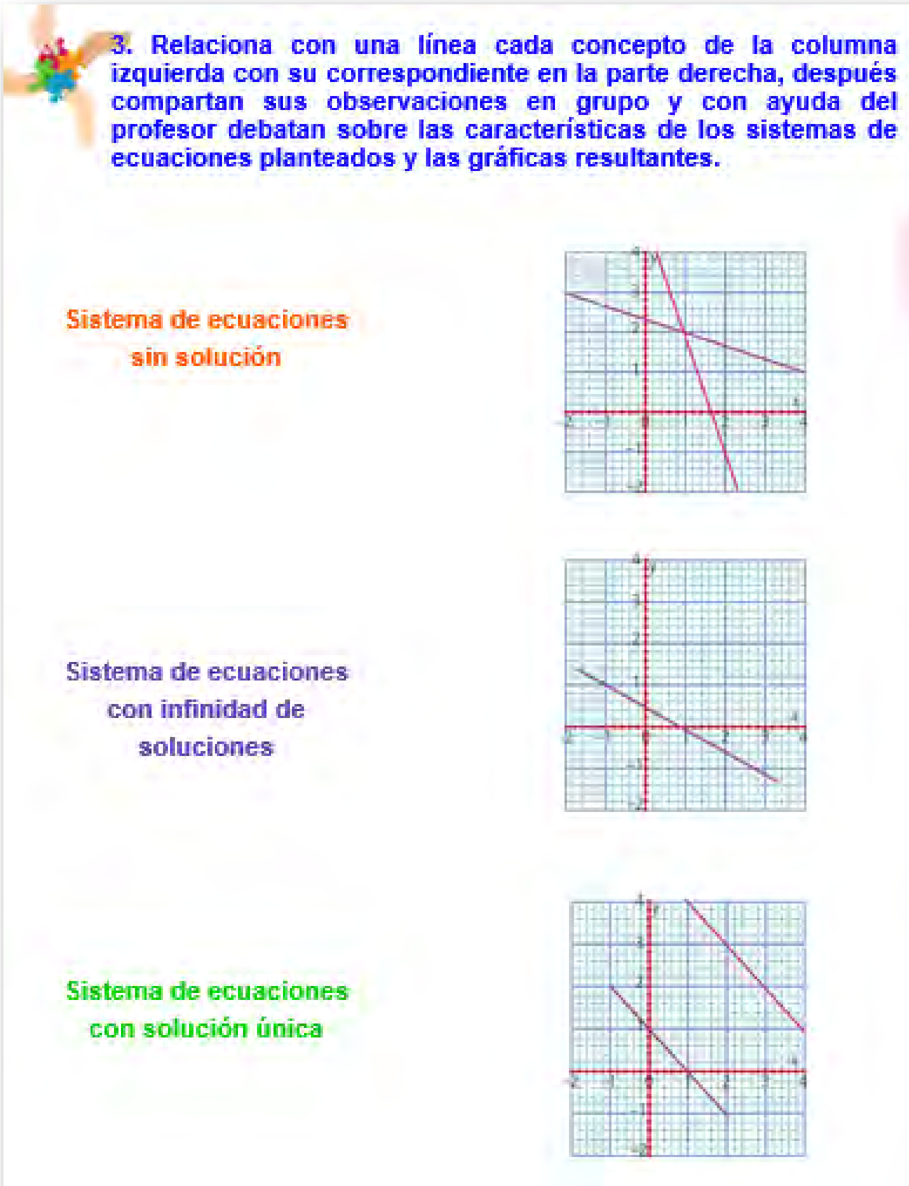
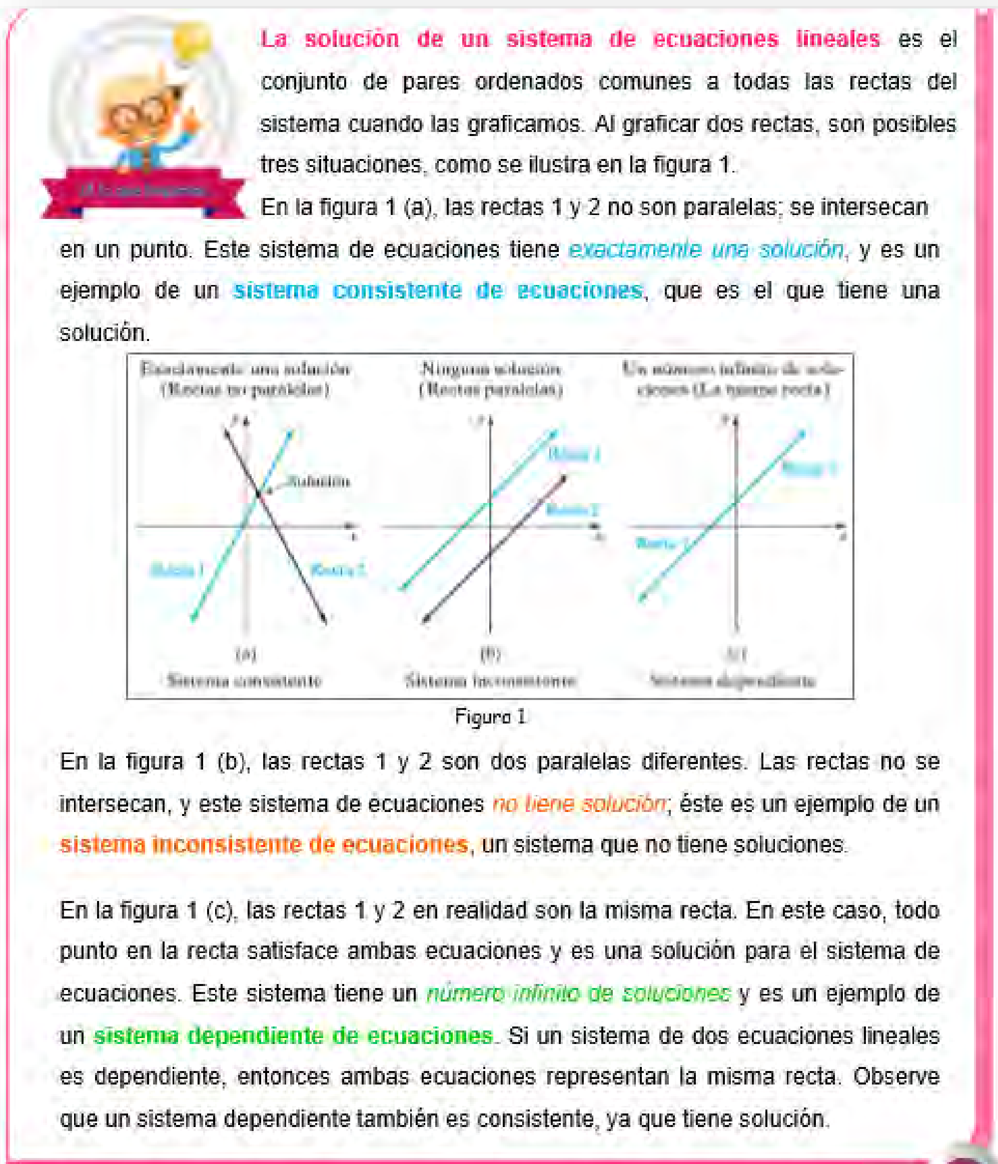


Figura 61. Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y sus gráficas

En este apartado, es conveniente que con la ayuda del profesor lo alumnos debatan sobre las características de los sistemas de ecuaciones lineales planteados y las gráficas resultantes.

Enseguida, como institucionalización de los conceptos involucrados, se presenta el siguiente apartado que se trabajará de manera grupal para organizar y sistematizar los conocimientos que emergieron a lo largo de la actividad.



La solución de un sistema de ecuaciones lineales es el conjunto de pares ordenados comunes a todas las rectas del sistema cuando las graficamos. Al graficar dos rectas, son posibles tres situaciones, como se ilustra en la figura 1.

En la figura 1 (a), las rectas 1 y 2 no son paralelas; se intersecan en un punto. Este sistema de ecuaciones tiene *exactamente una solución*, y es un ejemplo de un **sistema consistente de ecuaciones**, que es el que tiene una solución.

Figura 1

En la figura 1 (b), las rectas 1 y 2 son dos paralelas diferentes. Las rectas no se intersecan, y este sistema de ecuaciones *no tiene solución*; éste es un ejemplo de un **sistema inconsistente de ecuaciones**, un sistema que no tiene soluciones.

En la figura 1 (c), las rectas 1 y 2 en realidad son la misma recta. En este caso, todo punto en la recta satisface ambas ecuaciones y es una solución para el sistema de ecuaciones. Este sistema tiene un *número infinito de soluciones* y es un ejemplo de un **sistema dependiente de ecuaciones**. Si un sistema de dos ecuaciones lineales es dependiente, entonces ambas ecuaciones representan la misma recta. Observe que un sistema dependiente también es consistente, ya que tiene solución.

Figura 62. Institucionalización en Actividad 5

Como puede observarse, con la ayuda de este apartado el profesor puede concluir sobre la clasificación de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 de acuerdo con su solución o ausencia de ella.

Por último y con la información previa, cada alumno clasificará los siguientes sistemas de ecuaciones a través de las gráficas que se le proporcionan en las hojas de trabajo.

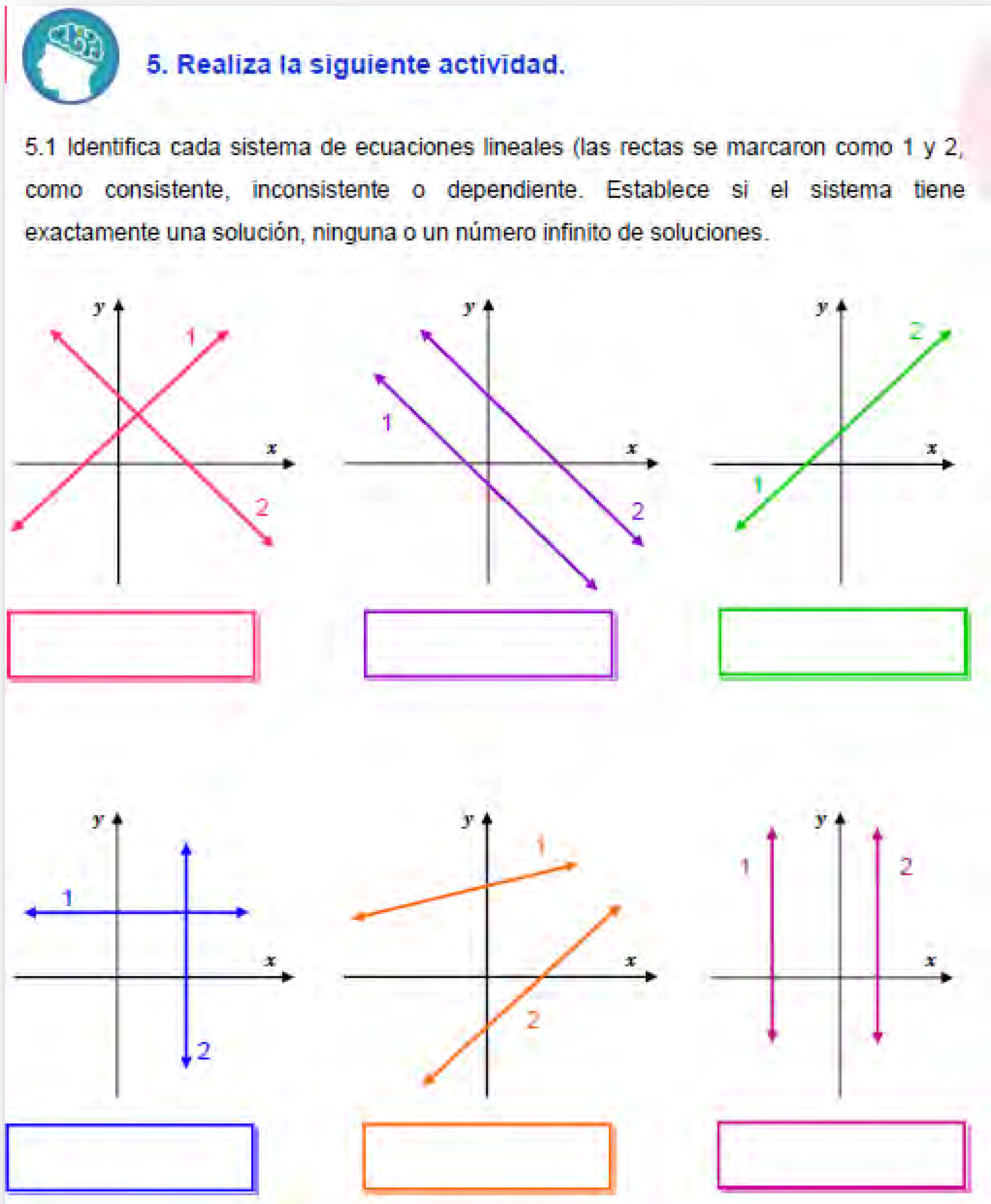


Figura 63. Trabajo individual y cierre de la Actividad 5

Actividad 6. “Relación entre los coeficientes y términos independientes de un SEL 2x2”

En esta actividad se estudian con mayor detalle las condiciones que deben cumplir los coeficientes y términos independientes de un SEL 2x2 de acuerdo con su clasificación, utilizando para ello el software GeoGebra.

Los objetivos de esta actividad son:

- Establecer las relaciones entre los coeficientes y términos independientes del sistema de ecuaciones lineales 2x2 que hacen que el sistema tenga una, ninguna o infinidad de soluciones.

- Formular sistemas de ecuaciones lineales 2x2 (con una, ninguna o infinidad de soluciones) considerando las relaciones entre los coeficientes y términos independientes.

Para iniciar la actividad, el profesor junto con los alumnos comentará sobre los casos posibles que se pueden presentar al resolver gráficamente un sistema de ecuaciones lineales 2x2 y los invitará a reflexionar sobre algún recurso que les permita conocer en cuál de las situaciones anteriores se encuentra un sistema dado, dando inicio con el trabajo que se propone en esta actividad.

El siguiente apartado consiste en un trabajo individual y dado que en resto de la actividad el alumno trabajará con coeficientes y términos independientes, consideramos pertinente que identifiquen estos elementos en los siguientes sistemas de ecuaciones lineales (Figura 64).

1. Identifica los elementos de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y completa la Tabla 1.

	Ecuaciones	Coeficiente de x	Coeficiente de y	Término independiente
Sistema 1	$2x - 3y = 5$			5
	$2x - 4y = 4$	2		
Sistema 2	$2x + y = 5$			
	$6x + 3y = 3$			
Sistema 3	$8x + 10y = 14$			
	$4x + 5y = 7$			
Sistema 4	$12x + 20y = 8$			
	$6x + 10y = 14$			
Sistema 5	$20x - 4y = 16$		-4	
	$10x - 2y = 8$			
Sistema 6	$6x - 9y = 24$			
	$2x - 2y = 6$			

Figura 64. Identificación de coeficientes y términos independientes

Enseguida y con el apoyo del applet que se indica en las hojas de trabajo, cada estudiante clasificará los sistemas de ecuaciones lineales anteriores.

2. A continuación clasificarás los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 de la tabla anterior con ayuda de GeoGebra.

1) $2x - 3y = 5$, $2x - 4y = 4$

2) $2x + y = 5$, $6x + 3y = 3$

3) $8x + 10y = 14$, $4x + 5y = 7$

4) $12x + 20y = 8$, $6x + 10y = 14$

5) $20x - 4y = 16$, $10x - 2y = 8$

6) $6x - 9y = 24$, $2x - 2y = 6$

2.1 Abre el archivo “sistemas_lineales.ggb” y con ayuda de los deslizadores obtén la gráfica de los sistemas anteriores. Utiliza los botones Zoom+ y Zoom– para acercar o alejar la vista gráfica cuando lo consideres necesario.

Figura 65. Trabajo inicial con GeoGebra. Actividad 6

El applet "sistemas_lineales.ggb" se muestra en la siguiente imagen, en este archivo el estudiante obtendrá la gráfica de cada uno de los sistemas con ayuda de los deslizadores, además de esto se muestran de forma numérica los cocientes de los coeficientes en la Hoja de Cálculo.

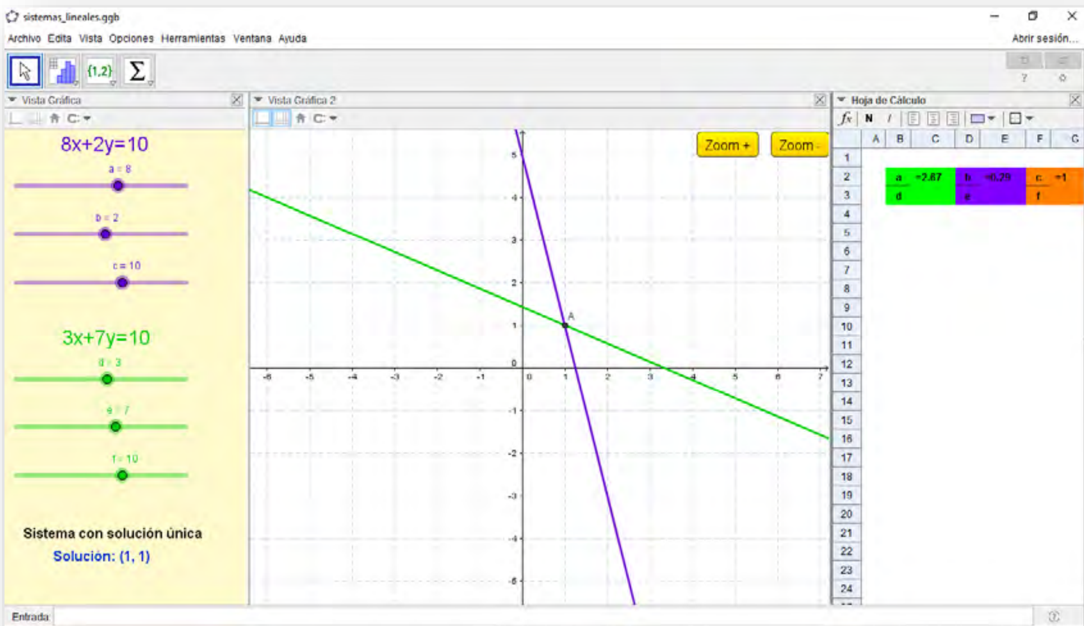


Figura 66. Applet "sistemas_lineales.ggb"

Con el apoyo del applet, el alumno completará tres tablas como se muestra a continuación, iniciando por los sistemas de ecuaciones con infinidad de soluciones.

2.2 Completa la siguiente tabla, de acuerdo a lo que observas en el applet anterior.

Sistemas con infinitas soluciones		$\frac{a}{d}$	$\frac{b}{e}$	$\frac{c}{f}$
Sistema 1				
Sistema 2				

2.3 ¿Qué observas? ____

Figura 67. Relación entre los coeficientes y términos independientes de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 con infinidad de soluciones

Para cada tipo de sistemas se realizan preguntas relacionadas con las pendientes de las rectas y las intersecciones con el eje y, tal como se muestra enseguida.

2.4 Simplifiquen las expresiones de las rectas hasta obtener ecuaciones de la forma $y = mx + b$

a) Recta 1: y=________________

b) Recta 2: y=________________

c) ¿Cuánto es la **ordenada al origen** de la recta 1? ________

d) ¿Cuánto es la **ordenada al origen** de la recta 2? ________

e) ¿Cuánto es la **pendiente** de la recta 1? ________

f) ¿Cuánto es la **pendiente** de la recta 2? ________

Figura 68. Preguntas relacionadas **con** los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 con infinidad de soluciones

Continuará con los sistemas sin solución y por último con los sistemas de ecuaciones con solución única.

2.4 Ahora observa lo que sucede con los sistemas de ecuaciones lineales sin solución, para ello completa la siguiente tabla.

Sistemas sin solución		$\frac{a}{d}$	$\frac{b}{e}$	$\frac{c}{f}$
Sistema 1				
Sistema 2				

2.5 ¿Qué relación encuentras entre los cocientes de los coeficientes? ______________

____

Figura 69. Relación entre los coeficientes y términos independientes de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 sin solución

El siguiente apartado, consiste en compartir por equipo las observaciones que realizaron con anterioridad con respecto a cada tipo de sistema de ecuaciones. En la siguiente imagen se muestra un fragmento en el cual se le solicita al alumno, escribir sus argumentos y observaciones sobre la relación entre los coeficientes y términos independientes para un sistema de ecuaciones con infinidad de soluciones.

3. Comenta con tus compañeros las respuestas de la actividad anterior y realicen juntos lo siguiente.

3.1 Compartan sus observaciones sobre la relación entre los coeficientes y términos independientes para un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones. ¿Qué pueden decir al respecto?____

3.2 Con ayuda del applet "sistemas_lineales.ggb", obtengan un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones. Anótenlo enseguida, además escriban el signo = (igual) o ≠ (diferente) en los recuadros que se proporcionan.

Sistema con infinitas soluciones		
Sistema		$\frac{a}{d}$ ☐ $\frac{b}{e}$ ☐ $\frac{c}{f}$

Figura 70. Trabajo en equipo. Actividad 6

Lo anterior se realizará también para los sistemas de ecuaciones lineales sin solución y con infinidad de soluciones.

Enseguida, sin resolverlos, los estudiantes determinarán el tipo de sistemas que aparecen en la siguiente tabla, considerando las relaciones que se deben cumplir y argumentando sus respuestas como se indica en el ejemplo.

Sistemas	Tipo de sistema	Argumenta tu respuesta
$x + y = 4$ $x + y = 7$	Sin solución	Porque $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{4}{7}$
$3x + y = 8$ $x - y = 4$		
$8x - 6y = -34$ $5x + 3y = -1$		

Figura 71. Identificación del tipo de sistema de ecuaciones lineales 2x2

Como cierre e institucionalización de los conceptos involucrados, se presenta la sección *A lo que llegamos* (Figura 72).

4. Comenta con tus compañeros y profesor las conclusiones a las que llegaron en la actividad anterior. Después comenten la información que se presenta enseguida.

¿Qué condiciones deben cumplir las ecuaciones para que el sistema tenga una, ninguna o infinitas soluciones?

Sistemas con solución única

Los coeficientes de x e y de las dos ecuaciones no son proporcionales. Entonces las rectas correspondientes a las ecuaciones del sistema **no tienen la misma pendiente**. Este hecho, visto geométricamente nos lleva a que las rectas no son paralelas ni coincidentes, sino oblicuas y dos rectas que no son paralelas ni coincidentes se intersecan en sólo un punto por lo que podremos afirmar que el sistema tiene solución única.

$$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$$

Sistemas sin solución

Los coeficientes de x e y de una ecuación son proporcionales a los de la otra, mientras que los términos independientes no lo son. Desde el punto de vista geométrico, ambas rectas tienen la **misma pendiente y diferentes intersecciones con y**; por tanto, las rectas son paralelas. Como las rectas no se intersecan, este sistema de ecuaciones no tiene solución.

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$$

Sistemas con infinitas soluciones

Los coeficientes de x e y, y el término independiente de una ecuación, son proporcionales a los de la otra. Esto significa, desde el punto de vista geométrico, que las rectas correspondientes a las dos ecuaciones lineales que integran el sistema tienen la **misma pendiente y la misma intersección con y**, es decir, ambas rectas son coincidentes.

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

Figura 72. Institucionalización de los conceptos involucrados. Actividad 6

Por último, con el objetivo de observar el significado adquirido por el alumno con relación a estos conceptos, se realizará un apartado de trabajo individual. En éste, se presenta una ecuación lineal con dos incógnitas de manera que el estudiante proporcionará la segunda ecuación para formar el sistema con una, ninguna e infinidad de soluciones, respectivamente (Figura 73).

5. Realiza la siguiente actividad.

5.1 Completa los siguientes sistemas, anotando los coeficientes y términos independientes faltantes para la segunda ecuación. Recuerda las condiciones que deben cumplir cada uno.

Sistemas de ecuaciones lineales 2x2	
Con solución Las dos rectas se cortan en un punto, el cual es la única solución que tiene el sistema	$7x + 2y = 8$ $\square x + \square y = \square$
Sin solución Las dos rectas son paralelas, no tienen ningún punto en común	$7x + 2y = 8$ $\square x + \square y = \square$
Infinitas soluciones Las dos rectas son coincidentes, todos los puntos son solución	$7x + 2y = 8$ $\square x + \square y = \square$

Figura 73. Trabajo individual y cierre de la Actividad 6

3.4 Orientaciones para el docente

Para cada actividad de la propuesta se ha diseñado un formato con información relevante sobre la actividad, que consideramos necesaria para el docente que desee utilizarlas (Anexo 4, p. 02). En este formato se especifica el tiempo estimado para realizarla, los prerrequisitos para abordarla, los recursos que serán necesarios y los objetivos que se desean alcanzar.

Además de lo anterior, en el folleto completo se describe la metodología de trabajo, señalando los objetivos de cada apartado de las actividades en cuanto al trabajo individual, en equipo y grupal. Se presenta también una tabla con información sobre los applets que se utilizan en cada actividad y la dirección electrónica donde se encuentran (Anexo 4, p. XIII), facilitando con ello el acceso desde cualquier computadora con conexión a internet, independientemente de si se tiene instalado o no el software GeoGebra.

La información que se detalla en cada actividad es la siguiente:

- **Asignatura:** Dirigidas todas a la asignatura de *Matemáticas 1*.

- **Bloque:** Las actividades están enfocadas al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 que corresponden al *Bloque 7. Resuelve Ecuaciones Lineales II.*

- **Tiempo estimado:** Se obtuvo con base en el tiempo registrado durante la puesta en escena.

- **Prerrequisitos:** En este apartado se especifican los conocimientos necesarios para poder realizar la actividad, los cuales pertenecen a los contenidos matemáticos que se abordaron previamente en los bloques anteriores de la asignatura.

- **Contenidos disciplinares:** Se especifica el contenido involucrado dentro de la actividad.

- **Medios de enseñanza:** En este apartado se presenta el enfoque de enseñanza en la actividad y los recursos que se utilizarán.

- **Objetivos.** Se describen los objetivos que se persiguen a lo largo de la actividad.

3.5 Análisis y valoración a priori de la idoneidad didáctica de la propuesta

La noción de idoneidad didáctica se puede aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También puede ser útil para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o "incidentes didácticos" puntuales (Godino, 2011, p. 8). En este sentido, a continuación se describe el análisis y valoración a priori de la idoneidad didáctica de nuestra propuesta. Considerando que para el diseño de las actividades se utilizaron los componentes y descriptores de cada idoneidad parcial, éstas se valoraron como *altas*, enseguida se explica el porqué:

3.5.1 Idoneidad epistémica

Como hemos indicado anteriormente, entendemos que un proceso de estudio matemático tiene mayor idoneidad epistémica en la medida en que los *significados institucionales pretendidos* representan bien a los *significados de referencia.* Las componentes de esta idoneidad se refieren a los seis tipos de objetos matemáticos primarios, y en el caso de nuestra propuesta de actividades, las situaciones, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos forman parte del *significado institucional de referencia* y *pretendido*.

En el marco del EOS se atribuye a las situaciones-problemas un papel central, ya que se asume que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de los sujetos al enfrentarse a determinados problemas. "La resolución de problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacer matemáticas". (Godino, 2011, p. 9)

Un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de *situaciones-problemas* o tareas ricas.

En cuanto a las *situaciones problemas*, señalamos anteriormente que fueron seleccionadas de algunos libros de texto de acuerdo con la bibliografía sugerida en el programa de estudios de la materia, pero cabe señalar que hubo dificultad para encontrar situaciones extra-matemáticas de la vida cotidiana. Por lo general, es difícil encontrar contextos extra-matemáticos en los que se puedan utilizar sistemas de ecuaciones lineales 2x2 sin solución o con infinidad de soluciones. En esta propuesta, logramos realizar la adaptación de algunos de ellos para abordar este contenido matemático y sólo en dos actividades utilizamos contextos intra-matemáticos, por lo que consideramos que se contempla una muestra representativa de situaciones extra-matemáticas, que posibilitan la problematización de los estudiantes en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

En lo referente al *lenguaje* podemos decir que las actividades promueven el uso de diferentes modos de expresión, pues los problemas son planteados en el lenguaje verbal en las hojas de trabajo, promoviendo después la relación entre el lenguaje numérico y gráfico en los applets de GeoGebra para que posteriormente, se establezcan algebraicamente las ecuaciones que modelan la situación. Además de esto, el nivel del lenguaje es apto para los estudiantes de bachillerato, ya que las situaciones fueron adaptadas para este nivel en cuanto al contexto, redacción de los problemas e indicaciones e institucionalización de los conceptos y procedimientos. Debemos señalar también que se utilizaron sólo las incógnitas x y y debido a las limitaciones del software.

Durante las actividades se promueven en el estudiante prácticas de expresión e interpretación, pues en algunas ocasiones se le pide que describa lo que observa entre los datos numéricos y gráficos en los applets, y en otras que justifique o argumente sus respuestas, esperando que utilicen en sus argumentos el contexto del problema, los valores de la tabla y lo que observan en la vista gráfica. Además, con las actividades de esta propuesta, se promueve el desarrollo de la interpretación y validación de la solución encontrada en el contexto de la situación-problema inicial.

En lo que respecta a *elementos regulativos*, las definiciones, proposiciones y procedimientos se presentan en la etapa de institucionalización y están adaptados al nivel de los estudiantes, ya que forman parte del significado institucional de referencia y provienen de bibliografía sugerida en el programa de la materia. Además, estos elementos se presentan como cierre en la sección *"A lo que llegamos"* y de una manera breve y sencilla pensando en facilitar la lectura e interpretación por parte de los alumnos. Por otro lado, en algunas actividades se promueven situaciones para la generación y negociación de reglas, particularmente se promueve que los alumnos encuentren relaciones a través de los applets para que puedan generalizar algunos procedimientos.

En cuanto a los *argumentos*, constantemente se promueve momentos de validación y argumentación de las respuestas, ya sea de manera individual, por equipo o grupal. Particularmente, en la etapa de cierre de las actividades, la intervención del profesor es clave para la institucionalización de los conceptos, procedimientos y argumentos que surgen en la actividad.

Las actividades didácticas de la propuesta tienen una estructura común, la cual busca promover gradualmente el desarrollo de un sistema de prácticas para construir y/o enriquecer los objetos matemáticos pretendidos, que generalmente se refieren a la formulación de las ecuaciones y a la resolución gráfica del sistema, de esta manera, los objetos matemáticos involucrados tienen *relación y articulación* a lo largo de la actividad.

3.5.2 Idoneidad cognitiva

La idoneidad cognitiva se refiere al grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir, están en su zona de desarrollo potencial. En el marco del EOS se asume que el aprendizaje implica la apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, mediante la participación en la comunidad de prácticas generada en la clase.

Para la realización de las actividades se requieren *conocimientos previos* que fueron estudiados en niveles académicos previos y en los bloques anteriores de la asignatura, como son transformaciones algebraicas, ecuaciones lineales, gráficas de las ecuaciones lineales en el plano cartesiano, manejo de tablas de valores numéricos, entre otros.

Considerando que no siempre el nivel académico previo proporciona a todos los estudiantes los conocimientos necesarios, esto se puede superar mediante los espacios de trabajo en equipo y discusiones grupales que se proponen en las actividades.

Por otro lado, el manejo de applets en GeoGebra no requiere una preparación especial, ya que una de sus ventajas es su carácter intuitivo y visual por lo que se considera que las actividades poseen un grado de dificultad apropiado para los estudiantes.

Para el logro de la componente de *adaptaciones curriculares a las diferencias individuales*, los espacios designados para el trabajo en equipo y grupal fueron diseñados para compartir posturas, ideas y argumentos que permitan enriquecer o complementar el significado del objeto de estudio. Además, todas las actividades didácticas tienen una estructura común, lo cual favorece que los estudiantes refuercen los significados que vayan construyendo durante estas actividades y amplíen el significado del concepto sistema de ecuaciones lineales 2x2 y solución gráfica.

En cuanto al *aprendizaje;* el trabajo del estudiante a lo largo de la actividad, su participación y el último apartado de las hojas de trabajo pueden tomarse como indicadores para conocer si los alumnos logran la apropiación de los conocimientos y competencias pretendidas.

3.5.3 Idoneidad mediacional

Se considera a la idoneidad mediacional como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

En las actividades utilizamos como *recursos materiales* principales las hojas de trabajo para los estudiantes y los applets diseñados en GeoGebra, el cual es un software de geometría dinámica que permite graficar funciones, trabajar con expresiones analíticas, manipular tablas de valores y vincular todo dinámicamente. Los applets fueron colocados en el sitio web GeoGebraTube y las direcciones electrónicas se encuentran en el folleto completo de actividades (Anexo 4, p. XIII). Se cuenta también con que la institución educativa provea pizarrón y proyector de video en el salón de clase y que los estudiantes cuenten con materiales personales como lápiz y calculadora.

En lo referente a *situaciones*, utilizamos el software GeoGebra para apoyar al estudiante en el proceso de formulación de las ecuaciones del sistema, esto a través de la exploración de la tabla de valores y la visualización de las relaciones entre éstos y las coordenadas de los puntos que automáticamente se grafican en el plano.

En cuanto al *lenguaje*, GeoGebra nos permitió establecer la relación entre el lenguaje numérico, gráfico y algebraico vinculando todo dinámicamente. Además, el uso del software nos brindó la posibilidad de utilizar *procedimientos* rápidamente, como la tabulación de valores, la gráfica de puntos en el plano, la gráfica de expresiones analíticas de las ecuaciones y la obtención de las coordenadas del punto de intersección de las rectas.

En lo que respecta a las *proposiciones*, GeoGebra permite visualizar la posición de las rectas en el plano y con esto identificar cuándo un sistema de ecuaciones simultáneas tiene una, ninguna o infinidad de soluciones. Por otro lado, a través del uso de deslizadores se puede apreciar la relación entre los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones que hacen que el sistema se clasifique de esta forma.

En lo referente al *número de alumnos, horario y condiciones del aula*, lo ideal es contar con una computadora con conexión a Internet para cada alumno, de no ser posible puede llevarse a cabo en grupos de 2 o 3 estudiantes. Consideramos que a priori, no es posible determinar si el horario del curso y el número y distribución de los alumnos en el aula son apropiados.

Por otra parte, consideramos que el *tiempo* requerido para las actividades es el adecuado y muy probablemente si se realizan varias de ellas, el tiempo requerido sea cada vez menor debido a las similitudes en la estructura y la forma de trabajo.

Por otro lado, consideramos que el tiempo invertido para el desarrollo de las actividades se dedica a partes esenciales del *Bloque 7*. De acuerdo con la DGB, los desempeños del estudiante al concluir el Bloque incluyen que éste sea capaz de modelar una situación a través de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y que puedan resolverlo utilizando diferentes métodos, entre ellos el gráfico; y que de acuerdo con diversos reportes de investigación los estudiantes presentan mayores dificultades.

3.5.4 Idoneidad emocional

La Idoneidad emocional se refiere al grado en que el proceso de instrucción permite la implicación (interés, motivación, apropiación de los problemas) de los alumnos en éste. La resolución de cualquier problema matemático lleva asociada una situación emocional para el sujeto implicado, quien pone en juego no solamente prácticas operativas y discursivas para dar una respuesta al problema, sino también moviliza creencias, actitudes, emociones o valores que condicionan en mayor o menor grado la respuesta cognitiva requerida (Godino, 2011, p. 11).

En lo que concerniente a *intereses y necesidades*, los problemas que seleccionamos son de contexto extra-matemático y familiares para los estudiantes. La dificultad de encontrar contextos adecuados para los sistemas de ecuaciones sin solución y con infinidad de ellas, nos llevó a tomar situaciones muy similares pero aun así consideramos que serán interesantes para los alumnos, ya que se puede apreciar la utilidad de las matemáticas para la resolución de problemas y al mismo tiempo construir nuevas matemáticas.

En lo que respecta a *actitudes*, se generan etapas de análisis y reflexión, individual, en equipo y grupal, donde el estudiante tendrá oportunidad de interactuar a nivel de grupo creando un ambiente de trabajo colaborativo, generando de esta manera la implicación activa en el desarrollo de las actividades.

En la componente *emociones*, al utilizar la tecnología digital en las actividades se promueve el interés de los estudiantes, se favorece su participación e implicación en la resolución del problema, además el hecho de iniciar la actividad con preguntas sencillas relacionadas con la situación-problema o realizar procedimientos elementales como la exploración de las tablas de valores, puede dar confianza al estudiante evitando el miedo o rechazo hacia las matemáticas.

3.5.5 Idoneidad interaccional

La idoneidad interaccional se refiere al grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje. La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión. Los estudiantes, en lugar de ser receptores de una matemática ya elaborada, son considerados como participantes activos del proceso de estudio, en el que ellos mismos desarrollan herramientas y comprensiones, y comparten sus experiencias unos con otros (Godino, 2011, p. 12).

En lo que respecta a la interacción *docente-discente*, en nuestra propuesta cada actividad da inicio con un momento de diálogo grupal que el profesor puede utilizar para hacer una presentación adecuada del tema. Es recomendable que actúe como un guía resolviendo dudas de los alumnos pero sin intervenir en el proceso gradual de construcción de los significados. Además debe estar al pendiente de problemas técnicos que pueden surgir durante la exploración de los applets.

También se hace notar la importancia de la argumentación por parte de los alumnos ya sea para convencer a sus compañeros de que sus respuestas o ideas son válidas o para llegar a consensos sobre algún objeto matemático involucrado en la actividad. Esto por un lado, favorece que los estudiantes asuman la responsabilidad de su aprendizaje y por otro lado, hace que se manifiesten conflictos de significados.

En lo referente a la *interacción entre discentes*, anteriormente explicamos la estructura de las actividades didácticas que conforman la propuesta, donde señalamos que existen momentos de trabajo individual, en equipo y grupal. Durante estos momentos se busca favorecer el diálogo y comunicación entre los estudiantes y la interacción entre ellos.

Después de la presentación grupal de la actividad, el estudiante deberá leer de manera individual la situación-problema y responder a los cuestionamientos iniciales con base en la información que se le proporciona, lo cual consideramos que favorece su *autonomía* en el aprendizaje.

En la componente de *evaluación formativa*, el profesor debe observar el desarrollo de cada una de las actividades y apoyar a los estudiantes realizando cuestionamientos pertinentes para que logren realizar de la mejor manera su trabajo.

3.5.6 Idoneidad ecológica

La idoneidad ecológica se refiere al grado en que el proceso de estudio se ajusta al currículo de la institución, contempla las necesidades e implicaciones del entorno y considera las conexiones intra e interdisciplinares. Por entorno entendemos todo lo que está fuera del aula, condicionando la actividad que se desarrolla en la misma. Así, nos podemos referir a todo lo que viene en general determinado por la sociedad, la escuela, la pedagogía, la didáctica de las matemáticas (Godino, 2011, p. 14).

En cuanto a la *adaptación de la propuesta al currículo*, los objetivos de las actividades corresponden a lo establecido por el programa de estudios para

Matemáticas 1 de la DGB, que tomamos como *Significado Institucional de Referencia* y que hemos descrito con anterioridad.

Por otro lado, aunque existen propuestas ya elaboradas para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales consideramos que nuestras actividades didácticas son *innovadoras* ya que parten de situaciones extra-matemáticas sencillas e incorporan el uso de un software novedoso con grandes beneficios para el estudio de las matemáticas. Además de que el diseño de las actividades está fundamentado en una teoría cada vez más reconocida y difundida entre la comunidad de Matemática Educativa, el EOS.

Otro de los elementos que forman parte de la fundamentación del diseño de nuestras actividades, son los resultados de las investigaciones, mediante los cuales pudimos identificar los problemas asociados al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, por lo que esta propuesta es una *innovación* basada en la investigación.

De igual forma y como ya hemos mencionado, la incorporación de la tecnología digital forma parte de las actividades, la cual nos brindó la posibilidad de relacionar el lenguaje numérico, gráfico y analítico de una manera visual y dinámica.

Con estas actividades también buscamos favorecer que los estudiantes construyan significados para objetos matemáticos del álgebra, que en un futuro puedan aplicar ya sea en otra asignatura o en su preparación *socio-profesional*.

En cuanto a la relación con otros contenidos *intra e interdisciplinares*, en nuestras actividades buscamos promover el desarrollo de competencias que serán útiles para los estudiantes no sólo en su trayectoria académica, sino también en otros ámbitos de su vida cotidiana. Por ejemplo, promovemos el desarrollo de habilidades para la modelación matemática de situaciones que requieran la formulación de un sistema de ecuaciones lineales, el trabajo en equipo y grupal para promover habilidades de comunicación y el respeto por las opiniones de los demás, etc.

CAPÍTULO 4. LA PUESTA EN ESCENA DE LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

Una vez concluido el proceso de fundamentación y diseño de las actividades que integraron el folleto final de esta propuesta (Anexo 4), el siguiente paso fue ponerlo en práctica. En este capítulo describiremos los aspectos principales de la puesta en escena de una de las actividades didácticas.

4.1 Descripción general

La puesta en escena se llevó a cabo con un grupo de 30 estudiantes del segundo semestre del Centro de Bachillerato Tecnológico agropecuario No. 53 (CBTa 53), ubicado en la comunidad de Moctezuma, Sonora. Los alumnos que asisten a esta escuela provienen de las comunidades vecinas, son de un nivel socioeconómico medio y sus edades oscilan de entre los 16 y 18 años de edad.

La puesta en escena estuvo a cargo de la diseñadora de las actividades, se realizó en el horario establecido para el curso de Matemáticas II, en aproximadamente 4 horas. El objetivo fue identificar errores en el diseño de las actividades, así como conflictos semióticos potenciales. Las condiciones fueron muy favorables, ya que la sesión tuvo lugar en un centro de cómputo de la institución donde cada alumno pudo utilizar su propia computadora con acceso a Internet y se contó con proyector y laptop para la instructora.

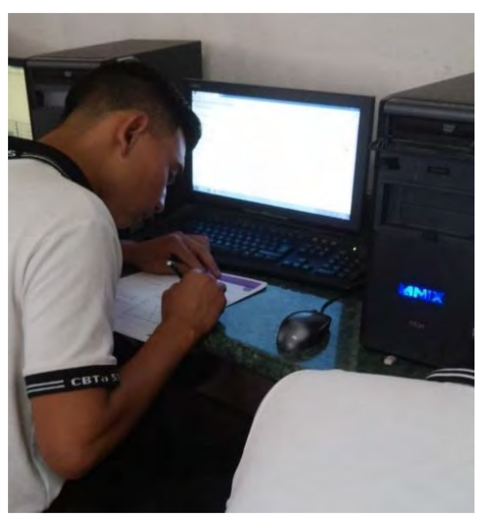


Figura 74. Puesta en escena de la Actividad 1

La profesora / diseñadora, fue la encargada de presentar la situación-problema, explicar la dinámica de trabajo, entregar y recoger las hojas de trabajo y ayudar a la resolución de dificultades que se presentaron durante el desarrollo de la aplicación de la actividad, apoyando también en el acceso a los applets de GeoGebra.

La actividad 1 (Six-Flags), fue seleccionada para aplicarse durante esta puesta en escena. Se eligió por ser de un contexto familiar para los estudiantes y por implicar el planteamiento de ecuaciones relativamente sencillas.

La organización de los alumnos siguió lo marcado en las hojas de trabajo: se trabajó de manera individual, en equipos y en discusión grupal guiada por el maestro, además de que en todo momento se supervisó y orientó a los estudiantes.

4.2 Observaciones y análisis de la puesta en escena

Para dar inicio con la implementación de la actividad, se inició con un diálogo breve sobre el contexto de la situación y la metodología de trabajo. Se enfatizó mucho en la necesidad de que argumentaran sus respuestas cuando así se les solicitara. Una vez aclarado esto, se utilizó el proyector para indicarles las direcciones electrónicas de los applets que se utilizarían y enseguida se le entregaron las hojas de trabajo.

Previamente se tenían contemplados varios propósitos al realizar la puesta en escena, los cuales están relacionados con la obtención de información sobre los siguientes aspectos:

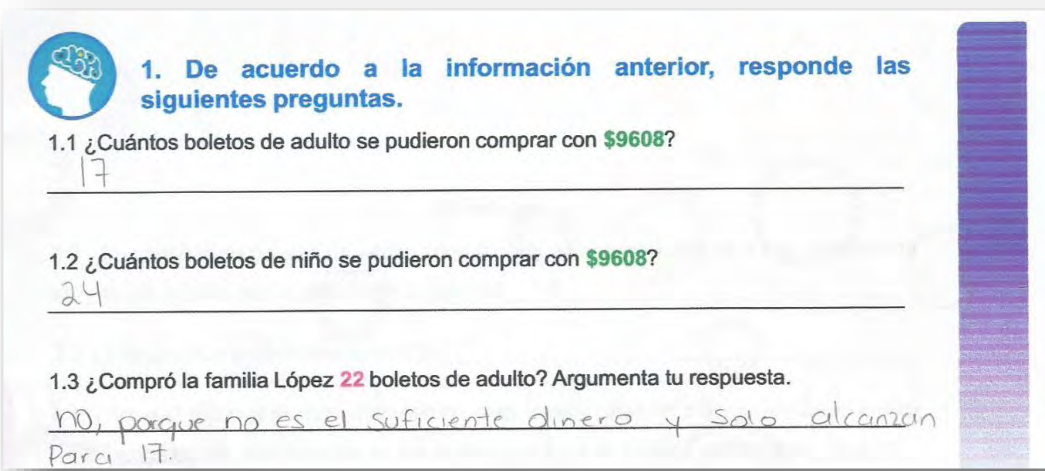
1. ***Conocer si las situaciones extra-matemáticas despiertan el interés de los estudiantes.***

Mencionamos anteriormente que una de las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales es en el área de la economía, en este caso la situación extra-matemática que fue seleccionada se encuentra ubicada en el contexto de la compra de boletos, la cual motivó la participación de los alumnos que siempre mostraron una actitud muy positiva con relación al desarrollo de la actividad y constantemente expresaban su agrado por utilizar la computadora para manipular los applets diseñados en GeoGebra.

2. ***Conocer el grado en que se alcanzaron los objetivos de las actividades y cómo éstas contribuyen a enriquecer el significado de los estudiantes con relación al objeto matemático.***

Otro de los propósitos de la puesta en escena fue conocer el grado en que se alcanzaron los objetivos de la actividad. A continuación se presentan algunos extractos del trabajo de los estudiantes con el fin de ejemplificar el logro de dichos objetivos.

Al iniciar con la actividad, el alumno lee de manera individual la situación-problema que se presenta. Después se solicita responder las siguientes preguntas (Figura 75), mediante las cuales se desea que el estudiante interprete la información y analice las condiciones iniciales que la situación plantea.


1. De acuerdo a la información anterior, responde las siguientes preguntas.

1.1 ¿Cuántos boletos de adulto se pudieron comprar con $9608?

17

1.2 ¿Cuántos boletos de niño se pudieron comprar con $9608?

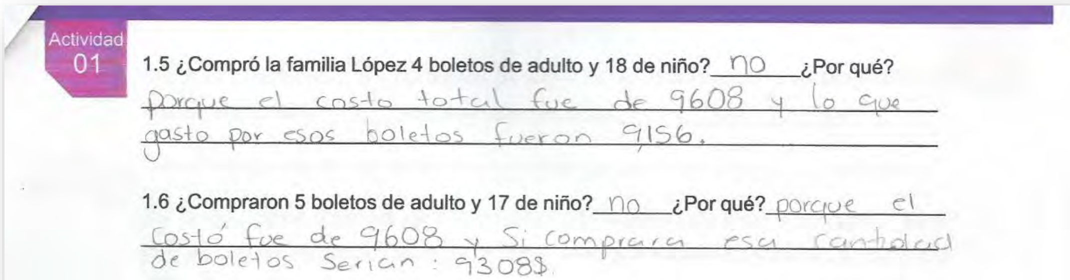
24

1.3 ¿Compró la familia López 22 boletos de adulto? Argumenta tu respuesta.

no, porque no es el suficiente dinero y solo alcanzan para 17.

Figura 75. Preguntas iniciales de la actividad 1. Puesta en escena

En la figura 75, podemos observar las respuestas de un estudiante donde se aprecia que logra interpretar la información inicial y además argumenta sus respuestas, promoviendo de esta manera uno de los objetivos de la actividad que consiste en *Desarrollar habilidades de expresión oral y escrita*. A lo largo de la actividad se promueve que el alumno argumente sus respuestas, lo cual se puede apreciar también en la siguiente imagen.


Actividad 01

1.5 ¿Compró la familia López 4 boletos de adulto y 18 de niño? no ¿Por qué? porque el costo total fue de 9608 y lo que gasto por esos boletos fueron 9156.

1.6 ¿Compraron 5 boletos de adulto y 17 de niño? no ¿Por qué? porque el costó fue de 9608 y Si comprara esa cantidad de boletos Serian : 9308$.

Figura 76. Argumentación de las respuestas por parte del estudiante

Otro de los objetivos de la actividad es que el alumno pueda *Reconocer las relaciones lineales entre los datos de un problema y expresarlas mediante lenguaje algebraico* y para alcanzarlo se promueve que el estudiante explore la situación a través de un applet y en una tabla de valores numéricos que le permita reconocer las relaciones que se establecen con las coordenadas de los puntos que se generan en la Vista Gráfica, con el fin de apoyar el proceso de formulación de las ecuaciones.

En la siguiente figura se muestra la exploración de la situación en el applet “sixflags1.ggb”, por parte de un estudiante. En la Hoja de Cálculo el alumno ingresó valores numéricos de manera que la cantidad de boletos comprados; entre los de niños y adultos, sumen 22.

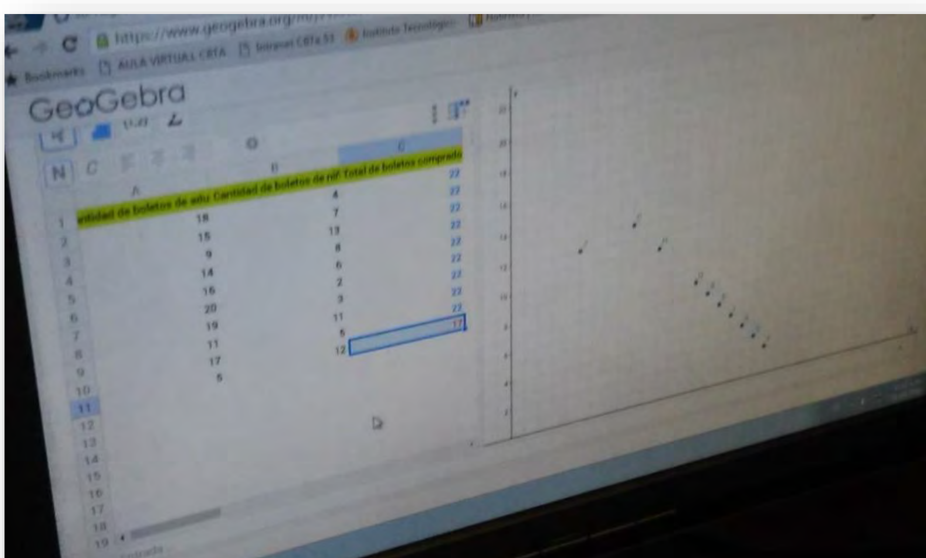
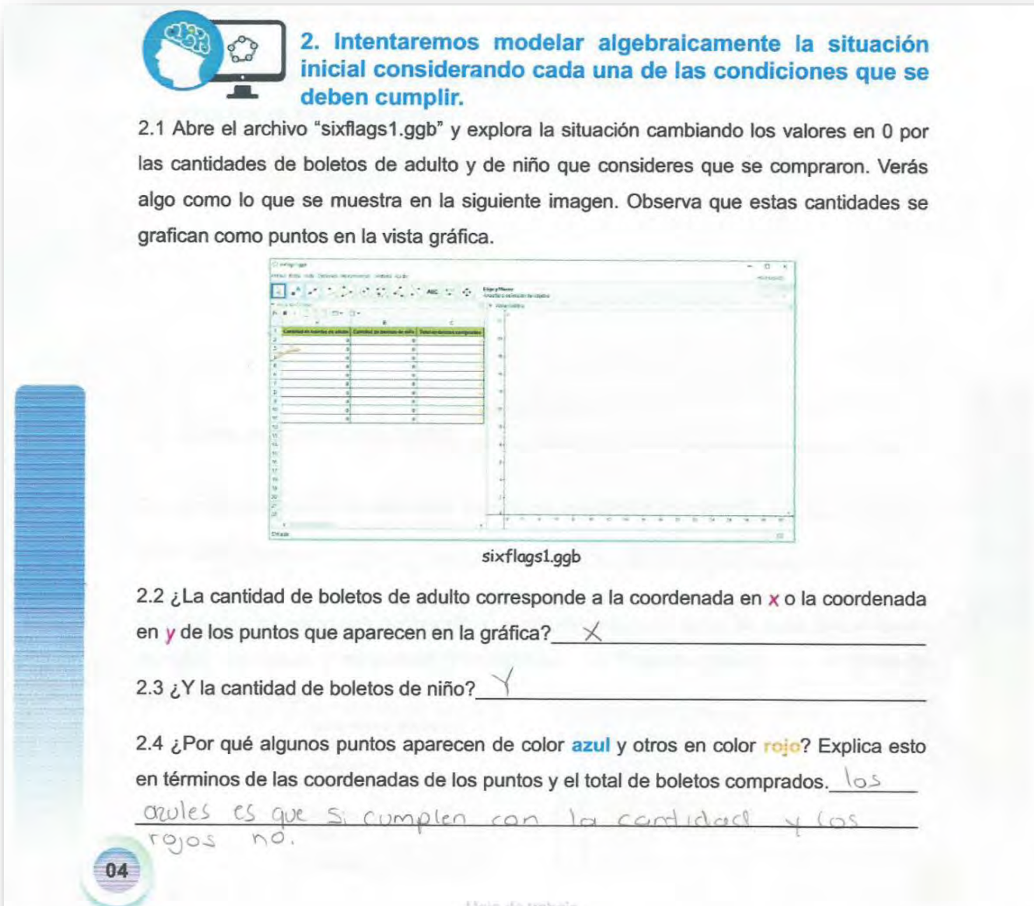


Figura 77. Exploración de la situación con el applet “sixflags1.ggb”. Puesta en escena

A continuación se muestran las respuestas de uno de los estudiantes, con relación a la exploración del primer applet observando que logra identificar las coordenadas de los puntos y relacionarlas con las cantidades de boletos comprados (Figura 78).


2. Intentaremos modelar algebraicamente la situación inicial considerando cada una de las condiciones que se deben cumplir.

2.1 Abre el archivo "sixflags1.ggb" y explora la situación cambiando los valores en 0 por las cantidades de boletos de adulto y de niño que consideres que se compraron. Verás algo como lo que se muestra en la siguiente imagen. Observa que estas cantidades se grafican como puntos en la vista gráfica.

sixflags1.ggb

2.2 ¿La cantidad de boletos de adulto corresponde a la coordenada en x o la coordenada en y de los puntos que aparecen en la gráfica? X

2.3 ¿Y la cantidad de boletos de niño? Y

2.4 ¿Por qué algunos puntos aparecen de color azul y otros en color rojo? Explica esto en términos de las coordenadas de los puntos y el total de boletos comprados. los azules es que si cumplen con la cantidad y los rojos no.

04

Hoja de trabajo

Figura 78. Respuestas de un estudiante con relación al applet "sixflags1.ggb". Puesta en escena

Con el uso de los applets se pretende también que el estudiante pueda realizar conjeturas y generalizaciones, además de promover la visualización y el tránsito entre la representación tabular, algebraica y gráfica. La siguiente imagen muestra cómo uno de los estudiantes logra visualizar que los puntos generan una línea recta y además le asocia una expresión algebraica (Figura 79).

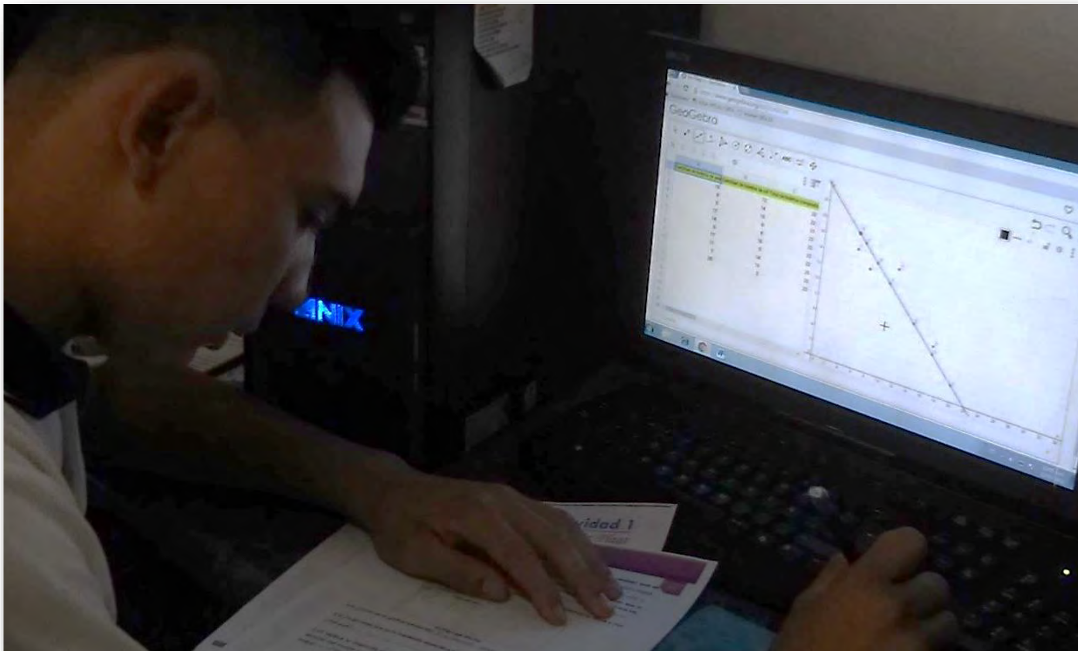
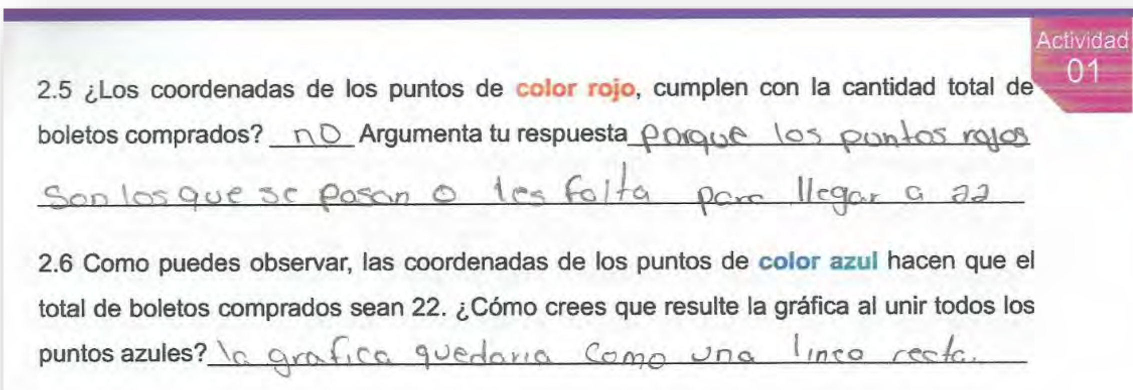


Figura 79. Gráfica de la ecuación 1 del sistema. Puesta en escena

Las respuestas del alumno con relación a la gráfica anterior se aprecian en la imagen siguiente.



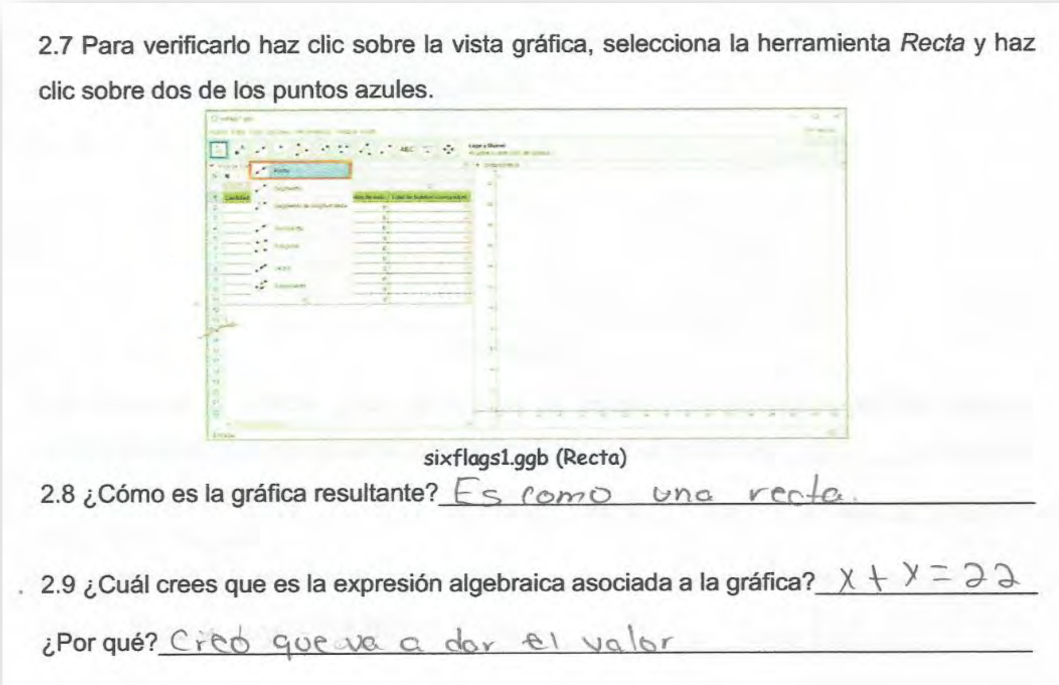
Actividad 01

2.5 ¿Los coordenadas de los puntos de color rojo, cumplen con la cantidad total de boletos comprados? nO Argumenta tu respuesta porque los puntos rojos son los que se pasan o les falta para llegar a 22

2.6 Como puedes observar, las coordenadas de los puntos de color azul hacen que el total de boletos comprados sean 22. ¿Cómo crees que resulte la gráfica al unir todos los puntos azules? la grafica quedaria Como una linea recta.

Figura 80. Respuestas de un estudiante con relación a la gráfica de la primera ecuación del sistema

A continuación se puede apreciar que el alumno, logra asociar una expresión algebraica a la gráfica anterior.



2.7 Para verificarlo haz clic sobre la vista gráfica, selecciona la herramienta *Recta* y haz clic sobre dos de los puntos azules.

sixflags1.ggb (Recta)

2.8 ¿Cómo es la gráfica resultante? Es como una recta.

2.9 ¿Cuál crees que es la expresión algebraica asociada a la gráfica? x + y = 22

¿Por qué? Creo que va a dar el valor

Figura 81. Respuestas de un estudiante con relación a la expresión algebraica que modela la primera condición del problema

Con respecto al planteamiento de la segunda ecuación, se propone la exploración del segundo applet, la siguiente imagen muestra el trabajo de uno de los alumnos con este applet.

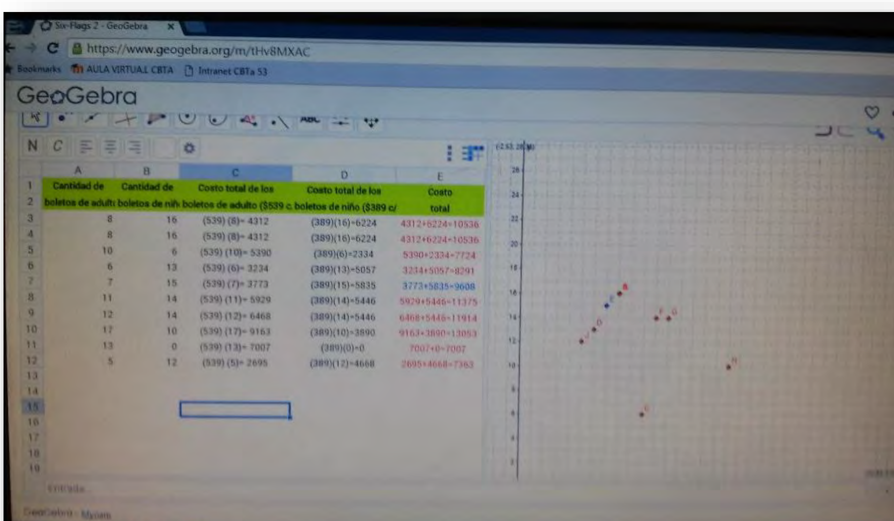
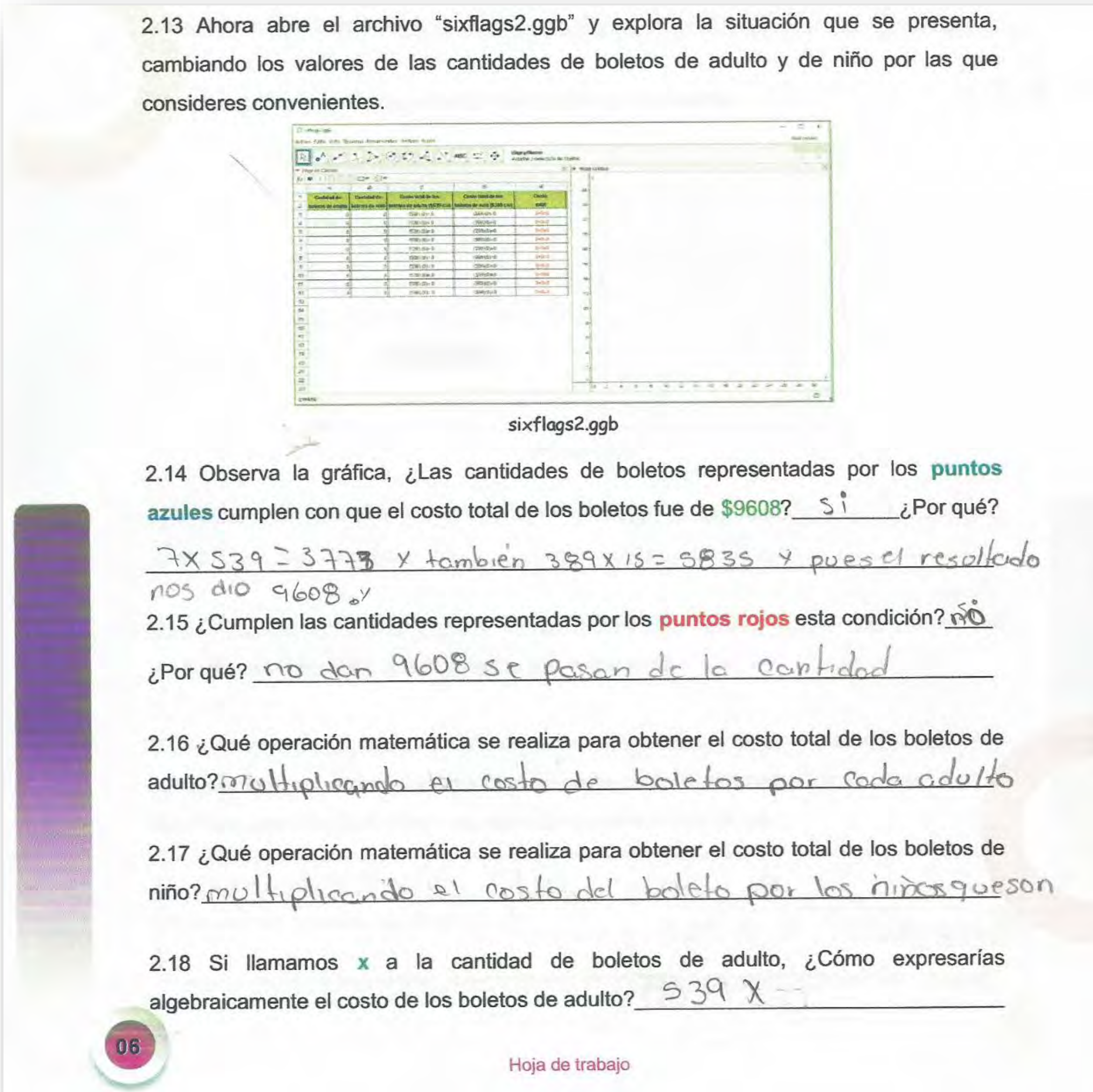


Figura 82. Exploración de la situación con el applet “sixflags2.ggb”. Puesta en escena

Enseguida se presentan las respuestas a las preguntas relacionadas con el applet anterior (Figura 83).



2.13 Ahora abre el archivo "sixflags2.ggb" y explora la situación que se presenta, cambiando los valores de las cantidades de boletos de adulto y de niño por las que consideres convenientes.

sixflags2.ggb

2.14 Observa la gráfica, ¿Las cantidades de boletos representadas por los **puntos azules** cumplen con que el costo total de los boletos fue de $9608? si ¿Por qué?

7x539=3773 y también 389x15=5835 y pues el resoltado nos dio 9608 ya

2.15 ¿Cumplen las cantidades representadas por los **puntos rojos** esta condición? no

¿Por qué? no dan 9608 se pasan de la cantidad

2.16 ¿Qué operación matemática se realiza para obtener el costo total de los boletos de adulto? multiplicando el costo de boletos por cada adulto

2.17 ¿Qué operación matemática se realiza para obtener el costo total de los boletos de niño? multiplicando el costo del boleto por los niños que son

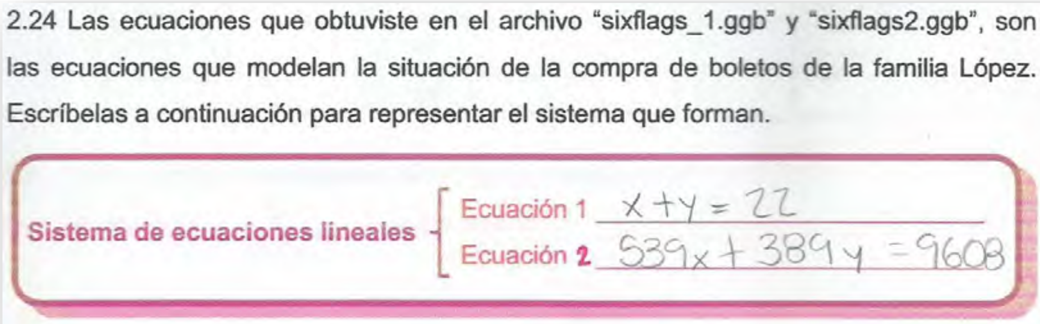
2.18 Si llamamos **x** a la cantidad de boletos de adulto, ¿Cómo expresarías algebraicamente el costo de los boletos de adulto? 539 x

06

Hoja de trabajo

Figura 83. Respuestas de un estudiante con relación al uso del applet "sixflags2.ggb"

Aunque se presentaron algunas dificultades por parte de los estudiantes para modelar las ecuaciones del sistema, la mayoría logró hacerlo con un poco de orientación por parte de la instructora. En la Figura 84 se puede observar que se cumple con otro de los objetivos de la actividad que consiste en *Modelar la situación mediante un sistema de ecuaciones lineales 2x2*.


2.24 Las ecuaciones que obtuviste en el archivo "sixflags_1.ggb" y "sixflags2.ggb", son las ecuaciones que modelan la situación de la compra de boletos de la familia López. Escríbelas a continuación para representar el sistema que forman.

Sistema de ecuaciones lineales
Ecuación 1 $x + y = 22$
Ecuación 2 $539x + 389y = 9608$

Figura 84. Modelación de la situación mediante un sistema de ecuaciones lineales 2x2

Una vez que el estudiante logró obtener las ecuaciones que conforman el sistema, se promueve el uso del método gráfico para darle solución, logrando así *Representar gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2*, otro de los objetivos de la actividad (Figura 85).

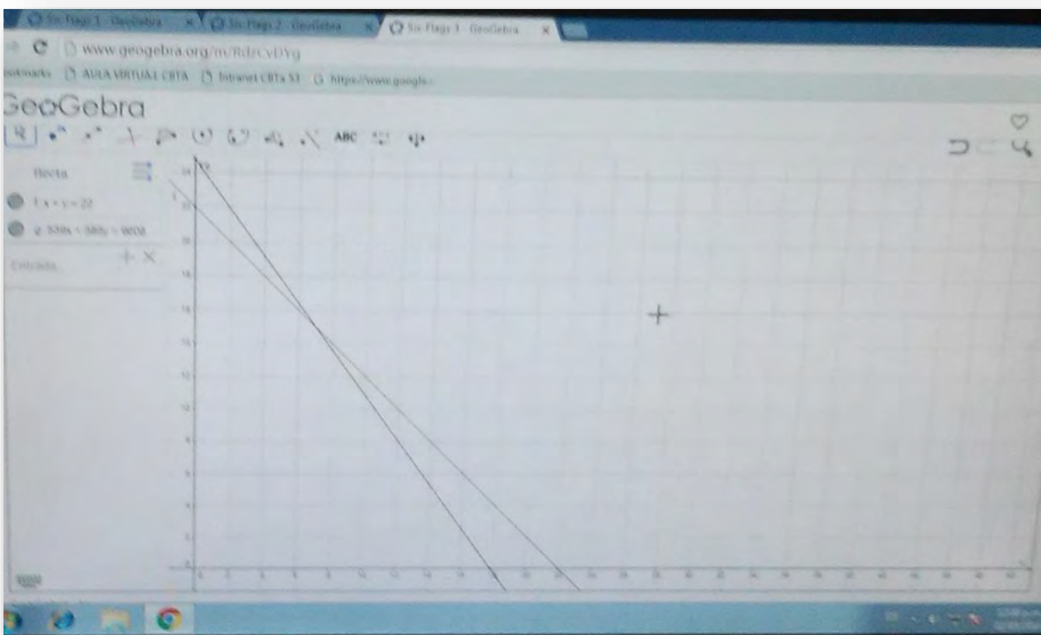


Figura 85. Trabajo en el archivo "sixflags3.ggb". Puesta en escena

En la imagen anterior se puede observar que el alumno obtiene la gráfica de dos rectas que se cruzan en un punto cuyas coordenadas son (7,15). Las respuestas a los cuestionamientos relacionados con al applet anterior se presentan enseguida.

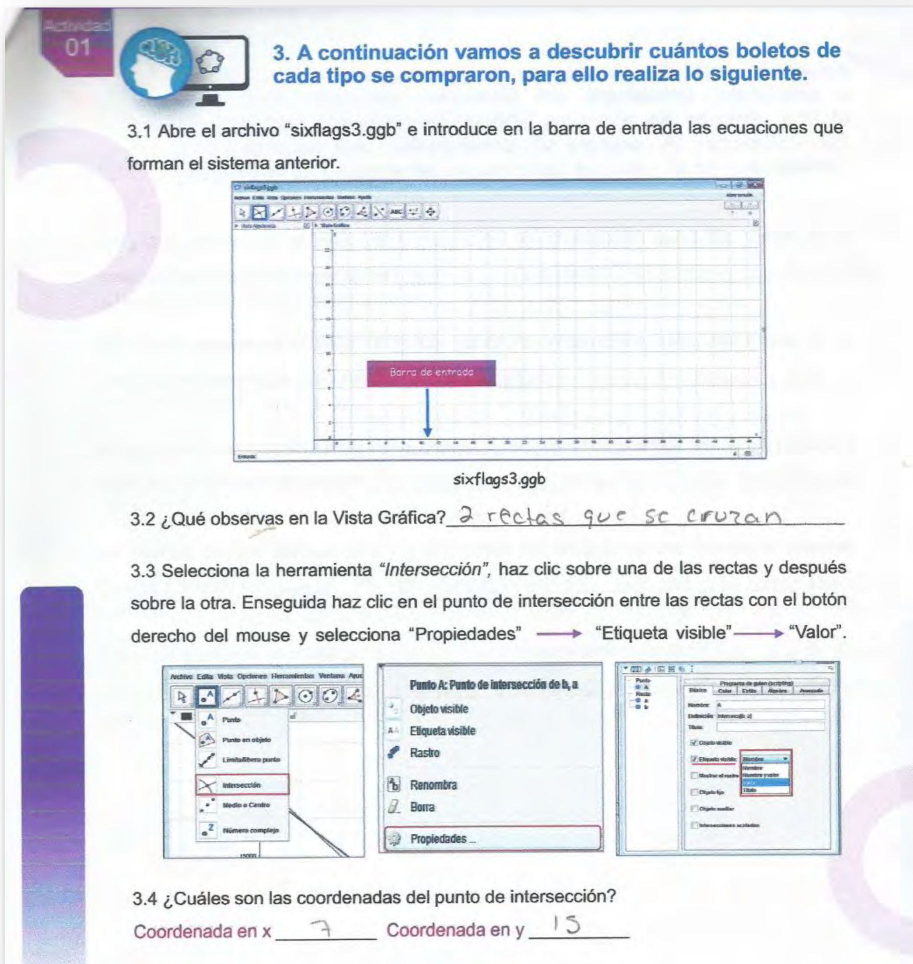
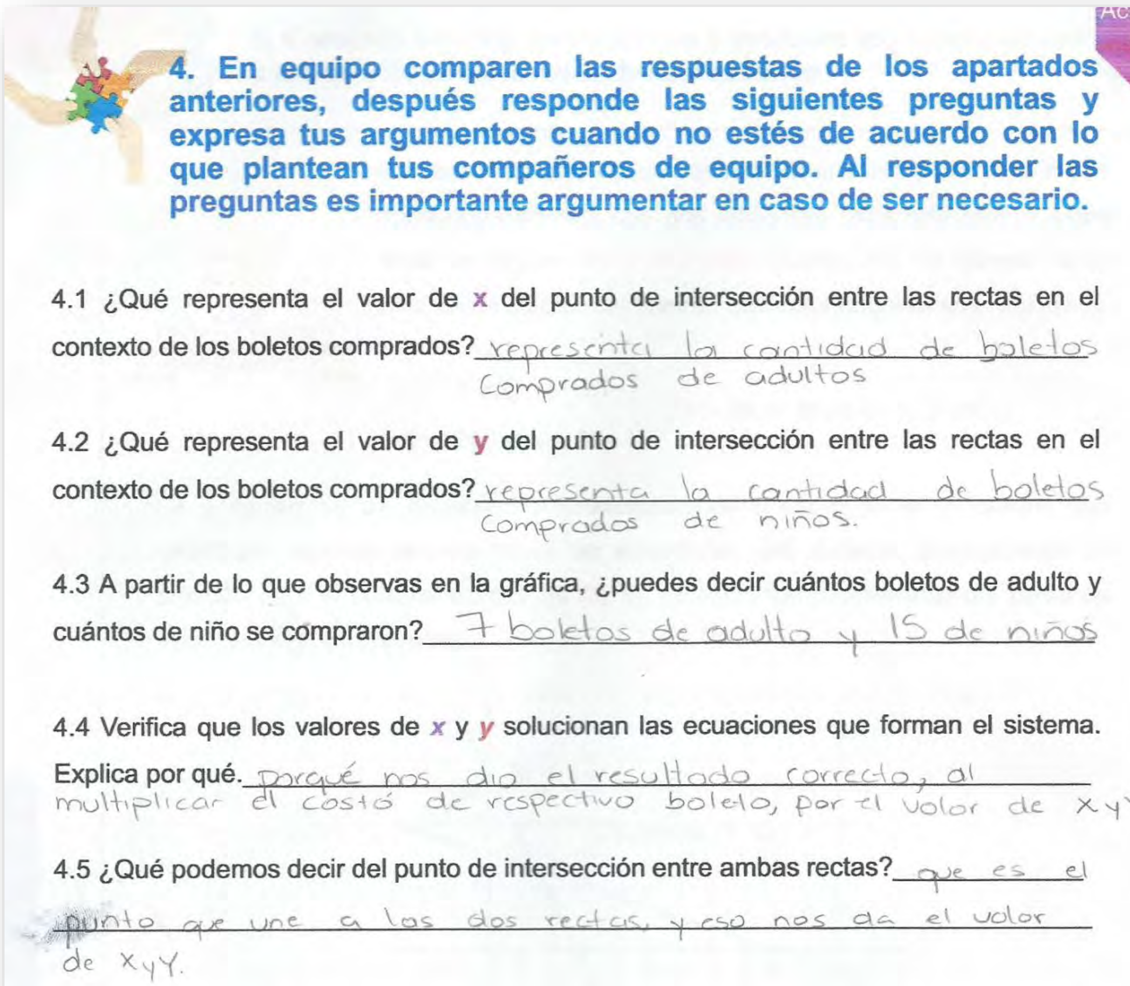


Figura 86. Obtención de la solución utilizando el método gráfico

El siguiente apartado, tiene el objetivo de *Desarrollar actitudes positivas para el trabajo en equipo* y a su vez el de *Analizar la validez de la solución en el contexto de la situación modelada*. En la siguiente imagen (Figura 87) vemos que el estudiante logró identificar la solución del sistema como las coordenadas del punto de intersección de las rectas y además explicar la solución en términos de la compra de boletos.



4. En equipo comparen las respuestas de los apartados anteriores, después responde las siguientes preguntas y expresa tus argumentos cuando no estés de acuerdo con lo que plantean tus compañeros de equipo. Al responder las preguntas es importante argumentar en caso de ser necesario.

4.1 ¿Qué representa el valor de **x** del punto de intersección entre las rectas en el contexto de los boletos comprados? representa la cantidad de boletos comprados de adultos

4.2 ¿Qué representa el valor de **y** del punto de intersección entre las rectas en el contexto de los boletos comprados? representa la cantidad de boletos comprados de niños.

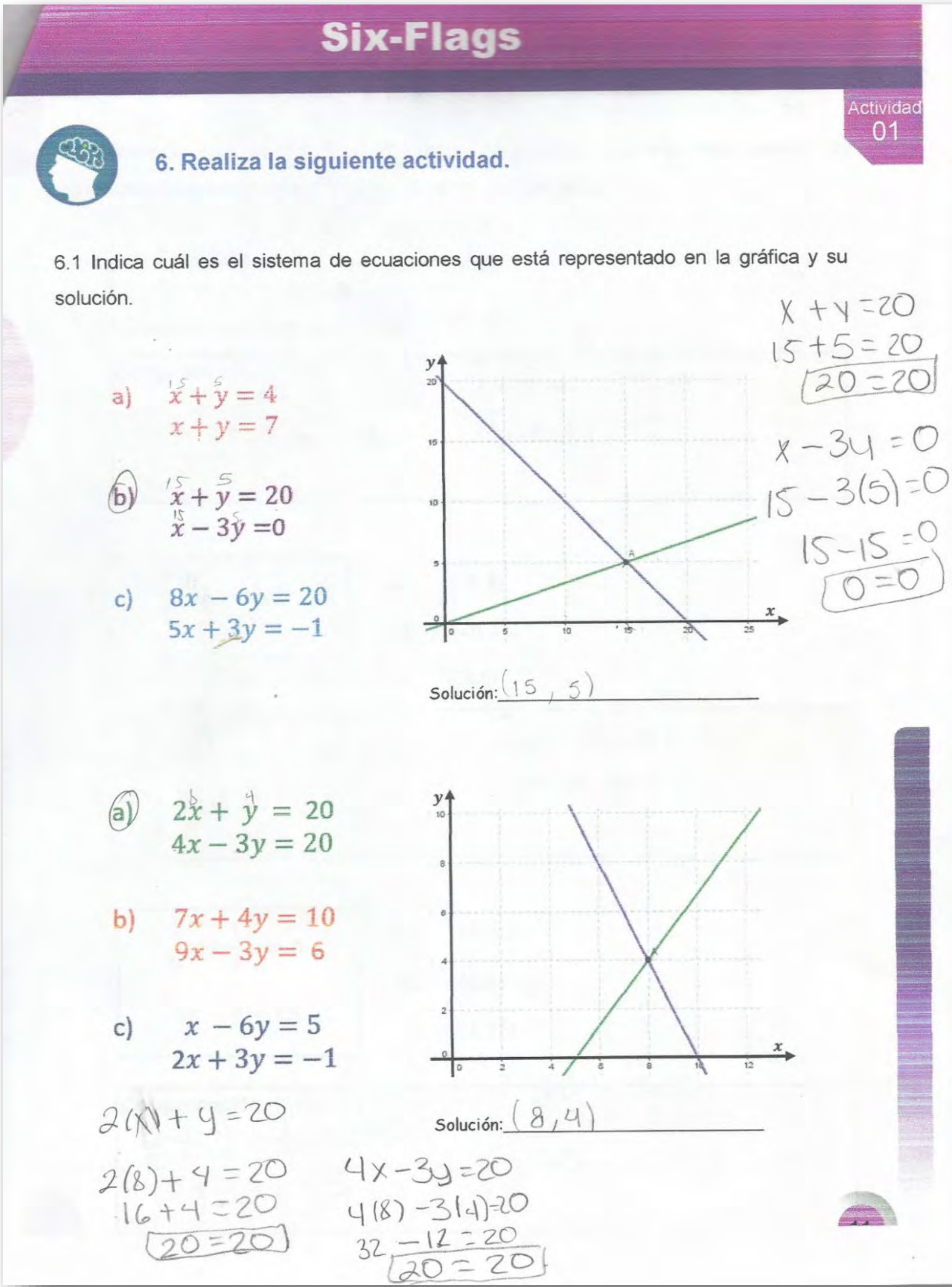
4.3 A partir de lo que observas en la gráfica, ¿puedes decir cuántos boletos de adulto y cuántos de niño se compraron? 7 boletos de adulto y 15 de niños

4.4 Verifica que los valores de *x* y *y* solucionan las ecuaciones que forman el sistema. Explica por qué. porqué nos dio el resultado correcto, al multiplicar el costó de respectivo boleto, por el valor de x y Y

4.5 ¿Qué podemos decir del punto de intersección entre ambas rectas? que es el punto que une a las dos rectas, y eso nos da el valor de x y Y.

Figura 87. Interpretación de la solución obtenida en el contexto de la situación modelada

El último apartado de las hojas de trabajo tiene por objetivos *Asociar una gráfica a un sistema de ecuaciones dado* (Figura 88) y *Determinar si un par ordenado es solución de un sistema de ecuaciones* (Figura 89). Vemos en las siguientes imágenes el trabajo de un alumno con relación a estos objetivos.



Six-Flags

Actividad 01

6. Realiza la siguiente actividad.

6.1 Indica cuál es el sistema de ecuaciones que está representado en la gráfica y su solución.

a) $\overset{15}{x} + \overset{5}{y} = 4$
$x + y = 7$

b) $\overset{15}{x} + \overset{5}{y} = 20$
$\overset{15}{x} - 3\overset{5}{y} = 0$

c) $8x - 6y = 20$
$5x + 3y = -1$

$X + Y = 20$
$15 + 5 = 20$
$\boxed{20 = 20}$

$X - 3Y = 0$
$15 - 3(5) = 0$
$15 - 15 = 0$
$\boxed{0 = 0}$

Solución: (15 , 5)

a) $2\overset{8}{x} + \overset{4}{y} = 20$
$4x - 3y = 20$

b) $7x + 4y = 10$
$9x - 3y = 6$

c) $x - 6y = 5$
$2x + 3y = -1$

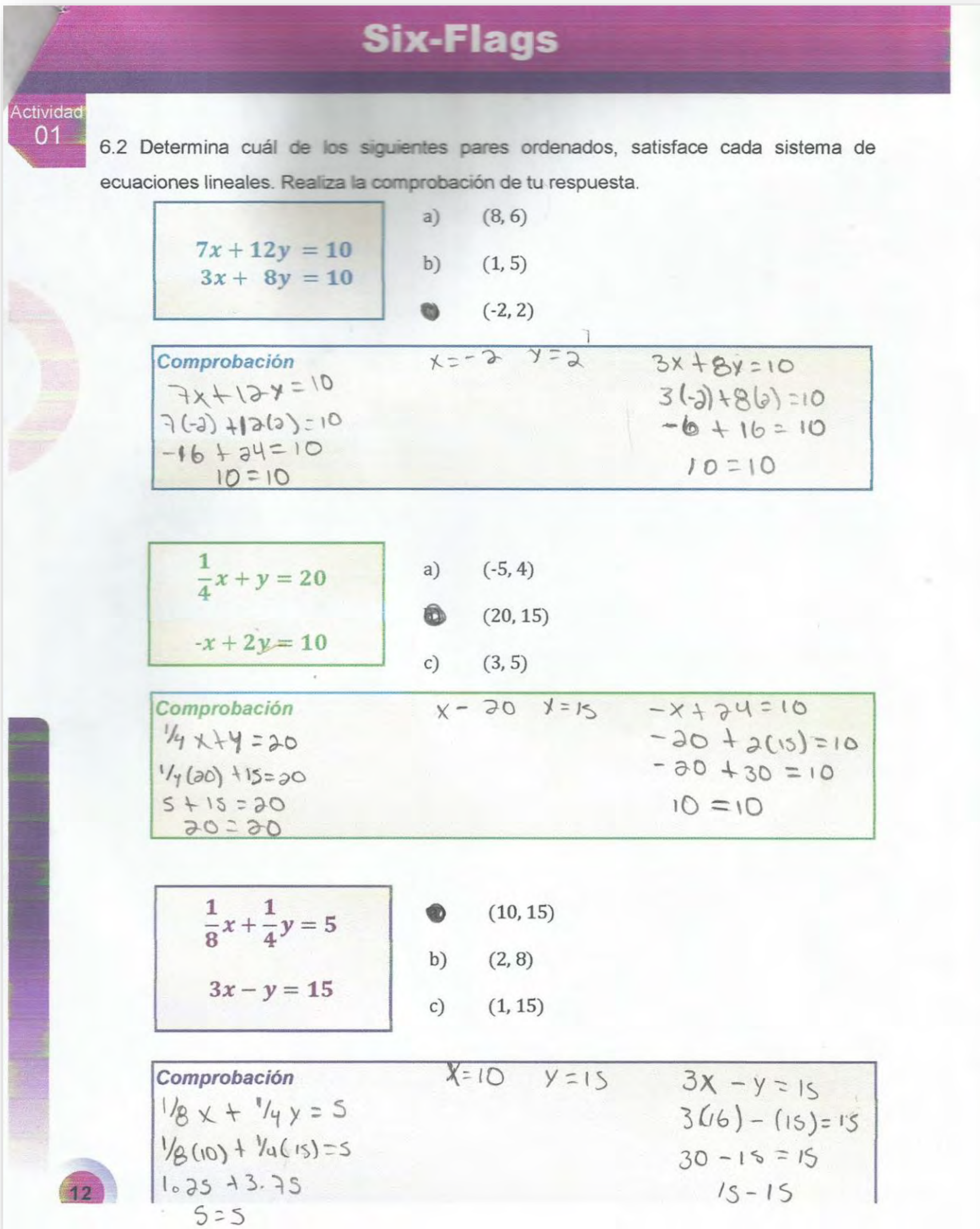
Solución: (8,4)

$2(X) + y = 20$
$2(8) + 4 = 20$
$16 + 4 = 20$
$\boxed{20 = 20}$

$4x - 3y = 20$
$4(8) - 3(4) = 20$
$32 - 12 = 20$
$\boxed{20 = 20}$

Figura 88. Asociar una gráfica a un sistema de ecuaciones dado

En la figura 88, se aprecia que el estudiante asocia las coordenadas del punto de intersección de las rectas con la solución del sistema de ecuaciones. Además, su significado con respecto al concepto *solución* se manifiesta en la comprobación que realiza para ambas ecuaciones, lo que muestra que en un sistema de ecuaciones lineales se busca una solución común.



Six-Flags

Actividad 01

6.2 Determina cuál de los siguientes pares ordenados, satisface cada sistema de ecuaciones lineales. Realiza la comprobación de tu respuesta.

$7x + 12y = 10$
$3x + 8y = 10$

a) (8, 6)
b) (1, 5)
c) (-2, 2)

Comprobación

$x = -2 \quad y = 2$

$7x + 12y = 10$
$7(-2) + 12(2) = 10$
$-14 + 24 = 10$
$10 = 10$

$3x + 8y = 10$
$3(-2) + 8(2) = 10$
$-6 + 16 = 10$
$10 = 10$

$\frac{1}{4}x + y = 20$
$-x + 2y = 10$

a) (-5, 4)
b) (20, 15)
c) (3, 5)

Comprobación

$x = 20 \quad y = 15$

$\frac{1}{4}x + y = 20$
$\frac{1}{4}(20) + 15 = 20$
$5 + 15 = 20$
$20 = 20$

$-x + 2y = 10$
$-20 + 2(15) = 10$
$-20 + 30 = 10$
$10 = 10$

$\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y = 5$
$3x - y = 15$

a) (10, 15)
b) (2, 8)
c) (1, 15)

Comprobación

$x = 10 \quad y = 15$

$\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y = 5$
$\frac{1}{8}(10) + \frac{1}{4}(15) = 5$
$1.25 + 3.75$
$5 = 5$

$3x - y = 15$
$3(10) - (15) = 15$
$30 - 15 = 15$
$15 - 15$

12

Figura 89. Determinar si un par ordenado es solución de un sistema de ecuaciones

De acuerdo con el análisis de las hojas de trabajo que hemos presentado, concluimos que los objetivos de la actividad se pudieron alcanzar y el significado de los estudiantes con relación al objeto matemático coincide con el significado pretendido para la actividad.

Por otro lado, otros de los objetivos de la puesta en escena fueron los siguientes:

3. ***Constatar si la redacción de las preguntas e instrucciones de las hojas de trabajo son entendibles y claras.***

Durante la aplicación de la actividad, en general todo fluyó favorablemente. La mayoría de los estudiantes se mostraron interesados en realizar de la mejor manera la actividad. A partir de lo observado durante la sesión y de algunas respuestas a los cuestionamientos de las hojas de trabajo, pudimos obtener información relevante que nos sugirió realizar algunos ajustes en las instrucciones y en ciertas preguntas de las hojas de trabajo.

4. ***Qué tan adecuados fueron los applets creados con GeoGebra para favorecer la construcción o enriquecimiento de los significados pretendidos y qué cambios requerirán.***

En cuanto al uso de GeoGebra, los estudiantes manifestaron su entusiasmo al realizar actividades matemáticas utilizando la computadora. Los alumnos no tenían conocimientos previos en el manejo de GeoGebra, sin embargo, esto no fue limitación para que pudieran manejar los applets sin dificultades. Se observó que el uso de GeoGebra si contribuyó a enriquecer los significados de los estudiantes, ya que para dar respuestas a algunos apartados de las hojas de trabajo los estudiantes utilizaban los applets aun cuando en la actividad no se les daba esta indicación.

La mayoría de los estudiantes tuvo un buen manejo de los applets, sin embargo, al analizar las hojas de trabajo de los alumnos se observaron respuestas que nos sugirieron realizar ajustes tanto en los datos iniciales de la situación problema como en los applets que las complementan.

Al finalizar la sesión los estudiantes respondieron un breve cuestionario con el objetivo de recabar información relacionada al desarrollo de algunas competencias, la utilización de GeoGebra y la claridad de las indicaciones en la actividad (Anexo 2).

El quinto objetivo de la puesta en escena fue:

5. ***Conocer los tiempos estimados para las actividades.***

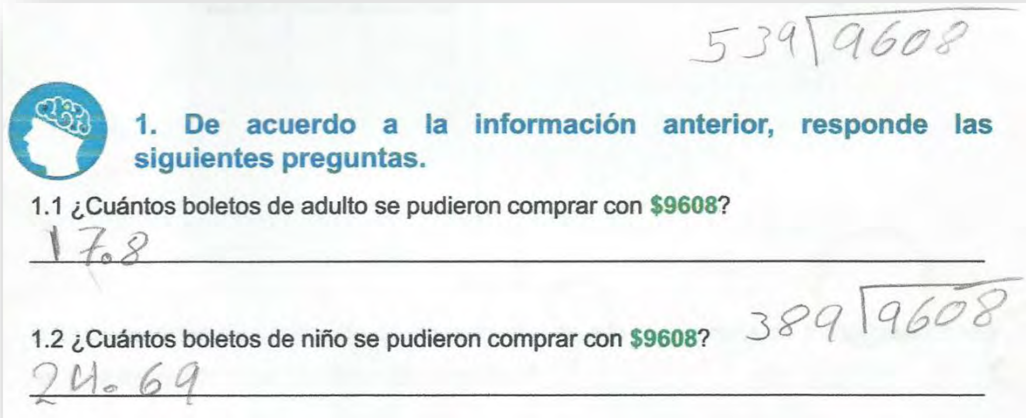
Con la implementación de la actividad se pudo obtener el tiempo estimado para realzarla, que fue aproximadamente de 2 horas con 20 minutos.

El último objetivo consistió en:

6. ***Identificar posibles conflictos semióticos.***

Durante la puesta en escena y el análisis de las hojas de trabajo que utilizaron los estudiantes, también pudieron identificarse algunos conflictos semióticos como consecuencia de una interpretación errónea de las instrucciones dadas o de las preguntas planteadas en la actividad. Los conflictos semióticos identificados se describen a continuación:

❖ *Respuestas que no corresponden con el contexto de la situación.*


539 | 9608

1. De acuerdo a la información anterior, responde las siguientes preguntas.

1.1 ¿Cuántos boletos de adulto se pudieron comprar con $9608?

17.8

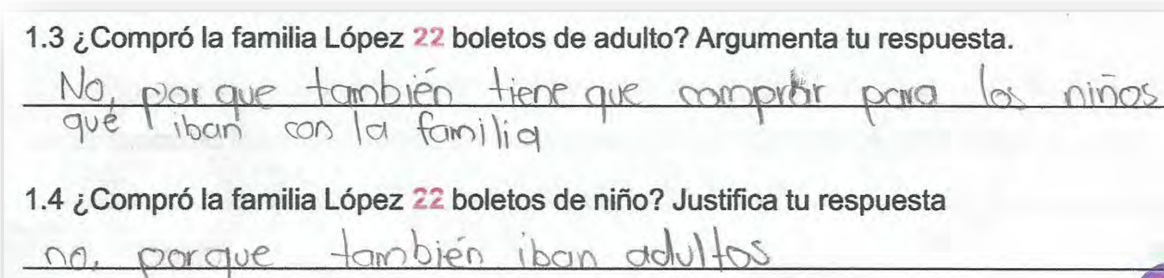
1.2 ¿Cuántos boletos de niño se pudieron comprar con $9608? 389 | 9608

24.69

Figura 90. Actividad 1. Preguntas 1.1 y 1.2

En la figura 90, se muestran las respuestas de un estudiante sobre el número de boletos que se pudieron comprar con cierta cantidad de dinero. En la imagen se observa que el alumno realiza una división en la que el cociente resulta un número decimal, sin embargo, en el contexto de la compra de boletos su respuesta no es satisfactoria dado que no se pueden comprar 17.8 o 24.69 boletos.

❖ *Interpretación de las preguntas diferente a la esperada.*


1.3 ¿Compró la familia López 22 boletos de adulto? Argumenta tu respuesta.

No, por que también tiene que comprar para los niños que iban con la familia

1.4 ¿Compró la familia López 22 boletos de niño? Justifica tu respuesta

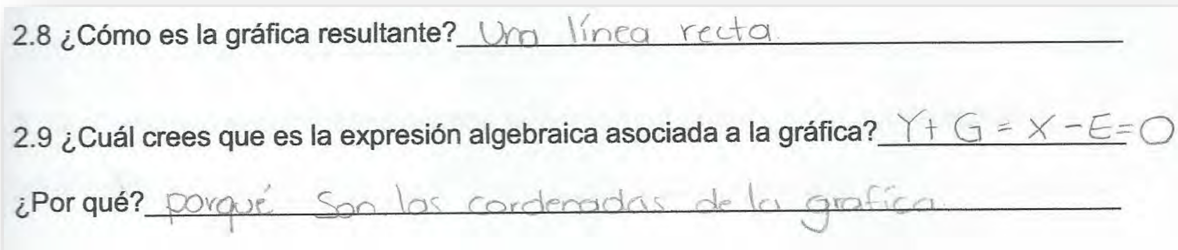
no, porque también iban adultos

Figura 91. Actividad 1. Preguntas 1.3 y 1.4

En las preguntas anteriores se esperaba que el alumno respondiera que la cantidad que se gastó en la compra de los boletos hace que sea imposible que se hayan comprado 22 boletos de adulto o 22 boletos de niño, ya que para los boletos de adulto el dinero sería insuficiente y para los boletos de niño sobraría dinero.

En sus respuestas se puede observar, que da por hecho que en la familia iban niños y adultos y no toma en cuenta la información que se le proporciona inicialmente.

- *Asignar una expresión algebraica incorrecta a la gráfica de una ecuación lineal.*



2.8 ¿Cómo es la gráfica resultante? Una línea recta

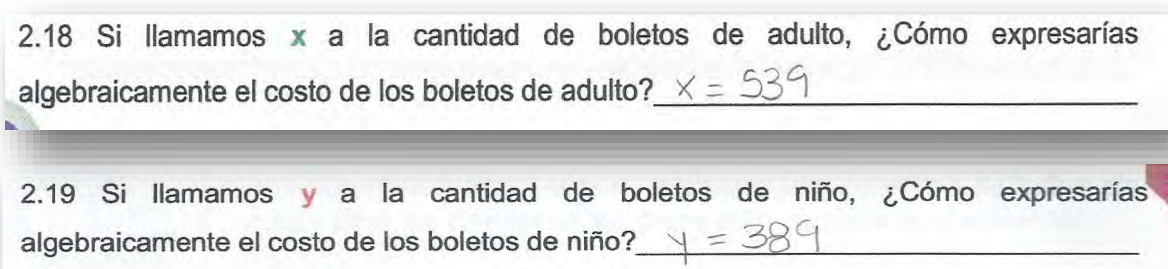
2.9 ¿Cuál crees que es la expresión algebraica asociada a la gráfica? Y+G=X-E=O

¿Por qué? porqué Son los cordenadas de la grafica

Figura 92. Actividad 1. Preguntas 2.8 y 2.9

En la figura 92 observamos la respuesta de un estudiante que no logra asignar correctamente la expresión algebraica a la gráfica de la ecuación. Previamente el alumno ha explorado la situación inicial en un applet proponiendo cantidades de boletos de adulto y de niño que en total sumen 22, por lo que se esperaría que la respuesta a la pregunta 2.8 fuera $x + y = 22$. Además, argumenta que son las coordenadas de la gráfica, lo que refleja que su significado personal no corresponde al significado institucional en el sentido de que las coordenadas corresponden a puntos sobre la recta y no a la expresión que da como respuesta.

- *Dificultades para pasar del registro verbal al registro algebraico.*

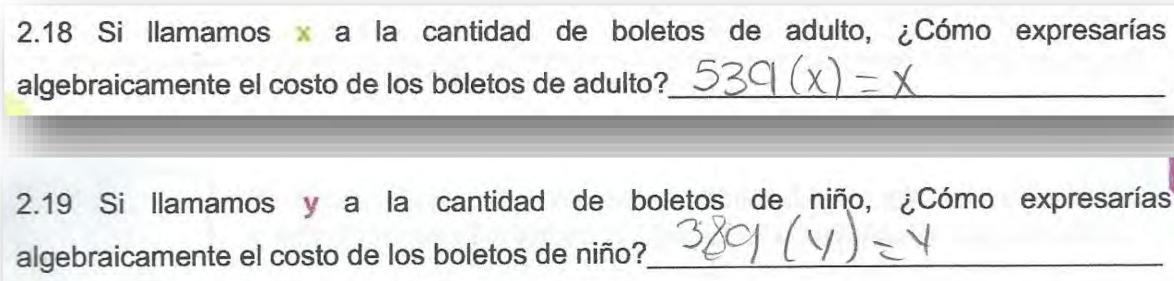


2.18 Si llamamos x a la cantidad de boletos de adulto, ¿Cómo expresarías algebraicamente el costo de los boletos de adulto? X = 539

2.19 Si llamamos y a la cantidad de boletos de niño, ¿Cómo expresarías algebraicamente el costo de los boletos de niño? Y = 389

Figura 93. Actividad 1. Preguntas 2.18 y 2.19

En la figura 93 podemos observar que el estudiante presenta un conflicto para interpretar los datos en el registro verbal y hacer la conversión al registro algebraico, dado que las expresiones algebraicas que escribe como respuestas no corresponden con la información inicial que proporciona la situación-problema. En la siguiente imagen podemos apreciar algo similar a lo anterior.

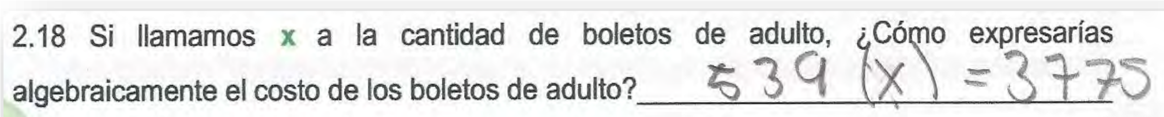


2.18 Si llamamos x a la cantidad de boletos de adulto, ¿Cómo expresarías algebraicamente el costo de los boletos de adulto? 539(x) = x

2.19 Si llamamos y a la cantidad de boletos de niño, ¿Cómo expresarías algebraicamente el costo de los boletos de niño? 389 (y) = y

Figura 94. Actividad 1. Preguntas 2.18 y 2.19

❖ *La falta de generalidad en algunas respuestas de los estudiantes.*

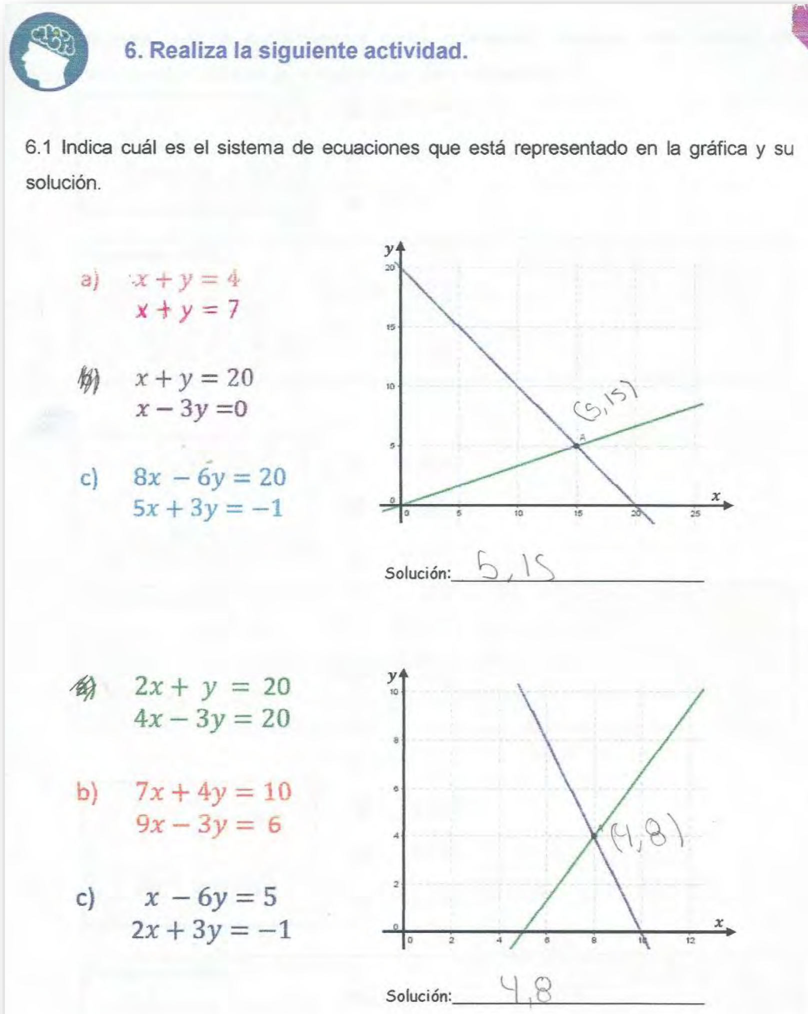


2.18 Si llamamos x a la cantidad de boletos de adulto, ¿Cómo expresarías algebraicamente el costo de los boletos de adulto? 539 (x) = 3775

Figura 95. Actividad 1. Pregunta 2.18

En la figura anterior se puede apreciar que el alumno está considerando un caso particular para el valor de x; aunque previamente ha manipulado un applet explorando con diferentes casos, no logra el proceso de generalización.

❖ *La solución del sistema de ecuaciones lo asocia con el valor de x o de y pero no interpreta correctamente el punto como una pareja ordenada.*


6. Realiza la siguiente actividad.

6.1 Indica cuál es el sistema de ecuaciones que está representado en la gráfica y su solución.

a) $x + y = 4$
$x + y = 7$

b) $x + y = 20$
$x - 3y = 0$

c) $8x - 6y = 20$
$5x + 3y = -1$

(5,15)

Solución: 5,15

a) $2x + y = 20$
$4x - 3y = 20$

b) $7x + 4y = 10$
$9x - 3y = 6$

c) $x - 6y = 5$
$2x + 3y = -1$

(4,8)

Solución: 4,8

Figura 96. Actividad 1. Indicación 6.1

En la figura 96, observamos el trabajo de uno de los estudiantes en el que podemos ver que sí identifica el punto de intersección de las rectas como la solución del sistema pero las coordenadas del punto las asigna de manera errónea, intercambiando la coordenada en x por la coordenada en y por lo que las coordenadas correctas serían (15, 5) y (8, 4).

4.3 Análisis del cuestionario

Durante la puesta en escena la atención se centró en la identificación de potenciales mejoras para la propuesta, por lo que consideramos pertinente realizar un cuestionario (Anexo 2) que nos permitiera obtener información adicional del trabajo de los estudiantes en las actividades propuestas.

Las preguntas de este cuestionario tienen la intención de conocer su experiencia en el trabajo en equipo y grupal, el uso de GeoGebra y la comprensión de las indicaciones y preguntas de las hojas de trabajo. En el Anexo 3 se muestran las gráficas que se realizaron para concentrar, organizar y presentar la información que se obtuvo.

Con respecto a la pregunta 1, alrededor del 83% de los estudiantes respondieron que siempre o regularmente lograron comunicar sus ideas al trabajar en equipo o en grupo, logrando promover en la mayoría de ellos la cuarta competencia genérica del MCC: *"Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, de códigos y herramientas apropiados"* (SEP, 2013b, p. 1).

Alrededor del 80% de los estudiantes, logró *"Participar y colaborar de manera efectiva en equipos diversos"* (SEP, 2013b, p. 1), lo que nos indica que la mayoría participó activamente en las discusiones de equipo o grupales.

Con relación a la argumentación o justificación de las respuestas, el 90% de los alumnos dijo haberlo logrado y esto se pudo comprobar en la revisión de las hojas de trabajo, lo que nos indica que en la mayoría de los casos se promovió la tercera competencia disciplinar *"Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales"* y la cuarta competencia disciplinar "*Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación"* (DGB, 2013, p. 11).

Por otro lado, la pregunta 4 nos permitió conocer la opinión de los alumnos con relación al trabajo con GeoGebra; aspecto muy importante en esta propuesta. A pesar de que ninguno de ellos había trabajado previamente con el software, el

40% dijo que regularmente les pareció interesante utilizar GeoGebra en las actividades y al 50% siempre.

La mayoría de los estudiantes expresaron que no tuvieron dificultades al utilizar el software, con excepción de esperar un poco a que la página web cargara el applet.

Con respecto a su opinión sobre el uso de GeoGebra, la mayoría manifestó que les parecía una herramienta muy útil, práctica, dinámica y que les facilitó el trabajo con las gráficas de las ecuaciones lineales.

En lo que respecta a la claridad de las instrucciones y preguntas de las hojas de trabajo, el 60% de los estudiantes manifestó que regularmente hubo claridad y el 27% que siempre. Esto nos indicó que había que revisar nuevamente aquellas preguntas que resultaron difíciles de interpretar.

Con relación al aprendizaje autónomo, alrededor del 60% de los alumnos dijo que nunca o pocas veces solicitó la ayuda del profesor, lo que indica que más de la mitad logró asumir la responsabilidad de su trabajo, contribuyendo al desarrollo de la séptima competencia genérica del MCC: *“Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida”* (SEP, 2013b, p. 1).

A partir de lo anterior, se puede decir que en general se logró lo esperado en la actividad sin mayores inconvenientes y el trabajo con GeoGebra entusiasmó a los alumnos.

4.4 Análisis y valoración a posteriori de la idoneidad didáctica de la propuesta

A continuación, realizaremos una valoración a posteriori de la idoneidad didáctica de la propuesta de actividades, con base en los resultados de la puesta en escena cuyas características generales se describieron anteriormente. Para esto retomaremos algunos aspectos de la valoración a priori, calificando cada una de las idoneidades parciales como baja, media-alta y alta.

4.4.1 Idoneidad epistémica

A *priori* la valoramos alta, considerando que los objetos primarios pretendidos forman parte del significado institucional de referencia, se utilizan situaciones en contexto extra-matemático que son familiares para los estudiantes y se promueve el uso de diferentes formas de lenguaje.

A *posteriori* se valoró como media-alta pues hubo dificultad para encontrar situaciones-problema en contextos de la vida cotidiana. Sin embargo, durante la implementación de la actividad, los estudiantes expresaron sus ideas, utilizaron diferentes procedimientos, argumentaron sus respuestas, establecieron conjeturas y utilizaron el lenguaje verbal, numérico, gráfico y algebraico para responder a los cuestionamientos de las hojas de trabajo.

4.4.2 Idoneidad cognitiva

A *priori* la calificamos como alta, teniendo en cuenta que los conocimientos matemáticos previos necesarios para abordar las actividades son contenidos que han sido estudiados con anterioridad en los bloques de la asignatura, además de que los significados pretendidos son alcanzables.

A *posteriori* se calificó como media-alta puesto que se asumía que los estudiantes realizarían la construcción de las expresiones analíticas sin mayor problema utilizando los applets diseñados para apoyarlos en este proceso; sin embargo, algunos alumnos presentaron dificultades para modelar la situación utilizando una ecuación con dos incógnitas, sobre todo en la segunda ecuación del sistema, por lo que hubo que intervenir para que los estudiantes pudieran seguir realizando la actividad. Además, algunos estudiantes manifestaron no comprender ciertas preguntas o instrucciones en las hojas de trabajo.

Por otro lado si se logró que los estudiantes utilizaran el método gráfico e identificaran la solución como el punto de intersección de las rectas.

4.4.3 Idoneidad mediacional

A *priori* la valoramos como alta, pues en las actividades se hace uso de applets que permitieron establecer la relación entre el lenguaje numérico, gráfico y algebraico vinculando todo dinámicamente. Además el tiempo invertido para las actividades se dedica a los contenidos en los cuales los estudiantes presentan la mayoría de las dificultades.

A *posteriori* se valoró como media-alta, tomando en cuenta que el aula y la distribución de los alumnos no fue la más adecuada para llevar a cabo el proceso instruccional pretendido. Consideramos que aunque los estudiantes tenían el equipo necesario, el espacio fue reducido tomando en cuenta el número de alumnos, lo que afectó un poco a la hora de trabajar en equipo, ya que los alumnos quedaban muy juntos unos con otros.

En dicha valoración, también influyó el hecho de que en algunos applets los alumnos tuvieron dificultades para encontrar cantidades que cumplieran con la condición del problema. Esto se debía a los datos iniciales de la situación-problema, por lo que hicimos los ajustes necesarios tanto en las hojas de trabajo como en los applets correspondientes.

Por otro lado cabe destacar que durante la puesta en escena se observó el interés de los alumnos por el uso de la tecnología digital, que junto con el contexto de la situación utilizada motivaron la realización de las prácticas pretendidas.

4.4.4 Idoneidad emocional

A *priori* la calificamos como alta, pues consideramos que las situaciones elegidas son de interés para los estudiantes y permiten ver la utilidad de las matemáticas para la resolución de problemas que se complementa con la incorporación de applets para motivar aún más la participación y el interés de los alumnos.

A *posteriori* la valoramos también como alta debido al interés que mostraron los alumnos en la realización de las tareas propuestas. Durante la puesta en escena se pudo observar la motivación de los alumnos y la actitud positiva que mostraron al realizar una actividad matemática utilizando la computadora. Esto se pudo confirmar a partir de las respuestas de los cuestionarios que se aplicaron al finalizar la sesión, ya que la mayoría mencionó que el uso de la tecnología les parecía una herramienta muy útil, práctica y sencilla de utilizar.

4.4.5 Idoneidad interaccional

En lo que respecta a la idoneidad interaccional, a *priori* se valoró alta tomando en cuenta que durante las actividades se promueven momentos de trabajo individual, en equipo y grupal. Se promueve también que los estudiantes argumenten sus respuestas tanto en el trabajo individual como en los momentos de trabajo en equipo para convencer a sus compañeros de la validez de sus ideas y poder llegar a consensos sobre los objetos matemáticos involucrados. También, se proponen momentos de institucionalización para organizar y sistematizar todos los conocimientos matemáticos que surgieron.

A *posteriori* se valoró media-alta, puesto que durante la implementación de la actividad se observó que algunos estudiantes no logran asumir por completo la responsabilidad de su aprendizaje, ya que constantemente solicitaban la validación de sus respuestas ya sea por parte de algún compañero o de la instructora. En cuanto al trabajo en equipo, no se logró la participación de todos los integrantes en algunos equipos de trabajo y en los comentarios grupales algunos alumnos no participaron como se hubiera esperado.

4.4.6 Idoneidad ecológica

Por último, en el caso de la idoneidad ecológica a *priori* la consideramos alta teniendo en cuenta que la propuesta se diseñó con base en los desempeños que se esperan del estudiante al concluir el bloque, de acuerdo con los lineamientos de la DGB y a los requerimientos de incluir el uso de la tecnología digital para abordar los contenidos matemáticos. La propuesta está fundamentada en un marco teórico de la matemática educativa y toma en cuenta resultados de investigaciones en torno a la problemática en el estudio del tema. Además, durante las actividades se promueve el desarrollo de competencias que contribuyan a la formación socio-profesional de los estudiantes.

A *posteriori*, la calificamos alta, pues los estudiantes modelaron la situación propuesta utilizando para ello un sistema de ecuaciones lineales 2x2, obteniendo la solución a través de la gráfica de sus ecuaciones. Aunque se manifestaron algunas complicaciones en el proceso de formulación de las ecuaciones, éstas se pudieron superar durante los momentos de trabajo en equipo y grupal.

A continuación representamos, la idoneidad didáctica de nuestra propuesta (Figura 97).

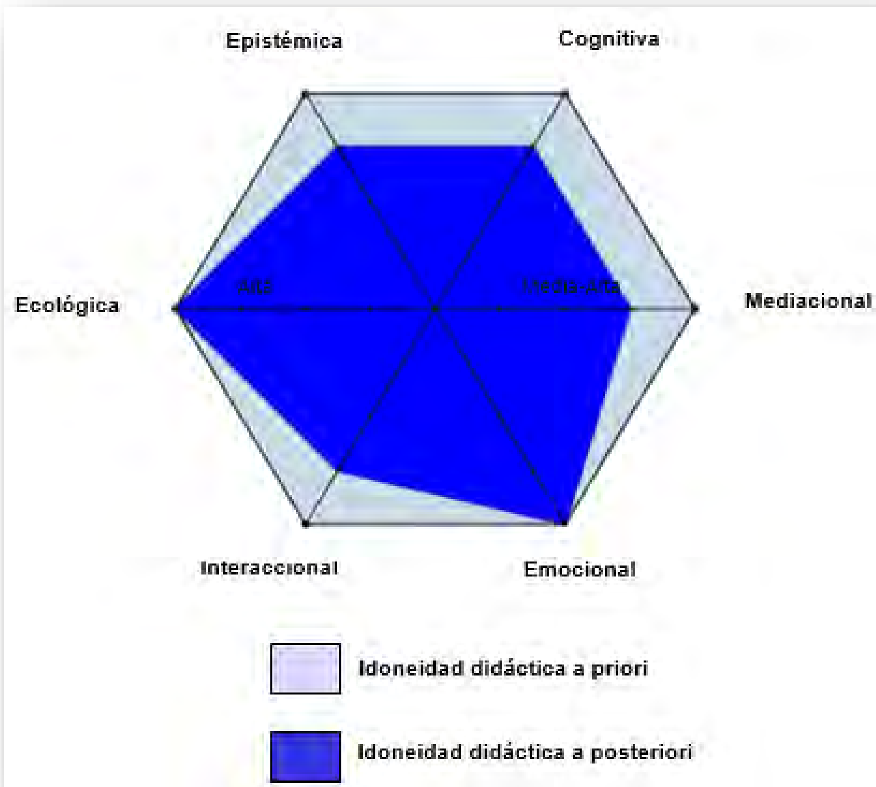


Figura 97. Idoneidad didáctica de la propuesta

4.5 Modificaciones realizadas al diseño de las actividades didácticas

Durante la puesta en escena, obtuvimos información interesante que nos sugirió realizar cambios en el diseño de las actividades debido a las dificultades que mostraron los estudiantes para entender algunas instrucciones o preguntas.

A partir de esta aplicación se hicieron ajustes al diseño, se corrigieron los errores detectados y se modificó la redacción de algunas preguntas para facilitar su comprensión. Las modificaciones que se realizaron se describen con mayor detalle a continuación.

Actividad 1. "Six-Flags"

Durante la puesta en escena, la actividad 1 fue utilizada para realizar los análisis y las modificaciones pertinentes al diseño de esta propuesta. Dado que la estructura y la redacción de las preguntas e instrucciones de las hojas de trabajo son muy similares en todas las actividades, la información obtenida durante la puesta en escena y el análisis de las hojas de trabajo, nos sugirieron realizar modificaciones en algunos apartados importantes de las actividades.

La primera modificación que se incorporó fue en la redacción de la situación-problema en esta actividad. Inicialmente, se había considerado el precio real de los boletos de adulto y de niño para este parque de diversiones (Figura 98), sin embargo, fue necesario ajustar estas cantidades para facilitar la exploración de la situación en uno de los applets.

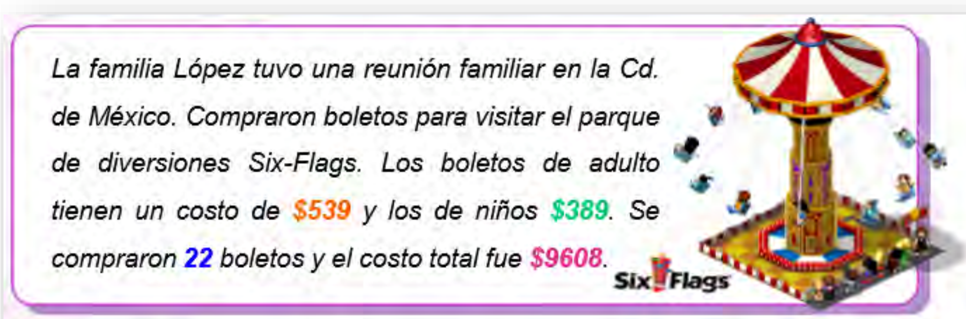


Figura 98. Primera versión de la situación-problema. Actividad 1

En la situación anterior se modificaron los precios de los boletos y el costo total, quedando de la siguiente manera.

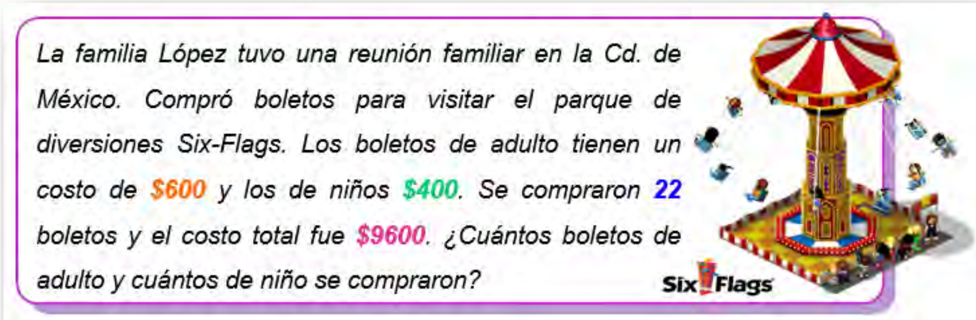


Figura 99. Segunda versión de la situación-problema. Actividad 1

La razón principal que nos motivó a realizar esta modificación fue la dificultad que se presentó por parte de los estudiantes para encontrar cantidades de boletos que cumplieran con la segunda condición del problema, lo que generó que en el applet “sixflags2.ggb” se generaran solo puntos rojos (Figura 100).

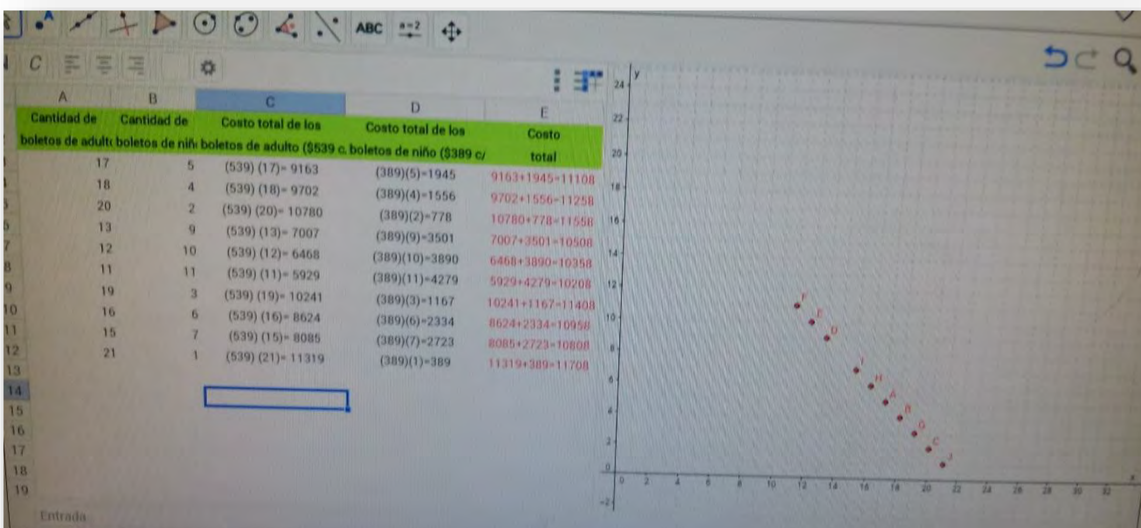


Figura 100. Exploración del applet “sixflags2.ggb”. Actividad 1

En este caso, el estudiante está trabajando con cantidades discretas (número de boletos de adulto y de niño) y en el applet anterior no existían coordenadas de puntos que cumplieran con la condición, a excepción de las coordenadas del punto solución del sistema.

Lo anterior se observó también en las respuestas de los estudiantes en las hojas de trabajo, debido a que al ingresar en la barra de entrada la segunda ecuación del sistema, no podían verificar si esta era correcta o no (Figura 101).

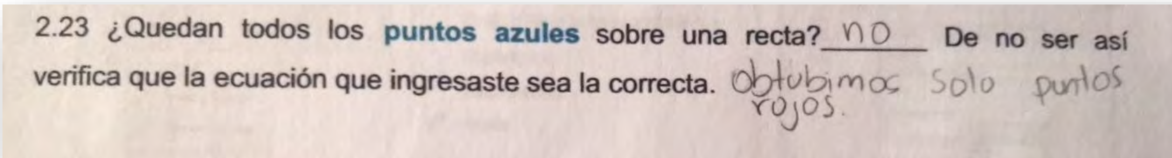
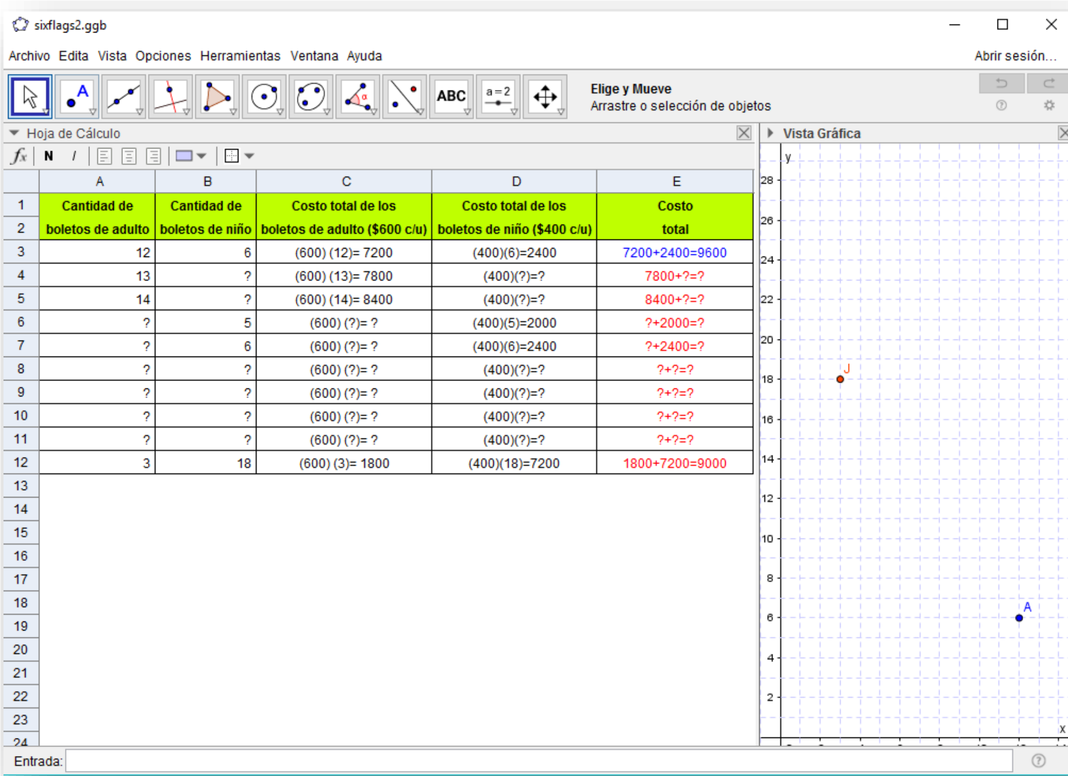

2.23 ¿Quedan todos los **puntos azules** sobre una recta? no De no ser así verifica que la ecuación que ingresaste sea la correcta. obtubimos solo puntos rojos.

Figura 101. Respuesta de un alumno con relación a la dificultad anterior

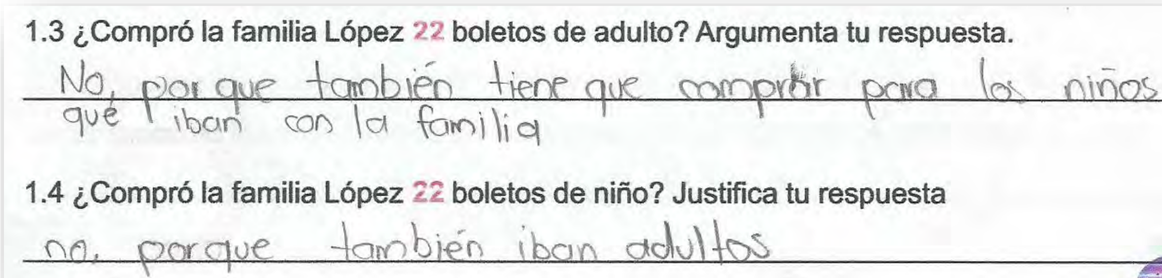
Para superar la dificultad anterior, además de la modificación de la situación problema, consideramos pertinente proporcionarle al alumno un ejemplo del trabajo esperado en cada uno de los applets, como se muestra en la imagen siguiente (Figura 102). Esto también con la intención de que reflexionen que lo que se busca, en este caso, son cantidades de boletos que cumplan con el costo total de la compra y no con la cantidad de boletos adquiridos.



	A	B	C	D	E
1	Cantidad de	Cantidad de	Costo total de los	Costo total de los	Costo
2	boletos de adulto	boletos de niño	boletos de adulto ($600 c/u)	boletos de niño ($400 c/u)	total
3	12	6	(600) (12)= 7200	(400)(6)=2400	7200+2400=9600
4	13	?	(600) (13)= 7800	(400)(?)=?	7800+?=?
5	14	?	(600) (14)= 8400	(400)(?)=?	8400+?=?
6	?	5	(600) (?)= ?	(400)(5)=2000	?+2000=?
7	?	6	(600) (?)= ?	(400)(6)=2400	?+2400=?
8	?	?	(600) (?)= ?	(400)(?)=?	?+?=?
9	?	?	(600) (?)= ?	(400)(?)=?	?+?=?
10	?	?	(600) (?)= ?	(400)(?)=?	?+?=?
11	?	?	(600) (?)= ?	(400)(?)=?	?+?=?
12	3	18	(600) (3)= 1800	(400)(18)=7200	1800+7200=9000

Figura 102. Versión final del applet "sixflags2.ggb"

Por otro lado, en esta actividad también fue necesario modificar las preguntas iniciales de las hojas de trabajo, ya que como se muestra en la siguiente imagen (Figura 103), algunos alumnos interpretaron las preguntas de manera diferente a la esperada.


1.3 ¿Compró la familia López 22 boletos de adulto? Argumenta tu respuesta.

No, porque también tiene que comprar para los niños qué iban con la familia

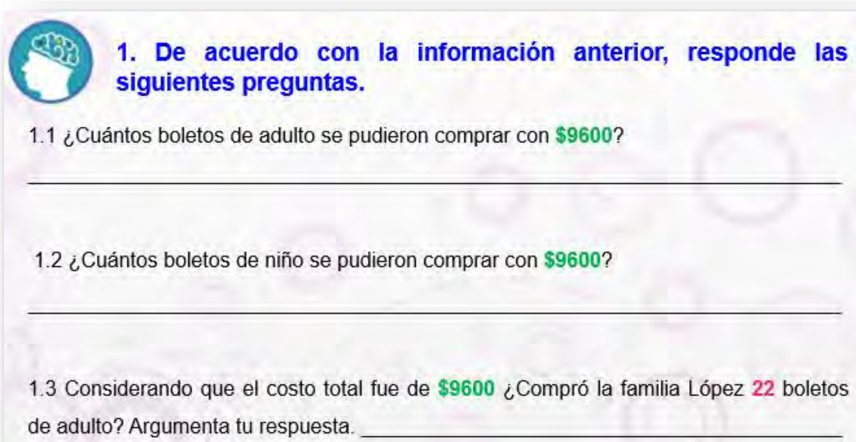
1.4 ¿Compró la familia López 22 boletos de niño? Justifica tu respuesta

no, porque también iban adultos

Figura 103. Respuestas diferentes a las esperadas

En sus respuestas se puede observar, que da por hecho que en la familia iban niños y adultos y no toma en cuenta la información que se le proporciona inicialmente, debido a que se esperaba que respondiera que la cantidad que se gastó en la compra de los boletos hace que sea imposible que se hayan comprado 22 boletos de adulto o 22 boletos de niño, ya que para los boletos de adulto el dinero sería insuficiente y para los boletos de niño sobraría dinero.

Por lo anterior modificamos la redacción de las preguntas, siendo más específicos en el costo total de los boletos (Figura 104).


1. De acuerdo con la información anterior, responde las siguientes preguntas.

1.1 ¿Cuántos boletos de adulto se pudieron comprar con $9600?

____

1.2 ¿Cuántos boletos de niño se pudieron comprar con $9600?

____

1.3 Considerando que el costo total fue de $9600 ¿Compró la familia López 22 boletos de adulto? Argumenta tu respuesta. ______________________________

Figura 104. Modificación en la redacción de las preguntas iniciales. Actividad 1

Actividad 2. “Inversiones bancarias”

La información obtenida durante la implementación de la actividad anterior, nos hizo reflexionar sobre las posibles dificultades que pudieran surgir durante la realización de la actividad 2.

En este caso, también fue necesario modificar los datos de la situación-problema inicial (Figura 105) puesto que con las cantidades que se manejaban se presentarían las mismas dificultades en la utilización del applet “inversiones_bancarias2.ggb”, utilizado para explorar la segunda condición del problema.

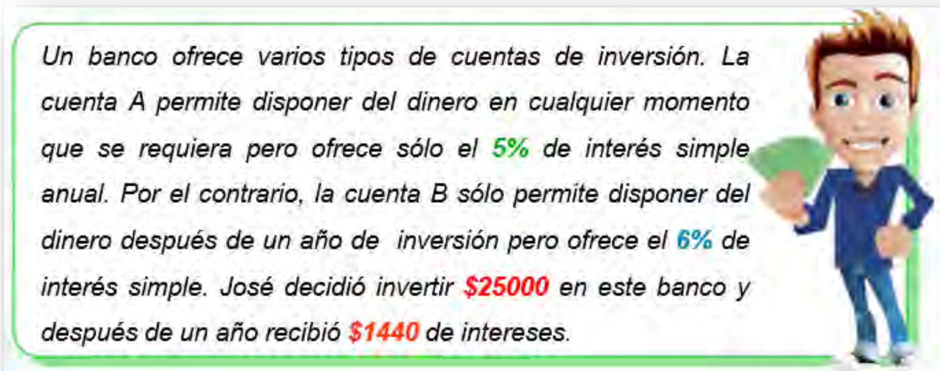


Figura 105. Primera versión de la situación-problema. Actividad 2

Para la segunda versión de la situación, se cambió la redacción del problema, se modificaron los rendimientos generados por la inversión en cada una de las cuentas, así como la cantidad total de rendimientos recibidos después de un año (Figura 106).

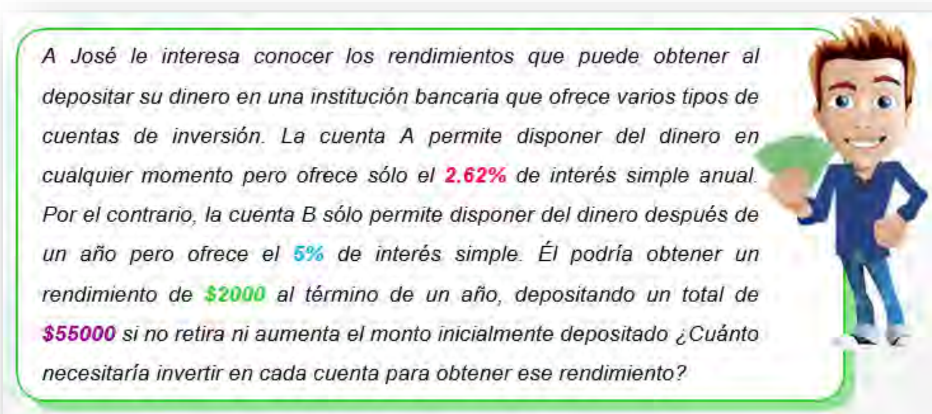
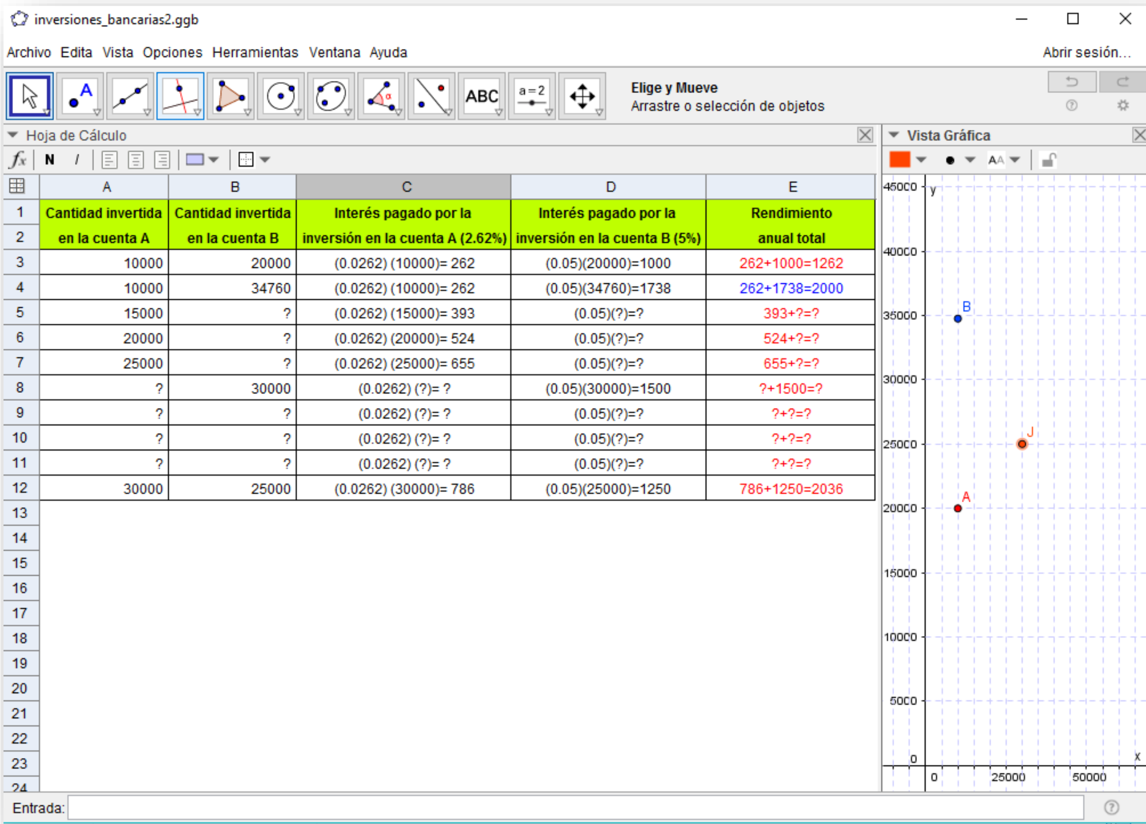


Figura 106. Versión final de la situación-problema. Actividad 2

Como consecuencia de las modificaciones anteriores, fue necesario adecuar el applet “inversiones_bancarias2.ggb” con los nuevos datos de la situación. También decidimos proporcionarle al estudiante un ejemplo inicial con posibles cantidades invertidas en cada una de las cuentas bancarias.



	A	B	C	D	E
1	Cantidad invertida	Cantidad invertida	Interés pagado por la	Interés pagado por la	Rendimiento
2	en la cuenta A	en la cuenta B	inversión en la cuenta A (2.62%)	inversión en la cuenta B (5%)	anual total
3	10000	20000	(0.0262) (10000)= 262	(0.05)(20000)=1000	262+1000=1262
4	10000	34760	(0.0262) (10000)= 262	(0.05)(34760)=1738	262+1738=2000
5	15000	?	(0.0262) (15000)= 393	(0.05)(?)=?	393+?=?
6	20000	?	(0.0262) (20000)= 524	(0.05)(?)=?	524+?=?
7	25000	?	(0.0262) (25000)= 655	(0.05)(?)=?	655+?=?
8	?	30000	(0.0262) (?)= ?	(0.05)(30000)=1500	?+1500=?
9	?	?	(0.0262) (?)= ?	(0.05)(?)=?	?+?=?
10	?	?	(0.0262) (?)= ?	(0.05)(?)=?	?+?=?
11	?	?	(0.0262) (?)= ?	(0.05)(?)=?	?+?=?
12	30000	25000	(0.0262) (30000)= 786	(0.05)(25000)=1250	786+1250=2036

Figura 107. Versión final del applet “inversiones_bancarias2.ggb”

En todos los applets, se agregó el punto J en la vista gráfica. Éste es un punto móvil cuya intención es que el alumno lo pueda manipular para observar su relación con la información de la tabla.

Además, en cada uno de los applets se asignaron cantidades previas para que la exploración se realice de manera sistemática.

Actividad 3. "Compras en el mercado"

En esta actividad se modificaron también los datos iniciales, cambiándolos por compras en kg de frutas. Se adecuaron también las cantidades totales de las compras para evitar problemas con el uso de los applets, relacionados con la identificación de posibles precios para las frutas.

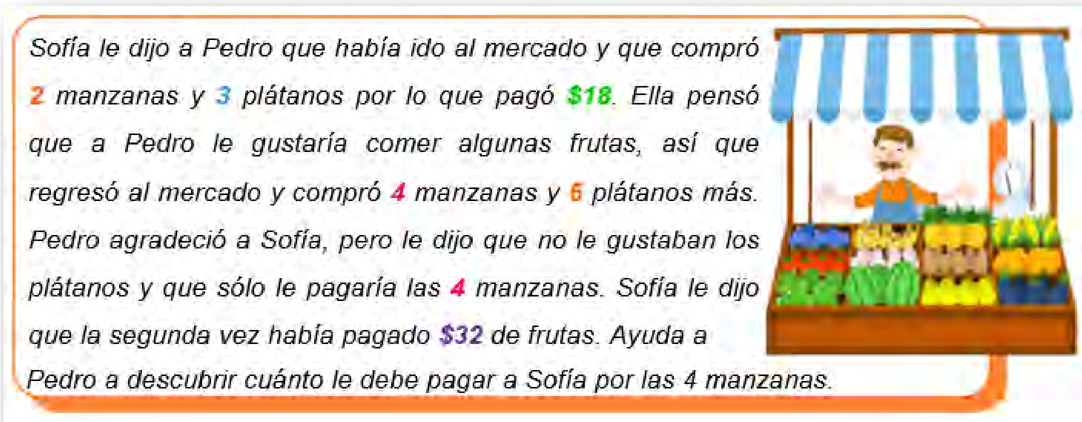


Figura 108. Primera versión de la situación-problema. Actividad 3

Las modificaciones incorporadas propiciaron que la situación quedara de la siguiente manera (Figura 109).

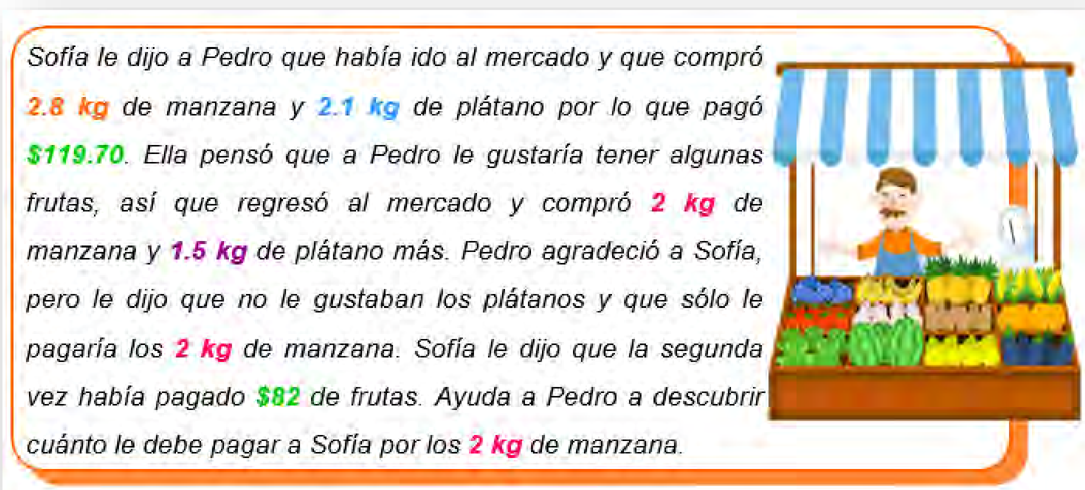
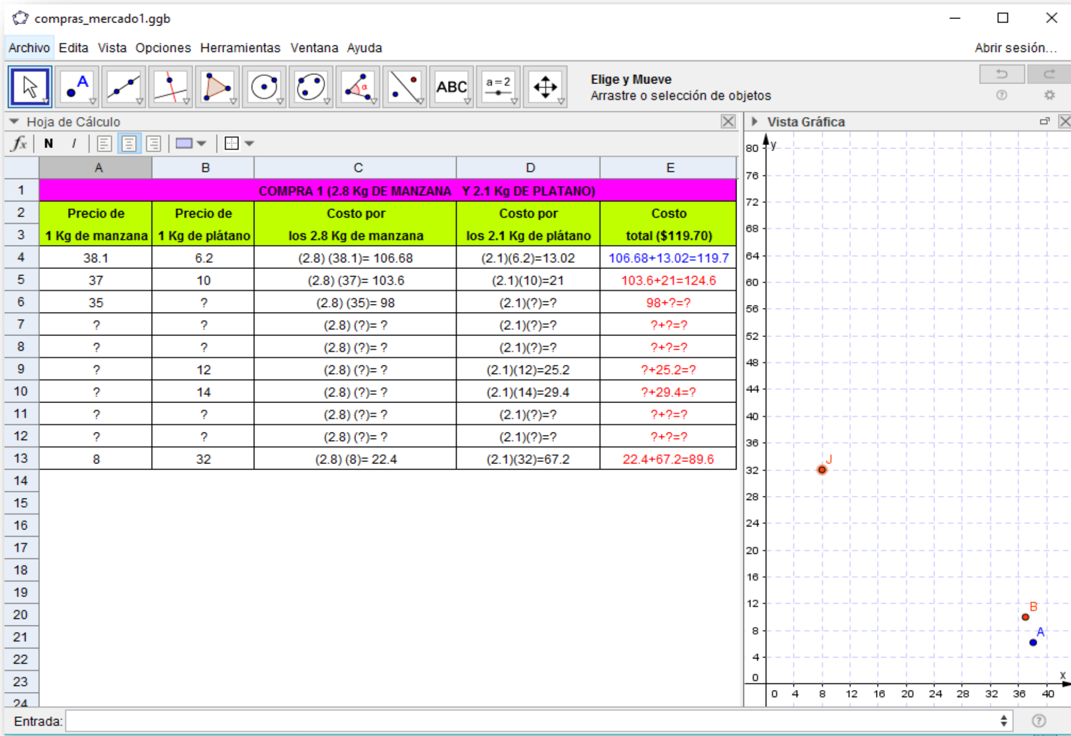


Figura 109. Versión final de la situación-problema. Actividad 3

En los applets “compras_mercado1.ggb” y “compras_mercado2.ggb”, también se modificaron los datos numéricos y las escalas de la vista gráfica. Además se decidió mostrar un ejemplo inicial para el estudiante en la tabla que a su vez genera las coordenadas de uno de los puntos azules.



	A	B	C	D	E
1	COMPRA 1 (2.8 Kg DE MANZANA Y 2.1 Kg DE PLATANO)				
2–3	Precio de 1 Kg de manzana	Precio de 1 Kg de plátano	Costo por los 2.8 Kg de manzana	Costo por los 2.1 Kg de plátano	Costo total ($119.70)
4	38.1	6.2	(2.8) (38.1)= 106.68	(2.1)(6.2)=13.02	106.68+13.02=119.7
5	37	10	(2.8) (37)= 103.6	(2.1)(10)=21	103.6+21=124.6
6	35	?	(2.8) (35)= 98	(2.1)(?)=?	98+?=?
7	?	?	(2.8) (?)= ?	(2.1)(?)=?	?+?=?
8	?	?	(2.8) (?)= ?	(2.1)(?)=?	?+?=?
9	?	12	(2.8) (?)= ?	(2.1)(12)=25.2	?+25.2=?
10	?	14	(2.8) (?)= ?	(2.1)(14)=29.4	?+29.4=?
11	?	?	(2.8) (?)= ?	(2.1)(?)=?	?+?=?
12	?	?	(2.8) (?)= ?	(2.1)(?)=?	?+?=?
13	8	32	(2.8) (8)= 22.4	(2.1)(32)=67.2	22.4+67.2=89.6

Figura 110. Versión final del applet “compras_mercado1.ggb”

En esta actividad se realizaron las modificaciones necesarias a todas las preguntas e instrucciones, para que coincidieran con la nueva versión del problema.

En el resto de las actividades no se realizaron modificaciones, ya que el contexto es intra-matemático y los applets diseñados para ellas son de otro estilo.

Todas las modificaciones anteriores se incorporaron al diseño final de las actividades y se incluyeron en el folleto que se anexa en este proyecto (Anexo 4).

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Para finalizar, se presentan en esta sección las conclusiones que se obtuvieron durante la realización de este proyecto.

En el capítulo 1 reflexionamos sobre la problemática existente en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, enfatizando en las dificultades que manifiestan los estudiantes para traducir problemas dados en el lenguaje verbal dado que no realizan de forma correcta la conversión al registro algebraico, así como las dificultades para utilizar el método gráfico de resolución, la asociación de un gráfico a un sistema de ecuaciones dado y las interpretaciones erróneas del concepto solución.

Durante la puesta en escena de la actividad 1, algunos estudiantes mostraron problemas que concuerdan con los resultados de las investigaciones que se han revisado y a pesar de que los alumnos ya estudiaron ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones durante el primer semestre, siguen presentando dificultades notables a la hora de modelar algebraicamente las ecuaciones para formar el sistema.

Con respecto a esto, existe mucha evidencia producto de investigaciones que en matemática educativa se han hecho sobre el tema, en las que se afirma que la modelación matemática no termina en la construcción del modelo, sino que, es necesario hacer uso de procedimientos, hipótesis, solución de ecuaciones, estimaciones numéricas, etc., hasta obtener los resultados matemáticos, que requieren ser trasladados nuevamente al contexto inicial para realizar el proceso de interpretación y así dar solución al problema de origen.

Nuestra aportación al respecto de esta problemática, fue una propuesta de actividades didácticas dirigida a estudiantes de bachillerato que buscó promover el desarrollo de habilidades en la formulación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, con base en la resolución de problemas y haciendo uso de la tecnología digital.

El conocimiento de teorías propias de la Matemática Educativa, específicamente del EOS nos facilitó tanto el diseño de las actividades como su análisis y valoración didáctica. En particular las nociones de objetos y significados, nos permitieron determinar los objetos matemáticos que conformarían el significado pretendido de las actividades. Por otro lado, la noción de idoneidad didáctica, fue utiliza como guía para el diseño de la propuesta y al final fue una herramienta muy potente para valorar a priori y a posteriori su pertinencia.

Lo anterior nos permite concluir que el conocimiento de teorías de la Matemática Educativa; que cada vez tienen mayor aceptación y uso por la comunidad, nos brinda las bases necesarias para realizar un proyecto con un sustento teórico formal que va más allá de nuestra experiencia, pues estos paradigmas nos permiten planear, diseñar, analizar, describir y explicar fenómenos relacionados con la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, en este proyecto se establecieron tres objetivos específicos, el primero de cuales fue el siguiente:

1. *Contar con problemas provenientes de contextos extra-matemáticos sencillos que para su solución requieran la formulación de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.*

Para el logro de este primer objetivo, se realizó la búsqueda y selección de contextos extra-matemáticos sencillos para el estudio de este contenido matemático. Particularmente se revisaron algunos textos sugeridos por la bibliografía del plan de estudios para Matemáticas 1 de la DGB y algunos otros de Algebra y Pre-cálculo. En esta fase se seleccionaron cuatro contextos extra-matemáticos para las primeras cuatro actividades, las dos últimas las realizamos utilizando situaciones intra-matemáticas.

Al inicio, fue complicado seleccionar contextos que condujeran a formular un sistema de ecuaciones lineales sin solución o con infinidad de soluciones ya que por lo general estos se estudian de manera intra-matemática, sin embargo, logramos realizar la adaptación de algunas situaciones extra-matemáticas sencillas que permitieron abordar dichos contenidos. Para futuros refinamientos del diseño aquí presentado, es posible incluir algunos contextos extra-matemáticos relacionados con situaciones de la vida cotidiana.

El segundo objetivo específico que se planteó fue el contar con:

2. *Planteamientos adecuados para el nivel de los estudiantes acordes a los contextos seleccionados.*

Una vez que seleccionamos los contextos para las situaciones-problemas, el siguiente paso fue realizar la adaptación de los planteamientos para que éstos fueran adecuados al nivel de los estudiantes. En algunos de ellos, modificamos la redacción del problema y los datos numéricos que se proporcionaban de acuerdo con los objetivos de cada una de las actividades.

El tercer y último objetivo específico que se planteó fue:

3. *Contar con applets diseñados de acuerdo con los planteamientos de los problemas seleccionados que involucren el uso de diferentes representaciones dinámicas elaboradas con el software GeoGebra.*

Con base en la problemática encontrada de acuerdo con las investigaciones revisadas, nos vimos en la necesidad de diseñar actividades que apoyaran al alumno en el proceso de formulación de las ecuaciones de un sistema y en la resolución gráfica de éste. Aprovechando las ventajas de un software como GeoGebra, diseñamos 14 applets para complementar las actividades propuestas.

En este proyecto, el software GeoGebra tuvo un papel fundamental en el diseño de las actividades didácticas, lo que dio como resultado una propuesta de actividades innovadora, dinámica y diferente a lo que por lo general presentan los libros de texto. Esto a su vez, contribuyó a enriquecer el significado de los estudiantes con relación al objeto matemático y generó un ambiente de trabajo muy agradable, a pesar de ser este su primer acercamiento con el software.

Algunos de estos applets tienen el objetivo de ayudar al estudiante a plantear las ecuaciones que modelan la situación, a través de la exploración de una tabla de valores con datos numéricos particulares y la visualización de las relaciones entre éstos y las coordenadas de los puntos que automáticamente se grafican en el plano, de manera que constantemente se establece la relación entre el lenguaje numérico, gráfico y algebraico al vincular todo dinámicamente.

Diseñamos también algunos applets que permitieran visualizar la posición de las rectas en el plano y con esto identificar cuándo un sistema de ecuaciones simultáneas tiene una, ninguna o infinidad de soluciones.

Con la finalidad de apreciar la relación entre los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones que hacen que el sistema se clasifique de u otra forma, se diseñó un applet más haciendo uso de deslizadores; herramienta que ofrece el software GeoGebra. Estos archivos se encuentran disponibles en el sitio web de GeoGebraTube y la dirección electrónica se proporciona en el folleto completo de actividades (Anexo 4, p. XIII).

Por otro lado, en el análisis a priori de la idoneidad didáctica de la propuesta, que realizamos en el capítulo 3, calificamos como altas las seis idoneidades parciales, considerando que se habían integrado todas ellas en las actividades.

Aunque con la puesta en escena de una de las actividades, observamos que el contexto del problema y el uso de la tecnología favorecieron el interés de los estudiantes, valoramos a posteriori, en el capítulo 4, como media-alta las idoneidades epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional e interaccional. La razón de esta valoración se debió a las dificultades que se observaron en los estudiantes para comprender algunas preguntas e instrucciones de las hojas de trabajo, para construir las ecuaciones que formarían el sistema y para interactuar activamente en las discusiones en equipo y grupales.

Los cambios sugeridos tras la puesta en escena se incorporaron al diseño final de las actividades, con lo cual intentamos mejorar la idoneidad didáctica en las componentes que lo requieren.

Cabe destacar, que dichas valoraciones son particulares del proceso de instrucción realizado, de manera que estas pudieran variar si se realiza de nuevo su implementación en condiciones diferentes a la presentada en esta ocasión.

Concluido este trabajo, quedan abiertas posibles líneas para su seguimiento que pudieran ser las siguientes:

- La continuación del diseño de actividades, donde se proponga la resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando la Regla de Cramer.

- El uso de contextos en el área de la física que involucren el planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

- Proponer actividades didácticas que involucren sistemas de ecuaciones lineales no cuadrados por ejemplo, de dos ecuaciones con tres incógnitas, que permita a los estudiantes construir una visión más amplia del concepto solución de un sistema de ecuaciones.

- Una investigación sobre el impacto que estas actividades tienen en la modificación o enriquecimiento de los significados personales de los estudiantes y observar si pueden aplicar sus significados en otros contextos.

- Realizar las orientaciones didácticas para el profesor de manera más detallada, para que las actividades puedan implementarse de acuerdo con los fines para las que fueron diseñadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allen, R. (2012). *Álgebra elemental.* México: Pearson Educación.

American Psychological Association. (2010). *Manual de estilo de publicaciones de la American Psychological Association* (6ta ed.). Washington, DC: Autor.

Arellano, F., y Oktaç, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (22), 357-365.

Arias, R., y Leiva, L. (2013). *Construcciones dinámicas con GeoGebra para el aprendizaje-enseñanza de la matemática*. Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe, República Dominicana.

Barnett, R. (1992). *Precálculo.* México: Limusa.

Bozzalla, A., y García, S. (2014). Espacios de reflexión sobre la enseñanza de la matemática en la escuela media. Análisis gráfico como puerta de entrada hacia el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* (27), 1031-1040.

CK-12 (2012). *Álgebra I: Edición Española.* España: Flexbook.

Codina, A. (2011). *El papel de la tecnología en la resolución de problemas para futuros profesores de matemáticas.* Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1861/1/A_Codina_Hitt_2000.pdf

Cutz, B. (2005). *Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución.* (Tesis inédita de maestría). CINVESTAV-IPN, México, D.F.

Delors, J., Al Mufti , I., Amagi , I., Carneiro , R., Chung, F., Geremek, B., et al. (1996). *La Educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la educación para el Siglo XXI.* Madrid: Santillana Ediciones UNESCO.

Dirección General del Bachillerato. (2013). *Programas de Estudios Matemáticas I.* México D.F.: Autor

Duval, R. (1999). *Sémiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle, Colombia.

Flores, J., y Neira, V. (2013). *Problemas contextualizados mediante sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos: La Resolución de Problemas como Herramienta para la Modelación Matemática*. (Tesis inédita de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Font, V. (2005). *Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada.* Recuperado de https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/2728869.pdf

Garcés, E. (2009). *Incidencia del GeoGebra en la Resolución de Problemas con Sistemas Lineales 2x2.* (Tesis inédita de maestría). Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques,* 22 (2.3), 237-284.

Godino, J. (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Godino, J., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Gómez, D. (2006). *Representación de conceptos de análisis estructural con álgebra lineal* (Tesis inédita de doctorado). CINVESTAV-IPN, México, D.F.

Jiménez, R. (2011). *Matemáticas I: Álgebra.* México: Pearson Educación.

Lay, D. C. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (3ra ed.). México: Pearson Educación.

Mery, D., y López, M. (2003). *Restauración de imágenes usando el criterio de minimización de rizado en la imagen restaurada.* Recuperado de http://pdi-fich.wdfiles.com/local--files/tpsaplicacion/2008_AllegriBurruchaga-Restauracion.pdf

Oaxaca, J., De la Cruz, J., y Sánchez, J. (2002). *Dificultades en el tránsito del razonamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.* Recuperado de http://dcb.fi-c.unam.mx/Eventos/ForoMatematicas2/memorias2/ponencias/41.pdf

Page, L., y Brin, S. (1999). *The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web.* Recuperado de http://ilpubs.stanford.edu:8090/422/1/1999-66.pdf

Plan Nacional de Desarrollo 2007-2012. (2007). Presidencia de la República. Recuperado de http://pnd.calderon.presidencia.gob.mx/pdf/PND_2007-2012.pdf

Ramírez, M. P., Oktaç, A., y García, C. (2005). Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (19), 413-418.

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* (7), 49-78.

Secretaría de Educación Pública. (2011a). *Plan de estudios 2011. Educación básica.* México, D.F.: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* México, D.F.: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2013a). *Acuerdo 442 por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un plan de diversidad.* Recuperado de http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/11435/1/images/5_1_acuerdo_numero_442_establece_snb.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2013b). *Acuerdo 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato.* Recuperado de http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/11435/1/images/5_2_acuerdo_444_competencias_mcc_snb.pdf

Trejo, E., y Camarena, P. (2011). Concepciones de los profesores y su impacto en la enseñanza de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (24), 1095-1103.

Trigueros, M. (2012, febrero). *Sistemas de ecuaciones: ¿Qué nos dice la investigación sobre su aprendizaje?*. VI Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas: Avances y desafíos actuales, Lima, Perú.

Vargas, J., Rodríguez, M., del Castillo, A., Villalva, M., Ibarra, S., Grijalva, A., et al. (2014). *Matemáticas 1.* Hermosillo, Sonora: Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.

ANEXOS

ANEXO 1.
ANÁLISIS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA
LIBRO DE TEXTO MATEMÁTICAS I
BLOQUE 7. RESUELVE ECUACIONES LINEALES II

1. La noción de idoneidad epistémica (o matemática).

Un programa formativo, o un proceso de estudio matemático, tienen mayor idoneidad epistémica en la medida en que los significados institucionales implementados (o pretendidos) representan bien a un significado de referencia.

IDONEIDAD EPISTÉMICA						
COMPONENTES	**DESCRIPTORES**		**SI**	**NO**	**NA**	**OBSERVACIONES**
1.1 Situaciones-problemas	-Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación sobre sistemas de ecuaciones lineales 2x2.	Se presentan problemas contextualizados donde se utilizan los sistemas de ecuaciones lineales.	X			Se presentan problemas contextualizados, sin embargo; en la secuencia 1 solo se utiliza el contexto de las mezclas y es el único problema en el que se apoya al estudiante en la modelación de la situación.
		Se muestran aplicaciones para que resuelva el alumno.	X			Se presentan sistemas de ecuaciones lineales 2x2 para que el alumno los resuelva por los métodos algebraicos (sustitución, igualación y suma o resta), pero previo a esto sólo se les ha mostrado un ejemplo de cada método.
	-Propuesta de situaciones de generación de problemas (problematización), relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales 2x2.	Se propone la utilización de los SEL 2x2 en temas relacionados.	X			Se utilizan algunos contextos donde se utilizan los sistemas de ecuaciones lineales. La secuencia 1 se desarrolla en torno al contexto de las mezclas químicas.
1.2 Lenguaje	-Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), traducciones y conversiones entre los mismos.	Se utilizan: -Graficas de ecuaciones lineales para representar SEL (rectas no paralelas, rectas paralelas, rectas coincidentes).	X			Se utiliza el método gráfico como complemento a los métodos algebraicos. En la Actividad 3 de la Secuencia Didáctica 2, se le pide al estudiante graficar las ecuaciones lineales de tres sistemas de ecuaciones para visualizar gráficamente la solución de cada uno de ellos.

		-Se usan representaciones algebraicas sobre SEL 2x2.	X			En la mayoría de las actividades se promueve la conversión de la situación del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Consideramos que se puede apoyar aún más a los estudiantes en este proceso.
		-Se usan representaciones tabulares.	X			Sólo en la primera parte de la Secuencia 1.
		-Uso adecuado del lenguaje natural.	X			Se presentan algunos errores de escritura, por ejemplo, en las instrucciones de la Actividad 4 Secuencia 2 se le pide al estudiante resolver por medio de la Regla de Cramer el problema de los camiones de volteo, mismo que no aparece en ninguna parte del bloque. En la Secuencia 1 Actividad 3, no se aprecia el último paso del procedimiento que realizó el equipo 2 para resolver el sistema de ecuaciones 2x2.
	-Nivel del lenguaje adecuado a quienes se dirige.	-Los términos están al alcance de los estudiantes.	X			Tanto el lenguaje matemático como el lenguaje natural son adecuados para los estudiantes.
	- Se proponen situaciones de Expresión matemática e Interpretación acerca del concepto de SEL 2x2.	-Los estudiantes modelan situaciones a través de un SEL 2x2.	X			En la sección de problemas los estudiantes tienen que modelar el problema y resolverlo. Sólo en la secuencia 1 se les apoya en el proceso de modelación.
1.3 Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	-Las definiciones y procedimientos sobre SEL 2x2 son claros y correctos, y están adaptados al nivel medio superior.	-Se usan las definiciones adecuadas al nivel educativo.	X			
		-Se utilizan otras definiciones.		X		

	-Presentación de los enunciados y procedimientos fundamentales sobre SEL 2x2 según el significado de referencia y adaptados para nivel media superior.	-Se presentan procedimientos: -Gráficos -Algebraicos (igualación, sustitución y suma o resta) -Numéricos (Regla de Cramer) para resolver SEL 2x2.	X			Los métodos de resolución de SEL 2x2 que establece el plan de estudios de la DGB son los que se promueven en este bloque. Consideramos que sería muy favorable contar con algunas actividades que sirvan de apoyo a los estudiantes en caso de que haya dificultades para utilizar alguno de los métodos de resolución propuestos, sobre todo en los métodos gráficos y numéricos que, de acuerdo con las investigaciones, son los que menos se promueven.
	-Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos relacionados con los SEL 2x2.	Se enuncian: -Proposiciones sobre sistemas de ecuaciones lineales.	X			
		-Se proponen diferentes procedimientos en la resolución de los problemas.	X			
1.4 Argumentos	-Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones sobre sistemas de ecuaciones, son adecuadas para el nivel medio superior.	Las explicaciones sobre sistemas de ecuaciones lineales son adecuadas para el nivel educativo.	X			La mayoría de las explicaciones son adecuadas, aunque en los métodos algebraicos sería muy recomendable profundizar en el procedimiento.
	-Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar sobre procedimientos para resolver SEL 2x2.	Se promueve la argumentación de los estudiantes.	X			La argumentación se promueve a lo largo del bloque, principalmente en la Secuencia 1, donde los estudiantes tienen que argumentar sobre los procedimientos que utilizaron tres equipos para resolver el problema del laboratorista.

1.5 Relaciones (conexiones, significados)	- Los objetos matemáticos alrededor del concepto de SEL (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.	En la definición de SEL 2x2 se utilizan y conectan temas como las ecuaciones de primer grado, las gráficas de las ecuaciones lineales, etc.	X			Los conocimientos previos de los estudiantes, como las ecuaciones de primer grado y sus gráficas, las operaciones algebraicas y se involucran en el tema de este bloque.

2. Idoneidad cognitiva.

En esta parte, analizamos a priori el grado en el que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos de nivel medio superior, es decir están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.

IDONEIDAD COGNITIVA						
COMPONENTES	**DESCRIPTORES**		**SI**	**NO**	**NA**	**OBSERVACIONES**
2.1 Conocimientos previos (Componentes similares a la dimensión epistémica)	-Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio de los SEL 2x2 (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio).	-Los estudiantes tienen la noción de ecuación lineal con dos variables, ecuación de la recta, gráficas de ecuaciones lineales.	X			El estudio de los bloques anteriores del libro de texto, proporciona los conocimientos previos necesarios.
	-Los significados pretendidos sobre sistemas de ecuaciones se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.	Los estudiantes identifican la definición de SEL 2x2.	X			A lo largo del bloque se promueve que el estudiante identifique el modelo de un SEL 2x2.
		Los estudiantes pueden resolver un SEL 2x2.	X			Se pretende que los estudiantes conozcan varios métodos de resolución.
2.2 Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	-Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.	Se utilizan materiales complementarios.		X		No se presenta ningún material extra para que los estudiantes puedan consultar.
		Se proporciona una dirección electrónica o página web a los estudiantes.		X		No se proporcionan sitios web de consulta a los estudiantes.
2.3 Aprendizaje	-Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos/ competencias del concepto SEL 2x2 y de los procedimientos para resolverlos.	Se utilizan diferentes modos de evaluación.			X	No es posible determinar los métodos de evaluación utilizados.

3. Idoneidad Mediacional.

Es el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

IDONEIDAD MEDIACIONAL					
COMPONENTES	**DESCRIPTORES**	**SI**	**NO**	**NA**	**OBSERVACIONES**
3.1 Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	-Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido.		X		A lo largo del bloque no se propone el uso de recursos manipulativos o informáticos.
	-Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.		X		Para aumentar la idoneidad mediacional en este componente se propone la utilización del software GeoGebra que permitirá promover la visualización en los alumnos.
3.2 Número de alumnos, horario y condiciones del aula	-El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida.			X	No es posible determinarlo.
	-El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora).			X	No es posible determinarlo.
	-El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.			X	No es posible determinarlo.
3.3 Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	-El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida.			X	El tiempo asignado para el estudio del bloque es de 8 horas de acuerdo con la DGB, aunque no es posible saber si es suficiente.
	-Inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema.	X			La mayor parte de las actividades se enfocan en la formulación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.
	-Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.	X			Aunque se presentan actividades para apoyar al estudiante en la representación algebraica del sistema, considero que se podría complementar este proceso ya que es una de las principales dificultades

					que presentan los estudiantes, Segura (2004). Además, mediante el diseño de las actividades buscaremos favorecer la visualización gráfica de las soluciones de un sistema de ecuaciones.

4. Idoneidad emocional o afectiva.

La mayor o menor idoneidad emocional, se basa en el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes.

IDONEIDAD EMOCIONAL					
COMPONENTES	**DESCRIPTORES**	**SI**	**NO**	**NA**	**OBSERVACIONES**
4.1 Intereses y necesidades	-Las tareas sobre sistemas de ecuaciones lineales 2x2, tienen interés para los estudiantes.	X			Los contextos que se utilizan podrían ser interesantes para los estudiantes, pero se podría aumentar su interés incluyendo actividades que involucren el uso de GeoGebra, Garcés (2009).
	- Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de los SEL 2x2 en la vida cotidiana y profesional.	X			El contexto que se utiliza en la Secuencia 1 involucra un tema de la materia de Química (Las mezclas). En la sección de problemas se presenta una variedad de contextos diferentes a los de las mezclas que permite valorar la utilidad de los sistemas de ecuaciones lineales.
4.2 Actitudes	-Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.			X	No es posible determinarlo.
	-Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.	X			En la mayoría de las actividades se promueve la argumentación de las respuestas por parte de los estudiantes.
4.3 Emociones	-Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas.			X	No es posible determinarlo.
	-Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.	X			En la Secuencia 1 se muestran los procedimientos utilizados por tres equipos de trabajo para resolver el problema del laboratorista. Comparando el trabajo de los tres equipos se puede observar la precisión que tiene el equipo tres, ya que no solo describe su procedimiento sino que comprueba

					que el resultado efectivamente es solución del problema original. Este aspecto se seguirá considerando para el diseño de las actividades.

5. Idoneidad interaccional.

Se valora positivamente la presencia de momentos en que los estudiantes asumen la responsabilidad del aprendizaje. Los alumnos son protagonistas en la construcción de los conocimientos pretendidos.

IDONEIDAD INTERACCIONAL					
COMPONENTES	**DESCRIPTORES**	**SI**	**NO**	**NA**	**OBSERVACIONES**
5.1 Interacción docente-discente	-El profesor hace una presentación adecuada de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.).			X	Este análisis se está realizando a priori al libro de texto por lo que no es posible determinar la mayoría de los descriptores de esta idoneidad.
	-Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.).			X	No es posible determinarlo.
	-Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento.			X	No es posible determinarlo.
	-Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.			X	No es posible determinarlo.
	-Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión.			X	No es posible determinarlo.
5.2 Interacción entre discentes	-Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes.			X	Aunque no es posible saber si el profesor favorece la comunicación entre los alumnos, las Secuencias Didácticas si promueven el trabajo en equipo para compartir ideas y experiencias.
	-Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.			X	No es posible determinarlo.
	Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas apoyándose en argumentos matemáticos.			X	No es posible determinarlo.

5.3 Autonomía	-Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio, (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).	X			En las actividades individuales de la secuencia se promueve la autonomía por parte de los estudiantes.
5.4 Evaluación formativa	-Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.			X	No es posible determinarlo.

6. Idoneidad ecológica.

Se refiere al grado en que un plan o acción formativa para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno (la sociedad, la escuela, la pedagogía, la didáctica de las matemáticas) en que se utiliza.

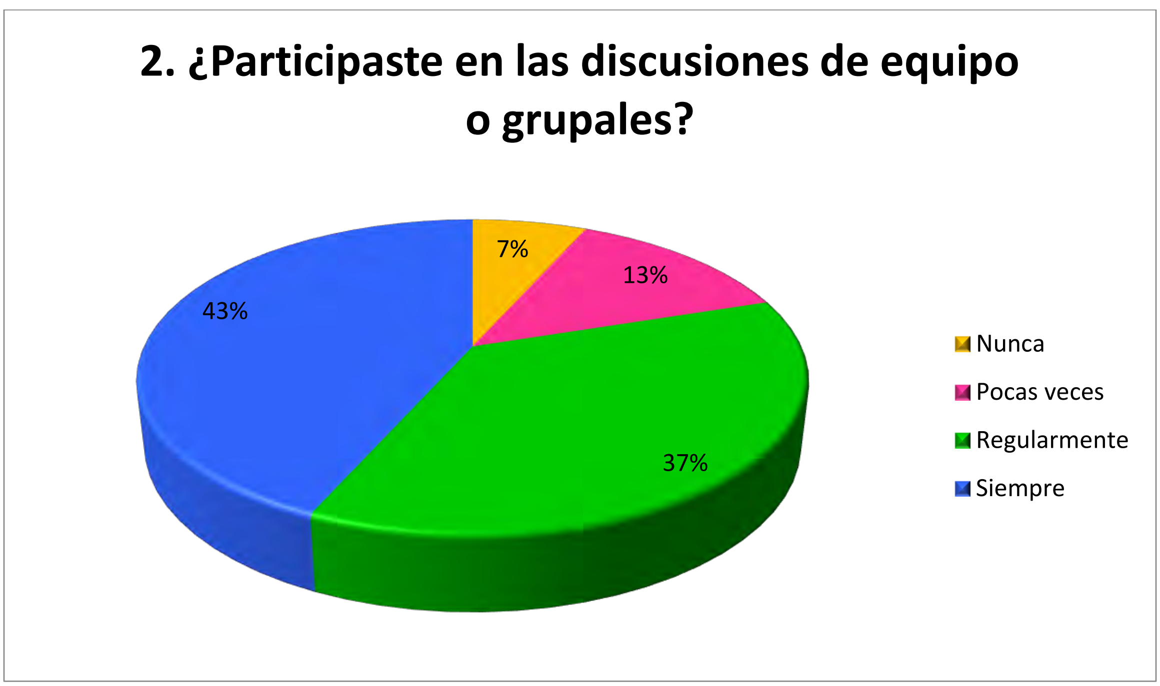
IDONEIDAD ECOLÓGICA					
COMPONENTES	**DESCRIPTORES**	**SI**	**NO**	**NA**	**OBSERVACIONES**
6.1 Adaptación al currículo	-Los significados, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices que señala la DGB.	X			El tiempo asignado al bloque y las competencias que se promueven corresponden con lo que señala el plan de estudios para Matemáticas 1 de la DGB.
6.2 Apertura hacia la innovación didáctica	-Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.	X			El diseño del módulo es bajo el enfoque de la resolución de problemas como herramienta de construcción de los significados.
	-Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2.		X		Ninguna de las actividades promueve el uso de las nuevas tecnologías.
6.3 Adaptación socio-profesional y cultural	-Los significados contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.	X			La materia de Matemáticas 1 es parte de la formación básica de bachillerato y los SEL 2x2 se estudian desde secundaria hasta el nivel superior.
Conexiones intra e interdisciplinares	-Los significados sobre sistemas de ecuaciones lineales se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.	X			En el bloque se estudia su relación con la asignatura de Química.

ANEXO 2.
CUESTIONARIO

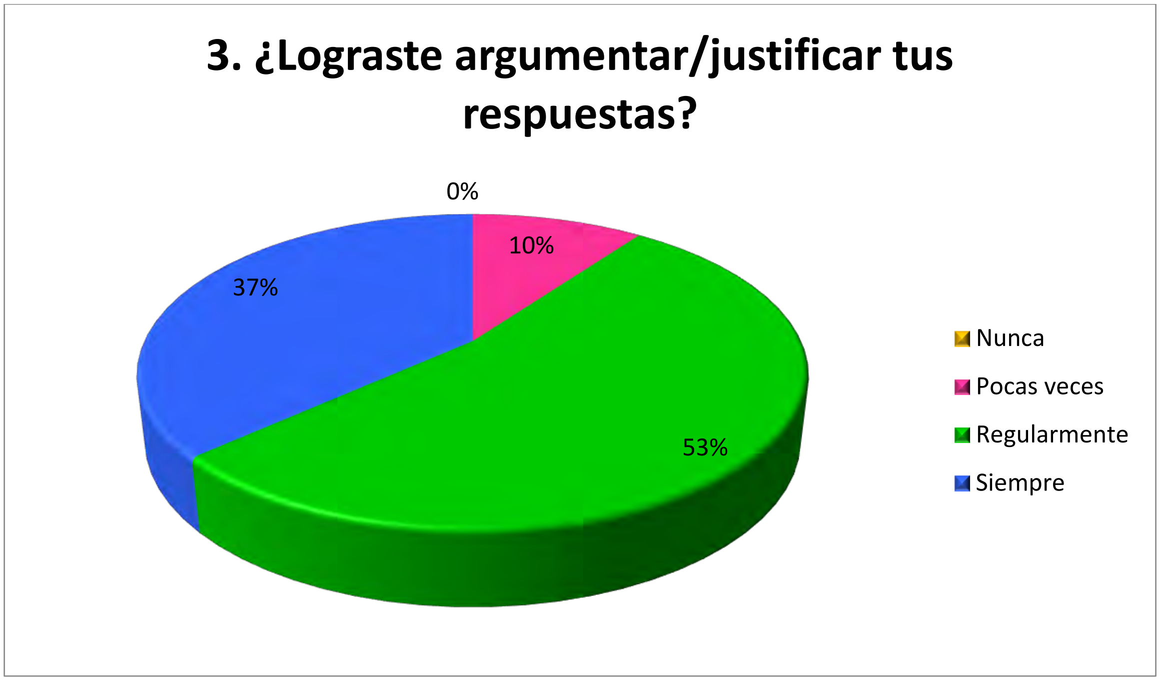
PREGUNTAS	NUNCA	POCAS VECES	REGULARMENTE	SIEMPRE
1. ¿Lograste comunicar tus ideas al trabajar en equipo o en grupo?				
2. ¿Participaste en las discusiones de equipo o grupales?				
3. ¿Lograste argumentar/justificar tus respuestas?				
4. ¿Te pareció interesante utilizar GeoGebra en las actividades?				
5. ¿Las instrucciones y preguntas de las hojas de trabajo te resultaron claras?				
6. ¿Solicitaste ayuda al profesor?				
7. ¿Qué aprendiste al realizar esta actividad?				
8. ¿Qué opinas sobre el uso del software GeoGebra?				
9. ¿Qué dificultades tuviste al desarrollar la actividad?				
10. ¿Tuviste dificultades al utilizar GeoGebra? Anota cuáles.				

ANEXO 3.
GRÁFICAS

Gráfica 1. ¿Lograste comunicar tus ideas al trabajar en equipo o en grupo?

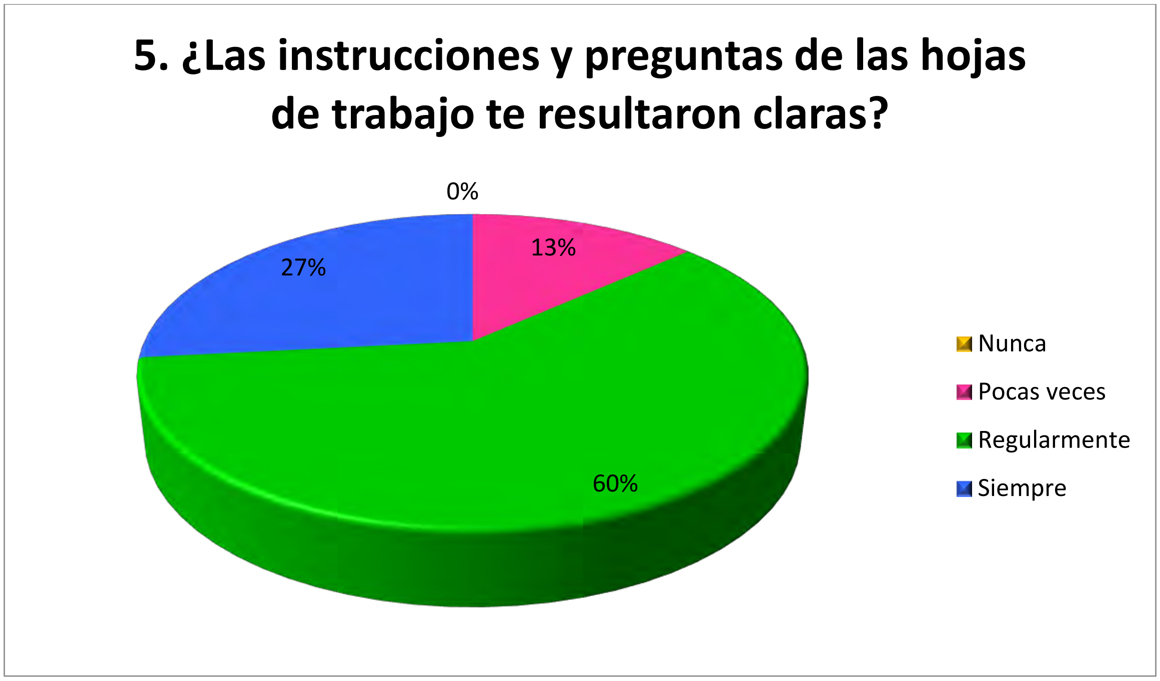


Gráfica 2. ¿Participaste en las discusiones de equipo o grupales?



Gráfica 3. ¿Lograste argumentar/justificar tus respuestas?

Gráfica 4. ¿Te pareció interesante utilizar GeoGebra en las actividades?



Gráfica 5. ¿Las instrucciones y preguntas de las hojas de trabajo te resultaron claras?

Gráfica 6. ¿Solicitaste ayuda al profesor?

ANEXO 4.

FOLLETO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS