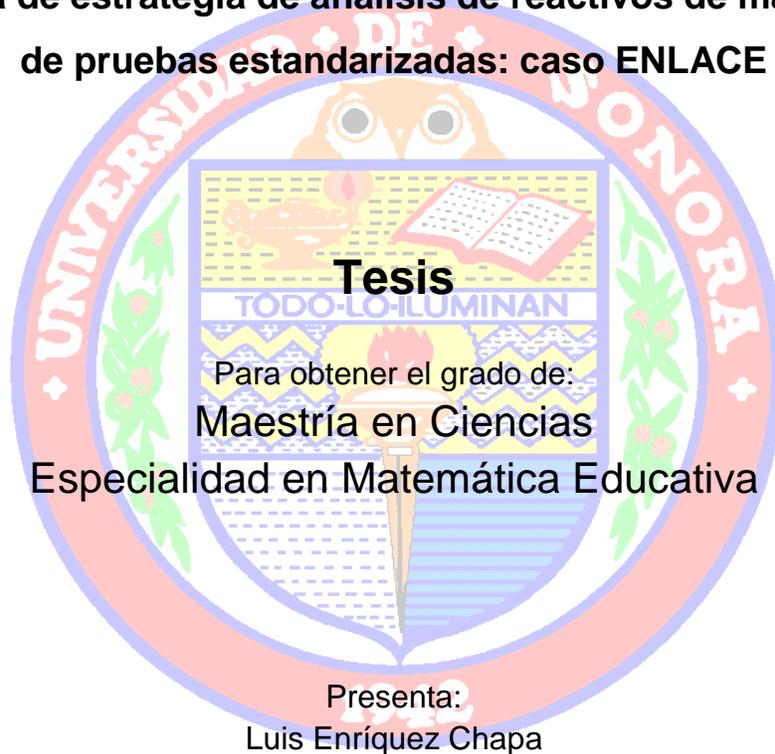


**Universidad de Sonora**  
División de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemáticas

**Propuesta de estrategia de análisis de reactivos de matemáticas  
de pruebas estandarizadas: caso ENLACE**



Director de Tesis: M.C. Manuel Alfredo Urrea Bernal

Hermosillo, Sonora, febrero de 2014

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

## AGRADECIMIENTOS

Indudablemente a mi familia, Elva, Iris Jeanneth, Evelyn, Liveth Carolina y Diann Lui, que además de inspiración para la conclusión de este proyecto, son las personitas que amo. Gracias por todo su apoyo.

A mis padres, Cleto Enríquez Burruel y Norma Francisca Chapa Falliner, a quienes les gustó el trabajo desarrollado.

Al M.C. Manuel Alfredo Urrea Bernal, Director de este proyecto quien me brindó su apoyo en todo momento, sus valiosas aportaciones y la conducción hasta el término de este trabajo, gracias Maestro.

A los Doctores Ramiro Ávila Godoy y José Luis Soto Munguía, al Profesor. Amado Alfonso Montoya Zazueta, por el apoyo brindado en la revisión del trabajo y como sinodales en el examen de grado.

A todos los profesores que en el transcurso del tiempo que duraron las materias de la maestría, fueron motivando y aportando sus valiosos puntos de vista para las mejoras de este material.

## Contenido

Introducción	
Introducción .....	4
Capítulo 1. Antecedentes, Marco referencial y justificación .....	7
1.1 Antecedentes.....	7
1.2 Marco referencial .....	17
1.2.1 Reforma Integral de la Educación Media Superior .....	17
1.2.2 El Programa de Estudios de Matemáticas.....	20
1.3 Justificación .....	22
Capítulo 2. Problemática, objetivos, elementos teóricos y metodológicos.....	24
2.1 Problemática .....	24
2.2 Objetivos.....	25
2.3 Elementos teóricos del Enfoque Ontológico Semiótico .....	26
2.4 Consideraciones metodológicas.....	31
Capítulo 3. Propuesta de estrategia de análisis de reactivos de pruebas estandarizadas: caso ENLACE 2011 y 2012.....	35
3.1 Características del análisis de reactivos .....	35
3.2 Análisis del reactivo 69 del año 2011 .....	37
3.3 Análisis del reactivo 84 del año 2012 .....	70
Capítulo 4. Conclusiones.....	103
Anexos.....	108
Anexo 1 Reactivos aplicados a los grupos de estudio .....	108
Anexo 2 Resultados de aplicación en grupos .....	114
Anexo 3 Análisis estadístico de reactivos.....	117
Referencias.....	135

## Introducción

En este trabajo de investigación se presenta una propuesta de estrategia para el análisis de reactivos de matemáticas en pruebas estandarizadas, en particular el caso de la prueba ENLACE, tomando reactivos de sus ediciones de los años 2011 y 2012 aplicados en el nivel medio superior en planteles educativos de todos los subsistemas y modalidades en México.

En el Capítulo 1; Antecedentes se menciona lo referente a la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) como evaluación estandarizada aplicada en nuestro país, su relación con la Reforma Integral de la Educación Media Superior, las competencias del estudiante que se pretenden evaluar, las competencias matemáticas de los Programas de Estudios del Bachillerato Tecnológico y de la Dirección General de Bachillerato, y la información referente a las implicaciones de la aplicación de la prueba, así como el uso que se da a los resultados publicados.

En el apartado del Marco referencial, se hace mención a los contenidos matemáticos de la prueba ENLACE y los de los Programas de Estudios, en lo concerniente a lo que se manifiesta acerca de las competencias matemáticas que pueden ser comunes en ambos documentos, y que se evalúan en los reactivos de la prueba. Se presentan las capacidades y habilidades que se desarrollan como parte importante de las competencias matemáticas consideradas en los Programas de Estudios.

En el apartado de Justificación, se plantea el porqué se realiza este trabajo y se presenta la propuesta de estrategia de análisis de reactivos de la prueba; que es considerada de acuerdo a los resultados que presenta, como un parámetro de comparación entre los planteles educativos de los subsistemas dependientes de la SEP, y como información de referencia para la toma de decisiones en distintos ámbitos.

En el Capítulo 2, acerca de la Problemática que se aborda en este trabajo de tesis, se menciona uno de los problemas de la educación matemática, que es la evaluación de los aprendizajes y cómo ENLACE pretende evaluar a los estudiantes de bachillerato en base a lo que se establece en el Programa de Estudio y bajo los lineamientos de la RIEMS. Se plantea el objetivo general y los objetivos específicos de este trabajo de investigación

Se mencionan los elementos teóricos que son utilizados en el desarrollo del trabajo, basándonos en el significado institucional evaluado, el sistema de prácticas, los objetos matemáticos, los objetos personales, los objetos institucionales y sus configuraciones.

En las consideraciones metodológicas, se presenta cómo se abordan los elementos de esta tesis, y los aspectos que se consideran para integrar la propuesta de estrategia de análisis de los reactivos, en la que se incluyen los elementos de significado. Las principales fases de la metodología empleada, incluyen la investigación bibliográfica, selección de reactivos, trabajo en grupos con la aplicación de los reactivos a los estudiantes solicitándoles que argumenten su respuesta, propuesta de análisis de reactivos.

En el Capítulo 3 se muestran las características del análisis de reactivos, y cómo se involucran los elementos teóricos considerados para el análisis, entre los que está presente el significado institucional evaluado. Se realiza el análisis involucrando los seis tipos de entidades primarias dentro de la actividad matemática: elementos lingüísticos, situaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, contenidos en el Enfoque Ontosemiótico.

Se considera en la propuesta de análisis, el significado institucional de referencia, significado institucional evaluado, consistencia entre el significado institucional de referencia y el significado institucional evaluado, argumentos y estrategias que se presentan en las prácticas que realizan estudiantes que resuelven los reactivos, quienes dejan evidencia escrita de la forma en cómo lo hacen, consistencia acerca de la debilidad que establece ENLACE, cuando los estudiantes no resuelven correctamente el reactivo, respecto a las prácticas que realizan estudiantes que responden los reactivos, y pertinencia de los distractores con respecto al objeto matemático que se evalúa.

Se presenta el análisis de dos reactivos de matemáticas, correspondientes a la materia de Geometría Analítica tomados de las ediciones de los años 2011 y 2012 de la prueba Enlace. Esta propuesta de análisis puede tomarse como referencia para trabajos futuros de análisis de reactivos. Como complemento se presenta en el anexo 3, el análisis estadístico de reactivos que se aplicaron en los grupos muestra, y que considera validez y

eficacia de reactivos, índice de dificultad del reactivo, índice de discriminación del reactivo y pertinencia de los distractores.

En el Capítulo 4; se presentan las conclusiones referidas al objetivo general y objetivos específicos de este trabajo; como son, las correspondientes al análisis realizado a los reactivos, los elementos identificados del significado institucional de referencia, del significado institucional evaluado, y la consistencia entre ellos.

En los anexos se presentan los reactivos de matemáticas aplicados en los grupos de estudio, los resultados que se obtuvieron de dicha aplicación, y el análisis estadístico de reactivos.

# Capítulo 1. Antecedentes, Marco referencial y justificación

## 1.1 Antecedentes

Las evaluaciones estandarizadas actualmente se están aplicando en diferentes niveles del sistema educativo mexicano, entre otras cosas con el propósito de conocer las debilidades que nuestro sistema educativo tiene; algunas de estas evaluaciones son diseñadas por dependencias de carácter estatal, nacional o internacional; por ejemplo a nivel internacional se tiene la prueba PISA, a nivel nacional se tiene las pruebas EXCALE y *Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares* (ENLACE), y a nivel estatal la Evaluación Estatal de Desempeño Escolar que aplica el Instituto de Evaluación Educativa del Estado de Sonora (IEEES).

En este trabajo centraremos la atención en la prueba ENLACE, aunque la propuesta de análisis es válida para cualquier prueba estandarizada, por ser una de las que tiene mayor incidencia sobre nuestro medio, la cual evalúa, de acuerdo a sus planteamientos, la capacidad de poner en práctica, ante situaciones del mundo real, conocimientos y habilidades básicas (lectora y matemática) adquiridas a lo largo de la trayectoria escolar (CENEVAL, 2012).

ENLACE para el nivel medio superior, se aplica por primera vez en el año 2008, año en el que también inicia la implementación de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), en la Tabla 1.1 se muestra la cantidad de estudiantes y de escuelas del país que han participado en sus seis ediciones.

Cantidad de:	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Estudiantes	808,346	835,741	884,663	912,878	965,144	1 012,952
Escuelas	11,007	11,716	12,246	12,755	13,189	13,835

Tabla 1.1.

La prueba es aplicada a todos los estudiantes de bachillerato que cursan el último grado de estudios en instituciones educativas, públicas o privadas, con reconocimiento de validez oficial por parte de la Secretaría de Educación Pública (SEP) o por las entidades federativas, en escuelas de carácter autónomo y las que a ellas estén incorporadas.

La prueba se presenta al estudiante en un cuadernillo que contiene los reactivos y se le entrega por separado la hoja para respuestas, que está foliada y con los datos del

estudiante, misma que al terminar de ser llenada se entrega al aplicador de grupo. La prueba está *“Integrada por reactivos de opción múltiple, que con diseños apropiados, facilitan la exploración de conocimientos, habilidades y competencias, la aplicación de reglas y procedimientos, el análisis de casos específicos o la vinculación de situaciones, entre muchas otras”* (SEP. ENLACE. 2011).

Contestando a la pregunta *¿Qué mide y que no mide la prueba ENLACE para el nivel medio superior?*, ENLACE declara que es: *“Para valorar en qué medida los jóvenes egresados de este nivel educativo son capaces de aplicar a situaciones del mundo real conocimientos y habilidades básicas adquiridas a lo largo de la trayectoria escolar que les permitan hacer un uso apropiado de la lengua –habilidad lectora y la habilidad matemática”* (SEP. ENLACE. 2011)

ENLACE en la presentación del desarrollo de sus propósitos, declara varios aspectos referentes a los jóvenes egresados:

- Al publicarse los resultados de la prueba ENLACE, por lo general los estudiantes que realizaron la prueba ya han egresado del plantel en el que cursaron su bachillerato, estos resultados los pueden consultar en la página de internet de ENLACE, <http://www.enlace.sep.gob.mx/>, usando para ello el número de folio del examen. En cada reactivo se incluye el comentario de la debilidad si el estudiante respondió incorrectamente; de tal forma que pueda conocer qué es lo que no hizo correctamente.
- ENLACE considera que los jóvenes egresados, serán capaces de aplicar a situaciones del mundo real los conocimientos y habilidades básicas adquiridas a lo largo de su trayectoria escolar.
- Se hace además mención de los conocimientos y habilidades que el estudiante adquiere en el nivel medio superior y deben considerarse como conocimientos específicos y que estén en concordancia con los ejes temáticos del Programa de Estudios del bachillerato, que corresponden a Razonamiento Matemático, Resolución de Problemas y Orientación Espacial, cada uno de ellos con sus respectivas habilidades y capacidades a desarrollar.

- De las materias que se estudian en este nivel educativo, los conocimientos básicos son referidos a lo que el ser humano requiere para solucionar situaciones de su sobrevivencia, de atención de las necesidades básicas.
- En la sociedad, la persona interactúa con otras personas, y se siguen patrones de conducta sociales, uno de ellos es la trayectoria escolar para la educación del individuo, y en la escuela se adquieren conocimientos que se incrementan al transcurrir los periodos escolares, de tal forma que la persona acumula estos conocimientos.

Las situaciones del mundo real sólo se resuelven cuando el estudiante está en determinado grado de compromiso con su estudio y su superación personal. Para la elaboración de reactivos de la prueba, deben considerarse situaciones a las que el estudiante enfrentará en sus actividades normales, de la vida cotidiana.

- En la prueba ENLACE se pretende que se midan tanto el dominio como habilidades desarrolladas, para enfrentar problemas de la vida cotidiana.

### **La aplicación de la prueba ENLACE**

Procedimiento de aplicación:

- En cada entidad federativa, las Áreas Estatales de Evaluación apoyan para la aplicación de la prueba.
- La logística de aplicación es supervisada por los representantes estatales de la Subsecretaría de Educación Media Superior y los titulares de las Oficinas de Servicios Federales de Apoyo a la Educación.
- Al hacer la aplicación de la prueba se procura no interferir con la operación normal de la escuela. Las actividades escolares de los otros grados de la institución no son afectados por la aplicación de la prueba.
- Se envían a cada plantel aplicadores externos, para cubrir cada grupo de estudiantes del último grado en la escuela.
- En cada escuela participa un coordinador de aplicación, que junto con el director del plantel, detallan la logística de la aplicación.
- Los materiales de evaluación son trasladados a los planteles por el coordinador de aplicación, quien abre los paquetes en presencia del director del plantel, padres de familia y observadores.

- Los observadores externos y padres de familia no intervienen en el proceso de aplicación de la prueba.
- Una muestra de docentes y de estudiantes de las escuelas participantes, contestan un cuestionario de contexto.
- Al finalizar la aplicación de la prueba, los aplicadores entregan las hojas de respuesta al coordinador, los cuadernillos del examen se quedan en cada escuela.

### **Objetivos generales de ENLACE**

- Proporcionar elementos para mejorar en todas sus dimensiones la calidad de la Educación Media Superior en todos los subsistemas y modalidades. Determinar en qué medida los jóvenes son capaces de aplicar a situaciones del mundo real conocimientos y habilidades básicas adquiridas a lo largo de la trayectoria escolar que les permitan hacer un uso apropiado de la lengua.
- Proporcionar un diagnóstico individualizado de los estudiantes evaluados a la terminación de su estudio en el bachillerato.

Una de las habilidades que evalúa ENLACE a los estudiantes es la habilidad matemática, para ENLACE (2008) dicha habilidad es la *“Aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzando razonamientos bien fundados, utilizando y participando en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo”*.

Además se declara que ENLACE es importante porque es:

1. Primer diagnóstico comparativo a nivel nacional para la Educación Media Superior.
2. Primer instrumento que da información pormenorizada estudiante por estudiante para todos los subsistemas y tipos de bachillerato.
3. Primera medición sistematizada del desarrollo de competencias entre egresados de bachillerato, mide el grado de avance en la instrumentación de la Reforma Integral de la Educación Media Superior.
4. Punto de referencia para calcular “ganancias en el aprendizaje”

### **Características de la prueba**

- Es una prueba objetiva y estandarizada.

- Proporciona un diagnóstico del estudiante a nivel individual.
- Está alineada al Marco Curricular Común, en particular a las competencias disciplinares básicas de los campos de Comunicación y Matemáticas.
- No permite derivar conclusiones sobre el sistema de Educación Media Superior, los subsistemas, las escuelas, los docentes ni sobre el desempeño de las entidades federativas.
- Sus resultados no tienen consecuencias académicas para los estudiantes ni para sus escuelas.
- No es una prueba de selección para el ingreso a instituciones de Educación Superior.
- La prueba consta de un cuadernillo de preguntas y de una hoja de respuestas y está conformada por preguntas de opción múltiple.
- La prueba contiene 50 preguntas dedicadas al campo disciplinar de Comunicación (Comprensión lectora) y 60 preguntas al campo disciplinar de Matemáticas.

### **Niveles de logro en habilidad matemática manifestados por ENLACE**

Para el campo disciplinar de Matemáticas, los resultados se muestran en base a los niveles de dominio que se presentan en el siguiente párrafo. Es importante considerar que cada nivel de dominio expresa que los estudiantes demuestran poseer esos conocimientos y los de todos los niveles anteriores, cuando se dan a conocer los resultados a los estudiantes, se les recomienda revisar los otros niveles para que identifiquen los aspectos que se deben mejorar.

#### *Insuficiente*

*Eres capaz de resolver problemas simples donde la tarea se presenta directamente. Efectúas operaciones básicas con números enteros. Ejecutas operaciones aritméticas con signos de agrupación. Encuentras equivalencias entre fracciones simples. Resuelves problemas que requieren la identificación de figuras planas y tridimensionales, así como las partes que las conforman. Localizas puntos en un plano y/o determinas sus coordenadas. Encuentras relaciones gráficas o algebraicas sencillas entre dos variables y realizas cálculos con base en ello.*

#### *Elemental*

*Resuelves problemas relativos a porcentajes. Realizas operaciones básicas con fracciones. Sabes utilizar fórmulas y convertir unidades. Ordenas series de números. Describes el comportamiento de sucesiones numéricas y la relación entre ellas. Enuncias en lenguaje común una expresión algebraica y viceversa. Resuelves problemas geométricos bidimensionales y tridimensionales simples que involucran distintos elementos de una figura. Construyes figuras tridimensionales a partir de otras. Resuelves sistemas de ecuaciones lineales.*

### Bueno

Identificas la combinación de operaciones y procedimientos necesarios para resolver un problema. Traduces una relación lineal que se presenta de manera gráfica, a una expresión algebraica y viceversa. Determinas la solución de problemas que involucran unidades físicas. Realizas cálculos complicados con razones y proporciones. Aplicas el concepto de mínimo común múltiplo o máximo común divisor para resolver situaciones de la vida real. Calculas áreas y perímetros de composiciones geométricas simples. Identificas la gráfica y la expresión de relaciones cuadráticas con una o dos variables. Realizas inferencias acerca de una variable si conoces el valor de otra con la que guarda relación directa o indirecta. Resuelves ecuaciones cuadráticas con una incógnita que solucionan problemas reales.

### Excelente

Realizas diferentes procedimientos matemáticos y los integras para resolver problemas de la vida real, tales como conversiones, ecuaciones, análisis de gráficas y tablas, entre otros. Efectúas conversiones y estimaciones para resolver problemas reales. Identificas la gráfica de una recta a partir de condiciones dadas. Utilizas el teorema de Pitágoras para solucionar problemas geométricos. Resuelves problemas de mayor complejidad que implican el manejo de figuras, tanto planas como tridimensionales, y las propiedades geométricas de figuras incompletas. Puedes realizar cálculos a partir de dos funciones lineales o cuadráticas que se muestran de manera independiente y mediante distintas representaciones (numéricas, textuales, gráficas, entre otras).

Se presenta en la Tabla 1.2 los niveles de logro tal como aparecen en la información proporcionada en la página de internet de ENLACE (2011), en los resultados presentados por plantel educativo, observamos que se señalan las fallas del estudiante en los niveles de “insuficiente” y “elemental” con características no observadas en los resultados individuales presentados a los estudiantes.

NIVELES DE LOGRO DE LA PRUEBA ENLACE			
INSUFICIENTE	ELEMENTAL	BUENO	EXCELENTE
Incapacidad para concentrarse el tiempo suficiente sobre una tarea.		Altos niveles de concentración, análisis combinando tareas y estrategias para resolver situaciones conocidas y desconocidas	
Debilidad para sacar conclusiones.		Pensamiento abstracto y habilidad de transferencia	
Realización de trabajos y tareas en forma poco precisa e impulsiva		Marca prioridades y organiza su tiempo	
Concentración casi exclusiva en sus ideas y emociones		Capacidad de escuchar, logra parafrasear información	
Incapacidad para lograr organización.		Trabajo en equipo, capacidad de acordar y respetar acuerdos Logra inferencias complejas	
Incapacidad para identificar información, dificultad en el estudio o ejecución de tareas escolares.		Capacidad para identificar deficiencias en su propio trabajo y logra encontrar los medios para resolverlas.	

Tabla 1.2. Niveles de logro en la prueba Enlace

Se muestra a continuación el ejemplo de presentación de resultados en la página de internet de ENLACE, ediciones de 2011 y 2012 correspondientes a los reactivos de matemáticas, en el plantel: Centro de Estudios Tecnológicos del Mar 03 de Guaymas, Sonora:

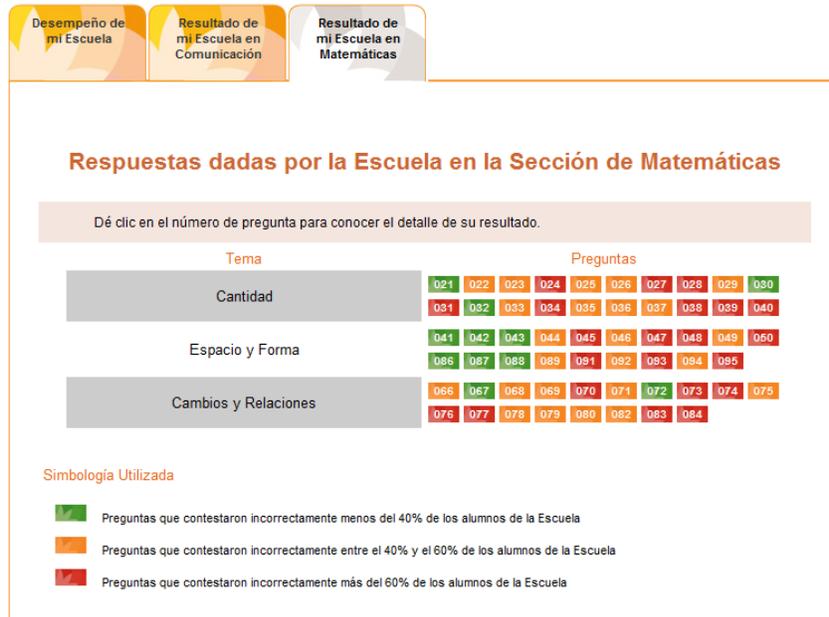


Figura 1.1. Resultados de Enlace 2011 en CETMar 03.

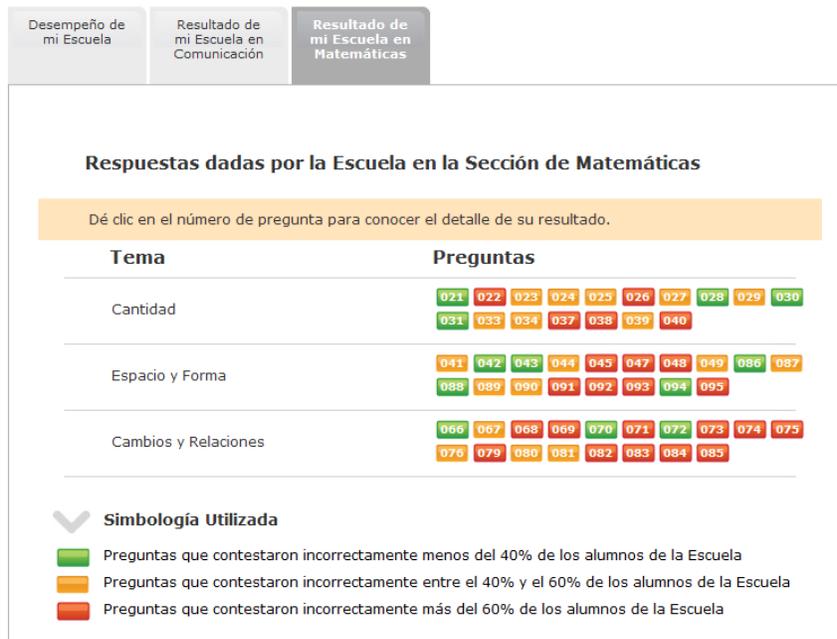


Figura 1.2. Resultados de Enlace 2012 en CETMar 03.

## **Uso de los resultados de la prueba ENLACE.**

A partir de la aplicación de ENLACE, se pone a disposición de los estudiantes, profesores, autoridades educativas y sociedad en general, información pertinente y oportuna para que cada quien, en el ámbito de su responsabilidad, la utilice para la implementación de acciones que contribuyan a la mejora continua de nuestro sistema educativo.

En los documentos oficiales publicados por ENLACE (2013) se presentan las siguientes conclusiones sobre los resultados que arroja la prueba ENLACE:

- Es un instrumento que orienta al padre de familia sobre el nivel de habilidades lectoras y matemáticas de los estudiantes.
- Se debe impulsar su análisis en todos los sectores de la sociedad. (empresariales, académicos, medios de comunicación, etc.)
- Es un instrumento que le orienta al estudiante en las áreas donde puede mejorar y lo forma en valorar desarrollar habilidades.

## **Trabajos relacionados con el análisis de la prueba ENLACE**

Al iniciar la revisión sobre trabajos de investigación relacionados con el análisis de los reactivos de la prueba ENLACE, o con análisis referidos a la prueba en general, nos damos cuenta que todavía son escasos, a continuación presentamos algunos de los trabajos que se encontraron, es importante señalar que no en todos los casos se centra la atención en el nivel medio superior.

En el documento de Montoya (2012) se presenta un análisis de los reactivos para ENLACE Nivel Medio Superior, considerando los siguientes aspectos: campo matemático (asignatura a la que corresponde el reactivo), la actividad que ejecuta el estudiante, respuesta correcta, nivel de dificultad aparente (fácil, medio, difícil), porcentaje de aciertos y errores detectados. Entre sus conclusiones menciona: *“Se realizó un análisis de los reactivos de la prueba de bachillerato elaborando una serie de conjeturas sobre lo que se quiere medir o poner en evidencia en cada uno de los reactivos y a qué nivel. Tal vez no coincidan los presentes supuestos con los que elaborarán a futuro los docentes en sus planteles, pero no dejan de ser una fuente de debate y discusión en aras de determinar áreas de oportunidad en la formación de los jóvenes estudiantes”*.

En otra de sus publicaciones “Resultados de los 15 reactivos más difíciles para jóvenes de 6<sup>o</sup> semestre de Educación Media Superior en la prueba ENLACE en habilidades lectoras y matemáticas”, Montoya (2012<sup>2</sup>), presenta además de los aspectos antes mencionados, el eje temático, medida (referida al número de repuestas revisadas), y sugerencias para corregir el error del estudiante al resolver el reactivo en forma no correcta. Se incluye en sus conclusiones: *“Los problemas que se presentan a los alumnos en este tipo de pruebas no son por lo regular aquellos que se solucionan directamente con la información dada en la base o que pueden ser solucionados en un solo paso; por el contrario, necesitan obtener otros datos con base en la información explícita y en otros casos, elaborar un proceso de solución que implica varias etapas en donde el alumno debe monitorear lo que está haciendo y para qué”*.

Padilla (2009) propone un modelo de análisis de reactivos de la prueba ENLACE para nivel básico, compuesto por tres dimensiones, la social, la conceptual y la metodológica y siete ejes relacionados con la enseñanza y el aprendizaje que son: tareas de evaluación, contexto, naturaleza del contenido, procesos cognitivos, nivel de conocimiento, grado de complejidad, tipo de aprendizaje estrategias y tareas para el aula. En sus conclusiones menciona: *“En los reactivos analizados, encontramos un contenido más de tipo mecánico y abstracto que significativo, que requiere de estrategias y procedimientos didácticos memorísticos y rutinarios”*.

Vidal R. (2012), presenta elementos para la calibración de reactivos de la prueba ENLACE aplicada en el bachillerato, analizando el comportamiento estadístico de los resultados, éstos son: grado de dificultad, correlación punto biserial o coeficiente de discriminación, índice de discriminación, índice de dificultad, índice de pseudo adivinación, pero este análisis sólo se realiza para los reactivos que integraron la prueba que se aplicó en el año 2008. Una de las conclusiones de este trabajo: *“Después de la calibración (de reactivos) es posible elegir los reactivos con parámetros óptimos que conforman las versiones operativas de la prueba. De este modo, se identificaron los tipos y estilos de distractores que no funcionan en la población objetivo, y aquellos contenidos cuyo planteamiento se requiere depurar con mayor cuidado para obtener reactivos de buena calidad”*.

En Soto (2011) se presenta una propuesta de análisis de reactivos para ENLACE aplicado en educación secundaria; en dicho análisis se centra la atención en los siguientes aspectos: consistencia entre lo que se evalúa y lo que se enseña en clase, claridad en la redacción de los reactivos, pertinencia de los distractores, justificación expuesta por ENLACE para explicar la debilidad de quienes no responden correctamente, revisión de los contenidos y procesos.

Urrea (2011), presenta una propuesta el análisis de reactivos de la prueba ENLACE en el nivel básico, para escuelas de secundaria, para realizarse por profesores de este nivel educativo; iniciando con la revisión de los resultados publicados, índice de respuestas incorrectas, razonamientos pretendidos del estudiante al resolver los reactivos, interpretación de la debilidad, contexto en el planteamiento de la situación problema del reactivo, competencias matemáticas que se pretende que el estudiante desarrolle al resolver el reactivo.

En el trabajo de Peraza (2011) se adopta una metodología cualitativa, y de acuerdo a la tipología empleada se ubica en un diseño de tipo descriptivo, en este estudio se señala que los resultados de la prueba ENLACE pueden tener impacto en las siguientes áreas: estrategias de enseñanza, programas y planeación, sistema de evaluación de los aprendizajes y preparación para futuras evaluaciones.

Considerando los elementos expuestos en los antecedentes se ha tomado la decisión de realizar este trabajo sobre una estrategia de análisis de reactivos de la prueba ENLACE, con el propósito de incorporar elementos de análisis que en otras investigaciones no se han considerado.

## 1.2 Marco referencial

### 1.2.1 Reforma Integral de la Educación Media Superior

En México, en el año 2008, se inició la implementación de una reforma a la Educación Media Superior (EMS) llamada Reforma Integral en la Educación Media Superior (RIEMS), la cual se fundamenta en cuatro pilares:

1. Construcción de un Marco Curricular Común.
2. Definición y reconocimiento de las opciones de la oferta de la Educación Media Superior.
3. Profesionalización de los servicios educativos.
4. Certificación Nacional Complementaria.

Con esta Reforma, los subsistemas que conforman la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS) pueden conservar sus planes y programas de estudio, debiendo ser reorientados y replanteados en términos de las competencias comunes que menciona el Sistema Nacional de Bachillerato (DOF, Ac. Sec. 442, 2008).

La definición de competencia que asume la Dirección General de Bachillerato (DGB) es la que menciona Philippe Perrenoud, en este planteamiento se dice que una competencia es: *“la capacidad de movilizar recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situación con buen juicio, a su debido tiempo, para definir y solucionar verdaderos problemas”*.

La SEMS (2008), hace mención a las competencias genéricas *“que se deben desarrollar en el estudiante del nivel medio superior, dichas competencias genéricas son aquellas que permiten a los bachilleres desarrollarse como personas y desenvolverse exitosamente en la sociedad y el mundo que les tocará vivir. Estas competencias constituyen el Perfil del Egresado del Sistema Nacional de Bachillerato”* (SNB).

Las competencias a desarrollar por el estudiante están clasificadas como: Genéricas, Disciplinarias (básicas y extendidas), y Profesionales (básicas y extendidas), según se establece en el DOF (Ac. Sec. 444, 2008), y se presentan en la Tabla 1.3:

Competencias		Objetivo
<b>Genéricas</b>		Comunes a todos los egresados de la EMS. Son competencias clave, por su importancia y aplicaciones diversas a lo largo de la vida; transversales, por ser relevantes a todas las disciplinas y espacios curriculares de la EMS, y transferibles, por reforzar la capacidad de los estudiantes de adquirir otras competencias.
<b>Disciplinares</b>	Básicas	Comunes a todos los egresados de la EMS. Representan la base común de la formación disciplinar en el marco del SNB.
	Extendidas	No serán compartidas por todos los egresados de la EMS. Dan especificidad al modelo educativo de los distintos subsistemas de la EMS. Son de mayor profundidad o amplitud que las competencias disciplinares básicas.
<b>Profesionales</b>	Básicas	Proporcionan a los jóvenes formación elemental para el trabajo.
	Extendidas	Preparan a los jóvenes con una calificación de nivel técnico para incorporarse al ejercicio profesional.

*Tabla 1.3. Las competencias a desarrollar por el estudiante. Acuerdo secretarial 444*

En la siguiente tabla se presentan las competencias genéricas para el bachillerato:

Competencias Genéricas	
Se auto determina y cuida de sí	1) Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
	2) Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
	3) Elige y practica estilos de vida saludables.
Se expresa y comunica	4) Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
Piensa crítica y reflexivamente	5) Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
	6) Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

Aprende de forma autónoma	7) Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
Trabaja en forma colaborativa	8) Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
Participa con responsabilidad en la sociedad	9) Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad
	10) Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias
	11) Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica

*Tabla 1.4. Competencias genéricas.*

Las intenciones educativas de las Matemáticas se explicitan a través de las “Competencias Disciplinarias Básicas de las Matemáticas” (SEP, 2009):

Competencias matemáticas
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales
4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

*Tabla 1.5. Competencias matemáticas contenidas en el Programa de Estudios.*

Las competencias disciplinares básicas de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Un estudiante que cuente con las competencias disciplinares de matemáticas puede argumentar y

estructurar mejor sus ideas y razonamientos. Respecto a lo antes mencionado, en el acuerdo secretarial 444 se estable que:

*“Las competencias reconocen que a la solución de cada tipo de problema matemático corresponden diferentes conocimientos y habilidades, y el despliegue de diferentes valores y actitudes. Por ello, los estudiantes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos. Esto implica que puedan hacer las aplicaciones de esta disciplina más allá del salón de clases”* (DOF. Ac. Sec. 444, 2008).

### 1.2.2 El Programa de Estudios de Matemáticas

El propósito fundamental de los programas de estudio y la propuesta metodológica de integración de contenidos para el nivel medio superior de la SEMS, que se concreta a través de secuencias didácticas como una de las estrategias centradas en el aprendizaje, se sintetiza en la construcción de aprendizajes significativos por parte de los estudiantes. Para el Programa de Estudio del bachillerato Tecnológico, lo anterior se sustenta en la implantación de la Reforma del Bachillerato Tecnológico de la Subsecretaría de Educación e Investigación Tecnológicas (SEIT), en el año 2004, a partir de la cual se han vivido experiencias de construcción y reconstrucción de las propuestas de planeación e intervención del profesor, para el desarrollo de los aprendizajes de los estudiantes. En el periodo transcurrido ha habido constancia de las prácticas docentes realizadas en el manejo de los programas de estudio y sus contenidos, esto ha permitido transitar de la versión del programa de 2007 a la versión 2009, como una acción de un proceso de mejora continua (SEP, SEMS. 2009), en el marco de la RIEMS.

Para la elaboración de esta nueva versión de programas se ha partido del análisis de los programas vigentes; de éstos se han rescatado los conceptos fundamentales y subsidiarios que permiten, con su desarrollo, el logro del propósito general del programa de Matemáticas, el cual promueve que *“El estudiante a partir de la apropiación de los contenidos fundamentales de las Matemáticas, desarrollará habilidades de pensamiento, comunicación, descubrimiento y transferencia (hacia otros contextos y hacia la misma Matemática) que le permitan resolver problemas y ser partícipe del desarrollo sustentable de su entorno”* (SEP, SEMS. 2009).

Para el Programa de Estudios del Bachillerato General, a partir del ciclo escolar 2009-2010 se incorporaron los principios básicos de la RIEMS, que presentan como finalidad *“propiciar el desarrollo de la creatividad, el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, mediante procesos de razonamiento y argumentación y construcción de ideas. Esto conlleva al despliegue de distintas competencias para la resolución de problemas matemáticos que trascienden el ámbito escolar”* (DGB, 2009).

De este modo se afirma que los planes y programas de estudio y la propuesta metodológica de integración de contenidos, bajo la guía de los profesores, contribuyen a formar estudiantes en el nivel medio superior, en el proceso que les toca vivir y en los saberes que el mundo actual exige: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a ser y aprender a convivir con sus semejantes. Esto sin duda alguna presenta grandes retos a los diversos actores del proceso educativo, especialmente al profesor, al requerir de éste, hacer propio el proyecto y contribuir con su experiencia a la implantación del mismo en los procesos de aprendizaje del estudiante.

El Programa de Estudios de Matemáticas del Bachillerato Tecnológico menciona las estructuras conceptuales que son de tres tipos de contenidos y que actúan en forma íntimamente relacionados; como se muestra en la Tabla 1.6:

<b>Tipos de contenidos del Programa de Estudios de Matemáticas</b>			
<b>Contenidos procedimentales: capacidades y habilidades</b>			
Razonamiento matemático	Resolución de problemas	Orientación espacial	Expresión oral y escrita
<b>Contenidos: Actitudinales – valorales</b>			
Libertad	Justicia	Solidaridad	
<b>Contenidos conceptuales de Geometría Analítica referidos a:</b>			
Sistemas rectangulares y polares		Lugares geométricos: La recta y las cónicas	

*Tabla 1.6 Tipos de contenido del Programa de Estudios de Matemáticas*

Como se puede ver en el último renglón del esquema anterior, de manera general se presentan los contenidos del curso de Geometría Analítica. Se supone que estos son los contenidos que se deberían de tomar en cuenta para el diseño de los instrumentos de

evaluación, independientemente que sean internas o externa al subsistema de educación media superior al que pertenece esta asignatura.

### 1.3 Justificación

Enriquecer los resultados que se han obtenido en los diferentes trabajos, que todavía son pocos, relacionados con el análisis de la prueba ENLACE es la motivación más importante para el desarrollo del presente trabajo.

Revisando la información que se deriva de la aplicación, publicación y presentación de resultados de la prueba ENLACE, existen algunos elementos susceptibles de análisis, por una parte se tiene la prueba como un instrumento estandarizado que se utiliza para evaluar el logro académico de los estudiantes en los centros escolares, y por otra parte se puede analizar el grado de confiabilidad de los resultados obtenidos dada la estructura de los reactivos (Situación problema, opciones de respuesta y debilidades que presentan quienes no responden correctamente).

Otro aspecto importante a considerar en el análisis de reactivos, está relacionado con la correspondencia que hay entre la debilidad que presenta ENLACE con respecto a las estrategias y contenido matemático que utilizan los estudiantes que resuelven correctamente el reactivo; el aspecto antes mencionado es fundamental para este trabajo, con ese tipo de análisis se pretende conocer la relación que hay entre lo que evalúa el reactivo con respecto al contenido específico que se señala en el programa de estudios, esto se hace fundamentalmente para conocer la medida en que ENLACE evalúa lo que dice que evalúa.

Para ello, es importante conocer el instrumento que se está utilizando para realizar esta evaluación, es decir, conocer cada reactivo, cómo está estructurado, qué contenido matemático pretende evaluar, qué relación tiene lo que se pregunta con lo que el estudiante debe de conocer, según lo que contiene el programa de estudios, y cómo resuelve el estudiante el reactivo.

Las principales características contenidas en la propuesta de análisis de reactivos de la prueba ENLACE de este trabajo, son referidas a:

- Elementos de significado de los reactivos.
- Pertinencia de los distractores.
- Contenidos y procesos que utiliza la prueba.

- Consistencia entre lo que evalúa el reactivo y lo que se establece en el Programa de Estudios.
- Consistencia acerca de la debilidad publicadas por ENLACE en referencia a los estudiantes que no pudieron resolver satisfactoriamente el reactivo.
- Argumentos que presentan estudiantes que resuelven los reactivos y dejan evidencia escrita de la forma en cómo lo hacen.

Los contenidos matemáticos que se evalúan en la prueba están organizados en tres campos: Cantidad, Cambios y relaciones, y Espacio y forma, y no están clasificados de igual forma que las materias del Programa de Estudios, en la siguiente tabla se muestran las asignaturas de acuerdo al semestre que se cursa del bachillerato:

Semestre	Asignatura
Primero	Álgebra
Segundo	Geometría y trigonometría
Tercero	Geometría analítica
Cuarto	Cálculo
Quinto	Probabilidad y estadística
Sexto	Matemática aplicada

*Tabla 1.7 Asignaturas por semestre*

En los reactivos de la prueba ENLACE correspondientes al año 2012, según el Instituto de Innovación y Evaluación Educativa del Estado de Sonora (Montoya, 2012) hay “26 reactivos que se pueden solucionar con la aplicación o manejo de contenidos de primer semestre; se tienen 19 reactivos correspondientes a segundo semestre; de los contenidos de tercer semestre se tienen 8 reactivos; por último, del cuarto semestre se tienen 7”, con lo que se observa que es menor la cantidad de reactivos presentes que correspondan a la materia que se cursa en cuarto semestre, y nula para los contenidos de las materias de matemáticas del quinto y sexto semestre.

Este trabajo se centra en el análisis de los reactivos de matemáticas que corresponden a la asignatura de Geometría Analítica, que se cursa en el tercer semestre.

## Capítulo 2. Problemática, objetivos, elementos teóricos y metodológicos

### 2.1 Problemática

Las problemáticas que se estudian en Matemática Educativa son muy variadas, se pueden encontrar estudios orientados a los problemas del aprendizaje de las matemáticas, a los problemas de la enseñanza de las matemáticas, uso de tecnología computacional en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, identificación de dificultades u obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas, entre otros. Hay una problemática que está inmersa en situaciones donde se pretende conocer el nivel de aprendizaje de los estudiantes, el cual por lo regular está asociado con la evaluación de los aprendizajes, y es en esta área donde se ubica el presente trabajo, centrando la atención en la prueba ENLACE, una de las evaluaciones estandarizadas que se aplica a los estudiantes de tercer grado de bachillerato.

ENLACE es una prueba que contiene reactivos de la materia de matemáticas, que pretenden ser problemas provenientes de actividades de la vida cotidiana del ser humano, y que el estudiante de nivel medio superior debe resolver. De acuerdo a los planteamientos que se presentan en el Manual técnico de ENLACE (Vidal R. 2012) para resolver las situaciones que se planean en la prueba el estudiante debe poner en juego las competencias desarrolladas a lo largo de los tres años de bachillerato, dado que la instrucción que recibe en ese nivel educativo está basada en el desarrollo de competencias.

Consideramos que la evaluación de los aprendizajes es uno de los temas más complejos del quehacer educativo, porque intervienen múltiples factores, desde los relacionados con el docente que es el responsable de organizar y planificar las acciones que debe desarrollar el estudiante para lograr los aprendizajes esperados; así como el estudiante que es el sujeto sobre el que se centra la atención en el aula, cuya actuación está sujeta a una serie de factores en muchos casos que no dependen de él.

En un instrumento de evaluación es fundamental conocer el nivel de consistencia entre lo que se declara para evaluar y lo que realmente se evalúa; en este sentido en la literatura no hemos encontrado material suficiente que abone a este tipo de análisis (esto se presenta de manera más amplia en el apartado de marco referencial del Capítulo 1). En la mayoría de los trabajos se encuentran estudios en los que se hacen análisis de los resultados que arrojan las respuestas de los estudiantes, partiendo de la idea de que los reactivos son consistentes.

En este trabajo se presenta una estrategia para analizar los reactivos de la prueba ENLACE, del nivel medio superior, tomando en cuenta los siguientes aspectos:

- Lo que ENLACE pretende evaluar.
- Lo que ENLACE realmente evalúa.
- La correspondencia del contenido del reactivo con el contenido de lo que marca el programa de estudios.
- Lo que argumenta el estudiante que resuelve el problema en correspondencia con lo que en el resultado de la prueba se declara como debilidad.

Los reactivos que se analizan corresponden a temas de la asignatura de Geometría Analítica o Matemáticas 3, contemplado en los planes y programas de estudio de la Dirección General del Bachillerato (DGB), en particular los que aparecen en los planes de estudio del Bachillerato tecnológico.

## 2.2 Objetivos

Para el desarrollo de este trabajo nos centramos en el siguiente

### **Objetivo general**

Diseñar una propuesta de análisis de reactivos de matemáticas para pruebas estandarizadas, caso particular de la prueba ENLACE, y de la asignatura de Geometría Analítica, que permita identificar la consistencia entre el significado institucional de referencia y el significado institucional evaluado, de acuerdo al objeto de estudio que se evalúa (elipse y recta).

Para el logro de este objetivo general se deberán alcanzar los siguientes

### **Objetivos específicos**

- Caracterizar el significado institucional de referencia del objeto matemático que se evalúa.
- Caracterizar el significado institucional evaluado, respecto al objeto matemático que se evalúa en el reactivo.
- Identificar el nivel de consistencia que hay entre el significado institucional de referencia y el evaluado.
- Identificar las estrategias, argumentos y resultados que muestran estudiantes que resuelven los reactivos, cuando se les aplica con la opción de que registren en hojas de trabajo la forma en cómo lo resuelven.
- Contrastar si hay correspondencia entre la debilidad que publica ENLACE, cuando alguien no resuelve correctamente el reactivo, y lo que el estudiante argumenta al resolverlo (correcta o incorrectamente).

### **2.3 Elementos teóricos del Enfoque Ontológico Semiótico**

Para el desarrollo de este trabajo, se asumen algunos de los elementos del Enfoque Ontológico Semiótico (EOS), modelo teórico en el que trabajan varios investigadores en Matemática Educativa, siendo Juan Díaz Godino uno de sus más importantes promotores

#### **Práctica**

En este marco teórico es fundamental lo que las personas hacen para poder identificar el nivel de comprensión que tiene del objeto de estudio en particular con el que se está trabajando, es por ello muy importante identificar en EOS lo que se entiende por práctica: *“Consideramos práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas”* (Godino, 2004).

En este estudio, consideramos a la práctica como las actividades que realiza el estudiante al resolver el problema que se presenta en el reactivo, en esta acción se involucran: la configuración cognitiva como significado personal, los objetos matemáticos como redes de objetos personales (de los cuales el estudiante hace uso en el proceso de solución), así como las diferentes formas de expresar tales objetos y el manejo que hace de ellos.

Por las características de la prueba ENLACE, en particular la forma en cómo presenta el estudiante sus respuestas en la hoja que se le entrega para tal fin, no se conoce la práctica que los estudiantes realizan al resolver la situación planteada; son reactivos que contienen cuatro opciones de respuesta y no se solicita ni la estrategia ni el argumento utilizado para llegar a la respuesta seleccionada.

### **Objetos matemáticos**

*“Los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Emergen dos niveles como mínimo, el primero: entidades que se pueden observar en un texto matemático, por ejemplo, problemas, definiciones, proposiciones. En otro nivel, los tipos de objetos que emergen de las distintas maneras de ver, hablar, operar sobre los objetos mencionados anteriormente, refiriéndose a objetos personales cuando los sistemas de prácticas los realiza una persona; y a objetos institucionales, si las prácticas matemáticas son realizadas en el seno de una institución” (Godino, 2009).*

En este trabajo se refiere a los objetos que se manifiestan en las prácticas que realizan los estudiantes al realizar la tarea asignada, o a las realizadas por el profesor como representante de una institución.

### **El Objeto personal**

*“Un objeto personal es un objeto emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas” (Godino, 2004).* Los objetos personales pueden estar contenidos en la respuesta a una prueba de evaluación, al realizar una tarea escolar por parte de un estudiante. Se considera la emergencia del objeto como progresiva en la medida que al sujeto se le presenta este tipo de problemas, y como consecuencia de la experiencia y el aprendizaje.

En este trabajo el estudiante pone de manifiesto el objeto personal que ha construido al realizar sus prácticas personales en el proceso de instrucción, y lo pone de manifiesto al poner en juego dichas prácticas al resolver los reactivos de la prueba.

En el proceso de instrucción el objeto personal se forma a partir de las prácticas que realiza el estudiante al resolver situaciones problema, en este proceso esperaríamos que ponga en juego el aspecto cognitivo como son los conocimientos subjetivos y los procesos mentales con las diferentes nociones teóricas acerca de las representaciones del objeto matemático, como: la ecuación de una curva, su representación gráfica, la expresión verbal o representación tabular.

Para el contexto que estamos trabajando de análisis de reactivos, se pretende, por ejemplo, conocer el manejo de los elementos que se involucran en la práctica y que constituyen el objeto matemático.

### **Objeto institucional**

El objeto institucional se considera como emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas; los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución por lo que los objetos emergentes de estas prácticas matemáticas, se consideran objetos institucionales, *“la existencia de estos objetos emergentes genera la identidad declarada por la institución”*, (Godino, 2004).

Un objeto matemático institucional, por ejemplo, está determinado por las prácticas que se promueven desde la institución, por ejemplo a través de las prácticas que realiza el profesor como representante institucional (la escuela), o las prácticas propuestas en los planes y programas de la asignatura o en los textos de trabajo recomendados.

### **Significado personal**

El significado personal de un objeto matemático está determinado por el sistema de prácticas (operativas y discursivas) que realiza una persona al activar los elementos que conforman dicho objeto, Godino (2003) plantea que *“el significado de los objetos matemáticos debe estar referido a la acción (interiorizada o no) que realiza un sujeto en relación con dichos objetos”*.

De los tipos de significados personales (global, declarado y logrado) y refiriéndonos al trabajo realizado en los grupos de estudiantes al aplicarles los reactivos de la prueba, y

solicitándoles argumenten su respuesta en la hoja de trabajo, se tiene lo que puede representar el significado personal declarado, que es el que *“da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional”*(Godino, 2003)

### **Significado institucional**

Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto institucional en un momento dado. Se trata de un constructo relativo a la institución y dependiente estocásticamente del tiempo.

Con relación a los significados institucionales se proponen: el referencial, el pretendido, el implementado y el evaluado. Los significados institucionales considerados en el análisis de reactivos de esta propuesta son:

**Referencial:** Sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. *“En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico, epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto”* (Godino, 2004).

El significado institucional de referencia que se asumen en este trabajo es el que se propone en el Programa de Estudios del Bachillerato Tecnológico, en el Programa de la DGB y en dos de los textos que sugirieron los profesores.

**Evaluado:** En los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación problema vemos el uso de lenguajes verbales y simbólicos estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica son satisfactorias (Godino, 2006).

En este estudio, el significado institucional evaluado lo tomamos del planteamiento de la prueba ENLACE correspondiente a habilidad matemática. Lo que evalúa la

prueba, según ENLACE, es la capacidad de poner en práctica ante situaciones del mundo real, los conocimientos y habilidades básicas adquiridas a lo largo de la trayectoria escolar. Para conocer lo que se pretende evaluar en cada reactivo se obtiene la información de la “debilidad” que publica ENLACE cuando no se resuelve el reactivo satisfactoriamente.

*“Cuando se realiza y evalúa una práctica matemática se activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos”* (Godino, 2006), por lo que en el análisis de reactivos se toman estos elementos del significado de la práctica matemática y se desarrollan los que correspondan en el reactivo. Pudiéndose encontrar en cada una de las entidades primarias uno o más de los siguientes elementos:

- Lenguaje: términos, expresiones, notaciones, gráficos; en sus diversos registros (escrito, oral, gestual).
- Situaciones, entendidos como problemas matemáticos, problemas extra-matemáticos, ejercicios.
- Conceptos- expresados mediante definiciones o descripciones (por ejemplo, recta, punto, número).
- Proposiciones: enunciados sobre conceptos (por ejemplo teoremas, corolarios y propiedades).
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- Argumentos: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo.

El análisis de reactivos se centra en los significados institucionales de referencia y evaluado, revisando el contenido matemático del reactivo, y su correspondencia con los temas matemáticos que se pretenden evaluar y que están contemplados en los Programa de Estudios.

Es importante identificar si el reactivo evalúa los aspectos que pretende evaluar, y si los estudiantes recurren a las prácticas que el reactivo pretende que pongan en juego; estos aspectos son fundamentales porque ponen de manifiesto el sistema de prácticas de los estudiantes, y es aquí donde se puede identificar el lenguaje simbólico, procedimientos y

argumentos que el estudiante utiliza para determinar la solución a la situación problema que se plantea.

## 2.4 Consideraciones metodológicas

Para el desarrollo del trabajo se programaron tres fases en las que se dividieron las diferentes acciones, estas fases permitieron identificar los elementos que integran la propuesta de análisis de reactivos.

### **Fase 1. Revisión bibliográfica**

En esta fase el trabajo se centró la atención en la búsqueda de información que permitiera conocer mejor la problemática en la que se estaba incursionando, considerando los siguientes aspectos:

- Contexto en el que surge la prueba ENLACE.
- El instrumento de evaluación, ediciones 2011 y 2012
- Los resultados presentados por ENLACE.
- Investigaciones previas, sobre el análisis de la prueba ENLACE.
- Reactivos de matemáticas que se incluyen en la prueba.
- Contenidos del Programa de Estudios relacionados con los reactivos de matemáticas.
- Selección de reactivos para el análisis.
- Elementos teóricos para analizar los planes y programas, así como los reactivos seleccionados y las estrategias que deben utilizar quienes los responden.

A partir de esta revisión se pudieron ubicar algunos elementos que ayudan a explicar el contexto en el que surge la prueba ENLACE, como la coincidencia de su primera edición con el inicio de la implementación de la RIEMS, también se encontraron resultados globales de las primeras ediciones de la prueba, pero son escasas las investigaciones previas realizadas por otros autores relacionadas con el tema de análisis de reactivos, se realizó una revisión de los programas de estudio de la asignatura de matemáticas del Bachillerato Tecnológico, y con esta información finalmente se realizó la selección de los reactivos que podrían ser sujetos de análisis, tomando como criterio que estuvieran relacionados con el contenido de la asignatura de Geometría Analítica o Matemáticas 3.

## **Fase 2. El análisis de reactivos**

Para integrar la estrategia de análisis de los reactivos seleccionados, iniciamos la segunda fase identificando los elementos que se someterían a consideración, agrupando dichos elementos de la siguiente manera:

1. Elementos de significado de los objetos matemático que aparecen en los reactivos, utilizando como referente el programa de la asignatura de Geometría Analítica del Bachillerato Tecnológico (BT), el programa de la asignatura de Matemáticas III de la DGB, y el análisis de dos textos (Fletes (2007) y Lehmann (2005), textos recomendados por profesores que imparten la asignatura en el CET del Mar 03 de Guaymas, Sonora. Todos estos elementos permiten identificar el significado institucional de referencia.

2. Identificación de los elementos de significado que están presentes en el significado institucional evaluado. Los tipos de contenido matemático a evaluar en la prueba son cantidad, cambios y relaciones y espacio y forma. Los procesos matemáticos presentes en la prueba son reproducción, conexión, reflexión y evaluación.

De la prueba ENLACE conocemos el instrumento de evaluación, en él no se menciona de manera explícita lo que se pretende evaluar. El indicio del contenido matemático por evaluar se puede identificar en el apartado de “debilidad”, en este apartado se muestra lo que supuestamente es la debilidad de quienes no pudieron responder correctamente el reactivo. A partir de esta información y de los reactivos se determinan los elementos de significado presentes, lo cual permite establecer, aunque sea de manera parcial, el significado institucional evaluado.

3. Consistencia entre el significado institucional de referencia y el significado institucional evaluado.

Una vez que se ha establecido el significado institucional de referencia y el significado institucional evaluado, se hace un comparativo entre ambos significados para ver qué tan consistente es lo que se pretende evaluar respecto a lo que está determinado en el programa de la asignatura correspondiente.

#### 4. Selección de estudiantes a quienes se les aplicaron los reactivos.

Para tener un acercamiento a las prácticas que realizan los estudiantes en la resolución de los reactivos de la prueba, que corresponden a la materia de Geometría Analítica (reactivos 43, 67, 69 71, 72, 73 76 y 84 del año 2012, ver Anexo 1), se aplican dichos reactivos a 68 estudiantes del quinto semestre, quienes ya cursaron en su tercer semestre la asignatura de Geometría Analítica, estos estudiantes son de tres grupos que cursan diferentes carreras (Técnicos en Acuicultura, Electrónica y Pesca deportiva, consulta de resultados en Anexo 2) en el Centro de Estudios Tecnológicos del Mar 03 de Guaymas, Sonora. Se les aplican los reactivos y se les solicita que registren en hojas de trabajo sus estrategias y/o argumentos (plasmados sus prácticas por escrito) que utilizaron para dar solución a la situación planteada en el reactivo.

Para conocer el significado personal de los estudiantes de los grupos a los que se les aplican los reactivos, se revisan las hojas de trabajo, en su contenido se tienen; ecuaciones, operaciones con números, operación con ecuaciones, y representaciones gráficas, anotaciones referentes al cambio de representación del objeto matemático, argumentos escritos; uso de tablas, expresiones en lenguaje común o lenguaje natural, afirmaciones y negaciones.

Cuando el reactivo es contestado correctamente se puede inferir la presencia de la práctica matemática que se presenta inicialmente en el proceso de interpretación del problema, y que se hizo uso de los recursos relativos al contenido matemático que se pretende evaluar. Aun cuando la respuesta dada no sea correcta, no permite eliminar la posibilidad de que se haya trabajado con registros semióticos por el estudiante (lenguaje ordinario, símbolos, representaciones gráficas).

#### 5. Calibración de reactivos.

Al hacer la revisión bibliográfica de los antecedentes de los reactivos de la ENLACE que serían analizados, se obtiene información referente a la calibración de los reactivos de la edición 2008, esta información se obtiene del Manual Técnico ENLACE Media Superior 2008-2010 que emite CENEVAL en el año 2010.

Como no se encontró evidencia de la calibración de los reactivos que se presentan en este análisis, y para tener un acercamiento a los valores que arroja una calibración, aún

en el entendido que la muestra con la que se trabaja es pequeña, se realizó la calibración que puede servir como referente al revisar los resultados obtenidos del análisis estadístico que se hace, se trabaja en la calibración de dichos reactivos a partir de determinar su grado de pertinencia y/o dificultad, en función de lo que evalúa y de la cantidad de respuestas correctas o incorrectas que se obtienen al aplicar el instrumento. Es importante señalar que este aspecto se trabajó con una muestra de 68 estudiantes y 8 reactivos de la prueba ENLACE, este análisis está contenido en el Anexo 3.

## Capítulo 3. Propuesta de estrategia de análisis de reactivos de pruebas estandarizadas: caso ENLACE 2011 y 2012

### 3.1 Características del análisis de reactivos

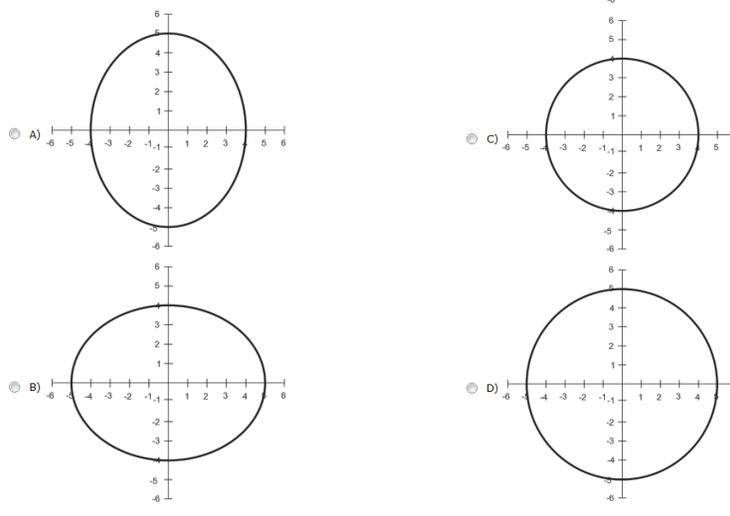
Para analizar los reactivos, nos centraremos en los siguientes aspectos:

1. Significado institucional de referencia, a partir de la identificación de los elementos de significado de los objetos matemáticos a los que se refieren los reactivos seleccionados.
2. Significado institucional evaluado, a partir de la identificación de los elementos de significado de los objetos matemáticos a los que se refieren los reactivos seleccionados.
3. Consistencia entre el significado institucional de referencia y el significado institucional evaluado.
4. Argumentos y estrategias que se presentan en las prácticas que realizan estudiantes que resuelven los reactivos, quienes dejan evidencia escrita de la forma en cómo lo hacen
5. Consistencia acerca de la debilidad que establece ENLACE, cuando los estudiantes no resuelven correctamente el reactivo, respecto a las prácticas que realizan estudiantes que responden los reactivos.
6. Pertinencia de los distractores con respecto al objeto matemático que se evalúa.

Para la selección de los reactivos se tomaron en cuenta dos características, la primera es que tuvieran un alto porcentaje de estudiantes que lo respondieron incorrectamente. La otra que evaluaran contenido relacionado con la asignatura de Matemáticas 3 o Geometría Analítica, dado que se toma como referente el reporte *Resultados de los 15 reactivos más difíciles para jóvenes de 6<sup>o</sup> semestre de EMS en la prueba ENLACE 2012 de habilidades lectoras y matemáticas* (Montoya ,2012), en el que 6 de los 15 reactivos más difíciles corresponden a la materia en mención. A partir de las características antes mencionadas es que se seleccionaron los siguientes dos reactivos:

El primero de ellos es el **Reactivo 69, de la prueba 2011**

**69** ¿Qué gráfica corresponde a la ecuación  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ ?



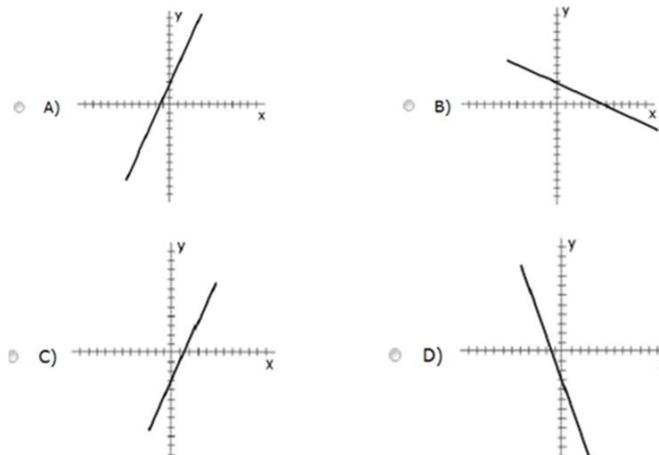
La respuesta correcta a esta pregunta es la opción: **A**

El porcentaje de alumnos en el grupo que contestó incorrectamente esta pregunta es: **41%**

Debilidad: El alumno no logra IDENTIFICAR LA GRÁFICA QUE REPRESENTA UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA CON DOS VARIABLES

Y el segundo es el **Reactivo 84, de la prueba 2012**

**84** ¿Cuál gráfica representa la perpendicular de la recta de la ecuación  $2x - y + 3 = 0$  y ordenada al origen 3?



La respuesta correcta a esta pregunta es la opción: **B**

El porcentaje de alumnos en el grupo que contestó incorrectamente esta pregunta es: **76%**

Debilidad: El alumno no logra IDENTIFICAR LA GRÁFICA DE LA RECTA PERPENDICULAR O PARALELA QUE PASA POR UNA ORDENADA AL ORIGEN DE UNA ECUACIÓN LINEAL

## 3.2 Análisis del reactivo 69 del año 2011

### 3.2.1. Significado institucional de referencia

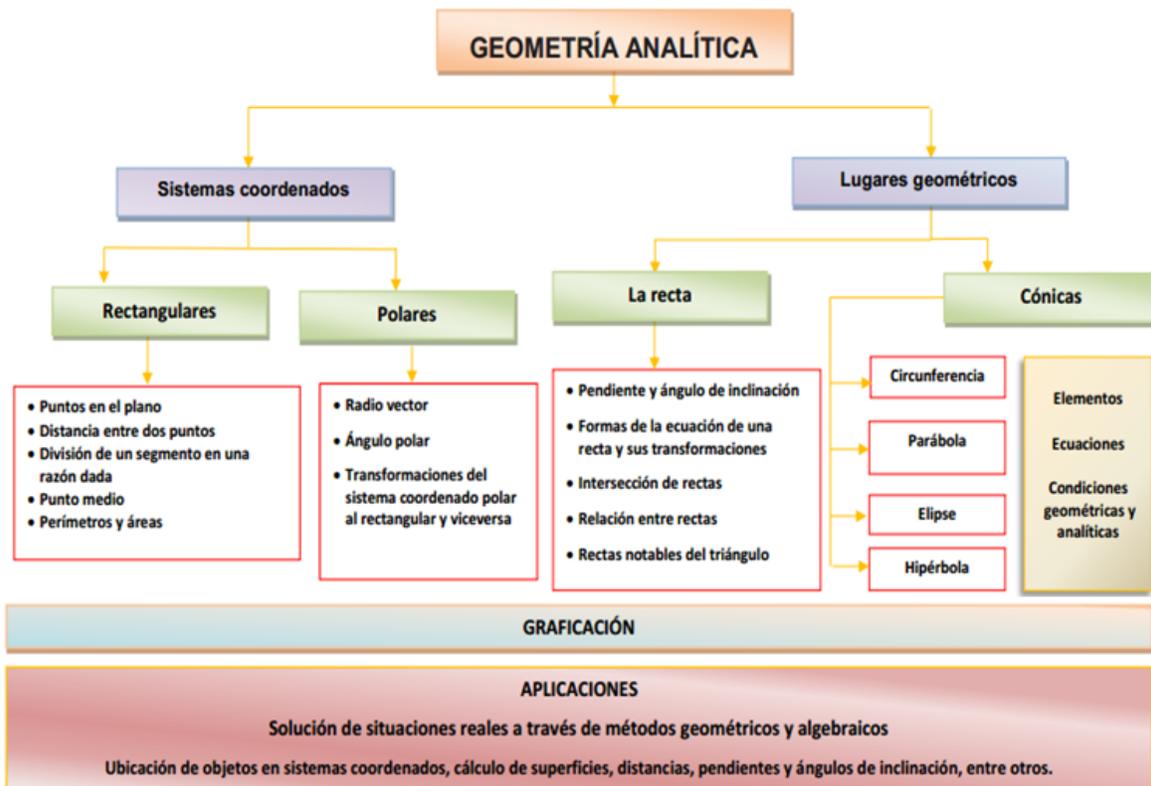
Para identificar los elementos primarios del significado institucional de referencia (SIR) se analizó:

1. El Programa de Estudios de la asignatura Geometría Analítica del Bachillerato Tecnológico (2009).
2. El Programa de estudios de Matemáticas III de la DGB (2009).
3. Un cuaderno de trabajo que utilizan profesores y estudiantes del CET del Mar 03 de Guaymas, Sonora.
4. El Libro de texto Geometría Analítica de Lehmann (2005) propuesto por profesores que imparten la asignatura.

#### Unidad de análisis 1. Programa de Estudios del Bachillerato Tecnológico.

Configuración de los Objetos Matemáticos

En la siguiente figura, obtenida del Plan de Estudios del Bachillerato Tecnológico (BT), se muestra el organizador gráfico en el que se presenta el contenido de la asignatura de Geometría Analítica.



En el esquema podemos identificar, en la sección de Cónicas, el objeto matemático de interés, la elipse, con los elementos que se proponen promover en la asignatura.

Del plan de estudios del BT identificamos una unidad de análisis, que es la parte del esquema donde aparece el objeto matemático elipse, en esta sección aparecen de manera escueta los elementos de la elipse que deberán promoverse.

Los elementos de significado que se pueden identificar implícita o explícitamente, son los siguientes:

### **Elementos lingüísticos:**

Sólo aparecen de manera explícita por escrito el *nombre* del objeto matemático a desarrollar, y de manera implícita el de sus elementos, esto es aparecen textualmente los términos: *elipse, elementos, ecuaciones, condiciones geométricas y analíticas.*

*Objetos intervinientes*, ya que los elementos lingüísticos que aparecen son los nombres escritos de los objetos de estudio.

### **Situaciones:**

En el apartado de aplicaciones dice “*Solución de situaciones reales a través de métodos geométricos y algebraicos*”, pero no muestra ninguna situación en particular, esto quiere decir que queda a criterio de quien imparte la asignatura el tipo de situaciones que utilizará en clase.

*Objetos intervinientes y emergentes*, no es posible identificar el rol que juegan las situaciones que deben resolver los estudiantes, dado que no se tienen casos particulares.

### **Conceptos:**

Aunque el esquema es general se entiende que cuando dice elementos se refiere a los elementos de la elipse, como: centro, vértices, focos, eje menor, eje mayor, lado recto, etc.; cuando dice ecuaciones, se refiere a la ecuación ordinaria y general de la elipse; y cuando dice condiciones (geométricas o analíticas) se refiere a las de la elipse, por ejemplo de las condiciones que debe tener un punto para estar en una elipse (que la suma de las distancias del punto a dos puntos fijos del plano es una constante). Bajo estas consideraciones tenemos lo siguiente:

*Objetos intervinientes*: ecuación, puntos, distancia entre dos puntos y plano.

*Objetos emergentes:* elipse, centro, vértices, focos, eje menor, eje mayor, lado recto, ecuación ordinaria y ecuación general.

### **Proposiciones:**

No se identifica el tipo de proposiciones que se sugiere utilizar en el desarrollo de la asignatura.

### **Procedimientos:**

Del apartado de aplicaciones se pueden identificar algunos procedimientos que deberán realizar los estudiantes, por se puede entender que son ejemplo se señala “*Ubicación de objetos en sistemas coordenados...*” en este caso podría referirse a la ubicación de puntos importantes de la elipse en el plano y/o a graficar la elipse; en otra parte dice “*...cálculo de distancias,...*” si se aplica la definición de elipse en términos de la suma de las distancias del cualquier punto de la curva a dos puntos fijos, el procedimiento utilizado podría ser el cálculo de las distancias respectivas y la suma de ellas, en todo momento se requiere de realizar operaciones entre números reales.

*Objetos intervinientes:* ubicar puntos en el plano, calcular de distancias entre puntos del plano y sumar números reales.

*Objetos emergentes:* obtener la ecuación de la elipse, graficar la elipse.

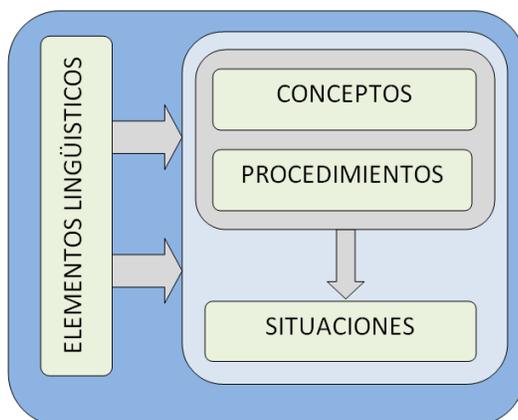
### **Argumentos:**

A partir del esquema en el que se presenta el contenido de la asignatura, no se tienen elementos para identificar los argumentos que se están proponiendo utilizar.

### **Configuración**

Aun cuando se declara que el bachillerato tecnológico está basado en el enfoque de competencias, por la estructura que tiene el Programa de la asignatura, da la impresión que la organización de de dicha estructura, está orientada por el contenido disciplinar y no por todos los elementos que forman parte de las competencias (habilidades, conocimientos, actitudes y valores) que hay que desarrollar en el estudiante.

El hecho de que la “*Solución de situaciones reales...*”, aparezca en el apartado de aplicaciones, se puede interpretar que la configuración propuesta para desarrollar el tema está organizado de la siguiente manera:



Esto es, a partir de los elementos lingüísticos se presentan las definiciones de los conceptos, después con el uso de elementos lingüísticos se presentan ejemplos de situaciones donde se utilizan con conceptos definidos, para pasar a la etapa de proponer la tarea de resolver ejercicios similares a los ejemplificados y posteriormente abordar las situaciones en un contexto extra matemático.

A partir de la información que proporciona esta unidad de análisis, no está claro el nivel al que se promueven la representación analítica respecto a la representación gráfica de la elipse.

Es importante destacar que cuando se pone en juego la estructura, en todo momento están presentes los elementos lingüísticos, por ello en el esquema que se presenta aparece acompañando a todos los elementos de significado.

## **Unidad de análisis 2. Programa de Estudios de la Dirección General de Bachillerato**

### **Configuración de los Objetos Matemáticos**

La segunda unidad de análisis es el Bloque VII del Programa de la asignatura de Matemáticas 3 de la DGB, en este bloque aparece el objeto de estudio de interés, este bloque se llama “Aplicas los elementos y las ecuaciones de la elipse”, está integrado por siete apartados: Desempeños del estudiante al concluir el bloque, Objetos de aprendizaje, Competencias a desarrollar, Actividades de enseñanza, Actividades de aprendizaje, Instrumentos de evaluación y Rol del docente. Para este trabajo se utilizan los primeros cinco apartados.

### **Elementos lingüísticos:**

Se puede identificar de manera explícita el nombre de algunos aspectos de la elipse que se proponen desarrollar, por ejemplo aparecen los términos: elementos de la elipse, ecuación ordinaria, ecuación general, centro en el origen, centro fuera del origen, elipses horizontales, elipses verticales y ejes coordenados.

*Objetos intervinientes*, ya que los elementos lingüísticos que aparecen son los nombres escritos de los objetos de estudio.

### **Situaciones:**

1. Realizar una investigación, integrados en equipos, sobre la definición de la elipse y sus elementos y contrasten la información con otros equipos.
2. Realizar ejercicios donde obtengan la ecuación ordinaria de una elipse vertical y/ o horizontal con centro en el origen y ejes paralelos a los ejes cartesianos.
3. Realizar ejercicios donde obtengan la ecuación ordinaria de una elipse vertical y/ o horizontal con centro fuera del origen y ejes paralelos a los ejes cartesianos.
4. Realizar ejercicios para obtener la ecuación general de la elipse a partir de la ecuación ordinaria o viceversa.
5. Diseñar una aplicación contextual sobre las distintas ecuaciones de la elipse y exponer los resultados frente al grupo (por ejemplo, en monumentos locales, iglesias, puentes, entre otros).

Las situaciones identificadas aparecen en ese orden, aunque sólo la primera es concreta respecto a lo que debe hacer el estudiante, las otras muestran el esquema del tipo de situaciones que se les propone resolver a los estudiantes.

*Objetos intervinientes*, situación cinco porque se le solicita que aplique lo aprendido.

*Objetos emergente*, las primeras cuatro situaciones por lo que se solicita que hagan los estudiantes.

### **Conceptos:**

*Objetos intervinientes*: ecuación, centro y eje coordenados.

*Objetos emergentes:* elipse, elementos de la elipse (centro, vértices, focos, eje menor, eje mayor, lado recto), elipse horizontal, elipse vertical, ecuación ordinaria y ecuación general.

### **Proposiciones:**

A partir de la interpretación de los elementos antes mencionados y de la forma en cómo aparece en el documento (Programa de la asignatura de la DGB), se puede inferir que el tipo de proposiciones que se promueven son del tipo:

Si el eje de la elipse es vertical, entonces la ecuación ordinaria es de la forma

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Si el eje de la elipse es horizontal, entonces la ecuación ordinaria es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

También se pueden generar las recíprocas, es decir, dada la ecuación ordinaria determinar cuál es el eje de la elipse.

*Objetos emergentes,* ya que son producto de las prácticas que realizan los estudiantes.

### **Procedimientos:**

*Objetos intervinientes:* ubicar puntos en el plano cartesiano, calcular de distancias entre puntos del plano, sumar números reales.

*Objetos emergentes:* Elementos asociados a la elipse, ecuación ordinaria de elipses horizontales y verticales con centro en el origen, ecuación ordinaria de elipses horizontales y verticales

### **Argumentos:**

A partir del esquema en el que se presenta el contenido de la asignatura, no se tienen elementos para identificar los argumentos que se están proponiendo utilizar.

### **Configuración.**

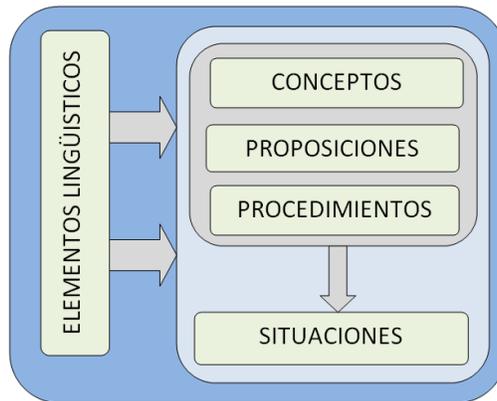
En el contenido del programa de estudios están señaladas las competencias que debe desarrollar el estudiante, de acuerdo a los lineamientos de la RIEMS, así como las

acciones que debe realizar el estudiante en el estudio del tema relacionado con las cónicas, en particular la elipse.

Se incluyen elementos situacionales: realizar una investigación, realizar ejercicios donde se obtenga la ecuación de la elipse, *solución de situaciones reales a través de métodos geométricos y algebraicos*, aunque no se muestra alguna situación en particular. Se deja al estudiante buscar en su entorno, objetos relacionados con el tema de estudio, la elipse y sus elementos.

En lo correspondiente a conceptos, en el esquema del programa de estudios, se presenta de manera general elipse y elementos, que se puede interpretar como los elementos de la elipse, maneja la elipse y sus elementos, por lo que está implícito, las formas de ecuación de la elipse, centro, vértices, focos, eje mayor, eje menor, lado recto.

La estructura presentada a continuación muestra los elementos lingüísticos en cada uno de los elementos de significado de esta configuración:



Estando presentes los elementos lingüísticos en cada momento del desarrollo de la estructura, que está conformada con los conceptos, procedimientos y situaciones. De esta unidad de análisis se desprende que sí se promueve la representación analítica de la elipse para obtener la representación gráfica e identificar sus elementos.

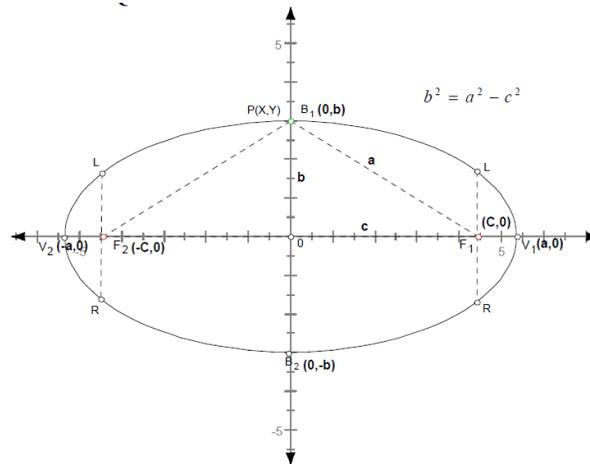
### **Unidad de análisis 3. Cuadernillo de apuntes de Geometría Analítica**

Configuración de los Objetos Matemáticos

La unidad de análisis 3 es la sección de la elipse del cuadernillo de apuntes de Geometría Analítica (Fletes, 2007) que utilizan los profesores y estudiantes del CET del Mar 03 de Guaymas, Sonora.

**Elementos lingüísticos**

Entre los elementos lingüísticos se encuentra la representación gráfica de la elipse; en el esquema se indican las partes que la constituyen:



Se presenta la descripción de la nomenclatura utilizada en el esquema:

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| $F_1$ y $F_2$ = Focos         | $B_1B_2$ = Eje menor ( $2b$ )   |
| $V_1$ y $V_2$ = Vértices      | $\overline{V_1V_2}$ = eje focal   |
| $V_1V_2$ = Eje mayor ( $2a$ ) | $LR$ = recta perpendicular imaginaria que<br>pasa por los focos $LR = \frac{2b^2}{a}$ |

*Objetos intervinientes:* Representación gráfica del plano cartesiano, representación gráfica y analítica de puntos en el plano.

*Objetos emergentes:* Representación gráfica de una elipse con centro en el origen, representación gráfica y analítica de los elementos (vértice, focos, longitud de los semiejes, eje menor, eje mayor, lado recto) de la elipse.

**Situaciones**

1. A partir de la definición se muestra la forma en que se llega a la ecuación ordinaria de la elipse.

2. A partir de la ecuación general de una elipse, con eje mayor ubicado sobre el eje x, se identifican sus elementos: coordenadas de los vértices, de los focos y longitud del lado recto.
3. Se deja como ejercicio de tarea encontrar los elementos de una elipse, cuyo eje mayor está sobre el eje y, a partir de su ecuación general.
4. A partir de los elementos de la elipse, se solicita escribir la ecuación correspondiente y realizar su representación gráfica.

*Objetos emergentes:* Son las tres situaciones ya que dan la oportunidad a los estudiantes de generar estrategias que le permiten identificar los elementos de la elipse.

### **Conceptos**

*Objetos intervinientes:* Distancia entre dos puntos y coordenadas rectangulares.

*Objetos emergentes:* Elipse, focos, longitud de lado recto, vértices, eje mayor, eje menor.

### **Proposiciones**

*Objetos emergentes:*

1. Cuando el eje mayor de una elipse coincide con el eje **y** y tiene centro en el origen, entonces su ecuación canónica es  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ .
2. La excentricidad de una elipse toma valores entre 0 y 1.
3. Si la excentricidad vale cero, entonces la curva es una circunferencia.

### **Procedimientos**

*Objetos intervinientes:* Cálculo de distancias, operaciones entre números reales y transformaciones algebraicas.

*Objetos emergentes:*

1. Determinar la ecuación de la elipse a partir de la definición.
2. Transformar la ecuación general de la elipse a la forma canónica: transformaciones algebraicas.

3. Deducir el valor del lado recto a partir de la ecuación canónica: transformaciones algebraicas.
4. Cálculo de la longitud del lado recto.
5. Cálculo de la excentricidad.

### **Argumentos**

*Objetos intervinientes:*

1. Por la definición de elipse, se tiene que:

$PF_1 + PF_2 = 2a$ , donde P es cualquier punto de la elipse y  $F_1$  y  $F_2$  son los focos.

2. Por la definición de la distancia entre dos puntos se tiene que

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

3. Por las propiedades de los números reales se tiene que:

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2), \text{ como } b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ todo entre } a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

### **Configuración**

La estructura que presenta esta unidad de análisis, que es la sección del texto en el que se aborda el tema de la elipse, presenta todos los elementos de significado, pero por la forma en que se desarrolla el texto muestra una organización orientada por el contenido disciplinar y no por todos los elementos que forman parte de las competencias (habilidades, conocimientos, actitudes y valores) que hay que desarrollar en el estudiante. Este es un aspecto esperado ya que el material es de 2007, año previo a la implantación de la RIEMS.

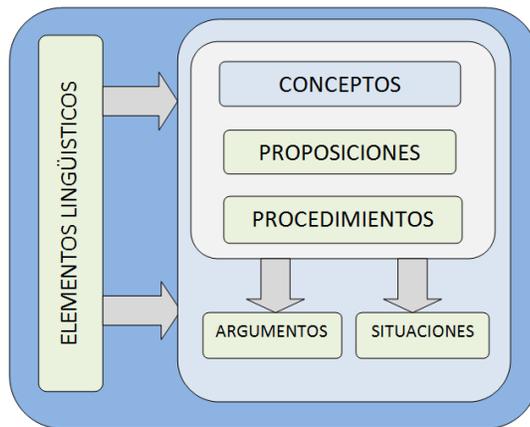
El texto es explícito en cuanto a la forma que desarrolla el tema, parte de la definición de elipse para mostrar cómo se obtiene la ecuación ordinaria de ella, mediante operaciones algebraicas utilizando los objetos intervinientes que se requieren, utiliza la representación gráfica sólo como un apoyo visual para soportar los argumentos que está utilizando. En otro momento muestra con un ejemplo el procedimiento para encontrar los elementos de

la elipse a partir de la ecuación general, para ello transforma dicha ecuación a la forma ordinaria para identificar los parámetros apropiados.

Al ir cerrando los diferentes momentos se presentan proposiciones que se dan como resultado de los procedimientos realizados, por ejemplo afirmar cual es la característica de la ecuación de la elipse si el eje mayor está sobre un eje determinado. En esta configuración no se promueve que se realicen transformaciones de la representación gráfica hacia la representación analítica, y cuando se solicita encontrar los elementos de la elipse a partir de la ecuación general no hace énfasis en identificar dichos elementos gráficamente. En la sección de ejercicios para que resuelva el estudiante, si se promueven situaciones en las que se da la representación algebraica de la elipse para que se genere la gráfica correspondiente.

En esta unidad de análisis no aparecen situaciones en un contexto extra matemático.

A partir de esta información se identifica la siguiente estructura para la configuración que está presente:



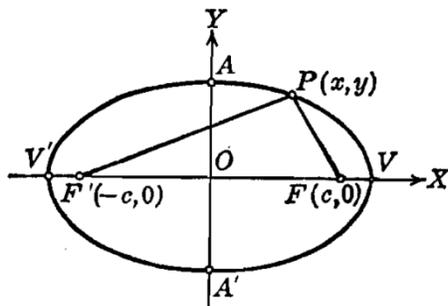
Cuando se pone en juego la estructura en todo momento están presentes los elementos lingüísticos, por ello en el esquema que se presenta aparece acompañando a todos los elementos de significado.

#### **Unidad de análisis 4. Libro de texto Geometría Analítica de Lehmann**

La unidad de análisis 4 es la correspondiente al Capítulo VI del libro de Geometría analítica de Lehmann (2005).

## Elementos lingüísticos

Representación gráfica de la elipse de centro en el origen y ejes mayor sobre el eje x.



La ecuación de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  y se llama, generalmente, *primera ecuación ordinaria de la elipse*. Las coordenadas de los focos:  $(c, 0)$  y  $(-c, 0)$

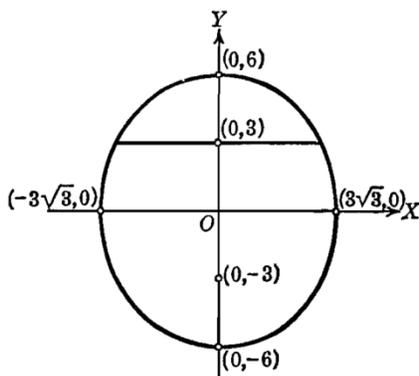
*Objetos intervinientes:* Representación gráfica del plano cartesiano, representación gráfica y analítica de puntos en el plano cartesiano.

*Objetos emergentes:* Representación gráfica de una elipse con eje mayor ubicado en el eje x, representación gráfica de focos y vértices de la elipse.

## Situaciones

Se presenta una situación problema como ejemplo:

*Una elipse tiene su centro en el origen, y su eje mayor coincide con el eje Y. Si uno de los focos es el punto  $(0, 3)$  y la excentricidad es igual a  $x$ . hallar las coordenadas de otro foco, las longitudes de los ejes mayor y menor, la ecuación de la elipse y la longitud de cada uno de sus lados rectos. El lugar geométrico es el representado en la figura:*



Y en la sección de ejercicios para que resuelva el estudiante se solicita dibujar una figura para cada ejercicio, y entre los ejercicios se tiene:

*En cada uno de los ejercicios de 6 al 9, hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de sus lados rectos de la elipse correspondiente. Trazar y discutir el lugar geométrico.*

$$6. \quad 9x^2 + 4y^2 = 36.$$

$$8. \quad 16x^2 + 25y^2 = 400.$$

$$7. \quad 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

$$9. \quad x^2 + 3y^2 = 6.$$

*Objetos intervinientes:* Ejercicios que están en la parte final de la sección, en los que se solicita identificar los elementos de la curva a partir de conocer la ecuación, así como determinar la ecuación ordinaria o general de elipse si se conocen sus elementos.

*Objetos emergentes:*

1. Se obtiene la ecuación de la elipse a partir de la definición.
2. En el contexto matemático presenta ejemplos en los que muestra la forma de obtener los elementos de la elipse a partir de la ecuación general.
3. En contexto matemático presenta ejemplos en los que muestra la forma de obtener la ecuación general u ordinaria de la elipse a partir de sus elementos.

### **Conceptos**

*Objetos intervinientes:* Operaciones con números, coordenadas de puntos en el plano cartesiano y distancia entre puntos.

*Objetos emergentes:* Elipse, vértices de la elipse, focos de la elipse, lado recto, excentricidad, eje menor y eje mayor.

### **Proposiciones**

*Objetos intervinientes:* No se identificaron.

*Objetos emergentes:*

1. Teorema. *La ecuación de una elipse de centro en el origen, eje focal el eje X, distancia focal igual a  $2c$  y cantidad constante igual a  $2a$  es*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. La ecuación de la elipse es  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$  al coincidir el eje focal de la elipse con el eje Y.
3. Para cada elipse,  $a$  es la longitud del semieje mayor,  $b$  la del semieje menor, y  $a$ ,  $b$  y  $c$  están ligados por la relación  $a^2 = b^2 + c^2$ .
4. Al reducir la ecuación de una elipse a su forma canónica, podemos determinar fácilmente su posición relativa a los ejes coordenados comparando los denominadores de los términos en  $x^2$  y  $y^2$ . El denominador mayor está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado con el cual coincide el eje mayor de la elipse.

### **Procedimientos**

- Los focos  $F$  y  $F_1$  están sobre el eje X. Como el centro  $O$  es el punto medio del segmento  $FF_1$ , las coordenadas de  $F$  y  $F_1$  serán, por ejemplo,  $(c, 0)$  y  $(-c, 0)$ , respectivamente, siendo  $c$  una constante positiva. Sea  $P(x, y)$  un punto cualquiera de la elipse. Por la definición de la curva, el punto  $P$  debe satisfacer la condición geométrica en la que  $a$  es una constante positiva mayor que  $c$ :

$$|\overline{FP}| + |\overline{F_1P}| = 2a$$

Por el concepto de distancia se tiene:

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad |\overline{F_1P}| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Realizando simplificaciones, factorizaciones y sustituciones, se tiene la ecuación de

la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

*Objetos emergentes:*

Para obtener la gráfica que corresponde a la ecuación en la forma  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$  no existe un procedimiento explícito, ya que el autor propone: “La discusión completa de la ecuación se deja al estudiante como ejercicio”. En los ejercicios propuestos para el estudiante sí se presenta de manera implícita que el estudiante, teniendo la ecuación de la elipse en su forma ordinaria, realice la representación gráfica, e identifique elementos como las coordenadas de los vértices, de los focos.

## Argumentos

Objetos intervinientes:

1. Por la definición de la curva, el punto P debe satisfacer la condición geométrica en la

que a es una constante positiva mayor que c:  $|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a$

2. Por el concepto de distancia se tiene:

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

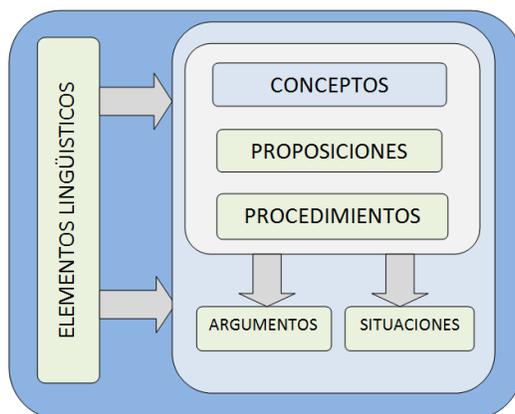
3. Realizando simplificaciones, factorizaciones y sustituciones, se tiene la ecuación de la

elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

### Configuración.

En el libro de texto de Lehmann, se tienen presentes los elementos lingüísticos acompañando a los elementos de significado: conceptos, proposiciones, situacionales, procedimientos, y argumentos, y de tal manera que obedecen al contenido disciplinar, no es de esperarse que estén alineados incluyendo lo correspondiente a las competencias que ha de desarrollar el estudiante de acuerdo a lo que menciona la RIEMS, por que este libro fue editado años antes (2005) de ésta reforma.

En el apartado correspondiente al objeto de estudio, la elipse, se presenta primeramente la definición, los elementos que la constituyen, formas de la ecuación de la elipse, ejemplos resueltos de situaciones problema en el contexto matemático, ejercicios para que el estudiante resuelva. Se incluyen conceptos, proposiciones y argumentos como objetos emergentes y operaciones con números, coordenadas de puntos en el plano cartesiano, distancia entre puntos como objetos intervinientes.



En el texto se promueven situaciones relacionadas con el problema en el que se solicita identificar la gráfica que corresponde a la elipse de la que se conoce la ecuación, en el procedimiento de solución se determinan algunos elementos de la elipse para poder lograr determinar la representación gráfica de la misma.

En esta unidad de análisis no están presentes situaciones que correspondan a un contexto extra matemático.

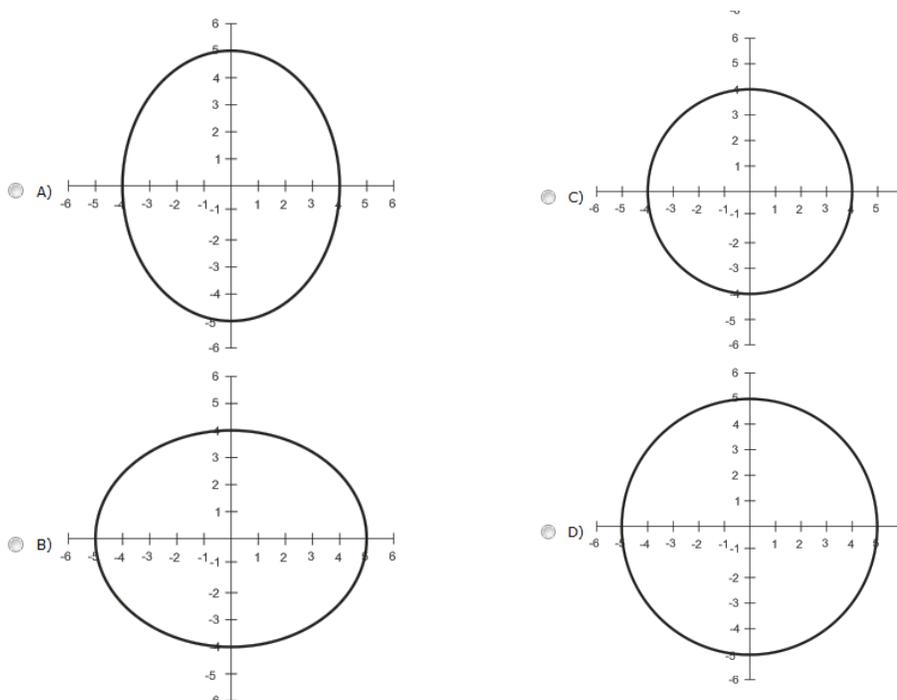
### 3.2.2. Significado institucional evaluado.

#### Unidad de análisis 5. El reactivo 69

La unidad de análisis 5 es el reactivo de la prueba ENLACE, así como los aspectos asociados a éste.

#### Reactivo 69, de la prueba 2011

69 ¿Qué gráfica corresponde a la ecuación  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ ?



Información presentada en los resultados publicados por ENLACE:

La respuesta correcta a esta pregunta es la opción: A

El porcentaje de alumnos en el grupo que contestó incorrectamente esta pregunta es: 41%

Debilidad: El alumno no logra IDENTIFICAR LA GRÁFICA QUE REPRESENTA UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA CON DOS VARIABLES

Contenido matemático del reactivo declarado por ENLACE: Cambios y relaciones.

#### Elementos de significado del reactivo.

##### Elementos lingüísticos:

En el texto ¿Qué gráfica corresponde a la ecuación  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ ? Están contenidas seis palabras que constituyen el planteamiento del reactivo, dos de ellas son términos que pueden relacionarse con representaciones de objetos matemáticos: gráfica y ecuación.

También se presenta la forma ordinaria de la ecuación de la elipse; con estos elementos se puede evocar el tipo de objeto y su naturaleza, y lograr relacionar  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$  con la representación gráfica de un objeto matemático.

La expresión en forma ordinaria  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$  con dos variables que se encuentran elevadas al cuadrado ( $x^2$ ,  $y^2$ ), contiene números enteros (16, 25) que se localizan como denominadores; así como el signo +, que en la expresión algebraica juega un papel primordial para la interpretación de la ecuación.

Se tiene una igualdad de los elementos mencionados, representada por el signo =; y está igualada a 1 y se trata de la ecuación de un lugar geométrico, una cónica que está representada por  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

*Objetos intervinientes:* Todos los elementos presentes son intervinientes ya que es una actividad de evaluación

### **Situaciones**

La situación problema está planteada en un contexto puramente matemático, pidiendo al estudiante que identifique la gráfica (de las cuatro opciones presentadas como respuestas posibles) que corresponde a la ecuación;  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$  haciendo implícito que una de ellas debe ser la solución.

*Objetos intervinientes.* La situación que se plantea

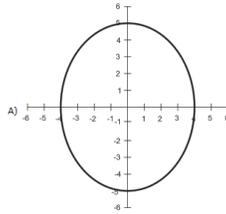
### **Conceptos**

*Objetos interviniente evaluados:* ecuación ordinaria de la elipse, parámetros de la elipse, eje mayor, centro y eje coordenados.

### **Proposiciones**

Del reactivo pueden emerger cuatro proposiciones, una que corresponda a la respuesta correcta y tres que son las que se relacionan con las opciones de respuesta que no son las correctas. Para se logre la proposición en forma correcta, es necesario conocer las características de la elipse para determinar cómo es representada gráficamente con datos como el valor del semieje mayor, valor del semieje menor y los puntos de intersección con

los ejes de coordenadas. Ya resuelto el reactivo se puede activar la proposición: *La gráfica que corresponde a la ecuación  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ , es (la correspondiente a la opción A)*



### **Procedimientos**

El procedimiento para resolver el reactivo no es parte de la información que se tiene al revisar la opción elegida por el estudiante; el cual puede tomar en cuenta que en el enunciado del reactivo se está solicitando la correspondencia entre la ecuación  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$  con alguna de las cuatro gráficas presentadas.

Puede decirse que el procedimiento o los procedimientos esperados, se pueden detectar por las prácticas que realicen los estudiantes al resolver el reactivo.

### **Argumentos**

Para proporcionar la respuesta de este reactivo no se requiere presentar argumentación, ya que se realiza la selección de una de las cuatro opciones de respuesta, pretendiendo identificar una gráfica que corresponde a la ecuación dada (en el registro de representación algebraico al registro de representación gráfico).

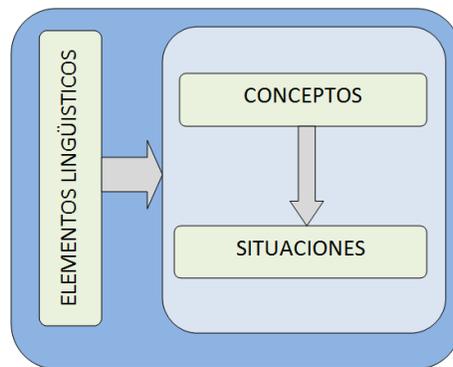
### **Configuración.**

La estructura que presenta el reactivo en cuestión, y los elementos relacionados con él, no permiten identificar los argumentos de solución, y relacionarlos con lo que se está evaluando, ya que no brinda la oportunidad al estudiante de presentar sus prácticas al responder (expresar sus procedimientos, argumentos y estrategias), da la impresión de que está centrado únicamente en evaluar el contenido disciplinar del objeto de estudio. En este sentido es posible identificar de manera explícita sólo elementos lingüísticos indispensables para representar a los conceptos que se deben poner en juego.

Por otra parte, en la debilidad que presenta ENLACE sólo reporta lo que el estudiante no pudo hacer al resolverlo incorrectamente, utilizando para ello elementos lingüísticos en el lenguaje natural, pero no profundiza sobre: los conceptos que debería haber utilizado, los procedimientos que no pudo realizar o los argumentos que debería haber utilizado. Se hace la observación de que el estudiante pudo haber contestado correctamente el reactivo sin necesidad de recurrir a los elementos mencionados.

Bajo estas consideraciones se puede concluir que el reactivo se limita a evaluar contenido disciplinar y no competencias en los términos que las plantea la RIEMS.

La estructura que podemos identificar de la configuración es la siguiente:



Cuando se pone en juego la estructura en todo momento están presentes los elementos lingüísticos, por ello en el esquema que se presenta aparece acompañando a todos los elementos de significado.

### 3.2.3 Consistencia entre el significado institucional de referencia y el significado institucional evaluado.

En la siguiente tabla se muestra de manera esquemática los aspectos que debe atender el estudiante que resuelve el reactivo 69, desde la perspectiva de los programas de estudio del bachillerato y de la clasificación de contenidos que hace ENLACE, es importante aclarar que dentro de la clasificación que hace ENLACE ubica al reactivo en el contenido matemático **Cambios y relaciones**, pero desde la perspectiva disciplinar consideramos que debería ubicarse en el tema de **Espacio y forma**.

PROGRAMA DE ESTUDIOS: CAPACIDADES Y HABILIDADES	CONTENIDOS MATEMÁTICOS DE LA PRUEBA Cambios y relaciones (Espacio y forma)
RAZONAMIENTO MATEMATICO	El manejo de números como datos. Representación algebraica de una elipse. Manejo de dos registros de representación del objeto matemático en el reactivo; algebraica y gráfico. El estudiante pudiera utilizar un registro de representación tabular al resolverlo.
RESOLUCION DE PROBLEMAS	Contextualizar el problema. Del conocimiento previo del estudiante recurre al objeto institucional que corresponda al problema. El objeto personal como recurso para determinar la solución. Resolver el reactivo utilizando como recurso uno o más de las representaciones del objeto matemático.
ORIENTACION ESPACIAL	Manejo de la representación gráfica para visualizar la solución del problema. Referir conceptos institucionales derivados del manejo de los elementos visuales. Interpretación de la representación algebraica.
EXPRESION ORAL Y ESCRITA	Lectura y comprensión del enunciado del reactivo Manejo del concepto matemático: ecuación de la elipse. Al leer la redacción del reactivo está presente una ecuación, y en la forma en que está presentado en la hoja impresa el reactivo, en la prueba, visualizamos las opciones de respuesta desde el primer momento, en las que están presentes la representación gráfica de dos tipos de cónicas, la elipse y la circunferencia. Manejo de la expresión algebraica que está ligada a la representación gráfica. Proceso cognitivo acerca de la información contenida en el reactivo: el enunciado, la opción correcta y los distractores.

En la tabla que se presenta a continuación podemos identificar las prácticas que se promueven de acuerdo a lo que se encuentra en el significado institucional de referencia, así como aquellas se evalúan de acuerdo a lo que se puede encontrar en el reactivo de la prueba ENLACE.

Lo que promueve el SIR	Lo que se evalúa
<p>En las unidades de análisis que se revisaron se identifica de manera explícita la promoción de las siguientes prácticas:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Encontrar la ecuación ordinaria de la elipse a partir de la definición.</li> <li>2. Transformar la ecuación general de la elipse en la forma ordinaria.</li> <li>3. Transformar la ecuación ordinaria en la ecuación general.</li> <li>4. Encontrar los elementos de la elipse dada la ecuación ordinaria o general.</li> <li>5. Graficar la elipse dada su ecuación, así como determinar sus elementos.</li> </ol>	<p>Transformar la ecuación ordinaria de una elipse con centro en el origen y eje mayor ubicado en el eje y.</p>

De acuerdo a la caracterización que se hace del significado institucional de referencia y del evaluado, se puede decir que si hay consistencia en lo que respecta a los conceptos relacionados con la elipse que se promueven y los que se evalúan, así como la consistencia entre las situaciones y procedimientos que se promueven respecto a lo que se evalúa.

Esta última afirmación se apoya en el hecho de que dentro de las situaciones y procedimientos identificados en los planes de estudio y en los textos revisados, se encuentran situaciones en las que los estudiantes deben encontrar la representación gráfica de la elipse a partir de la representación algebraica.

**3.2.4. Argumentos y estrategias que se presentan en las prácticas que realizan estudiantes que resuelven los reactivos, quienes dejan evidencia escrita de la forma en cómo lo hacen.**

En la prueba ENLACE como instrumento de evaluación, con reactivos de opción múltiple está contenido el reactivo que se analiza, el cual, en lo particular no permite conocer los argumentos y estrategias que utilizan los estudiantes al resolverlo, y se tiene el interés de valorar la pertinencia de la debilidad que de acuerdo a ENLACE presentan los estudiantes que no lo responden correctamente, se tomó la decisión de aplicar los reactivos de interés a un grupo de 68 estudiantes que cursan el quinto semestre de bachillerato, y se les pide que en hojas de trabajo registren los argumentos y estrategias utilizadas para responder dichos reactivos.

Con la información obtenida de la aplicación descrita, se pretende conocer cuáles son los significados personales, para ver si existe concordancia con los significados institucionales que se indican en la debilidad.

Es importante señalar que a los estudiantes seleccionados, que participaron voluntariamente en la resolución de los reactivos, se les solicitó no abandonar el intento de resolver la situación problema que se les presenta, sin importar que lo hicieran correcta o incorrectamente, ya que lo importante del estudio es ver qué es lo que hacen y bajo qué argumentos lo hacen.

Se espera que con el uso de los objetos intervinientes (conocimientos previos) y la habilidad desarrollada a través de su trayectoria escolar puedan hacer que se logre que el estudiante intente resolver cada uno de los reactivos.

En la hoja de trabajo queda el registro escrito de lo que hace el estudiante al resolver los reactivos (lo que escribe y representa por medio de dibujos, gráficas o tablas, cálculos y en general lo que haga para resolver el reactivo). De la hoja de trabajo se extrae información de los registros del estudiante que nos brindan elementos para identificar los objetos matemáticos que intervienen en la solución del reactivo, así como las estrategias utilizadas.

Los argumentos de los estudiantes que resuelven el problema, se presentan en una tabla que proviene de la toma la evidencia escrita y que es significativa, del trabajo que se realizó con 68 estudiantes (de 3 grupos de un total de 10 en el plantel) del quinto semestre del CETMar 03, a los que se les pidió que argumenten su respuesta en la hoja de trabajo que se les entregó para tal fin.

Se puede observar con qué elementos del objeto matemático trabajó el estudiante, para dar su respuesta al presentarnos su argumento; el tener registro escrito en lenguaje

natural del estudiante no refleja todo el proceso mental que se dio en él para resolver la situación problema.

Algunas respuestas de estudiantes al reactivo número 69 del año 2011	Respuesta correcta A
<p>Para la solución de estos problemas lo primero que se hace es observar bien el problema, qué se te plantea y después de observar las gráficas, se plantea buscar que el eje x y el eje y te den sumados positivos y negativos 16.</p> <p>Para esta resolución tienes que buscar la manera más sencilla que es sacarle la raíz cuadrada a x y y, después de sacarla tienes que ubicar x y y en la gráfica.  <math>x = \sqrt{16} = 4</math>, <math>y = \sqrt{25} = 5</math></p>	A
<p>Aplico el método con la variación de que no uso el resultado de la ecuación sino el dividendo de cada una de las fracciones y las acomodo según a su variante, o sea 16 con <math>x^2</math> y 25 con <math>y^2</math> y según mis conocimientos de que y es la línea vertical y x la horizontal busqué la figura que se acomoda mi pensar y resulta el inciso A.</p>	A
<p>Sacando la raíz cuadrada se obtienen unos puntos que indican que la respuesta es A.</p>	A
<p>Sería la primera opción ya que nomás cambiando las letras <math>\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25}</math> por números que se les multiplique para que dé el resultado de debajo de la fracción que sería <math>\frac{4^2}{16} + \frac{5^2}{25}</math> por eso es que la opción A sí pasa y se forma por las coordenadas horizontales <math>-x</math> y <math>x</math>, y por las verticales 5 y -5.</p>	A
<p>La respuesta es A porque la raíz cuadrada de 16, <math>\sqrt{16} = 4</math>, es 4 que es <math>x^2</math> si la y vale 0. La raíz cuadrada de 25 es 5, que <math>\sqrt{25} = 5</math>, es <math>y^2</math>, si la x vale 0. Para los dos casos <math>1=1</math></p>	A
<p>Primero intenté resolver la ecuación con las coordenadas presentadas en las gráficas y ver si concordaban. La opción A la tomé como la correcta porque:</p> $\frac{x^2}{16} = \frac{4^2}{16} \equiv \frac{16}{16} = 1 \qquad \frac{y^2}{25} = \frac{5^2}{25} \equiv \frac{25}{25} = 1$	A
<p>Es la A porque <math>x^2</math> da 16 y multiplicando en la gráfica <math>4 \times 4 = 16</math>. <math>y^2</math> da 25 porque multiplicando en la gráfica <math>5 \times 5 = 25</math>.</p>	A
<p>Es la A porque la ecuación dice <math>\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \equiv 1</math> y la raíz cuadrada de 4 es 16 y la raíz cuadrada de 25 es 5 y esos números es por donde pasa.</p>	A
<p>En esta le saqué el cuadrado al 16 y da 4 y después al 25 y da 5 así que me fijé en las gráficas y tiene que pasar por el 4 y 5 así yo pensé que era la gráfica A.</p>	A
<p>Aquí en esta según lo que recuerdo es la A porque al dividir las variantes dan más o menos los resultados de la gráfica A</p>	A

*Argumentos de estudiantes al reactivo 69, año 2011*

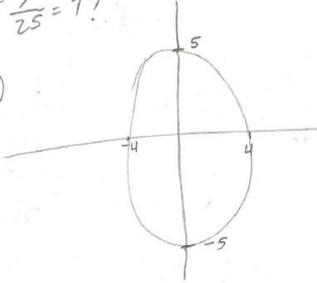
Quienes resuelven correctamente presentan la estrategia de identificar el valor de la coordenada correspondiente del punto de intercepción de la curva con los ejes cartesianos, ponen en juego adecuadamente los objetos intervinientes: algebraicos y aritméticos; además logran hacer la transformación de los elementos lingüísticos, algebraicos y numéricos, a la representación gráfica de la elipse.

Se presentan algunas de las respuestas de estudiantes que señalaron la opción A, que es la respuesta correcta:

Algunas de las respuestas de los estudiantes que responden correctamente

69. Qué gráfica corresponde a la ecuación  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ ?

A)



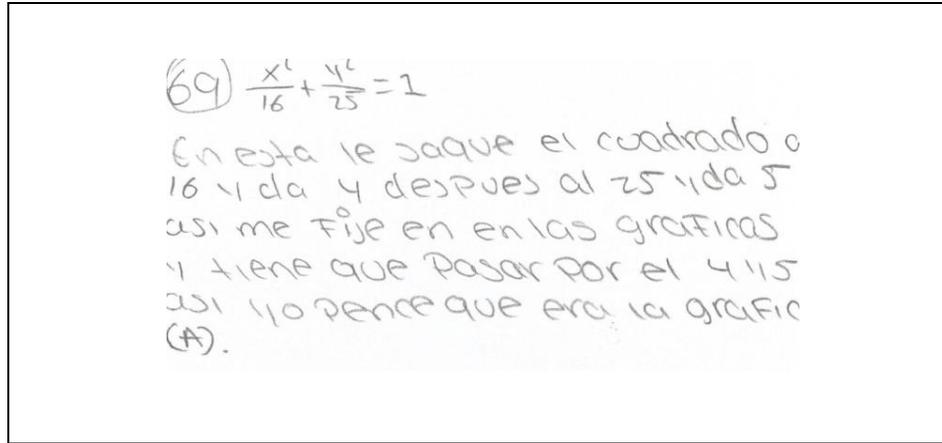
Porque? puse como respuesta "A" porque en esa grafica se marcan los puntos: 4, -4 y 5, -5. y esos pares de números tienen similitudes con la ecuación.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25}$

Primero intenté resolver la ecuación con las coordenadas presentadas en los gráficos y ver si concordaban.

la opción A) la tomé como la correcta, porque:

$$\frac{x^2}{16} = \frac{4^2}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

$$\frac{y^2}{25} = \frac{5^2}{25} = \frac{25}{25} = 1$$



Lo anterior pudiera darnos elementos para interpretar qué es lo sucede con quienes no resuelven el reactivo correctamente, por ejemplo pudiera ser que no ponen en juego los objetos intervinientes: algebraicos, aritméticos y/o no pueden hacer la transformación de la representación aritmética y/o numérica a la representación gráfica de la elipse.

Por ejemplo, en el siguiente caso

Algunas respuestas de estudiantes al reactivo número 69 del año 2011 que no contestaron correctamente	La respuesta correcta es A
Pues este problema está confuso, la verdad no le entendí pero creo que al hacer la sustitución pues salen esos puntos que vienen trazados en la gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$	B
El inciso que elegí fue el inciso B ya que tiene forma ovalada y al momento que estaba haciendo las operaciones las coordenadas aproximadamente me dieron para $x = (-5, 5)$ y $y = (4, -4)$ .	B
Creo que cuando se tiene una gráfica circular y que cuando la ecuación muestra que el resultado es 1, seguramente tendremos una gráfica en forma de círculo, es decir, ni siquiera es necesario comprobar la ecuación.	C
Creo que la B por la ecuación porque te da 4 en la "y" y en la "x" te da 5 aunque estoy confundida con la gráfica creo que así es.	B
Llevé a cabo que no pude hacer nada y es por eso que agarré el procedimiento de seleccionar la que a mí me parezca, ya no me puedo acordar de cómo se hace.	C
Yo pienso que la gráfica correspondiente es la D, el problema te pide que encuentres el valor de x y y para que te pueda dar el valor que te está pidiendo así que se despeja $x^2$ y las sumas por y, pienso que te dará el resultado que es el D.	D
Pues para hacer esto miré los puntos más comunes por donde pasaban las equis en estas gráficas, luego de igual manera sustituí y busqué la gráfica	C

que más se le acercara y la respuesta es la C.

En esta pregunta la verdad no supe diferenciar cuál era, le busqué razón y no pude decidir qué inciso era.

Se presentan respuestas de estudiantes que no contestaron que la opción B es la correcta:

Algunas de las respuestas de los estudiantes que no responden correctamente

Pues, para hacer esta mire los puntos mas comunes por donde pasaban las equis en estas graficas luego de igual manera sustitui, y busque la grafica que mas se me acercaba.  
y la respuesta es C.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

C= porque tambien donde cruza la linea es en el 4 y hay 4 lados, se suman y dan 16.

69) Creo que la (b) por la ecuacion porque te da cuatro en la "y" y en la "x" da "5" aunque estoy confundida por la grafica creo que asi es.

Tenemos estudiantes que no logran poner en juego adecuadamente los objetos intervinientes algebraicos y numéricos, tampoco utilizan adecuadamente los elementos lingüísticos para representar los puntos de intersección de la elipse con los ejes cartesianos, lo que los lleva a encontrar los puntos de intersección de la elipse en los ejes cartesianos incorrectamente. Una vez que tiene los puntos de intersección de la elipse con los ejes cartesianos, aunque incorrectos, si pueden ubicarlos en la representación gráfica del plano cartesiano e identificar la representación gráfica de la elipse que corresponde a dichos puntos.

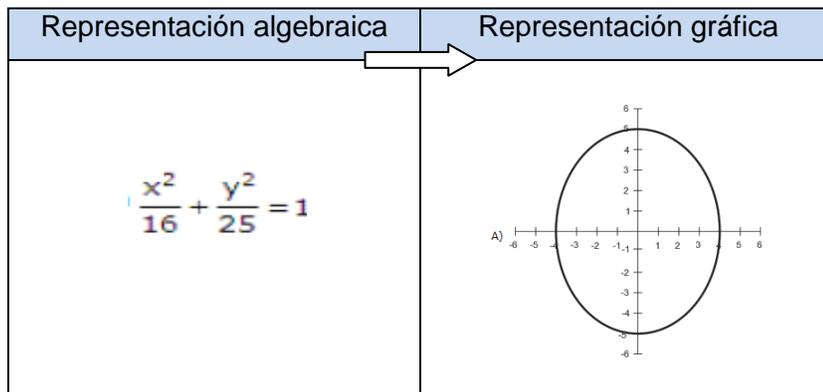
### 3.2.5 Consistencia acerca de la debilidad que establece ENLACE, cuando los estudiantes no resuelven correctamente el reactivo, respecto a las prácticas que realizan estudiantes que responden los reactivos.

Para conocer si hay consistencia en la debilidad publicada por ENLACE en referencia a los estudiantes que no pudieron resolver satisfactoriamente el reactivo, se analiza lo que hacen los estudiantes cuando resuelven el reactivo, correcta o incorrectamente, así como se expresa en la debilidad y luego se hace una comparación para ver en qué medida en las estrategias y argumentos que utilizan los estudiantes al poner en juego sus prácticas éstas se corresponden con la debilidad declarada.

Textualmente la debilidad que publica ENLACE (2011), señala lo siguiente: *“El alumno no logra identificar la gráfica que representa una ecuación cuadrática con dos variables”*, en este texto tenemos presentes elementos lingüísticos que hacen referencia a conceptos matemáticos, limitándose a la representación escrita, como: gráfica, ecuación cuadrática con dos variables”.

El término gráfica, por sí mismo es un elemento lingüístico (como palabra), sin embargo al ser contenido en esta parte (la debilidad) remite a que el estudiante debe relacionarlo con la representación gráfica de alguna curva.

La “ecuación cuadrática con dos variables” de la que se menciona en la debilidad es la representación algebraica del objeto matemático que el estudiante deberá relacionar con su representación gráfica, para el caso del reactivo dichas representaciones son las siguientes:



Esta elipse debiera ser el objeto matemático considerado por el estudiante que sí resuelve correctamente el reactivo, pudiendo constituirse la red de objetos intervinientes analizando cada uno de los elementos que conforman la elipse e inferir cuál es la representación gráfica asociada la expresión algebraica.

La forma en cómo está expresada la **debilidad** por parte de ENLACE tiene la característica de ser muy general, cuando dice **“...que representa una ecuación cuadrática de dos variables”**, en el contexto de la asignatura pudiera tratarse de la parábola, la circunferencia o la elipse; además cuando señala **“Identificar la gráfica...”** no se hace referencia a qué aspectos del proceso o de los objetos intervinientes que se requieren para llevar a cabo la transformación del registro algebraico al gráfico están ausentes.

Tomando en cuenta las estrategias y argumentos que utilizaron los estudiantes a quienes se les aplicaron los reactivos, que dejaron registro escrito de su trabajo, se pueden identificar aspectos que proporcionan elementos para caracterizar el apartado de **debilidad** que presenta ENLACE.

La forma tan general en la que está escrita la debilidad no permite centrar la atención en el análisis de las prácticas incorrectas de los estudiantes que no resuelven correctamente el reactivo, por lo tanto dificulta hacer una comparación entre lo que se espera que haga quien resuelve el reactivo (sin dejar registro de sus argumentos y estrategias), respecto a las prácticas que ponen en juego quienes lo contestan (correcta o incorrectamente dejando registro escrito de lo que hacen).

De esto último podemos decir que no se tienen elementos suficientes para hablar de la consistencia entre lo que señala la debilidad y lo que realmente hacen o dejar de hacer quienes resuelven incorrectamente el reactivo.

### 3.2.6 Pertinencia de los distractores con respecto al objeto matemático que se evalúa.

Cada uno de los reactivos de la prueba ENLACE presenta cuatro opciones de respuesta, en este apartado trataremos de determinar la pertinencia que tiene cada uno de los tres distractores tomando en cuenta los siguientes aspectos: frecuencia con la que se selecciona el distractor al ser aplicado a una muestra de estudiantes y elementos lingüísticos asociados a los conceptos que se evalúan.

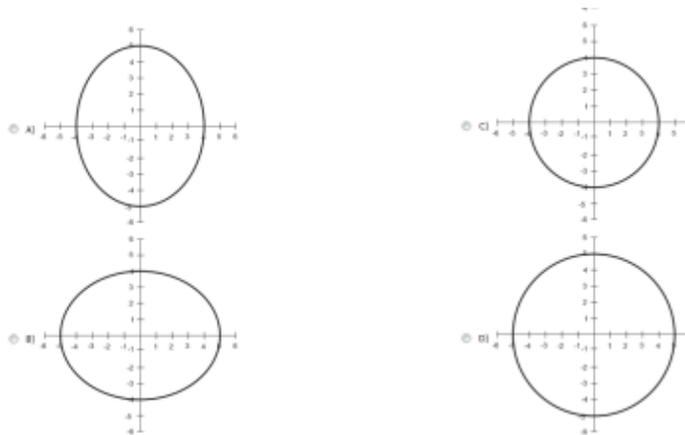
Para tener una idea de la pertinencia de los distractores de cada reactivo utilizamos el criterio de la frecuencia con que éste es seleccionado, para ello tomamos como referencia los resultados obtenidos al aplicar el reactivo 69 a los 68 estudiantes (es importante destacar que es sólo un ejercicio que se hace con una muestra pequeña y no necesariamente representativa). La información que se obtuvo está registrada en la siguiente tabla:

	NÚMERO DE REACTIVO (Respuesta correcta)							
	Prueba ENLACE 2011							
	43 (C)	67 (B)	69 (A)	71 (B)	72 (C)	73 (C)	76 (B)	84 (D)
Número de veces que se seleccionó la opción A	4	20	31	8	6	7	6	16
Número de veces que se seleccionó la opción B	2	29	10	29	2	9	32	11
Número de veces que se seleccionó la opción C	60	4	3	11	44	14	7	3
Número de veces que se seleccionó la opción D	1	6	12	9	1	12	7	12
Total de respuestas por reactivo	67	59	56	57	53	42	52	42

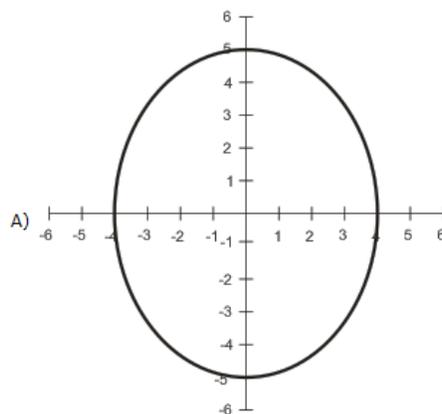
En cuadro coloreado representa la frecuencia que obtuvo la opción correcta, como se puede ver para el reactivo 69 la opción C es la que tiene menor frecuencia representando sólo el 5%, lo cual puede interpretarse, bajo este criterio, que no es un buen distractor; por otra parte los distractores B y D tienen una frecuencia no tan baja lo que los pondría en el papel de buenos distractores.

Tomando en cuenta el otro criterio, se hace un análisis de los elementos de significado del reactivo 69:

*Elementos lingüísticos* de las cuatro opciones de respuesta del reactivo; un supuesto es que una de ellas es la respuesta correcta y tres son distractores. Las opciones de respuesta muestran las representaciones graficas de objetos matemáticos, dos elipses (opciones A y B) y dos circunferencias (opciones C y D) ubicadas cada una en el plano cartesiano y todas con centro en el origen (0,0). Las opciones de respuesta son:

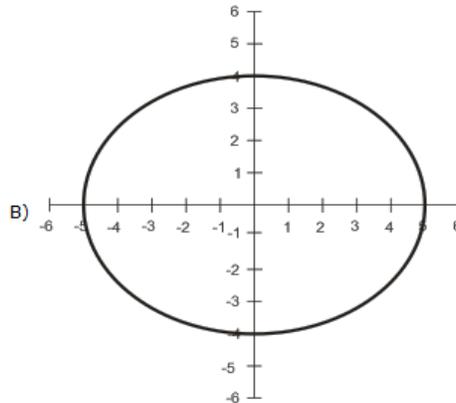


El reactivo tiene cuatro opciones de respuesta y se tiene como supuesto que una de ellas es la respuesta correcta y tres de las opciones juegan el papel de distractores, cada una de las opciones es la representación gráfica de una cónica cuyo centro está ubicado en el origen (0,0): en la opción A se tiene la gráfica que representa una elipse:

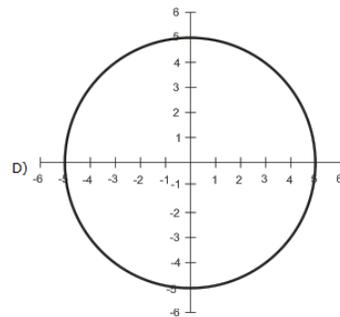
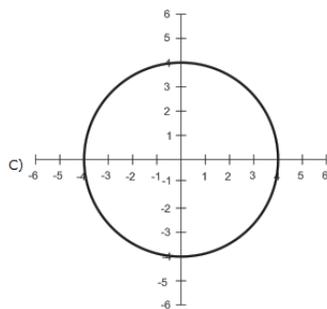


Cuyas intersecciones con el eje X son en las coordenadas (4,0) y (-4,0), y con el eje Y son (0,5), (0,-5). En el resultado presentado por ENLACE, la opción A es la respuesta correcta. Por lo que las opciones B, C y D son los distractores.

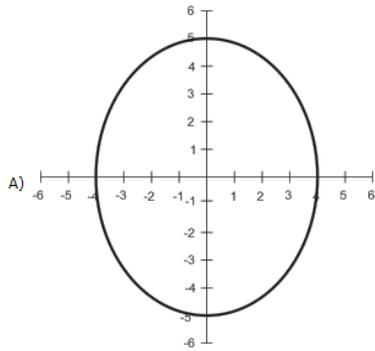
La opción B es la representación gráfica de una elipse, sólo que a diferencia de la opción A, el eje mayor está ubicado en el eje X con los puntos de intersección en (5,0) y (-5,0), y para el eje Y en (0,4) y (0,-4) teniendo un papel adecuado de distractor, ya que si el estudiante identificó el objeto matemático representado en la ecuación como una elipse con centro en el origen, ahora tiene la tarea de ubicar la posición que tienen los ejes mayor y menor de la elipse.



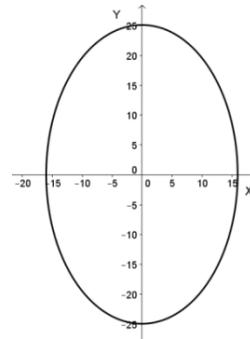
Las opciones C y D son gráficas que representan circunferencias con centro en (0,0), con radio 4 y 5 unidades respectivamente, estas opciones de respuesta pueden ser efectivos como distractores, siempre y cuando el estudiante no posea una idea clara de lo que representa la ecuación  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ , es decir su sistema de prácticas acerca del objeto matemático que se pretende evaluar no sea adecuado o esté limitado. Estas opciones de respuesta están representadas así:



Otro distractor pudiera ser aquel en el que la intersección de la elipse con los ejes de coordenadas sea en los puntos (-16,0), (16,0) para el eje X; para el eje Y en los puntos con coordenadas (0,25), (0,-25). Incluso, presentarlo en diferente escala, quedando la figura del mismo tamaño que la de la respuesta correcta;



Respuesta correcta



Distractor sugerido

En las gráficas presentadas de las cuatro opciones de respuesta, se presenta el defecto de que no están referenciados los ejes de coordenadas  $X$  y  $Y$ , lo que genera el problema de que las opciones A y B, pueden interpretarse como iguales, salvo que en diferente posición.

### 3.3 Análisis del reactivo 84 del año 2012

#### 3.3.1 Significado institucional de referencia

En la identificación de los elementos primarios del significado institucional de referencia, se analizan las unidades correspondientes a:

1. El Programa de Estudios de la asignatura Geometría Analítica del Bachillerato Tecnológico (2009).
2. El Programa de estudios de la DGB (2009).
3. Un cuaderno de trabajo que utilizan profesores y estudiantes del CET del Mar 03 de Guaymas, Sonora.
4. El Libro de texto Geometría Analítica de Lehmann (2005) propuesto por profesores que imparten la asignatura.

#### **Unidad de análisis 1. Programa de Estudios del Bachillerato Tecnológico.**

Configuración de los Objetos Matemáticos

En el Programa de Estudios del Bachillerato Tecnológico se identifica la unidad de análisis que corresponde al objeto matemático recta.

Los elementos de significado que se pueden identificar implícita o explícitamente, son los siguientes:

#### **Elementos lingüísticos:**

Se tiene *la recta* como el objeto matemático, e implícitamente lo que se debe promover al respecto, textualmente dice: *pendiente y ángulo de inclinación, formas de ecuación de una recta y sus transformaciones, intersección de rectas, relaciones entre rectas y rectas notables de un triángulo*. Por lo que estos son los

*Objetos intervinientes*, ya que los elementos lingüísticos que aparecen son los nombres escritos de los objetos de estudio.

#### **Situaciones:**

En el apartado de aplicaciones dice “*Solución de situaciones reales a través de métodos geométricos y algebraicos*”, aunque no se muestra alguna situación en particular, esto se

puede interpretar como que queda a criterio del responsable de impartir la asignatura, el tipo de situaciones que se utilicen en clase.

*Objetos intervinientes y emergentes:* no se presentan casos particulares del elemento situacional, por lo que no es posible identificar el rol que juegan las situaciones que deben resolver los estudiantes.

### **Conceptos:**

Lo que se presenta en el esquema del programa de estudios, y el contenido implícito:

*Pendiente, ángulo de inclinación:* Interpretación geométrica, tangente del ángulo, pendiente positiva, negativa o no definida de una recta.

*Formas de ecuación de una recta y sus transformaciones:* Ecuación de punto y pendiente, pendiente ordenada en el origen, forma general, forma normal, forma simétrica o segmentaria.

*Intersección de rectas:* Representación gráfica, condiciones de intersección de rectas, elementos de una recta, pendiente.

*Relaciones entre rectas:* Rectas paralelas, rectas secantes, rectas perpendiculares, ángulos congruentes, ángulos opuestos por el vértice, ángulos suplementarios.

*Rectas notables de un triángulo:* Bisectriz, mediatriz, mediana, altura.

*Objetos intervinientes:* ecuación, puntos en el plano cartesiano, distancia entre dos puntos tangente de un ángulo, operación con números reales, triángulos, ángulo de inclinación

*Objetos emergentes:* pendiente, ángulo de inclinación, formas de la ecuación de la recta, intersección entre rectas, rectas notables en un triángulo.

### **Proposiciones:**

No se identifica el tipo de proposiciones que se sugiere utilizar en el desarrollo de la asignatura.

### **Procedimientos:**

En la sección de aplicaciones se pueden identificar algunos procedimientos, por ejemplo se señala “*Ubicación de objetos en sistemas coordenados...*” en este caso podría referirse a la ubicación de puntos para trazar la recta, gráficas de la recta, ángulo entre rectas, trazo de rectas paralelas o perpendiculares; en otra parte dice “*...cálculo de*

*distancias,...*” por ejemplo al trabajar con las rectas notables de un triángulo, en particular la mediatriz, se ha de determinar la distancia al punto medio.

*Objetos intervinientes:* ubicar puntos en el plano cartesiano, calcular de distancias entre puntos del plano y sumar números reales.

*Objetos emergentes:* los correspondientes al apartado referido a la recta (procedimiento para determinar la pendiente, el ángulo de inclinación, las formas de la ecuación de la recta, la intersección entre rectas, las rectas notables en un triángulo

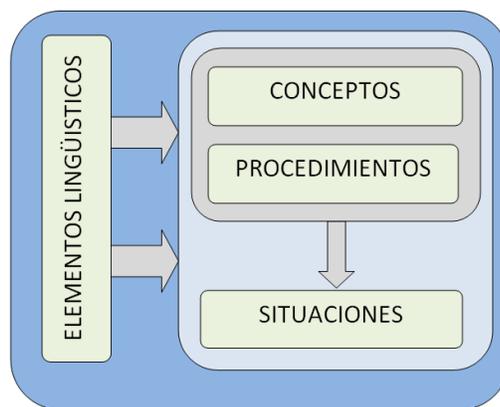
### **Argumentos:**

A partir del esquema en el que se presenta el contenido de la asignatura, no se tienen elementos para identificar los argumentos que se están proponiendo utilizar.

### **Configuración**

Por la estructura que tiene el Programa de la asignatura de Geometría Analítica, da la impresión que la organización de de dicha estructura, está orientada por el contenido disciplinar y no por los elementos que forman parte de las competencias (habilidades, conocimientos, actitudes y valores) que han de desarrollarse en el estudiante.

El hecho de que la “*Solución de situaciones reales...*”, aparezca en el apartado de aplicaciones, se puede interpretar que la configuración propuesta para desarrollar el tema está organizado de la siguiente manera:



Esto es, a partir de los elementos lingüísticos se presentan las definiciones de los conceptos, después con el uso de elementos lingüísticos se presentan ejemplos de situaciones donde se utilizan con conceptos definidos, para pasar a la etapa de proponer

la tarea de resolver ejercicios similares a los ejemplificados y posteriormente abordar las situaciones en un contexto extra matemático.

Es importante destacar que cuando se pone en juego la estructura, en todo momento están presentes los elementos lingüísticos, por ello en el esquema que se presenta aparece acompañando a todos los elementos de significado.

Para el caso del reactivo presentado al inicio de este apartado, en esta unidad de análisis respecto al programa de estudios del BT, no está claro el nivel al que se promueve lo relacionado con las condiciones de perpendicularidad entre rectas.

## **Unidad de análisis 2. Programa de Estudios del Bachillerato General.**

### Configuración de los Objetos Matemáticos

La segunda unidad de análisis corresponde al Bloque III del Programa de la asignatura de Matemáticas 3 de la DGB, el bloque se llama “Aplicas los elementos de una recta como lugar geométrico”, que está constituido por siete apartados: Desempeños del estudiante al concluir el bloque, Objetos de aprendizaje, Competencias a desarrollar, Actividades de enseñanza, Actividades de aprendizaje, Instrumentos de evaluación y Rol del docente. Para este trabajo se utilizan los primeros cinco apartados.

### **Elementos lingüísticos:**

Se puede identificar de manera explícita el nombre de algunos aspectos de la recta que se proponen desarrollar; definición, pendiente y ángulo de inclinación de una recta, ángulo formado por dos rectas, condiciones de paralelismo y perpendicularidad, estos constituyen los

*Objetos intervinientes, todos, ya que los elementos lingüísticos que aparecen son los nombres escritos que corresponden a los objetos de estudio.*

### **Situaciones:**

1. Realizar en equipos diversos, consultas en al menos dos bibliografías y/o webliografías y contrastar la información de pendiente y ángulo de inclinación de una recta.

2. En equipo, buscar aplicaciones prácticas de pendientes y ángulos de inclinación, diseñar problemas y resolver ejercicios. Plantear los problemas diseñados al equipo.
3. Resolver problemas y/o ejercicios, integrados en equipos, donde calculen ángulos interiores de diversos polígonos encontrados en su salón de clases.
4. Resolver problemas y/o ejercicios, integrados en equipos, donde aplique las condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre dos o más rectas en contextos propios.

En las situaciones identificadas, las primeras dos (realizar consultas y buscar aplicaciones) corresponden a la actividad concreta que debe realizar el estudiante, y las otras dos (resolver problemas y/o ejercicios) muestran el esquema del tipo de situaciones que se les propone resolver a los estudiantes.

*Objetos intervinientes*, situación cuatro, ya que se le solicita que aplique lo aprendido.

*Objetos emergente*, los que se identifican en las primeras tres situaciones.

### **Conceptos:**

*Objetos intervinientes*: ejes cartesianos, ángulo, coordenadas de puntos, tangente de un ángulo, teorema de Pitágoras.

*Objetos emergentes*: línea recta, pendiente, ángulo de inclinación de una recta, rectas paralelas, rectas perpendiculares.

### **Proposiciones:**

A partir de la interpretación de los elementos antes mencionados y de la forma en cómo aparece en el documento (Programa de la asignatura de la DGB), se puede inferir que el tipo de proposiciones que se promueven son del tipo del siguiente ejemplo:

*Objetos emergentes*

- Cuando dos rectas son perpendiculares entre sí, se cumple la condición de que el ángulo que se forma entre éstas, es de  $90^{\circ}$

### **Procedimientos:**

*Objetos intervinientes*: ubicar puntos en el plano cartesiano, calcular de distancias entre puntos del plano, sumar números reales.

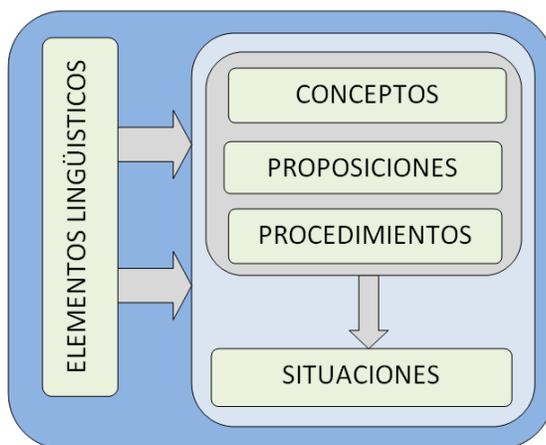
*Objetos emergentes:* Cálculo de pendientes, ecuación de la recta.

**Argumentos:**

A partir del esquema en el que se presenta el contenido de la asignatura, no se tienen elementos para identificar los argumentos que se están proponiendo utilizar.

**Configuración.**

En la estructura del programa de Matemáticas III de la DGB, están presentes las competencias que se deben desarrollar en el estudiante, además de presentar los contenidos disciplinar. La estructura en la que se presentan los elementos para el desarrollo del tema de la línea recta, y en particular para el caso de condiciones de perpendicularidad entre rectas:



En todo momento están presentes los elementos lingüísticos, en la medida en que se abordan los conceptos, procedimientos y situaciones.

Los elementos situacionales que tienen que ver con el reactivo presentado al inicio del apartado, en el programa de estudios de la DGB, se presentan en diferentes momentos, primeramente en la búsqueda de información por parte del estudiante, búsqueda de aplicaciones de los conceptos estudiados, resolver ejercicios en trabajo colaborativo con sus compañeros, y resolución de ejercicios planteados en un contexto extra matemático, con aplicaciones las condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas.

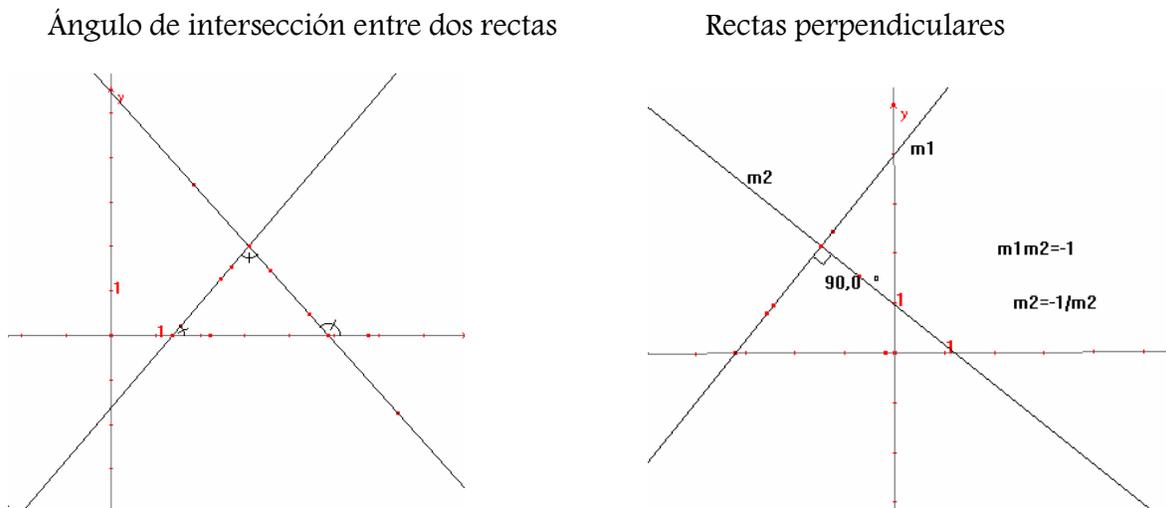
### Unidad de análisis 3. Cuadernillo de apuntes de Geometría Analítica.

Configuración de los Objetos Matemáticos

La unidad de análisis 3 es la sección de la elipse del cuadernillo de apuntes de Geometría Analítica (Fletes, 2007) que utilizan los profesores y estudiantes del CET del Mar 03 de Guaymas, Sonora.

#### Elementos lingüísticos

Se presenta gráficamente una condición de perpendicularidad entre rectas:



Donde  $m_1$  y  $m_2$  representan las pendientes de las rectas y

$$\text{Tang}(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

*Objetos intervinientes:* Representación gráfica del plano cartesiano, representación gráfica y analítica de puntos en el plano.

*Objetos emergentes:* pendiente de la recta, relación entre las pendientes de las rectas que se cruzan, ángulo entre rectas, tangente del ángulo que forman entre sí dos rectas.

#### Situaciones

1. Considerando dos rectas,  $L_1$  y  $L_2$  que no son paralelas entre sí, se determina el ángulo que forman entre ellas, utilizando la expresión:

$$\text{Tan}(\alpha) = \frac{\text{Tan}(\alpha_2) - \text{Tan}(\alpha_1)}{1 + \text{tan}(\alpha_2)\text{Tan}(\alpha_1)}$$

2. A partir de las ecuaciones correspondientes a rectas, encontrar el ángulo que forman entre sí.

3. Como ejercicio para el estudiante, se solicita escribir la ecuación de la recta que es perpendicular a otra, de la que se conoce su ecuación.

*Objetos emergentes:* Las tres situaciones ya que dan la oportunidad a los estudiantes de generar estrategias que le permiten identificar condiciones de perpendicularidad entre rectas.

### **Conceptos**

*Objetos intervinientes:* ángulo, tangente, coordenadas rectangulares.

*Objetos emergentes:* pendiente de la recta, relación entre las pendientes de las rectas que se cruzan, ángulo entre rectas, tangente del ángulo que forman entre sí dos rectas, rectas que son perpendiculares.

### **Proposiciones**

*Objetos emergentes:*

1. Si se tiene que  $m_1 = \text{Tan}(\alpha_1)$  y  $m_2 = \text{Tan}(\alpha_2)$  donde  $m_1$  y  $m_2$  representan las pendientes de las rectas que se cruzan, entonces el valor de la tangente del ángulo que forman es:

$$\text{Tang}(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

2. Si la ecuación de la recta está expresada en su forma general, entonces la pendiente de dicha recta está dada por:  $m = \frac{-A}{B}$

3. Si dos rectas forman un ángulo de  $90^\circ$ , entonces la expresión

$$\text{Tang}(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Se puede escribir:  $\infty = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

4. Si  $L_1$  y  $L_2$  son dos rectas perpendiculares, entonces

$$m_1 m_2 = -1 \quad \text{ó} \quad m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

### **Procedimientos**

*Objetos intervinientes:* cálculo de ángulos, operaciones entre números reales y transformaciones algebraicas.

*Objetos emergentes:*

1. Determinación del ángulo entre rectas y cálculo de las pendientes de las rectas, teniendo como dato el ángulo de inclinación de las rectas.
2. Determinación del ángulo formado entre rectas, dadas sus ecuaciones en la forma general.

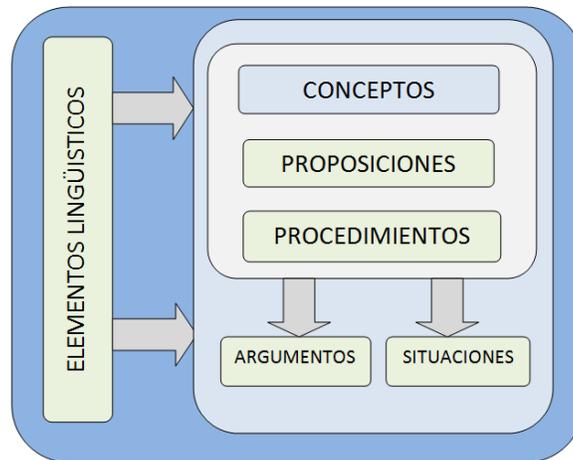
### **Argumentos**

*Objetos intervinientes:*

1. Sabemos que dos rectas son perpendiculares por que cuando al encontrarse forman un ángulo de  $90^\circ$ , que es la condición que se debe cumplir para que sean perpendiculares.
2. Sabemos que la tangente de  $90^\circ$  es infinita, es decir, que no está definida para ese ángulo y la expresión “no está definida”, algebraicamente significa que el denominador de una fracción es cero.

### **Configuración**

La estructura que presenta esta unidad de análisis, que es la sección del texto en el que se aborda el tema de la recta, presenta todos los elementos de significado, Cuando se pone en juego la estructura, en todo momento están presentes los elementos lingüísticos, por ello en el esquema que se presenta aparece acompañando a todos los elementos de significado. A partir de esta información se identifica la estructura para la configuración que está presente:



Por la forma en que se desarrolla el texto muestra una organización orientada por el contenido disciplinar y no por los elementos que forman parte de las competencias genéricas y disciplinares que hay que desarrollar en el estudiante de acuerdo a los planteamientos de la RIEMS. Este es un aspecto esperado ya que el material es de año 2007, año previo a la implementación de la reforma mencionada.

El texto es explícito en cuanto a la forma que desarrolla el tema, parte de la definición de la línea recta, de la determinación del ángulo de inclinación de la recta, así como de la pendiente correspondiente, y la relación que se da al tener dos rectas que se cruzan y que forman un ángulo recto, esto se realiza mediante operaciones algebraicas utilizando los objetos intervinientes que se requieren. En los ejercicios para el estudiante se da la tarea de determinar la recta que es perpendicular a la recta de la que se conoce su ecuación, ésta última dada en su forma general.

En el desarrollo del tema, se presentan proposiciones que son resultado de los procedimientos utilizados para resolver las situaciones problema que se presentan.

Se promueven situaciones que están relacionadas con el problema de identificar la gráfica que corresponde a una recta de la que se conoce su expresión algebraica, esto en el contenido de los ejercicios que se dejan de tarea al estudiante.

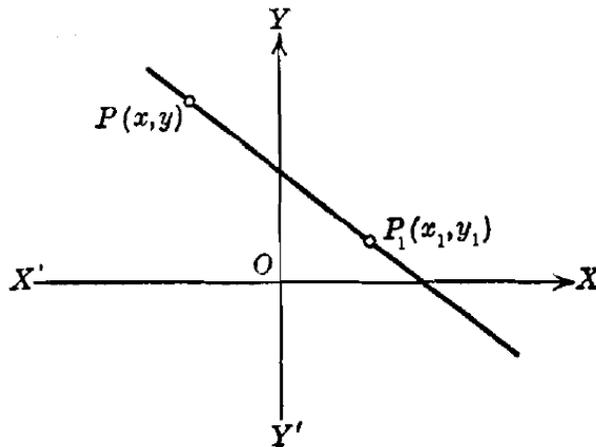
En esta unidad de análisis no están presentes situaciones en un contexto extra matemático.

## Unidad de análisis 4. Libro de texto de Geometría Analítica de Lehmann.

La unidad de análisis 4 corresponde al Capítulo III del libro de Geometría analítica de Lehmann (2005).

### Elementos lingüísticos

Los nombres de: la línea recta y ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada, de la que se muestra su representación gráfica



Ecuación de la recta expresada como:  $y - y_1 = m(x - x_1)$

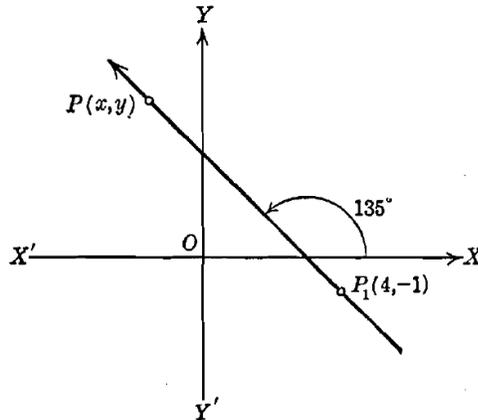
*Objetos intervinientes:* eje de coordenadas cartesianas, puntos en el plano cartesiano,

*Objetos emergentes:* Representaciones gráfica y algebraica de rectas: dada su pendiente y ordenada al origen, recta que pasa por dos puntos, ecuación simétrica de la recta,

### Situaciones

*Objetos emergentes:*

1. Se presenta un ejemplo con la situación en la que se solicita hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene un ángulo cuyo valor es conocido.
2. Se presenta un ejemplo en el que se solicita hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto dado y es paralela a otra recta de la que se conocen dos puntos.
3. Se presenta una situación problema como ejemplo en la que se determina la ecuación de la recta a partir de:



4. Se presenta un ejemplo de cómo hallar la ecuación de la mediatriz (perpendicular en su punto medio) del segmento de recta (se dan dos puntos del segmento).
5. En los ejercicios a resolver por el estudiante, se solicita hallar la ecuación de la mediatriz de un segmento de recta del que se conocen dos puntos, situación análoga a la número tres.

### **Conceptos**

*Objetos intervinientes:*

Operaciones con números, coordenadas de puntos en el plano cartesiano y distancia entre puntos, tangente de un ángulo.

*Objetos emergentes:*

Ángulo de inclinación, pendiente de una recta, rectas perpendiculares, ecuaciones de la recta (dada su pendiente y ordenada al origen, recta que pasa por dos puntos, ecuación simétrica de la recta).

### **Proposiciones**

*Objetos intervinientes:* No se identificaron.

*Objetos emergentes:*

1. Teorema, una ecuación lineal en las variables  $x$ ,  $y$ , representa una recta y recíprocamente.

2. Como corolario de este teorema se indica para conocer la pendiente de una recta, se divide el coeficiente de  $x$  por el coeficiente de  $y$  y después cambiar el signo.
3. El valor de la pendiente  $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ , sí se cumple que  $x_1 \neq x_2$
4. Teorema, la recta que pasa por el punto dado  $P_1(x_1, y_1)$  y tiene la pendiente dada  $m$ , tiene por ecuación  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .
5. Si la ecuación de la recta en su forma general, se cambia a la forma de pendiente ordenada en el origen, el coeficiente de  $x$  es la pendiente,

### **Procedimientos**

*Objetos emergentes:* se presenta el procedimiento para determinar la ecuación de la mediatriz de un segmento de recta del que se conocen dos de sus puntos. Se procede a calcular las coordenadas del punto medio de los puntos conocidos, se calcula la pendiente del segmento de recta, y se calcula la pendiente de la mediatriz, dividiendo 1 por el valor de la pendiente del segmento de recta, y cambiándole de signo; con estos datos, encuentra la ecuación de la mediatriz.

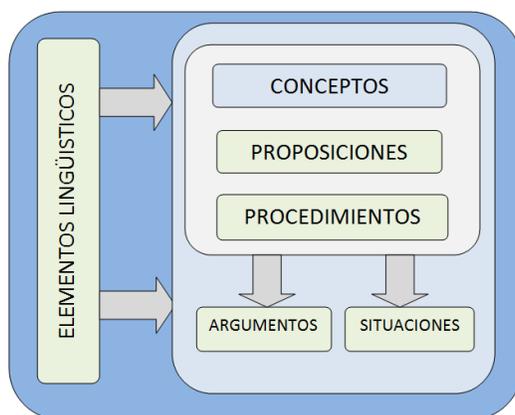
### **Argumentos**

*Objetos intervinientes:*

1. Por las propiedades con las cuales se puede determinar la ecuación de una recta (por ejemplo, teniendo un punto con coordenadas  $(0, b)$ ) se tiene que la ecuación queda en la forma:  $y = mx + b$  donde  $m$  es la pendiente y  $b$  es la ordenada al origen.
2. Por el teorema relativo al cálculo de la pendiente de una recta, teniendo dos de sus puntos, la pendiente de la recta  $l_2$  ( $m_2$ ) que es perpendicular a la recta  $l_1$  (con pendiente  $m_1$ ) se obtiene que  $m_2 = \frac{-1}{m_1}$  (textualmente dice: por el corolario del teorema 3, Artículo 7. la pendiente de  $l'$ , por el teorema 4 del Artículo 8),
3. En algunos ejercicios para que resuelva el estudiante, se le solicita demostrar, por ejemplo, “demostrar que los puntos  $A (-9, 2)$ ,  $B (1, 4)$  y  $C (4, 5)$  son colineales, hallando la ecuación de la recta que pasa por dos de estos puntos”.

## Configuración.

Referente al tema de interés, en esta unidad de análisis, que corresponde a las condiciones de perpendicularidad de la recta y asociados con la situación problema del reactivo analizado, se presenta la estructura. Cuando se pone en juego la estructura, en todo momento están presentes los elementos lingüísticos, en el esquema se puede apreciar cómo están asociados los elementos lingüísticos con cada uno de ellos:



En el texto se tiene una secuencia de presentación de los temas de acuerdo a los contenidos disciplinares, no están presente la relación de los contenidos temáticos del texto con las competencias a desarrollar por el estudiante de acuerdo a lo que establece la RIEMS. Pudiera ser entendido este último aspecto, dado que la edición revisada corresponde al año de 2005.

En el texto se presenta de manera explícita el desarrollo del tema de los elementos de la recta, cálculo de la pendiente de una recta, ángulo de inclinación de la recta, ángulo formado entre rectas que no son paralelas. El caso de rectas perpendiculares se presenta en la situación problema, a manera de ejemplo, en la que se pide determinar la ecuación de la mediatriz de una recta de la que se conocen dos puntos, esta actividad se realiza mediante operaciones algebraicas utilizando los objetos intervinientes que se requieren.

En la actividad solicitada al estudiante a manera de ejercicios, al final del apartado, se le pide determinar la ecuación de la mediatriz de un segmento de recta que los ejes coordenados determinan a una recta de la que se conoce su ecuación en la forma general.

En el desarrollo del tema, están presentes proposiciones que son resultado de los procedimientos utilizados para resolver las situaciones problema que se presentan.

Se promueven situaciones que están relacionadas con el problema de identificar la gráfica que corresponde a una recta de la que se tiene su ecuación, estas situaciones están presentes en la presentación de un ejemplo y en los ejercicios propuestos para el estudiante

En esta unidad de análisis no están presentes situaciones que correspondan a un contexto extra matemático.

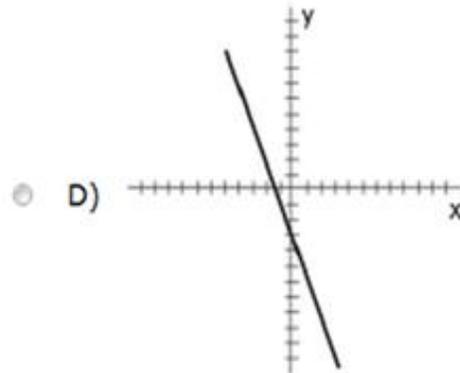
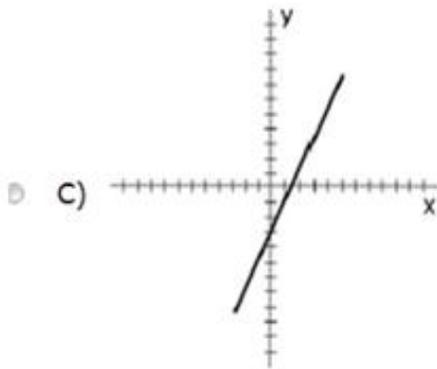
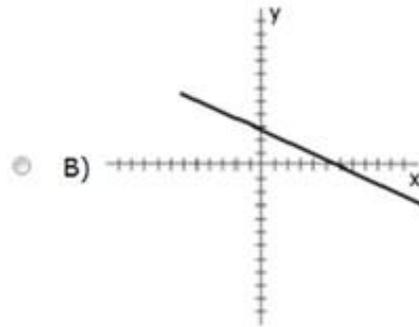
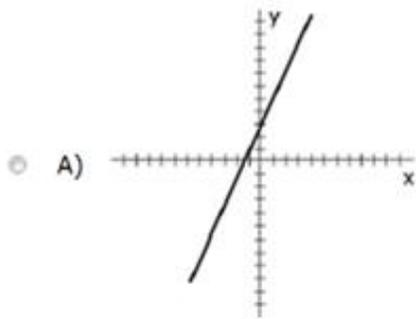
### 3.3.2. Significado institucional evaluado.

#### Unidad de análisis 5.

La unidad de análisis 5 es el reactivo de la prueba ENLACE, así como los aspectos asociados a éste.

#### Reactivo 84, 2012

84 ¿Cuál gráfica representa la perpendicular de la recta de la ecuación  $2x - y + 3 = 0$  y ordenada al origen 3?



La respuesta correcta a esta pregunta es la opción: **B**

El porcentaje de alumnos en el grupo que contestó incorrectamente esta pregunta es: **76%**

Debilidad: El alumno no logra IDENTIFICAR LA GRÁFICA DE LA RECTA PERPENDICULAR O PARALELA QUE PASA POR UNA ORDENADA AL ORIGEN DE UNA ECUACIÓN LINEAL

Contenido matemático del reactivo declarado por ENLACE: Cambios y relaciones.

## **Elementos de significado del reactivo.**

### **Elementos lingüísticos:**

El reactivo nos plantea la interrogante: ¿Qué gráfica representa la perpendicular de la recta de la ecuación  $2x-y+3=0$  y ordenada al origen 3? En la constitución de esta pregunta están incluidas 15 palabras y de ellas tenemos la palabras gráfica, perpendicular, recta, ecuación, ordenada al origen, que son términos relacionados con objetos matemáticos, que deben ser relacionadas para dar una idea concreta de un problema que está relacionado con algún objeto matemático en particular, el orden en la redacción nos ubica en lo que se requiere buscar para determinar la solución al problema planteado. Se involucran en la oración una ecuación,  $2x-y+3=0$  y el número 3.

El enunciado del reactivo menciona que  $2x-y+3=0$  es la ecuación de una recta, es decir la ecuación es un registro de representación de un objeto matemático del cual el estudiante que resuelve el reactivo debe hacer uso de su sistema de prácticas para determinar algunos de sus elementos y encontrar entre las opciones de respuesta la “gráfica” de una recta perpendicular (a la recta  $2x-y+3=0$ ) que tenga ordenada al origen 3.

Como elementos lingüísticos para las opciones de respuesta se visualizan cuatro representaciones gráficas de rectas ubicadas en los ejes de coordenadas.

Revisando los elementos primarios situacionales; se solicita al estudiante la gráfica que representa la recta perpendicular a la ecuación  $2x-y+3=0$ , con la característica de que su ordenada al origen sea 3; parte de la solución puede operar diferentes registros de representación de este objeto matemático con procedimientos de solución diferentes, los que dependerán del sistema de prácticas del estudiante. Como objeto matemático primario situacional se puede considerar el tránsito de un registro de representación lingüístico; el tránsito del registro de representación algebraico de una recta, a una representación grafica de otra recta que debe ser perpendicular a la primera, y cumplir la condición de que la ordenada al origen sea 3.

*Objetos intervinientes:* Todos los elementos presentes son intervinientes ya que es una actividad de evaluación

## **Situaciones**

La situación problema planteada en el reactivo tiene que ver con el hecho de determinar cuál de las cuatro representaciones gráficas corresponde a la representación gráfica de la recta perpendicular a la recta de la ecuación  $2x-y+3=0$  con una condicionante de que la ordenada al origen sea 3.

El proceso para determinar la solución es complejo y dentro de un ámbito puramente matemático; requiere realizar el tránsito de la representación algebraica de la ecuación de una recta, hasta identificar la representación gráfica de una recta perpendicular a ésta.

*Objetos intervinientes.* La situación que se plantea

## **Conceptos**

En el reactivo no se maneja de forma directa algún concepto referido a los objetos matemáticos; se tienen, la representación algebraica de una recta, palabras como: gráfica y recta, que por sí mismas no los representan, es necesario conocer la estructura de toda el enunciado del reactivo para tener un constructo y poder clarificar lo que se pide, y de esta manera entender el problema. En el desarrollo de la solución se supone que se ha de conocer las condiciones de perpendicularidad entre rectas y los elementos necesarios para resolver la situación problema a partir de la ecuación de la recta dada  $2x-y+3=0$ , y que cumpla la condición de ordenada en el origen 3.

Algunos de los elementos que pueden intervenir para determinar la solución del problema y que dependerán del sistema de prácticas del estudiante, son la ecuación  $2x-y+3=0$  y su representación gráfica, teniendo relevancia los datos que se producen al operar esta ecuación, como los puntos en los que la recta cruza a los ejes de coordenadas, la pendiente de la recta y la representación gráfica de la recta. Con esta información se puede obtener una recta, que sea perpendicular a la primera y que tenga ordenada al origen con valor de tres, suponemos de inicio que una de las cuatro opciones de respuesta del reactivo

Podemos indicar que los conceptos matemáticos intervinientes del reactivo son:

- Recta, como objeto matemático del cual se pretende evaluar en el estudiante la capacidad para interpretar la información que se puede obtener de su ecuación para posteriormente determinar una recta perpendicular que cumpla una condición de ordenada al origen en tres.

- Recta perpendicular; como objeto matemático emergente de la ecuación original cuya representación gráfica es presentada en una de las opciones de respuesta.
- El concepto de ordenada al origen, como dato fundamental para que el estudiante determine cuál es la recta que es perpendicular en el punto dado, a la recta que está representada como ecuación en el reactivo

*Objetos intervinientes evaluados:* pendiente de una recta, condiciones de perpendicularidad entre rectas.

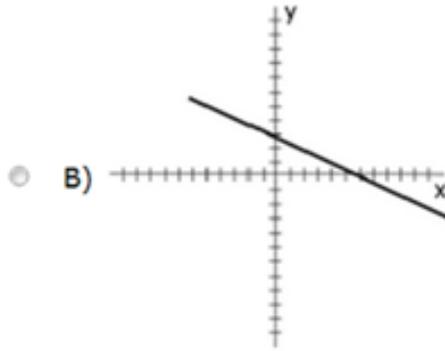
### **Proposiciones**

Se generan cuatro proposiciones, una que contiene a la respuesta correcta, y tres que operan con los distractores del reactivo. Es necesario conocer cuáles son las condiciones para determinar la representación gráfica de una recta dada su ecuación, la pendiente de la recta o los datos que el estudiante utilice en su sistema de prácticas, primeramente para visualizar la ecuación que se da en el reactivo y posteriormente construir y representar gráficamente una recta perpendicular con ordenada en el origen de valor tres. Se puede considerar la existencia de proposiciones implícitas que ayudan al estudiante a identificar  $2x-y+3=0$  como ecuación de una recta, en la que se puede visualizar que el valor que toma la variable  $y$  es el doble del valor que toma la variable  $x$ , otro dato que se puede derivar de esta ecuación, es por ejemplo, si se le da a  $x$  el valor de 0, la  $y$  toma el valor de 3, el punto correspondiente es  $(0,3)$ ; si a  $y$  se le da el valor de 0, la  $x$  toma el valor de  $-3/2$ , el punto correspondiente es  $(-3/2,0)$ , y con estos datos es posible representar gráficamente la recta. Se puede obtener como parte interesante de las características de la recta, su pendiente, que en este caso es de  $2/3$ , y como emergente, la pendiente de la recta que es perpendicular a la recta dada.

*Objetos intervinientes:* no es posible conocerlos.

*Objetos emergentes:* cuatro proposiciones, una considera la respuesta correcta, y tres están relacionadas con los distractores. La que es correcta:

*La gráfica que representa la perpendicular de la recta de la ecuación  $2x-y+3=0$ , y ordenada al origen 3, es*



### **Procedimientos**

Por la forma que toma el reactivo, al presentar la situación problema y las cuatro opciones de respuesta, no es posible conocer el procedimiento que utiliza el estudiante al presentar su respuesta. Para resolver el reactivo pueden seguirse diferentes prácticas, que constituyen los procesos mentales en el tratamiento de los objetos matemáticos que conforman el significado personal del estudiante.

*Objetos intervinientes:* no es posible identificarlos.

### **Argumentos**

No se requiere presentar argumentos al presentar la opción de respuesta seleccionada. Por lo que no podemos conocer qué elementos son los que utilizó el estudiante en su sistema de prácticas al determinar la solución del problema.

*Objetos intervinientes:* no es posible conocerlos.

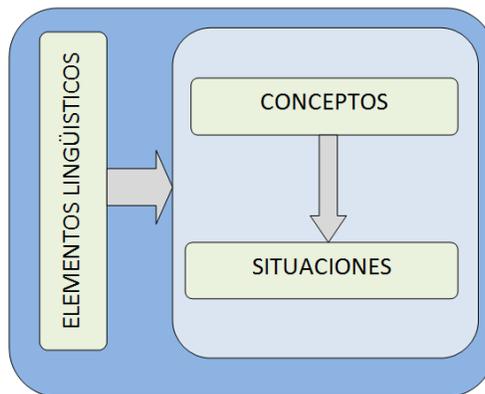
*Objetos emergentes:* no es posible conocerlos.

### **Configuración.**

Por la estructura que presenta el reactivo en cuestión, y los elementos relacionados con él, no permiten identificar los argumentos de solución, para poder relacionarlos con lo que se está evaluando, En este sentido es posible identificar de manera explícita sólo elementos lingüísticos indispensables para representar a los conceptos que se deben poner en juego.

En la debilidad que presenta ENLACE sólo reporta lo que el estudiante no pudo hacer al resolverlo incorrectamente, utilizando para ello elementos lingüísticos en el lenguaje natural, y no es explícito acerca de los conceptos que pudo haber utilizado, procedimientos no realizados, e inclusive los argumentos que pueda presentar. Puede tenerse casos de estudiantes que sí lo resuelven correctamente y no necesariamente operar los elementos mencionados anteriormente para su solución.

No se observan características en el reactivo que relacionen lo que se está evaluando, con las situaciones referidas al desarrollo de competencias en el estudiante en ambientes extra matemáticos, está focalizado a los contenidos disciplinares. La estructura que se puede identificar de la configuración es la siguiente:



Cuando se pone en juego la estructura los elementos lingüísticos están presentes, por ello en el esquema que se presenta aparece acompañando a conceptos y situaciones contenidas en el reactivo.

### 3.3.3 Consistencia entre el significado institucional de referencia y el significado institucional evaluado

Se presenta en la tabla siguiente, algunas de las actividades que pudiera realizar el estudiante que resuelve el reactivo número 84, desde la perspectiva del programa de estudios hacia los contenidos que declara ENLACE acerca de dicho reactivo, es importante señalar que en la clasificación que hace ENLACE ubica al reactivo en el contenido matemático de **Cambios y relaciones**, aunque desde la perspectiva disciplinar consideramos que pudiera ubicarse en el contenido matemático de **Espacio y forma**.

PROGRAMA DE ESTUDIOS: CAPACIDADES Y HABILIDADES	CONTENIDOS MATEMÁTICOS DE LA PRUEBA  CAMBIOS Y RELACIONES (Espacio y forma)
RAZONAMIENTO MATEMATICO	<p>Identificar la ecuación que se presenta como dato inicial de la situación problema como la ecuación que representa una recta.</p> <p>Analizar la ecuación de la recta presente en el problema y realizar deducciones.</p> <p>Manejo de dos representaciones del objeto matemático, algebraica y gráfica. El estudiante pudiera utilizar una representación diferente al resolverlo.</p>
RESOLUCION DE PROBLEMAS	<p>Comprender y contextualizar la situación problema.</p> <p>El objeto personal como recurso para elaborar estrategias de solución.</p> <p>En el sistema de prácticas para resolver el reactivo utilizando como recurso una o más de las representaciones del objeto matemático.</p> <p>Del conocimiento previo del estudiante puede hacer uso del significado personal del objeto matemático que corresponda al problema.</p>
ORIENTACION ESPACIAL	<p>Manejo de las representaciones del objeto matemático para visualizar la solución del problema.</p> <p>Emerge el objeto personal derivado del manejo de los elementos visuales.</p> <p>Identificar la representación gráfica del objeto matemático; la línea recta perpendicular (su representación gráfica) a la inicial (dada como representación algebraica).</p> <p>Interpretación de la representación algebraica. Puede operar las representaciones gráficas de ambas rectas.</p>
EXPRESION ORAL Y ESCRITA	<p>Lectura y comprensión del enunciado del reactivo</p> <p>Uso de terminología y notación matemática, para los objetos institucionales; recta, recta perpendicular, ordenada al origen, ecuación de la recta en su forma general.</p> <p>Interpretación y comprensión de elementos lingüísticos del reactivo.</p> <p>Identificación del problema.</p> <p>Como elemento primario situacional el manejo de la representación gráfica del a recta perpendicular a la que corresponde la expresión algebraica.</p> <p>Emergencia del objeto matemático personal al razonar la del enunciado, la opción correcta y los distractores.</p>

La identificación de prácticas que se promueven respecto al significado institucional de referencia hacia el significado institucional evaluado para el reactivo 84 de la prueba ENLACE edición 2012 se muestra a continuación.

Lo que promueve el SIR	Lo que se evalúa
<p>Las prácticas que se promueven en las unidades de análisis que se revisaron, y están de manera explícita son:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Presentación de conceptos, proposiciones y argumentos asociados a los elementos de la línea recta, y características de las ecuaciones que la representan.</li> <li>2. Determinar el ángulo de inclinación de una recta, dados dos de sus puntos o su ecuación.</li> <li>3 Determinar la pendiente de una recta de la que se tiene la ecuación en su forma general.</li> <li>4. Planteamiento de situaciones problema referente al cálculo de pendiente de la recta, y presentación del procedimiento de solución.</li> <li>5. Realizar ejercicios en los que se involucran las transformaciones de la ecuación de la recta, para determinar pendiente, ángulo de inclinación, ángulo de intersección entre rectas.</li> <li>6. Determinación de la ecuación de la mediatriz cuando se conocen dos puntos de un segmento de recta. Realizar la representación gráfica.</li> </ol>	<p>Identificar la representación gráfica de una recta que es perpendicular a otra, de la cual se conoce su expresión algebraica y la ordenada al origen.</p>

Habiendo realizado esta caracterización del significado institucional de referencia y del significado institucional evaluado, se puede decir que lo que se promueve sí corresponde con lo que se evalúa, en relación a los conceptos relacionados con la recta y las condiciones de que deben cumplir un par de rectas que son perpendiculares.

Lo anterior, se determina a partir de la revisión que se hizo de las unidades de análisis consideradas para este estudio: los dos programas de estudio del bachillerato tecnológico, los de la DGB y los dos textos.

Un aspecto que no se atiende en los reactivos analizados es la evaluación de competencias, ya que en ambos casos la atención está centrada en el aspecto disciplinar, lo cual es parte de la competencia pero no se ve la intención de evaluarlo al aplicarlo en situaciones de contexto extra matemático (o como se declara en los documentos de ENLACE “en situaciones de la vida cotidiana”).

#### 3.3.4. Argumentos y estrategias que se presentan en las prácticas que realizan estudiantes que resuelven los reactivos, quienes dejan evidencia escrita de la forma en cómo lo hacen.

El reactivo que se analiza no permite conocer los argumentos y estrategias que utilizan los estudiantes al resolverlo, y se tiene el interés de valorar la pertinencia de la debilidad que de acuerdo a ENLACE presentan los estudiantes que no responden correctamente, por lo que se aplica el reactivo en los grupos de estudio, 68 estudiantes que cursan el quinto semestre de bachillerato, y se les pide que cuando resuelven el reactivo, registren en hojas de trabajo los argumentos y estrategias utilizadas para responder dichos reactivos.

Con la información obtenida de la aplicación descrita, se pretende conocer cuáles son los significados personales, para ver si existe concordancia con los significados institucionales que se señalan en la debilidad.

Cabe aclarar que a los estudiantes seleccionados, participaron voluntariamente en la resolución de los reactivos, y se les solicitó no abandonar el intento de resolver la situación problema que se les presenta, sin importar que lo respondan correcta o incorrectamente, ya que lo relevante del estudio es ver qué es lo que hacen y bajo qué argumentos lo hacen.

Se espera que con el uso de los objetos intervinientes (conocimientos previos) y la habilidad desarrollada a través de su trayectoria escolar puedan hacer que se logre que el estudiante resuelva cada uno de los reactivos.

La hoja de trabajo se les solicita a los estudiantes al finalizar la aplicación, para revisar el registro escrito de su actividad o parte de ella (lo que escribe y representa por medio de dibujos, gráficas o tablas, cálculos y en general lo que haga para resolver el reactivo). De la hoja de trabajo se extrae información de los registros del estudiante que nos brindan elementos para identificar los objetos matemáticos que intervienen en la solución del reactivo, así como las estrategias utilizadas.

Se puede observar con qué elementos del objeto matemático trabajó el estudiante, para dar su respuesta al presentarnos su argumento; el tener registro escrito en lenguaje natural del estudiante no refleja todo el proceso mental que pudo darse en él para resolver la situación problema.

<b>Algunas respuestas de los estudiantes al reactivo número 84 (año 2012)</b> <b>Respuestas correctas</b>	Respuesta correcta B
Mi respuesta tan solo se basa en la ecuación.	B
Pura lógica y analizando la ecuación.	B
La gráfica B la representa porque la ordenada al origen es donde la recta atraviesa la coordenada dada.	B
Es la B, porque es la que mas concuerda con la ecuación y la gráfica.	B
Porque la línea tiene que pasar por el cero y la B es la que más se acerca.	B
La respuesta ha de ser la B porque al sustituir las variantes a partir del origen 3, y graficar la recta, te da según la gráfica a la B.	B

<b>Algunas respuestas de los estudiantes al reactivo número 84 (año 2012)</b> <b>Respuestas no correctas</b>	Respuesta correcta B
La respuesta es C porque en coordenadas sería $2x, 3y$ , ya que al despejarse ese es el resultado.	C
Porque en la ecuación dice $2x-y+3=0$ entonces la recta perpendicular pasa por el punto $-2x$ , y por el $-3y$ y pues dice $y+3=3y$ entonces pasa por ese punto.	D
La C porque te da lo mismo que te pide el problema.	C
Yo pienso que es la C porque la línea que se traza pasa por las coordenadas que se dieron en las instrucciones.	C
Yo sé que así se hace sólo que no lo recuerdo. Pero quiero decir que es la C porque es casi la que coincide con las coordenadas.	C
Creo que es la A porque son las coordenadas que mas coinciden con la ecuación que se me está presentando dado que para el resultado de cero se tuvo que hacer $2-5+3=0$ por lo tanto las coordenadas deben coincidir lo más posible.	A
Porque pide que el origen sea 3 con ecuación $2x-y+3=0$ y para mí esa es la que pasa por ese origen.	C
La A por los signos y resolviendo te queda el 3 en el lugar que da la gráfica al	A

momento de resolver sí coincide con el primer número.	
Elegí la C porque es la correcta, ya que en el lado derecho de las "x" se encuentra ubicado el punto 2x después seguimos con el siguiente punto $-y+3$ lo ubicamos hacia arriba para ponerlo en la y positiva creo yo creo que esta es la correcta porque ordenada al origen 3 es la única que da.	C
Es la opción A porque va de acuerdo a la perpendicular de la recta.	A

Entre los estudiantes que resuelven correctamente, se observa que trabajan en la relación de lo enunciado en el problema, acerca de la ordenada al origen en tres, sustituyendo valores en la ecuación y determinando que la opción de respuesta correcta es la B. Identifican que la coordenada (0,3) por la que la recta corta al eje y, tiene algo que ver con la solución correcta. Operan adecuadamente los objetos intervinientes: algebraicos y aritméticos; además logran hacer la transformación de los elementos lingüísticos, algebraicos y numéricos, a la representación gráfica de la recta.

Con esto se pueden tener elementos de interpretación de qué es lo que sucede cuando un estudiante no logra resolver la situación que se le plantea, por ejemplo pudiera ser que no ponen en juego adecuadamente sus conocimientos previos, como pueden ser de carácter algebraico, aritméticos, no pueden realizar el cambio de representación del objeto en cuestión en forma adecuada. Esto tendría que ser de la representación algebraica de la ecuación de la recta hacia la representación gráfica de la recta que le es perpendicular y que cumple con la condición de la ordenada al origen en 3. Se presentan algunos argumentos de estudiantes que responden el reactivo con la opción B, que es la correcta:

Algunas de las respuestas de los estudiantes que responden correctamente

$$\begin{aligned}
 -y &= -3x - 5 \\
 y &= \frac{3}{1}x + 5 \\
 y' &= -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

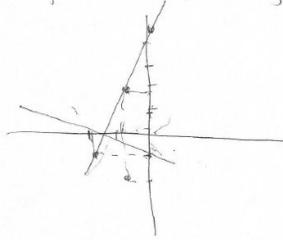
$$3x - y + 5 = 0$$

$$y = 3x + 5$$

$$m_1 = 3$$

$$m_2 = -\frac{1}{3}$$

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	2	5	8	11



$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-1} = 3$$

$$m_{\perp} = -\frac{1}{3}$$

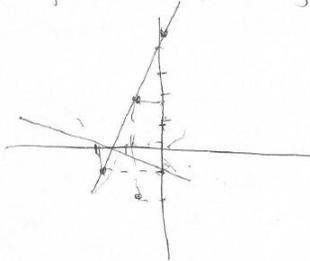
$$3x - y + 5 = 0$$

$$y = 3x + 5$$

$$m_1 = 3$$

$$m_2 = -\frac{1}{3}$$

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	2	5	8	11



Algunos estudiantes que no resolvieron correctamente el reactivo, no ubican lo que representa el término de ordenada al origen, asocian como coordenada de un punto a  $2x$ , y a  $3y$ , o en general parecen no haber entendido lo que se les pregunta, o cómo se les pregunta. Argumentos de estudiantes que no responden que la opción B es la correcta:

Algunas de las respuestas de los estudiantes que no responden correctamente

$2x - y + 3 = 0$   
 $2x - 2x - y + 3 = 0 - 2x$   
 $-y + 3 - 3 = -2x - 3$   
 $\frac{-y}{-1} = \frac{-2x - 3}{-1}$   
 $y = 2x + 3$

$x = -5$      $y = 13$   
 $x = -5$      $y = -7$

$y = 2(-5) + 3 = -10 + 3 = -7$   
 $y = 2(5) + 3 = 10 + 3 = 13$

x	y
-5	13
-5	-7
-3	-9
-2	-7
-1	-5
0	-3
1	-1
2	1
3	3

84R = Creo que es la (A), porque son las coordenadas que más coinciden con la ecuación que se me está presentando dado que para el resultado de 0 se tuvo que hacer  $2 - 5 + 3 = 0$  por lo tanto, las coordenadas deben coincidir lo más posible.

84-

c) Elegí la "C" porque es la correcta, ya que en el lado derecho de las "X" se encuentra ubicado el punto  $2x$  después seguimos con el siguiente punto  $-y+3$  lo ubicamos hacia arriba para ponerlo en la "y" positiva. Creo yo que esta es la correcta porque ordenada al origen 3 es la única que da.

\* Al principio escogí la A, pero este inciso muestra la línea recta que da la ecuación. Sin embargo la respuesta es la B, ya que piden la línea que sea perpendicular a la recta formada por la ecuación en esa coordenada. \*

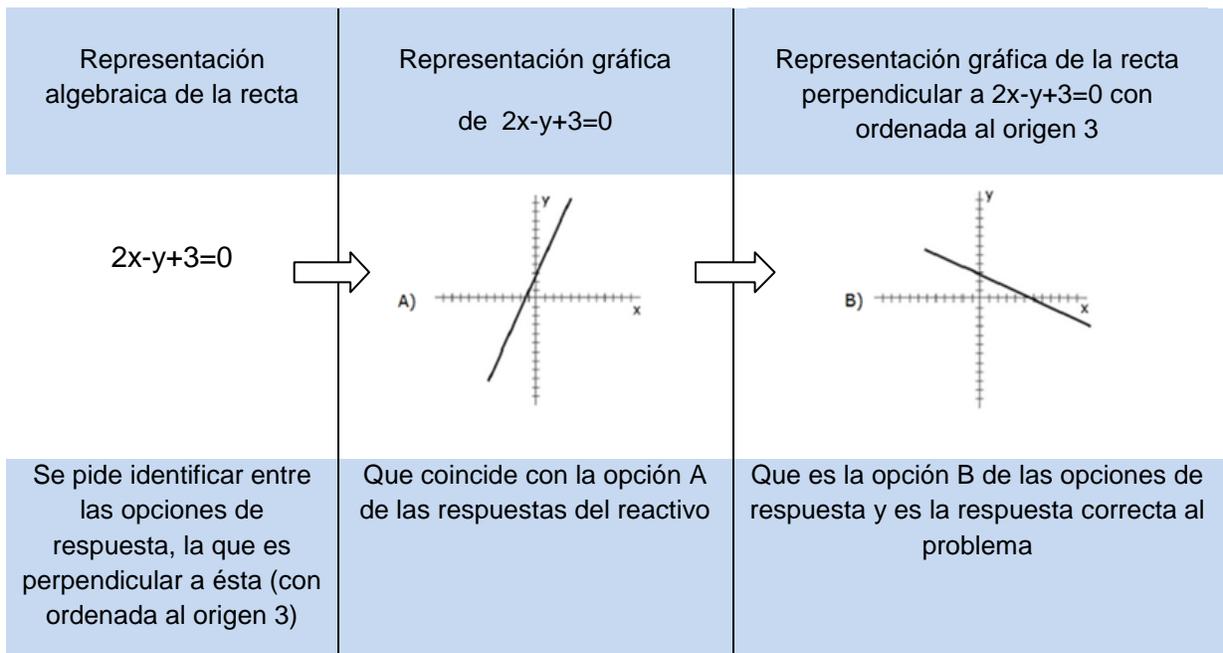
### 3.3.5. Consistencia acerca de la debilidad que establece ENLACE, cuando los estudiantes no resuelven correctamente el reactivo, respecto a las prácticas que realizan estudiantes que responden los reactivos.

La debilidad declarada por ENLACE en la publicación de los resultados de la prueba 2012, para el estudiante que no resuelve satisfactoriamente el reactivo 84, dice: "el alumno no logra IDENTIFICAR LA GRÁFICA DE LA RECTA PERPENDICULAR O PARALELA QUE PASA POR UNA ORDENADA AL ORIGEN DE UNA ECUACIÓN LINEAL". El análisis de estos elementos lingüísticos nos permite separar la acción solicitada, en este caso es la de identificar, misma que para lograrse necesariamente involucra acciones implícitas que dependerán del sistema de prácticas del estudiante, éstas pueden ser emergentes de acuerdo al procedimiento de solución que dé el sujeto. Acciones implícitas pueden ser: analizar el texto del reactivo, identificar lo que se pide, relacionar los elementos involucrados, representar gráficamente, entre otros.

En la parte de la debilidad que se lee “*la recta perpendicular o paralela*”, pareciera no estar precisamente relacionada al reactivo, pues en su redacción se menciona “*perpendicular*”, y no paralela, no se trabaja buscando una recta paralela, en este sentido, no es consistente la debilidad presentada, por generalizar el problema hacia casos que incluyan condiciones de paralelismo entre rectas.

Considerando que una recta puede ser representada gráfica y algebraicamente, en el caso del enunciado del reactivo, la recta no “*pasa por una ordenada al origen de una ecuación lineal*”, esto puede expresarse de otra forma más consistente a lo que al parecer se pretende evaluar: “*identificar la representación gráfica de la recta perpendicular a otra, teniendo como dato la ordenada al origen de dicha recta perpendicular*”, dándole consistencia a lo que se pretende evaluar.

El manejo de los diferentes registros de representaciones de un objeto matemático es una competencia matemática que debe desarrollar el estudiante, en la solución del problema planteado se tiene la representación algebraica de una recta, y se solicita relacionarla con su representación gráfica. Una estrategia posible para resolver el reactivo podría ser la siguiente:



La redacción del problema puede ser más adecuada, es decir, concreta y clara, ya que es factible que se genere confusión en el estudiante, y el no responderlo correctamente puede ser producto de no haber entendido lo que se le solicita, en cuyo caso no reflejar necesariamente lo que se señala en la debilidad declarada. Pretendiendo el uso adecuado de los elementos lingüísticos, la redacción del reactivo que pudiera sugerirse “¿Qué gráfica corresponde a la recta que tiene ordenada en el origen en 3 y es perpendicular a la recta cuya ecuación es  $2x-y+3=0$ ?”

Como se ha observado en los párrafos anteriores, la debilidad publicada por ENLACE a los estudiantes que no resuelven el reactivo en forma correcta, se presenta de una forma general, incluyendo tanto rectas perpendiculares como paralelas, aunque en el reactivo se está evaluando solamente lo referente a rectas perpendiculares, y de acuerdo a los reactivos de este tipo de las ediciones anteriores nunca se ha solicitado la relación con rectas paralelas. Por lo antes señalado, no es posible centrar la atención en el análisis de las prácticas incorrectas de los estudiantes que no resuelven correctamente el reactivo, por lo que es difícil hacer una comparación entre lo que se espera que haga quien resuelve el reactivo (sin dejar evidencia de cómo lo resolvió), respecto a las prácticas que ponen en juego quienes lo contestan (correcta o incorrectamente dejando registro escrito de lo que hacen).

Se puede decir que no se cuenta con elementos suficientes respecto de la consistencia, es decir, la relación adecuada entre lo que señala la debilidad y lo que realmente hacen o dejar de hacer quienes resuelven incorrectamente el reactivo.

### 3.3.6 Pertinencia de los distractores con respecto al objeto matemático que se evalúa

Para conocer la pertinencia de los distractores en referencia a los tres que se presentan en el reactivo, se toma en cuenta los siguientes aspectos:

- Frecuencia con la que se selecciona el distractor al ser aplicado a una muestra de estudiantes
- Elementos lingüísticos asociados a los conceptos que se evalúan.

Para tener una idea de la pertinencia de los distractores de cada reactivo utilizamos el criterio de la frecuencia con que éste es seleccionado, para ello tomamos como referencia

los resultados obtenidos al aplicar el reactivo 84 a los 68 estudiantes (sin perder de vista que es un ejercicio realizado en pequeña escala y no necesariamente representativa, para consulta de resultados ver Anexo2). La información obtenida en esta aplicación está presentada en la siguiente tabla:

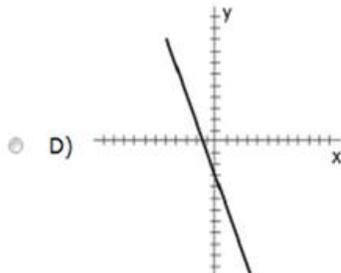
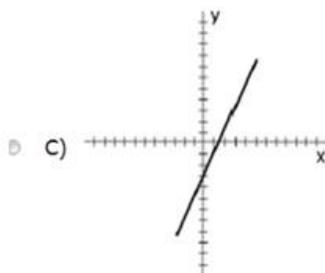
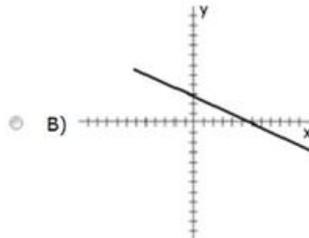
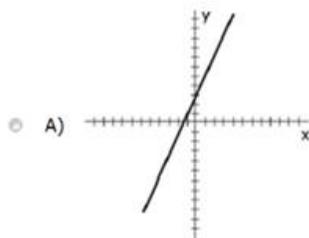
	NÚMERO DE REACTIVO (Respuesta correcta)							
	Prueba ENLACE 2012							
	43 (C)	67 (A)	69 (A)	71 (A)	72 (B)	73 (D)	76 (D)	84 (B)
Número de veces que se seleccionó la opción A	3	32	13	27	10	10	4	15
Número de veces que se seleccionó la opción B	3	19	33	13	47	4	2	14
Número de veces que se seleccionó la opción C	59	1	3	3	2	6	8	13
Número de veces que se seleccionó la opción D	0	4	10	7	0	18	34	3
Total de respuestas por reactivo	65	56	59	60	59	38	48	45

Mo todos los estudiantes contestaron todos los reactivos, razón por la que el total de respuestas por reactivo no coincide con el total de 68 estudiantes.

En azul se señala la frecuencia que obtuvo la opción correcta, anotando que la tabla incluye los ocho reactivos aplicados a los estudiantes de los grupos del estudio, en un contexto diferente al de la aplicación oficial, se hace referencia exclusivamente al reactivo número 84. Como se puede ver para el reactivo 84 la opción D es la que tiene menor frecuencia representando sólo el 6.6 % del total de respuestas, lo cual puede interpretarse bajo este criterio que no es un buen distractor; por otra parte los distractores A y C tienen una frecuencia alta, lo que los pondría en el papel de buenos distractores.

En lo que corresponde al criterio de los elementos lingüísticos asociados a los elementos que se evalúan, y presentes en los distractores, mencionaremos la forma en que están presentados los distractores y la respuesta correcta, en las cuatro opciones de respuesta que se proporcionan al estudiante, revisando:

- Como elemento lingüístico presente en el reactivo, están las opciones de respuesta, muestran representaciones gráficas de rectas.



Las opciones presentan dos rectas con pendiente positiva y dos con pendiente negativa, la opción A es la representación de una recta con pendiente positiva, que cruza al eje x en el punto con coordenadas (-1.5, 0) y al eje y en el punto (0,3), esta opción como distractor puede ser descartada cuando el estudiante identifica que la recta presentada es la recta que corresponde a la ecuación dada en el problema ( $2x-y+3=0$ ).

La opción B representa a una recta que cruza al eje x en el punto con coordenadas (6,0) y al eje y en el punto (0,3), es decir, la ordenada al origen es 3, esta gráfica corresponde a la respuesta correcta.

Las representaciones gráficas de las opciones de respuesta C y D no presentan la ordenada al origen en 3, por lo que el estudiante que opera correctamente el elemento correspondiente a ordenada al origen no las considera, puede ser razón de que estas dos opciones no jueguen un papel adecuado de distractores.

## Capítulo 4. Conclusiones

En este apartado se presentan las conclusiones que se obtuvieron como producto del análisis de los reactivos, en primera instancia se tienen aquellas que están relacionadas con los objetivos que se plantearon al inicio del trabajo, así como las limitaciones de éste y aquellos aspectos que podrían tomarse como punto de partida para trabajos posteriores.

Recordemos que el **objetivo general** es:

Diseñar una propuesta de análisis de reactivos de matemáticas para pruebas estandarizadas, caso particular de la prueba ENLACE, y de la asignatura de Geometría Analítica, que permita identificar la consistencia entre el significado institucional de referencia y el significado institucional evaluado, de acuerdo al objeto de estudio que se evalúa (elipse y recta).

Para el logro de este objetivo general se deberán alcanzar los siguientes **objetivos específicos**

- Caracterizar el significado institucional de referencia del objeto matemático que se evalúa.
- Caracterizar el significado institucional evaluado, respecto al objeto matemático que se evalúa en el reactivo.
- Identificar el nivel de consistencia que hay entre el significado institucional de referencia y el evaluado.
- Identificar las estrategias, argumentos y resultados que muestran estudiantes que resuelven los reactivos, cuando se les aplica con la opción de que registren en hojas de trabajo la forma en cómo lo resuelven.
- Contrastar si hay correspondencia entre la debilidad que publica ENLACE, cuando alguien no resuelve correctamente el reactivo, y lo que el estudiante argumenta al resolverlo (correcta o incorrectamente).

### **Respecto al significado institucional de referencia:**

Los elementos primarios que se identificaron en el significado institucional de referencia y la forma en cómo aparecen en la estructura de los planes de estudio y en los textos, dan indicios de que las prácticas que se promueven en los estudiantes están orientadas a la reproducción de procedimientos, es decir el trabajo con los estudiantes atiende más el aspecto algorítmico que el relacionado con el desarrollo de competencias.

Por otra parte, y en la misma línea que se señala en el párrafo anterior, de acuerdo a la configuración que muestra la forma en que aparecen los elementos de significado, se puede inferir que se promueve una concepción de las matemáticas escolares como una estructura lógico-secuencial rígida, en la que se sigue el siguiente patrón: Definición de conceptos, ejemplos donde usan los conceptos, ejercicios para que los haga el estudiante (del mismo tipo de los ejemplos que se presentan en el texto) y en algunos casos aplicaciones en situaciones en contexto extra matemático, en los que se supone debe aplicar lo aprendido, esto último se señala en los programas de estudio y como parte final del proceso.

### **Respecto al significado institucional evaluado:**

La estructura que presenta el reactivo en cuestión, y los elementos relacionados con él, no permiten identificar los procedimientos ni los argumentos que se utilizan para darle solución, tampoco brinda elementos para relacionarlo con lo que se está evaluando, ya que no brinda la oportunidad al estudiante de presentar sus prácticas al responder (expresar sus procedimientos, argumentos y estrategias), da la impresión de que está centrado únicamente en evaluar el contenido disciplinar del objeto de estudio. En este sentido es posible identificar de manera explícita sólo elementos lingüísticos indispensables para representar a los conceptos que se deben poner en juego.

Por otra parte, en la debilidad que presenta ENLACE sólo reporta de manera muy general lo que el estudiante no pudo hacer al resolverlo incorrectamente, utilizando para ello elementos lingüísticos en el lenguaje natural, pero no profundiza sobre: los conceptos que debería haber utilizado, los procedimientos que no pudo realizar o los argumentos que debería haber empleado.

Bajo estas consideraciones se puede concluir que el reactivo se limita a evaluar contenido disciplinar y no competencias en los términos que las plantea la RIEMS.

### **Respecto al contraste entre el Significado Institucional de Referencia y el Significado Institucional Evaluado**

De acuerdo a la caracterización que se hace del significado institucional de referencia y del evaluado, se puede decir que si hay consistencia en lo que respecta a los conceptos relacionados con la elipse (reactivo 69) o con las rectas perpendiculares (reactivo 84) que se promueven y los que se evalúan, ya que en los diferentes documentos que se revisaron para determinar el significado institucional de referencia aparecen de manera explícita dichos conceptos.

Respecto a las situaciones y procedimientos, en los textos revisados no aparece de manera explícita situaciones resueltas en las que aparezcan estos elementos de significado, sin embargo en al menos uno de los textos si aparece en el apartado de ejercicios situaciones que permiten poner en juego al estudiante prácticas que se requieren para resolver el reactivo. Tomando en cuenta los aspectos antes mencionados se puede concluir que también hay consistencia en los procedimientos que se promueven y los que se evalúan.

El aspecto que está ausente en el significado institucional evaluado es el de argumentación, es decir el diseño de los reactivos no permite evaluar los argumentos que utilizan los estudiantes para responder el reactivo.

### **Acercas de los estudiantes que resuelven los reactivos**

Al aplicar los reactivos a los estudiantes, solicitándoles que registren en hojas de trabajo sus conceptos intervinientes, procedimientos y argumentos, se identificaron elementos como estrategias, argumentos y resultados, los cuales se toman como punto de referencia para interpretar qué es lo que hacen quienes resuelven el reactivo (en forma correcta o incorrecta). De los elementos antes mencionados se observa en algunos casos que lo que hacen los estudiantes no tiene relación con lo que se espera que hagan al resolver el reactivo, es decir, no ponen en juego los objetos intervinientes (algebraicos o aritméticos)

y/o no pueden hacer la transformación de la representación aritmética y/o numérica a la representación gráfica del objeto matemático que se evalúa.

### **De la correspondencia entre la debilidad que declara ENLACE y lo que el estudiante argumenta al resolver el reactivo**

La forma tan general en la que está escrita la debilidad, no permite centrar la atención en el análisis de las prácticas incorrectas de los estudiantes que no resuelven correctamente el reactivo, por lo tanto dificulta hacer una comparación entre lo que se espera que haga quien resuelve el reactivo (sin dejar registro de sus argumentos y estrategias), respecto a las prácticas que ponen en juego quienes lo contestan (correcta o incorrectamente dejando registro escrito de lo que hacen). Ante esta situación se concluye que no se tienen los elementos suficientes para hablar de la consistencia entre lo que realmente hacen o dejar de hacer quienes resuelven incorrectamente el reactivo y lo que plantea ENLACE en la debilidad.

### **Limitaciones del trabajo y posibles líneas de desarrollo para complementar lo que aquí se hizo.**

Algunas de las limitaciones del trabajo son las siguientes:

Para determinar el significado institucional de referencia sólo revisaron los programas de estudio del Bachillerato Tecnológico y de la Dirección General del Bachillerato, así como dos textos recomendados por los profesores; este aspecto creo que puede resultar más enriquecedor si además se analizan programas de otros subsistemas y otros textos.

Un elemento que no se consideró y que puede ser muy enriquecedor, para el análisis de reactivos, es el significado institucional implementado.

Este trabajo presenta una estrategia para analizar reactivos de pruebas estandarizadas, quedando pendientes aspectos que pudieran ser tema de otros trabajos de tesis como:

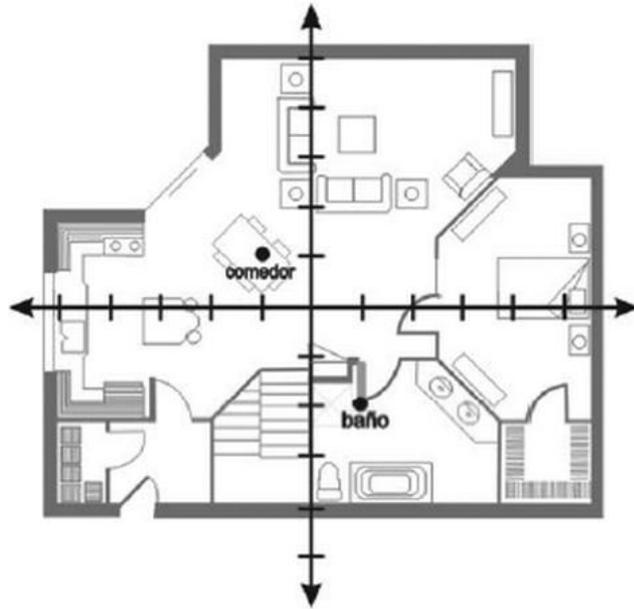
- Diseño de reactivos para pruebas estandarizadas donde se puedan evaluar más elementos de significado como la argumentación o el uso de proposiciones, así como competencias.

- Diseño de estrategias didácticas que coadyuven a superar las dificultades, de mayor incidencia, que presentan los estudiantes al responder los reactivos de la prueba.

## Anexos

### Anexo 1 Reactivos aplicados a los grupos de estudio

43 Una casa se encuentra distribuida como se ilustra en el siguiente plano arquitectónico:

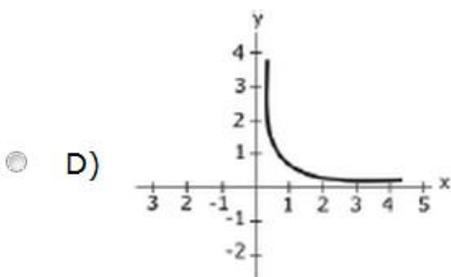
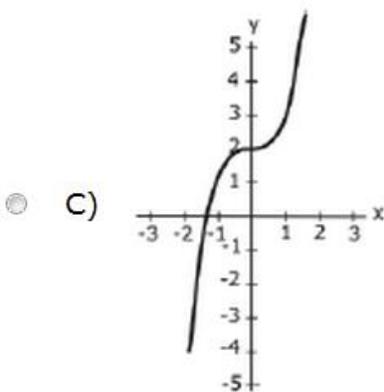
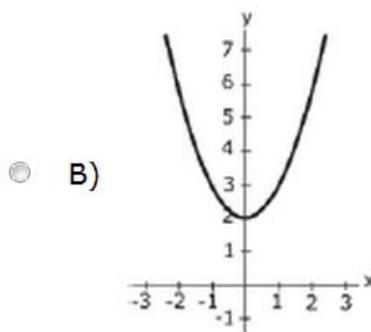
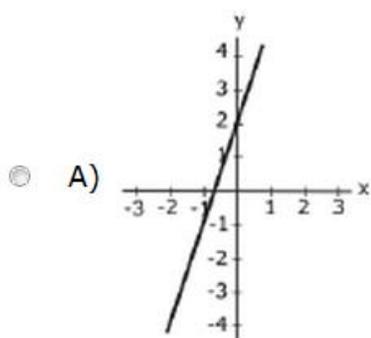


Las coordenadas del centro del comedor y las coordenadas del centro del baño son, respectivamente:

- A)  $(1, 1)$  y  $(1, -2)$
- B)  $(-1, 1)$  y  $(1, 2)$
- C)  $(-1, 1)$  y  $(1, -2)$
- D)  $(1, -1)$  y  $(-1, -2)$

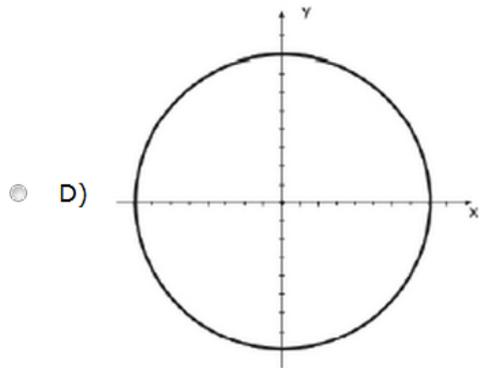
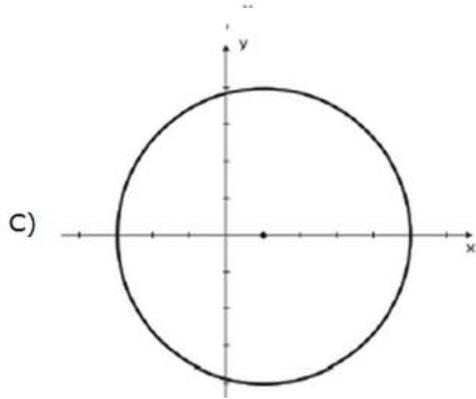
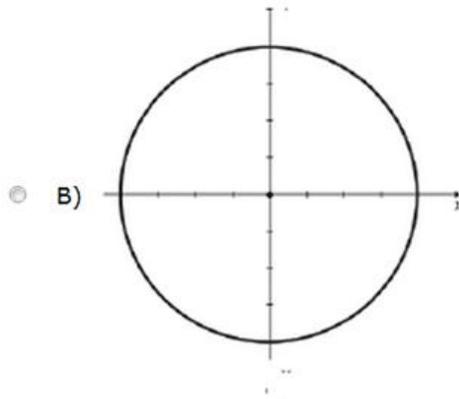
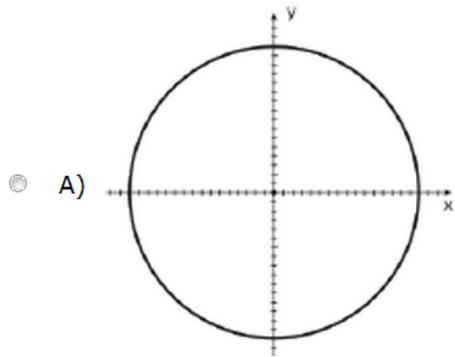
*Respuesta correcta: C*

67 ¿Qué gráfica corresponde a la función  $y$



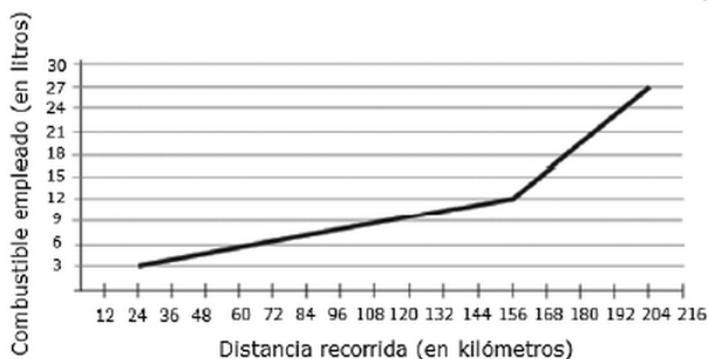
Respuesta correcta: A

69 ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde con la ecuación  $x^2 + y^2 = 16$ ?



Respuesta correcta: B

71 Un vehículo recorre un camino en tres etapas: primero dentro de una ciudad, luego por una autopista y al final por terracería. La siguiente gráfica muestra cuál fue el consumo de combustible durante cada etapa del recorrido.



¿Cuál es el rendimiento por litro en la etapa de terracería?

- A) 3.2
- B) 7.5
- C) 8.0
- D) 14.7

Respuesta correcta: A

72 Verónica regularmente realiza ejercicio en una escaladora. Ha observado cierta relación entre el tiempo y las calorías quemadas. La siguiente tabla muestra algunos datos:

Tiempo (minutos)	Calorías
15	180
21	252
33	
45	540
51	612

¿Cuántas calorías quema Verónica en 33 minutos?

- A) 324
- B) 396
- C) 468
- D) 492

Respuesta correcta: B

73 En una fábrica de lápices se describe el costo de producción de los lápices mediante la siguiente tabla:

Número de lápices	Costo de producción en pesos
4	6
12	8
20	10

Identifique la expresión algebraica que representa el costo de producción en pesos ( $y$ ) dado un número ( $x$ ) de lápices.

- A)  $\frac{1}{2}x - y + 4 = 0$
- B)  $\frac{3}{4}x - y - 1 = 0$
- C)  $x - 4y - 28 = 0$
- D)  $x - 4y + 20 = 0$

Respuesta correcta: D

76 Un empresario promete una donación a una casahogar. Tal donación responde a una relación en donde de acuerdo con el número de días trabajados por las damas voluntarias en la limpieza de la casa, el empresario donará una cierta cantidad en miles de pesos, la cual está representada en la siguiente tabla:

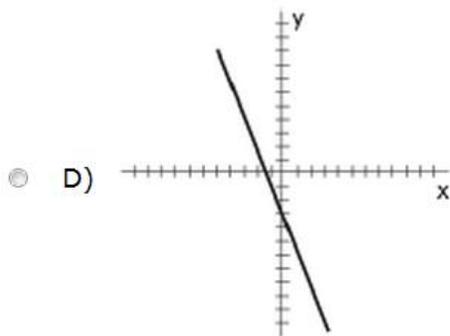
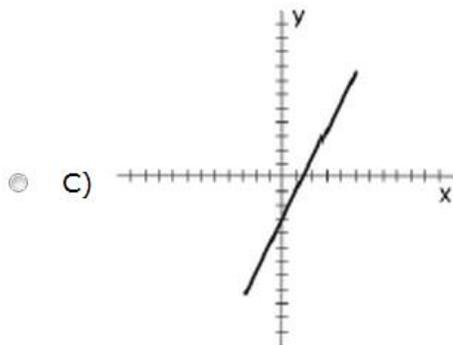
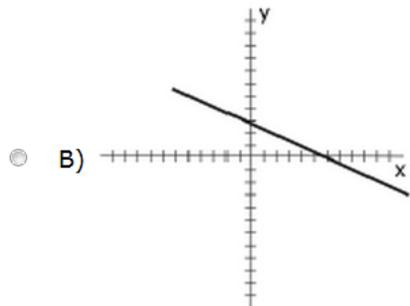
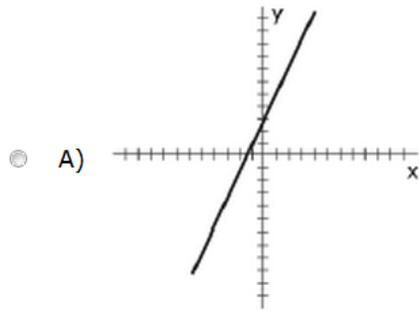
Días laborados	3	4	5
Donación en miles de pesos	3	6	10

¿Cuál es la regla de correspondencia de dicha relación?

- A)  $y = x^2 - 6$
- B)  $y = x^2 - 10$
- C)  $y = \frac{x^2 + 5}{2}$
- D)  $y = \frac{x^2 - x}{2}$

Respuesta correcta: D

84 ¿Cuál gráfica representa la perpendicular de la recta de la ecuación  $2x - y + 3 = 0$  y ordenada al origen 3?



Respuesta correcta: B

## Anexo 2 Resultados de aplicación en grupos

### ANALISIS DE REACTIVOS ENLACE 2012 CORRESPONDIENTES A LA MATERIA DE GEOMETRIA ANALITICA INDICE DE DIFICULTAD, INDICE DE DISCRIMINACION Y COEFICIENTE DE CORRELACION PARA CONOCER LA VALIDEZ DE CADA REACTIVO

#### RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

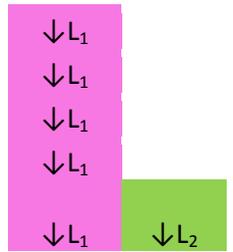
#### CRITERIOS

#### NUMERO DE REACTIVO / RESPUESTA CORRECTA

#### CALCULO DE:

No.	CARRERA	NOMBRE DEL ESTUDIANTE	NUMERO DE REACTIVO / RESPUESTA CORRECTA								CALIFICACION x100	CALCULO DE:	
			43 / C	67 / A	69 / B	71 / A	72 / B	7 / 3 D	76 / D	84 / B		D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>
1	TPDB	MITRE APAEZ ANDREA	C	A	B	A	B	D	D	B	1000	↑ U <sub>1</sub>	↑ U <sub>2</sub>
2	TPDB	TIZNADO VERDIN DIANA	C	A	B	A	B	D	D	A	875	↑ U <sub>1</sub>	↑ U <sub>2</sub>
3	TPDB	PABLOS CRUZ LUIS FERNANDO	C	A	B	A	B	D	D	A	875	↑ U <sub>1</sub>	↑ U <sub>2</sub>
4	TAAM	MALDONADO BRYAN	C	A	D	A	B	D	D	D	750	↑ U <sub>1</sub>	↑ U <sub>2</sub>
5	TAAM	SARABIA FLORES MARIA FERNANDA	C	A	A	A	B	D	C	B	750	↑ U <sub>1</sub>	↑ U <sub>2</sub>
6	TAAM	RUELAS GARCIA JAQUELINE	C	A	A	A	B		D	B	750	↑ U <sub>1</sub>	↑ U <sub>2</sub>
7	TAAM	GALLEGOS R MARISELA A	C	A	B		B		D	B	750	↑ U <sub>1</sub>	↑ U <sub>2</sub>
8	TAAM	ROMERO LOPEZ ROSA ANGELICA	C	A	B	A	B		A	B	750	↑ U <sub>1</sub>	↑ U <sub>2</sub>
9	TAAM	MONTEVERDE CLAUDIA	C	A	B	B	B		D	B	750	↑ U <sub>1</sub>	↑ U <sub>2</sub>
10	TAAM	CABRALES MONROY JESUS ANTONIO	C	A	B	B	B	D	D		750	↑ U <sub>1</sub>	↑ U <sub>2</sub>
11	TAAM	NARVAEZ CERVANTES BARBARA	C	A	B	B	B	D	D		750	↑ U <sub>1</sub>	↑ U <sub>2</sub>
12	TPDB	SALDAMANDO ALEJANDRA	B	A	B	A	B	D	D	A	750	↑ U <sub>1</sub>	↑ U <sub>2</sub>
13	TPDB	MEJIA G ROBERTO CARLOS	C	A	B	C	B	D	D	A	750	↑ U <sub>1</sub>	↑ U <sub>2</sub>
14	TPDB	FELIZ LOPEZ JESUS ANGEL	C	A	D	D	B	D	D	B	750	↑ U <sub>1</sub>	↑ U <sub>2</sub>
15	TEL	RIVERA FIGUEROA JOSE TOMAS	C	A		A	B	D	A	B	750	↑ U <sub>1</sub>	↑ U <sub>2</sub>
16	TAAM	LUCERO MURILLO MARIA GUADALUPE	C	D	B	A	B	D	C	C	625	↑ U <sub>1</sub>	
17	TAAM	MEZA LOPEZ ALICIA	C	A	D	B	B	D	D	A	625	↑ U <sub>1</sub>	
18	TAAM	FELIZ CAMPA JORDAN JAVIER	C	A	B	B	B		D		625	↑ U <sub>1</sub>	
19	TPDB	MORALES CASTRO PABLO CESAR	C	B	B	D	B	A	D	B	625		
20	TPDB	CORONADO LEBLOHC IVANNA	C	B	B	A	A	C	D	B	625		
21	TPDB	CAREAGA CASTRO ISAAC FERNANDO	C	B	B	A	B	B	C	B	625		

22	TEL	PRECIADO MEXIA MONICA ISABEL	C	A	B	D	B	C	D	A	625
23	TEL	LIZARRAGA MARTINEZ CRISTAL	C	A	B	D	B	A	D	D	625
24	TEL	GAYTAN SALAZAR JESUS CARLOS	C	B	C	A	B	D	D	A	625
25	TEL	LEON VELAZQUEZ SAMUEL FERNANDO	C	A	B		B		D		625
26	TAAM	VALLE B GUADALUPE ENEDINA	A	D	B		B		D	B	500
27	TAAM	PRECIADO C BRICETH	B	A	B	A	B				500
28	TAAM	BAEZ GUERRA LIZANDER	C		B	A	B				500
29	TAAM	FLORES CURIEL JENNY V	C	A	B	A	B				500
30	TAAM	IBARRA PEREZ RAUL EDUARDO	C	A	A	B	B	A	D	A	500
31	TEL	VALDEZ VEGA HECTOR JAVIER	C	A	B				D	C	500
32	TEL	LOPEZ VALENZUELA RAFAEL	C	A	B	D	A	C	D	C	500
33	TEL	GARCIA BUSTOS CESAR HUGO	C	A	B	C	B	C	B	A	500
34	TEL	MUÑOZ LOPEZ RAUL ISAAC	C	A	D	C	B	A	D	A	500
35	TEL	VEGA VALENZUELA MARCIAL ANTONIO	C	B	C	A	B	A	D	A	500
36	TEL	MEDINA REYES CARLOS JESUS	C	B	D	A	B	D	C		500
37	TEL	ROMERO MARTINEZ MANUEL A.	C	A	D	A	B				500
38	TEL	MUÑOZ CAMEZ JESUS JAZMIN	A		B	A	B		D		500
39	TPDB	MENDEZ PASOS DOMENICA CITLALI	C		B	A	B	A	D		500
40	TPDB	ESTRADA GURROLA EDGAR ALBERTO	C	B	B	A	B	A	D	C	500
41	TAAM	MAYER MEDRANO ANA KAREN	C	B	B		C	D	C	A	375
42	TAAM	TESISTECO DOMINGUEZ DIANA LAURA	C	B	B		A		C	B	375
43	TAAM	DE LA ROSA JOSE LUIS	C	A	A		B			C	375
44	TAAM	ACEVES SALAZAR BEATRIZ ARABELLA	C	B	D	A	B				375
45	TAAM	VALLE SALVATIERRA JENNIFER	C	B	A	A	B		A	D	375
46	TAAM	DUARTE BARRERA VALERIA	C	D	D	B	B	C	D	A	375
47	TAAM	CAMPA ACEDO ALMA DELIA	C	D	D	B	B	C	D	C	375
48	TPDB	SANCHEZ TESISTECO PATRICIA	C	A	B						375
49	TEL	RUELA M ILSE MARIA	C		B		A	B	D	C	375
50	TEL	GUILLEN ZATARAIN YOSELINE	C		C		A	D		B	375
51	TEL	ARELLANO FUENTES JESUS MARTIN	C		D	A	B				375
52	TAAM	PACHECO HERNANDEZ MANUEL DE JESUS	C	B	A			D		C	250



53	TAAM	VEGA HERRERA CAROLINA	C	B	A	A		D	C	250	↓L <sub>1</sub>	↓L <sub>2</sub>
54	TAAM	CABRALES MONROY JESUS ANTONIO	C	C	D	A	C	A	A	250	↓L <sub>1</sub>	↓L <sub>2</sub>
55	TAAM	RUIZ P GLORIA GUADALUPE	C	A	D	B		B	C	250	↓L <sub>1</sub>	↓L <sub>2</sub>
56	TPDB	NAVA HERNANDEZ ALEXIS	A	A	A	B		D	A	250	↓L <sub>1</sub>	↓L <sub>2</sub>
57	TPDB	AVILA ONTIVEROS ERNESTO ANDRES	B	B	B	D	B		C	250	↓L <sub>1</sub>	↓L <sub>2</sub>
58	TEL	CARAVEO GONZALEZ SILVANO	C	B		A		A	B	250	↓L <sub>1</sub>	↓L <sub>2</sub>
59	TEL	MORALES CORTEZ MIGUEL RICARDO	C				B			250	↓L <sub>1</sub>	↓L <sub>2</sub>
60	TEL	LEYVA GUERRERO LUIS FELIPE	C	B			B		C	250	↓L <sub>1</sub>	↓L <sub>2</sub>
61	TEL	AGULAR PACHECO RODOLFO	C	B		D	B	A		250	↓L <sub>1</sub>	↓L <sub>2</sub>
62	TAAM	FELIX CAMPA CESAR ARATH	C	B	A	B	A		C	125	↓L <sub>1</sub>	↓L <sub>2</sub>
63	TAAM	AMAVIZCA CASTILLO ELSA	C	B	A	B	A	B	C	125	↓L <sub>1</sub>	↓L <sub>2</sub>
64	TAAM	VIERA RANGEL JUAN JESUS	C			C	A			125	↓L <sub>1</sub>	↓L <sub>2</sub>
65	TAAM	RIOS GALLEGOS ALEJANDRO	C		D	B	A			125	↓L <sub>1</sub>	↓L <sub>2</sub>

	Número de reactivo	43	67	69	71	72	74	76	84
NÚMERO DE VECES OPCION A		3	32	10	27	10	10	4	15
NÚMERO DE VECES OPCION B		3	19	33	13	47	4	2	14
NÚMERO DE VECES OPCION C		59	1	3	3	2	6	8	13
NÚMERO DE VECES OPCION D		0	4	13	7	0	18	34	3
Total de respuestas por reactivo		65	56	59	60	59	38	48	45

#### CODIGOS

A,B,C o D	Respuesta correcta
A,B,C o D	Respuesta incorrecta
	No contestó
TPDB	Técnico en pesca deportiva y buceo
TAAM	Técnico en acuicultura
TEL	Técnico en electrónica

↑ U <sub>1</sub>	Grupo alto criterio 1
↓ L <sub>1</sub>	Grupo bajo criterio 1
↑ U <sub>2</sub>	Grupo alto criterio 2
↓ L <sub>2</sub>	Grupo bajo criterio 2

## Anexo 3 Análisis estadístico de reactivos

### Validez y eficacia de reactivos

La validez en una prueba se define como el grado en que mide lo que está diseñada para medir. Los métodos por los cuales puede determinarse la validez incluyen, a) analizar el contenido de la prueba, b) calcular la correlación entre las calificaciones en la prueba y las calificaciones del criterio de interés, c) investigar los constructos medidos por la prueba (Aiken L. 2003). En este apartado se trabaja con lo correspondiente a lo marcado en el inciso b.

Respecto a la eficacia de los reactivos en la prueba, el procedimiento empleado para determinarla, depende en cierta medida del propósito de la misma, por ejemplo, la institución examinadora puede estar interesada en determinar qué tanto sabe un estudiante acerca del material de la prueba, no en comparar su desempeño con el de otras personas; en este caso el desempeño se mide contra un criterio o estándar establecido por una política institucional. El objetivo de tal evaluación con referencia a un criterio es conocer en qué nivel se encuentra la persona evaluada en cuanto a determinados objetivos contenidos en el programa de estudios, y no conocer qué calificación obtiene una persona en relación con otras.

Al diseñar una prueba para medir el logro de determinadas habilidades tenemos un tipo particular de prueba con referencias a criterio, y se conoce como prueba de dominio. La calificación de un estudiante en una prueba de dominio, o en cualquier otra prueba con referencias a un criterio, se puede expresar numéricamente, por ejemplo con escala de calificaciones que va de 0 a 10; una calificación de 10 indica dominio de lo que se está evaluando.

El criterio que se utiliza en el presente trabajo de investigación, considera como base la calificación que obtienen un grupo de 68 estudiantes (muestra tomada de un total de 222 estudiantes) de sexto semestre, del Centro de Estudios Tecnológicos del Mar 03. Este criterio se utiliza al aplicar a los estudiantes los ocho reactivos relacionados con el contenido de la materia de Geometría Analítica

de la prueba ENLACE 2012. El valor numérico para cada reactivo si es contestado correctamente es de 1.25 puntos; por ejemplo, si un estudiante contesta los ocho reactivos en forma correcta, se considera un valor numérico de 10.

### **Validez del reactivo**

La validez de un reactivo puede determinarse al correlacionar las calificaciones de un reactivo con las calificaciones de la medida de criterio, que es la calificación total de cada estudiante obtenida al revisar las respuestas de los ocho reactivos aplicados. Utilizaremos un coeficiente de correlación para conocer la validez del reactivo; que es el coeficiente biserial puntual, y se calcula de la siguiente manera:

$$rpb = \frac{(Yp - Y)\sqrt{nt * np / ((nt - np)(np - 1))}}{St}$$

Donde:

*rpb*= Coeficiente de correlación

*nt*= Cantidad total de estudiantes examinados.

*np*= La cantidad de estudiantes examinados que responden correctamente.

*Yp*= La media de las calificaciones de quienes contestan correctamente el reactivo.

*Y*= La media de todas las calificaciones de criterio (la media de calificaciones del grupo).

*St*= La desviación estándar de todas las calificaciones de criterio (de calificaciones del grupo).

Cuanto más elevada sea la correlación entre el reactivo y el criterio (valores cercanos a 1), más preciso será el reactivo como predictor del criterio. Si los resultados al revisar los reactivos arrojan un valor de la correlación que sea cercana o menor a 0, sin duda deben revisarse o descartarse. Teniendo el valor de este coeficiente podemos emitir una consideración hacia el reactivo en cuanto a conservarse en el instrumento o a ser revisado o rechazado.

### **Índice de dificultad del reactivo (*d*)**

Para calcular este índice estadístico, la cantidad total de estudiantes examinados la dividimos en tres grupos según las calificaciones que obtuvieron en la prueba: un grupo superior formado por el 27% de estudiantes, que obtuvo las calificaciones más altas, un grupo inferior conformado por el 27% de estudiantes

que obtuvo las calificaciones más bajas y un grupo intermedio con el 46% de los estudiantes.

El valor numérico para el índice de dificultad ( $d$ ) del reactivo puede estar en el rango de 0 a 1, si al calcular este índice, un reactivo nos presenta un  $d=0$  es un reactivo que ningún estudiante contestó en forma correcta; por otro lado, un reactivo con índice de dificultad  $d=1$  es un reactivo que todos los estudiantes respondieron correctamente. Para determinar el índice de dificultad del reactivo ( $d$ ) tenemos:

$$d = \frac{Up + Lp}{U + L}$$

Donde:

$Up$  y  $Lp$  representan el número de estudiantes contenidos en los grupos superior e inferior respectivamente y que aciertan el reactivo.

$U$  y  $L$  son el número total de estudiantes en los grupos superior e inferior respectivamente ( $U=L$ ).

El índice medio óptimo de la dificultad de los reactivos para pruebas con reactivos de opción múltiple con cuatro opciones de respuesta es de 0.74. [21].

### **Índice de discriminación del reactivo ( $D$ )**

Es una medida de la eficacia de un reactivo; para determinar este índice se opera con los datos de las calificaciones de los estudiantes que obtienen altas y bajas calificaciones en una prueba (a los que llamamos grupo superior y grupo inferior). Los valores para este índice están comprendidos entre 0 y 1. Mientras más elevado sea el valor de  $D$ , resulta más eficaz para establecer dicha distinción. Cuando  $D=1$ , todos los examinados del grupo superior y ninguno del grupo inferior en las calificaciones totales de la prueba respondieron el reactivo en forma adecuada, esto casi nunca sucede. Se considera aceptable un reactivo si tiene un índice de discriminación de 0.30 o mayor. Para determinar el Índice de Discriminación del reactivo ( $D$ ) tenemos:

$$D = \frac{Up - Lp}{U}$$

Donde:

$U_p$  y  $L_p$  representan el número de estudiantes contenidos en los grupos superior e inferior respectivamente y que aciertan el reactivo.

$U$  es el número total de estudiantes en el grupo superior (con la consideración inicial de que  $U=L$ ).

Si  $U$  y  $L$  se consideran con referencia a criterios diferentes y se diseñan para ubicar a los examinados en objetivos pedagógicos específicos, no necesariamente tendrán el mismo valor numérico. El grupo de examinados  $U$  con calificaciones totales de la prueba que cumplen con el criterio establecido de desempeño aceptable, y el grupo  $L$ , cuyas calificaciones totales no satisfacen los criterios. Entonces el Índice de Dificultad del reactivo se obtiene:

$$D = \frac{U_p}{U} - \frac{L_p}{L}$$

$U_p$  y  $L_p$  representan el número de estudiantes contenidos en los grupos superior e inferior respectivamente y que aciertan el reactivo.

$U$  y  $L$  son el número total de estudiantes en los grupos superior e inferior respectivamente ( $U \neq L$ ).

### **Análisis de distractores**

El análisis de reactivos de opción múltiple puede comenzar calculando índices de discriminación y dificultad para cada reactivo. Como complemento del análisis podemos darnos a la tarea de conocer el funcionamiento de los distractores para cada reactivo. El Índice de Discriminación de reactivos ( $D$ ) proporciona cierta información sobre el funcionamiento de los distractores en conjunto. Un valor de  $D$  positivo indica que los examinados en el grupo superior (en la calificación total de la prueba) tendieron a seleccionar uno de los distractores; la magnitud  $D$  indica la medida de esta tendencia. Por otra parte, un valor de  $D$  negativo indica que los distractores se eligieron con mayor frecuencia por examinados del grupo superior que por los del grupo inferior y que el reactivo debe revisarse. Sin embargo, el signo y la magnitud de  $D$  no nos permiten saber si todos los distractores funcionaron de manera adecuada.

Para determinar si todos los distractores están funcionando adecuadamente habremos de contar el número de veces que cada distractor se seleccionó como la respuesta correcta por los examinados de ambos grupos, el grupo superior y el

grupo inferior. Podemos considerar como necesaria la recomendación de revisión o eliminación de uno de los distractores cuando se observa que una cantidad grande de examinados del grupo superior o muy pocos del grupo inferior lo seleccionaron. Considerando una situación ideal, todos los distractores deberían ser igualmente aceptables para los examinados que no conocen la respuesta correcta de un reactivo; en consecuencia, todo distractor debe ser seleccionado por alrededor de la misma cantidad de personas.

En el presente apartado, se obtiene el Coeficiente de Correlación, Índice de Dificultad Índice de Discriminación y Análisis de los distractores para los reactivos de la materia de Geometría Analítica del a prueba ENLACE 2012, la muestra en el caso de estudio son 65 estudiantes de sexto semestre del CETMar 03. En el Anexo 6 se presentan los resultados de la aplicación de los reactivos en forma detallada.

La matriz de referencia para determinar la validez del reactivo, su eficacia y la pertinencia de distractores al utilizar los indicadores de correlación, índice de dificultad e índice de discriminación:

MATRIZ DE REFERENCIA		
OBJETIVO	VARIABLES	INDICADORES
Determinar la validez, eficacia y pertinencia de distractores de reactivos de la prueba Enlace correspondientes a Geometría Analítica	Validez del reactivo	Correlación entre las calificaciones de la prueba y las calificaciones del criterio de interés
	Eficacia del reactivo	Índice de dificultad de reactivos e Índice de discriminación de reactivos
	Pertinencia de los distractores	Análisis de funcionalidad de distractores. Frecuencia de selección para cada opción de respuesta

*Matriz de referencia para las variables*

En las tablas siguientes se muestran los valores obtenidos para el coeficiente de correlación de los ocho reactivos. Por ejemplo para el reactivo 43, que respondió la mayoría de los estudiantes en forma correcta, se tiene un coeficiente de correlación de 0.07 y en el caso del reactivo número 84, que pocos estudiantes contestaron correctamente, el coeficiente de correlación es de 0.94. lo que nos indica para el primer caso que el reactivo debe revisarse o desecharse, para el segundo caso el reactivo muestra precisión respecto al criterio utilizado; 8 de los estudiantes del grupo alto sí responden correctamente el reactivo, mientras que los del grupo bajo no lo resuelve correctamente alguno de ellos (0).

En el caso del reactivo número 73, con un valor de correlación de 0.994 y muestra un comportamiento similar al reactivo 84, en el que 11 estudiantes del grupo alto lo contestan correctamente y 0 estudiantes del grupo bajo lo contestan correctamente.

		NUMERO DE REACTIVO							
		43	67	69	71	72	73	76	84
Total de estudiantes que participan en la prueba	<i>nt</i>	65	65	65	65	65	65	65	65
Total de estudiantes que contestan correctamente	<i>np</i>	59	32	33	27	47	18	34	14
Media de calificaciones de los que contestan correctamente	<i>Yp</i>	5.064	6.289	5.859	5.469	5.771	6.736	6.136	6.696
Media de calificaciones del total de estudiantes	<i>Y</i>	5.019	5.019	5.019	5.019	5.019	5.019	5.019	5.019
Desviación estándar (De todas las calificaciones del grupo)	<i>St</i>	2.09	2.09	2.09	2.09	2.09	2.09	2.09	2.09
<b>Coeficiente de correlación (Coeficiente biserial puntual)</b>	<b><i>r<sub>pb</sub></i></b>	<b>0.07</b>	<b>0.866</b>	<b>0.582</b>	<b>0.287</b>	<b>0.691</b>	<b>0.994</b>	<b>0.785</b>	<b>0.94</b>

$$r_{pb} = \frac{(Y_p - Y) \sqrt{nt * np / ((nt - np)(np - 1))}}{St}$$

Coeficiente de correlación

		NUMERO DE REACTIVO								
		43	67	69	71	72	73	76	84	
<b>Índice de dificultad del reactivo <i>d</i></b>										
Tiene un rango de 0 a 1										
Si <i>d</i> =0, nadie contestó correctamente										
Si <i>d</i> =1 todos contestaron correctamente										
$d = \frac{U_p + L_p}{U + L}$	<b>Caso 1: Índice de dificultad <i>d</i><sub>1</sub> con <i>U</i><sub>1</sub>=<i>L</i><sub>1</sub></b>	<b><i>d</i><sub>1</sub></b>	0.917	0.556	0.417	0.361	0.639	0.417	0.472	0.25
	<b>Caso 2: Índice de dificultad <i>d</i><sub>2</sub> con <i>U</i><sub>2</sub>≠<i>L</i><sub>2</sub></b>	<b><i>d</i><sub>2</sub></b>	<b>0.897</b>	<b>0.586</b>	<b>0.414</b>	<b>0.345</b>	<b>0.621</b>	<b>0.414</b>	<b>0.448</b>	<b>0.241</b>

Índice de dificultad

$$D = \frac{U_p - L_p}{U}$$

<b>Índice de discriminación del reactivo D<sub>1</sub></b> Con el criterio U <sub>1</sub> =L <sub>1</sub> = 27% del total de estudiantes		NUMERO DE REACTIVO							
		43	67	69	71	72	73	76	84
Del grupo alto y que contestan correctamente:	U <sub>1p</sub>	17	17	12	10	18	13	14	8
Del grupo bajo y que contestan correctamente:	L <sub>1p</sub>	16	3	3	3	5	2	3	1
U <sub>1</sub> =L <sub>1</sub> = 27% del total de estudiantes	U <sub>1</sub> =L <sub>1</sub>	18	18	18	18	18	18	18	18
<b>Índice de discriminación D<sub>1</sub></b>	<b>D<sub>U=L</sub></b>	0.056	0.778	0.5	0.389	0.722	0.611	0.611	0.389

*Índice de Discriminación D<sub>1</sub>*

$$D = \frac{U_p}{U} - \frac{L_p}{L}$$

<b>Índice de discriminación del reactivo D<sub>2</sub></b> Con el criterio U <sub>2</sub> diferente de L <sub>2</sub>		NUMERO DE REACTIVO							
		43	67	69	71	72	73	76	84
Del grupo alto y que contestan correctamente:	U <sub>2p</sub>	14	15	11	8	14	11	11	7
Del grupo bajo y que contestan correctamente:	L <sub>2p</sub>	12	2	1	2	4	1	2	0
Consideramos al grupo alto U <sub>2</sub> con 750 o más	U <sub>2</sub>	15	15	15	15	15	15	15	15
Consideramos al grupo bajo L <sub>2</sub> con 250 o menos	L <sub>2</sub>	14	14	14	14	14	14	14	14
<b>Índice de discriminación D<sub>2</sub></b>	<b>D<sub>U≠L</sub></b>	0.076	0.857	0.662	0.39	0.648	0.662	0.59	0.467

*Índice de Discriminación D<sub>2</sub>*

Abreviaturas utilizadas	
U <sub>p</sub>	Cantidad de estudiantes del grupo alto que contestan correctamente
L <sub>p</sub>	Cantidad de estudiantes del grupo bajo que contestan correctamente
U	Cantidad Total de estudiantes del grupo alto
L	Cantidad Total de estudiantes del grupo bajo

Para conocer el funcionamiento de los distractores en cada reactivo, anotamos en la siguiente tabla, el número de veces que fue utilizada cada opción de respuesta seleccionada de entre las cuatro opciones presentada, en todos los casos, la opción mayormente elegida por los estudiantes coincide con la respuesta correcta, en la tabla se marca con color azul la respuesta correcta:

	NUMERO DE REACTIVO							
	43 C	67 A	69 B	71 A	72 B	73 D	76 D	84 B
NÚMERO DE VECES QUE SE SELECCIONO LA OPCION A	3	32	10	27	10	10	4	15
NÚMERO DE VECES QUE SE SELECCIONO LA OPCION B	3	19	33	13	47	4	2	14
NÚMERO DE VECES QUE SE SELECCIONO LA OPCION C	59	1	3	3	2	6	8	13
NÚMERO DE VECES QUE SE SELECCIONO LA OPCION D	0	4	13	7	0	18	34	3
Total de respuestas por reactivo	65	56	59	60	59	38	48	45

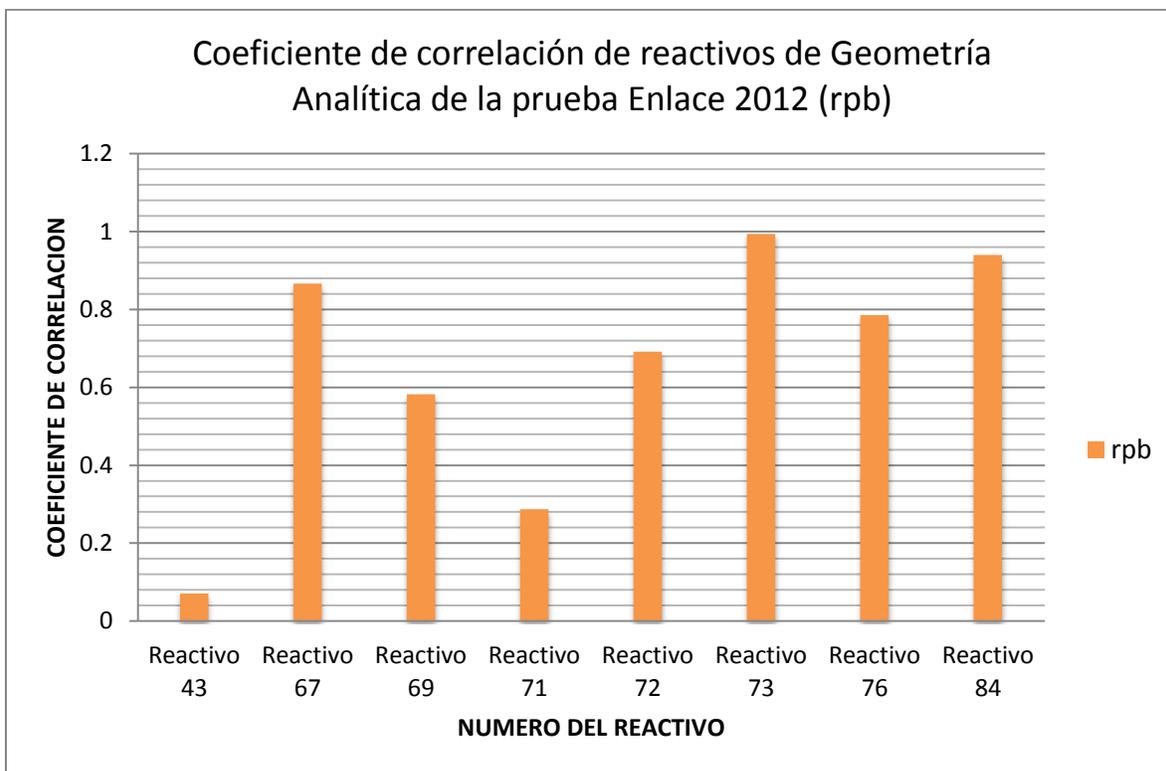
*Respuestas a distractores y respuesta correcta*

## Comentarios de los resultados del análisis estadístico realizado a los reactivos de Geometría Analítica de la prueba Enlace 2012.

### Coeficiente de correlación

Presentamos primeramente la Gráfica 1 en la que tenemos el coeficiente de correlación para los ocho reactivos seleccionados, vemos que para el reactivo número 43, el coeficiente es de 0.07, este valor bajo nos indica que el reactivo es poco preciso, sin validez como predictor de un comportamiento, por lo que debe revisarse o desecharse, ya que un porcentaje alto de estudiantes del grupo bajo, y todos los estudiantes del grupo alto respondieron correctamente el reactivo.

En el caso de los reactivos 73 y 84, que son los que presentan un índice de correlación cercano a 1, hay más precisión en el reactivo como predictor del criterio, es decir, gran parte de los estudiantes del grupo alto responden correctamente el reactivo y ningún estudiante del grupo bajo logra responderlo correctamente. Estos reactivos no son resueltos satisfactoriamente por gran número de estudiantes, tanto del grupo medio como del grupo bajo.

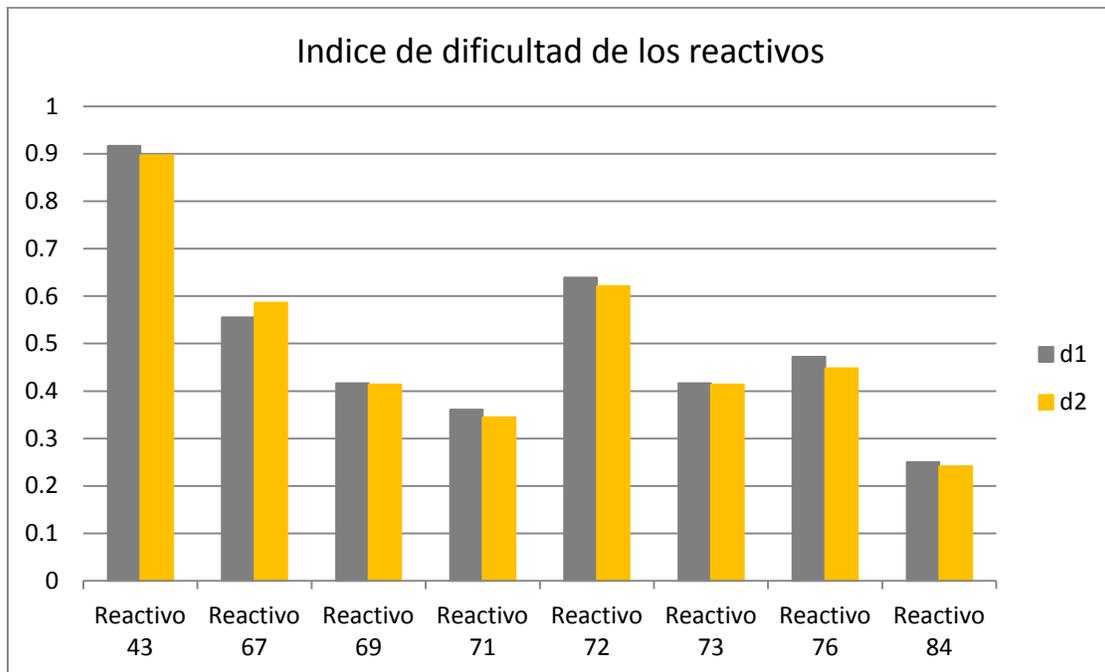


Gráfica 1. Coeficiente de correlación

## Índice de Dificultad de los reactivos-d

Los resultados obtenidos en lo que respecta al índice de dificultad de los reactivos presentamos en la Gráfica 2 los dos casos revisados. Las barras en color gris corresponden al criterio de considerar al grupo alto y al grupo bajo, con igual cantidad de estudiantes, un 27% del total en cada grupo. Las barras en color naranja, representan el resultado de aplicar el criterio considerando como grupo alto a los estudiantes que obtuvieron 750 o más de calificación, y como grupo bajo, a los estudiantes que obtuvieron 250 o menos. En la gráfica no se aprecian diferencias significativas entre los valores obtenidos para el índice de dificultad de ambos criterios.

Observamos que el reactivo número 43, lo respondió correctamente la mayoría de los estudiantes, mientras que para el reactivo número 84 hubo pocos estudiantes que lo respondieron correctamente, por lo que para el primer caso se puede considerar como un reactivo que no presenta dificultad para resolverlo, y en el segundo caso, el 84, se considera como un reactivo difícil. Para los reactivos números 67 y 72, se consideran de mediana dificultad, por estar el índice de dificultad en un valor cercano a 0.5.

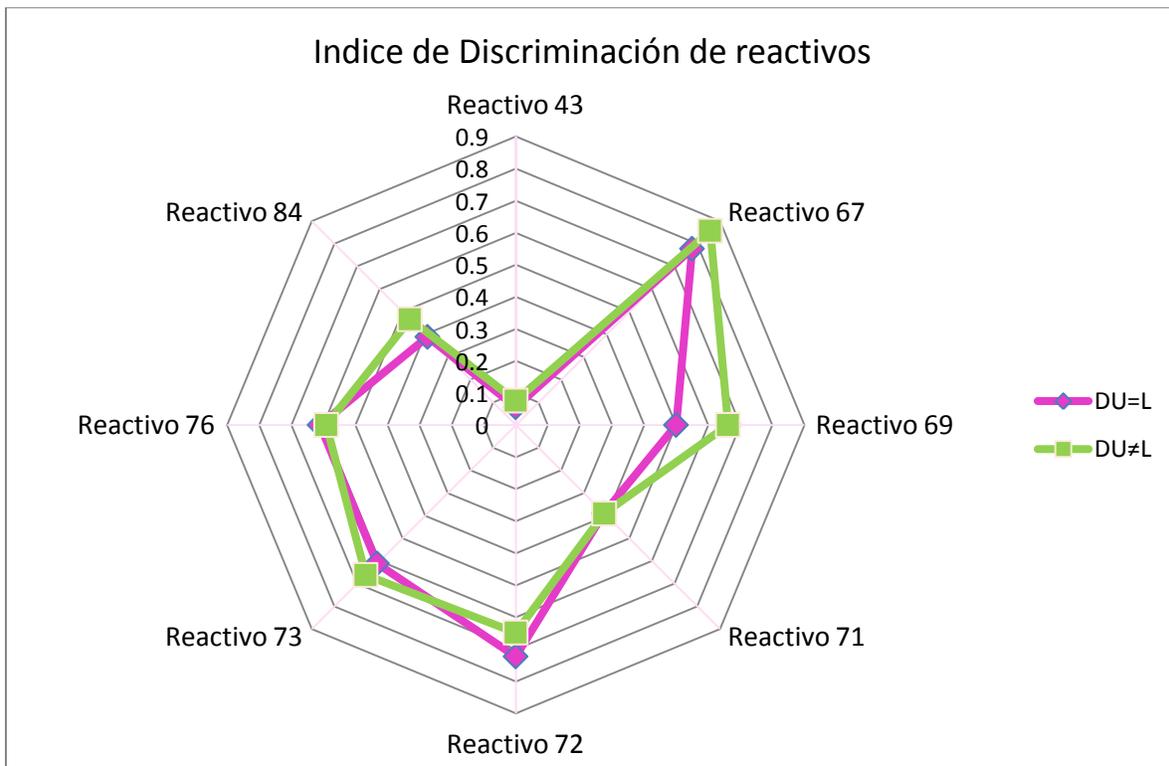


Gráfica 2. Índice de dificultad de los reactivos

## Índice de Discriminación de reactivos-D

En lo correspondiente a los resultados obtenidos para el índice de Discriminación de los reactivos analizados, presentamos su comportamiento en la Gráfica 3, se indica con color diferente cada caso según el criterio utilizado; el color verde representa el comportamiento del índice cuando el grupo superior (calificaciones altas) es igual en cantidad de estudiantes al grupo inferior (calificaciones bajas)

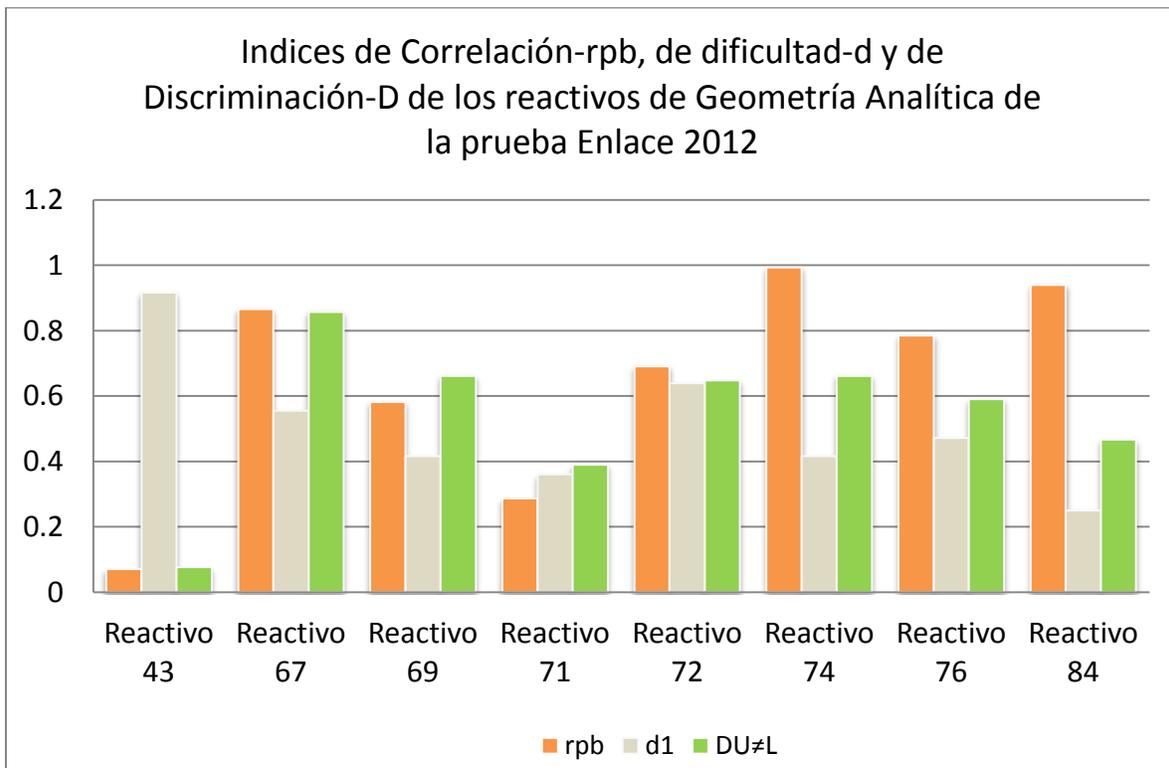
Como ejemplo citamos al reactivo número 67, en el que ambos valores son cercanos a 1, lo que indica que todos los examinados del grupo superior y muy pocos del grupo inferior, resolvieron correctamente el reactivo, por lo que se considera un reactivo eficaz, caso contrario para el reactivo 43, en el que el valor del Índice de Discriminación es cercano a cero. Los reactivos 72 y 84, se consideran aceptables, ya que el cálculo del índice arrojan valores superiores a 0.3 e inferiores a 0.5, que se obtienen aplicando ambos criterios (primer criterio, grupos superior e inferior con igual número de estudiantes, y segundo criterio, grupo superior con calificaciones de 750 o más y grupo inferior con calificaciones de 250 o menos), interpretándose que pocos estudiantes de los grupos altos lo resolvieron correctamente, y ningún estudiante de los grupos bajos.



Gráfica 3. Índice de Discriminación de reactivos

## La información que nos proporcionan los índices calculados

En la Gráfica 4 se presentan agrupados por reactivo, los Índices de correlación, de dificultad y de discriminación, son de especial interés los comportamientos que se presentan para los reactivos 43 y 84, el primero es un reactivo no difícil y que responden correctamente la mayoría de los estudiantes, con poca validez y que debe revisarse o desecharse. Por el contrario, el reactivo 84 con una correlación cercana a 1, es un reactivo válido como predictor del criterio, en el que pocos estudiantes del grupo alto y nadie del grupo bajo lo resuelve. Es el reactivo más difícil de los ocho seleccionados y su eficacia, medida con el índice de discriminación está por encima del valor de 0.3, en el que se puede considerar al reactivo como aceptable.

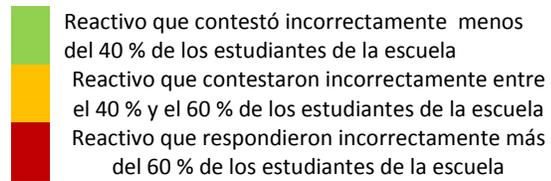


Grafica 4. Índices de correlación, dificultad y discriminación

## Resultado de los 8 reactivos en 57 planteles del Estado de Sonora

Las figuras 1 y 2 presentan los resultados para los 8 reactivos de Geometría Analítica de la prueba ENLACE 2012 de 57 de los planteles de EMS en el Estado de Sonora.

Clave de colores utilizados



PLANTEL	LOCALIDAD	Reactivo						
		43	67	69	71	72	73	76
CBTIS 11	HERMOSILLO	Verde	Verde	Verde	Naranja	Verde	Naranja	Verde
CBTIS 33	SLRC	Verde	Verde	Naranja	Verde	Verde	Naranja	Verde
CBTIS 37	CAJEME	Verde						
CBTIS 37 V	CAJEME	Verde	Verde	Naranja	Naranja	Verde	Naranja	Verde
CBTIS 40	GUAYMAS	Verde	Verde	Rojo	Naranja	Verde	Naranja	Verde
CBTIS 62	HUATABAMPO	Verde	Naranja	Naranja	Naranja	Verde	Rojo	Naranja
CBTIS 63	HUATABAMPO	Verde	Naranja	Naranja	Naranja	Verde	Rojo	Naranja
CBTIS 64	NAVOJOA	Verde	Verde	Verde	Verde	Naranja	Verde	Verde
CBTIS 103	CANANEA	Verde	Verde	Rojo	Naranja	Verde	Rojo	Verde
CBTIS 129	BENITO JUAREZ	Verde	Verde	Verde	Naranja	Verde	Naranja	Verde
CBTIS 132	HERMOSILLO	Verde	Verde	Rojo	Naranja	Verde	Rojo	Verde
CBTIS 188	CAJEME	Verde	Naranja	Verde	Naranja	Verde	Naranja	Verde
CBTIS 188	CAJEME	Verde	Verde	Rojo	Naranja	Verde	Naranja	Verde
CBTIS 206	HERMOSILLO	Verde	Verde	Verde	Naranja	Verde	Rojo	Naranja
CBTIS 207	NAVOJOA	Verde	Verde	Verde	Verde	Verde	Naranja	Verde
CBTIS 128	NOGALES	Verde	Naranja	Naranja	Naranja	Verde	Rojo	Naranja
CONALEP	AGUA PRIETA	Verde						
CBTA 38	CAJEME	Verde	Verde	Rojo	Naranja	Verde	Rojo	Verde
CBTA 53	MOCTEZUMA	Verde	Verde	Verde	Naranja	Verde	Verde	Verde
CBTA 53	MOCTEZUMA V.	Verde	Verde	Rojo	Naranja	Verde	Rojo	Verde
CBTA 263	IMURIS	Verde	Verde	Verde	Naranja	Verde	Rojo	Verde
CBTA 264	HILLO	Verde	Verde	Naranja	Naranja	Verde	Rojo	Verde
COBACH	VILLA SERIS	Verde						
COBACH	VILLA SERIS V.	Verde	Verde	Naranja	Naranja	Verde	Rojo	Verde
COBACH	NAVOJOA	Verde	Verde	Verde	Naranja	Verde	Naranja	Verde
COBACH	NAVOJOA V	Verde	Naranja	Rojo	Naranja	Verde	Rojo	Verde
COBACH	MAGDALENA	Verde						
COBACH I	OBREGON	Verde	Naranja	Verde	Verde	Verde	Naranja	Verde
COBACH	CABORCA	Verde						
COBACH	PTO PEÑASCO V.	Verde	Verde	Verde	Naranja	Verde	Verde	Verde
COBACH	REFORMA	Verde						
COBACH	HILLO. ELR	Verde	Naranja	Rojo	Naranja	Verde	Naranja	Verde
COBACH	SLRC	Verde	Verde	Verde	Naranja	Verde	Verde	Verde



Figura 1. Resultados en 57 planteles del Estado de Sonora

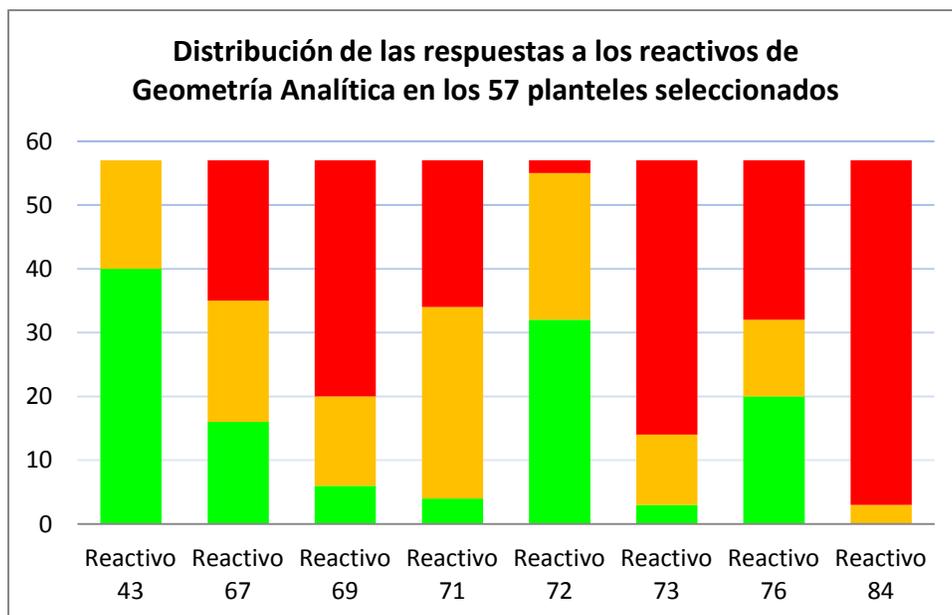


Figura 2. Distribución de respuestas de los 8 reactivos en 57 planteles

La figura 3 nos ayuda a visualizar en efecto de color, el comportamiento de los resultados en los reactivos de Geometría Analítica de ENLACE 2012, Los dos cuadros del lado izquierdo con colores azul y amarillo muestran los resultados en el plantel CETMar 03, y los dos cuadros del lado derecho muestran los resultados para diferentes planteles en el Estado de Sonora (la información relativa a estudiantes se encuentra en el Anexo 1).

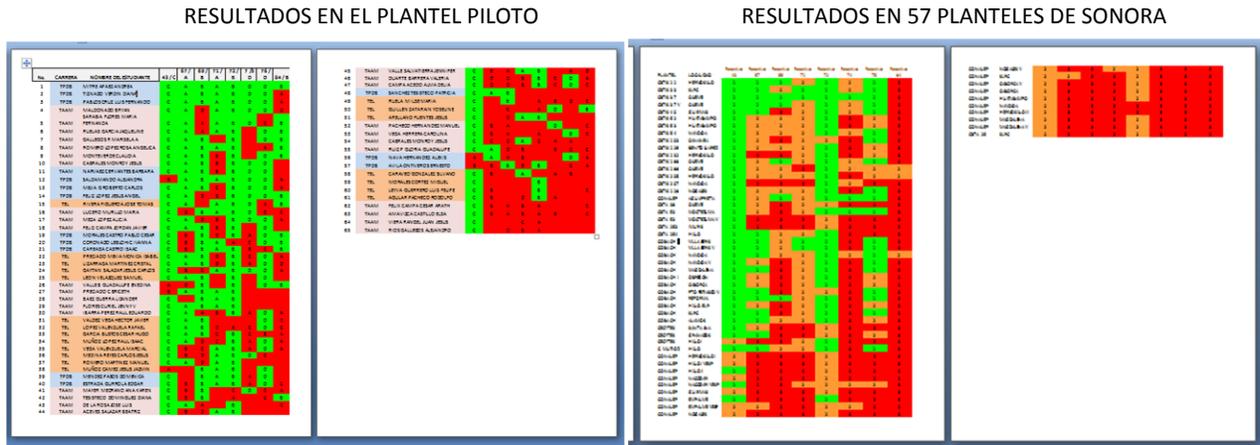


Figura 3. Comparación de resultados del plantel muestra y 57 planteles en Sonora

La Figura 4 muestra los resultados a los reactivos 43 y 84 que presenta Enlace para la prueba en 2013 corresponden a 264 planteles de EMS en el Estado de Sonora; observamos que el comportamiento no es muy diferente al obtenido en los 57 planteles seleccionados al azar para este estudio, de la prueba edición 2012 (ver Figura 5.2.2). El contenido matemático evaluado en ambas ediciones de la prueba en los dos reactivos, es el mismo, los reactivos se pueden ver al final de este anexo.

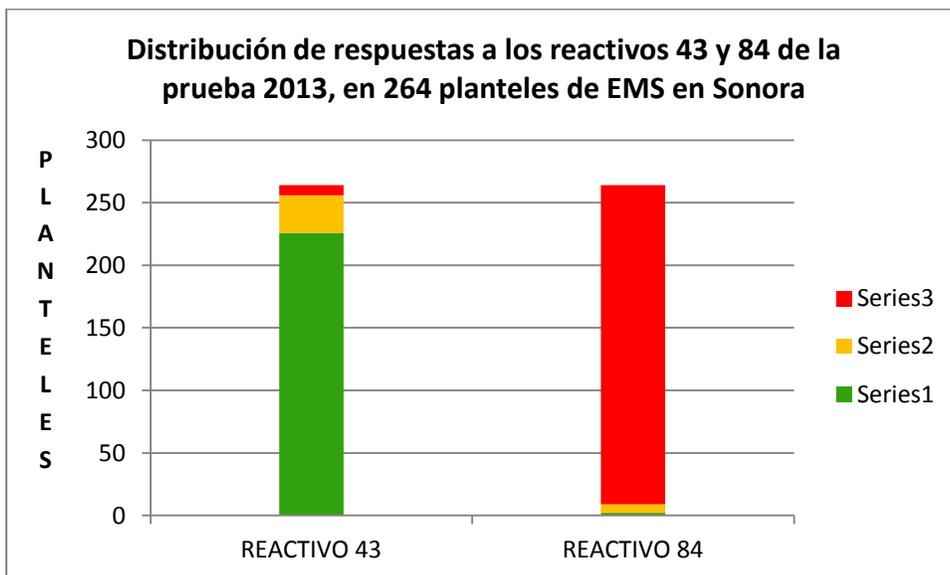


Figura 4. Distribución de respuestas en 264 planteles en el Estado de Sonora

Consideramos importante la presentación de resultados de las pruebas 2012 (57 planteles) y 2013 (264 planteles) observando en particular los reactivos 43 y 84, ya que lo que pretende evaluar Enlace; para el reactivo 43 en ambas ediciones, e inclusive en la prueba del año 2011, es “Determinar las coordenadas de dos puntos en un plano cartesiano”, y está en el contenido matemático de “Espacio y forma”. Mientras que el reactivo 84, con el contenido matemático de “cambios y relaciones, en las ediciones 2011, 2012 y 2013 de la prueba, pretende que quien resuelve el reactivo, logre “Identificar la gráfica de la recta perpendicular o paralela que pasa por una ordenada al origen de una ecuación lineal”.

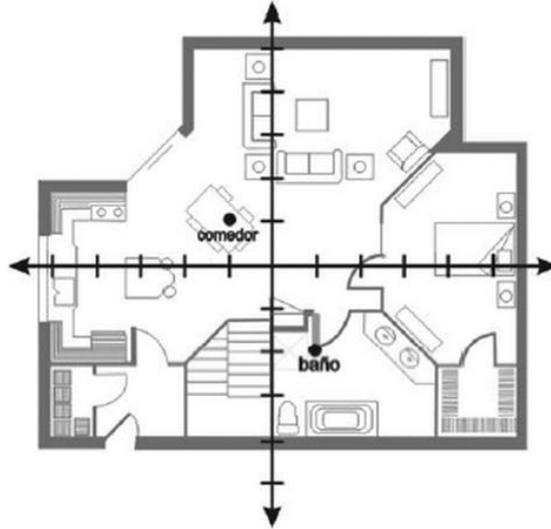
Podemos afirmar, por ejemplo, que el reactivo 84 en el 94.5 % de 57 planteles (muestra) del Estado de Sonora, para la prueba 2012, más del 60 % de los estudiantes no lo resolvieron correctamente. Y en el evento de la prueba 2013, el 96.5 % de los 264 planteles (total de planteles evaluados con la prueba Enlace) del mismo Estado de Sonora, más del 60 % de los estudiantes no resolvieron el reactivo en forma correcta.

### **Comentarios del análisis estadístico de reactivos.**

Se realizó el análisis estadístico de los 8 reactivos de Geometría Analítica de la prueba Enlace 2012, determinando la correlación como una medida de la validez de los reactivos, y se calcularon los índices de discriminación y de dificultad de cada reactivo de lo que se concluye que hay reactivos, por ejemplo, el número 43 que debiera mejorarse o eliminarse de la prueba, por ser un reactivo que tiene mínima dificultad y no se precisa como válido; mientras que otros reactivos, como el reactivo 84, es consistente en lo que pretende evaluar, es válido como predictor del criterio (los estudiantes del grupo alto lo resuelven y nadie del grupo bajo lo resuelve), y con esas características, no puede ser resuelto en forma satisfactoria por más del 60 % de los estudiantes del Nivel Medio Superior de los planteles revisados en el presente estudio, en datos publicados por Enlace. Se considera el reactivo más difícil.

REACTIVO 43 DEL AÑO 2012

43 Una casa se encuentra distribuida como se ilustra en el siguiente plano arquitectónico:

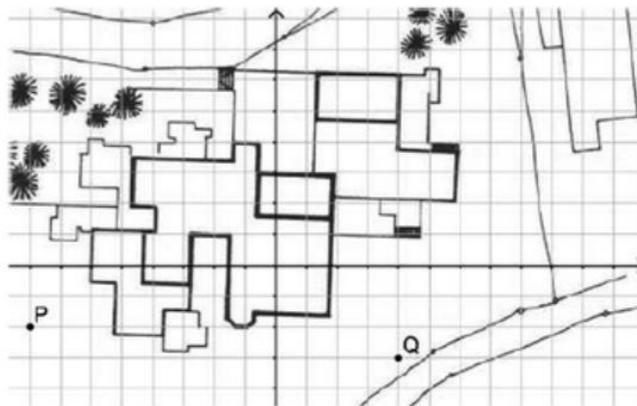


Las coordenadas del centro del comedor y las coordenadas del centro del baño son, respectivamente:

- A) (1, 1) y (1, -2)
- B) (-1, 1) y (1, 2)
- C) (-1, 1) y (1, -2)
- D) (1, -1) y (-1, -2)

REACTIVO 43 DEL AÑO 2013

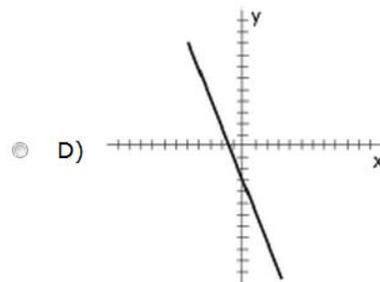
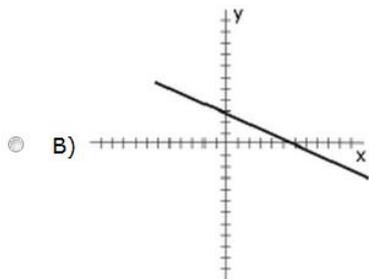
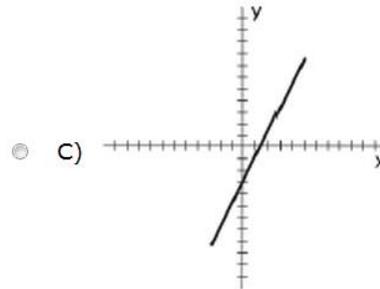
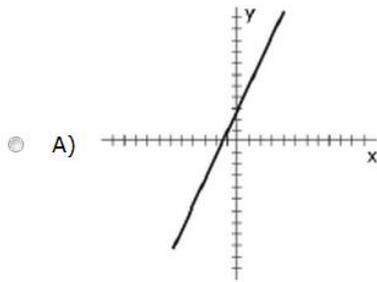
43. La figura muestra la vista aérea de una residencia. Los puntos P y Q señalan lugares donde deben ubicarse tomas de agua para el riego del jardín. De acuerdo con el plano cartesiano trazado, ¿cuáles son las coordenadas de dichos puntos?



- A) P (-8, 2) y Q (4, -3)
- B) P (-8, -2) y Q (4, -3)
- C) P (-2, -8) y Q (-3, 4)
- D) P (-8, 2) y Q (4, 3)

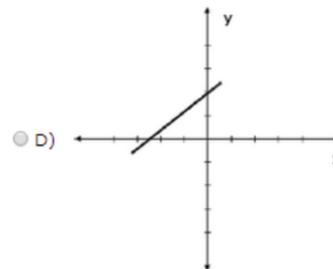
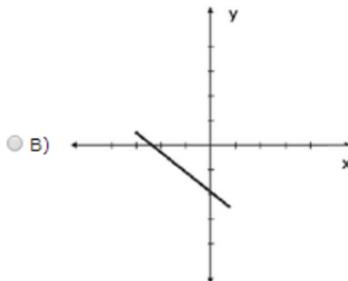
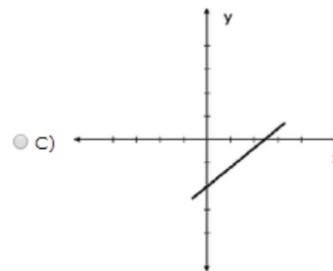
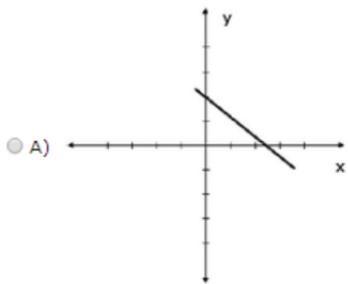
REACTIVO 84 DEL AÑO 2012

84 ¿Cuál gráfica representa la perpendicular de la recta de la ecuación  $2x - y + 3 = 0$  y ordenada al origen 3?



REACTIVO 84 DEL AÑO 2013

84. ¿Cuál gráfica representa una recta perpendicular a la ecuación  $4x + 3y - 12 = 0$ , con ordenada en el origen 2?



## Referencias

Aiken, L. (2003). *Tests psicológicos y evaluación*. Capítulo cinco. Traducción por UNAM. México.

DOF. Diario Oficial de la Federación. (2008). *Acuerdo Secretarial 442 por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad, Artículo segundo. Reforma Integral de la Educación Media Superior*. México. Recuperado el 13 de abril de 2012 de [http://www.reforma-iems.sems.gob.mx/wb/riems/qu\\_es\\_la\\_reforma](http://www.reforma-iems.sems.gob.mx/wb/riems/qu_es_la_reforma)

DOF. Diario Oficial de la Federación. (2008). *Acuerdo Secretarial 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del SNB. Reforma Integral de la Educación Media Superior*. Artículo 2. 21 octubre de 2008. México.

ENLACE (2011). *Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares*. Educación Media Superior. SEP. México.

ENLACE (2012). *Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares*. Educación Media Superior. SEP. México.

Fletes, M. (2007). *Cuadernillo de apuntes de Geometría Analítica*. México.

Godino, J. D. y Batanero C. (2004). *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Servicio de reprografía de la Facultad de Ciencias. Granada, España

Godino J. D., Font V. (2006). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*. Anexo al artículo, "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos". *Researches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado el 20 de febrero de 2012 de <http://www.ugr.es/local/jgodino>

Godino, J. D., Font, V, Wilhemly, M. R. (2009). *Sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos como herramientas para el análisis semiótico en educación matemática*. University of Thessaloniki, Greece.

Godino J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Departamento de didáctica de las matemáticas, Universidad de Granada, España.

Lehmann, Ch. (2005). *Geometría analítica*. Título de la obra original Analytic geometry. Editorial Limusa. México.

Montoya Z. Amado, Castro M. A. (2012). *Análisis previo de los reactivos de la prueba ENLACE de Educación Media Superior*. Instituto de Innovación y Evaluación Educativa del Estado de Sonora. México.

Montoya Z. Amado, Castro M. A. (2012). *Publicación de los resultados de los 15 reactivos más difíciles para jóvenes de 6° semestre de Educación Media Superior en la prueba ENLACE 2012 en habilidades lectoras y Matemáticas*. Instituto de Innovación y Evaluación Educativa del Estado de Sonora. México.

Padilla, R. (2009). *La prueba ENLACE desde un análisis didáctico. Más allá de una política de calidad para la educación básica*. México.

SEP. Secretaría de Educación Pública. (2009). *Acuerdo 444 por el que se establecen las competencias en el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato*. Diario Oficial de la Federación, 23 de junio de 2009. México.

SEP. Secretaría de Educación Pública. SEMS. Subsecretaría de Educación Media Superior. (2009). *Programa de Estudios de Matemáticas*. México: SEP.

SEP. Secretaría de Educación Pública. (2011). *Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares*. Recuperado el 2 de diciembre de 2011 de <http://www.enlace.sep.gob.mx/> México.

SEMS. (2012). Subsecretaría de Educación Media Superior. México. [http://www.sems.gob.mx/en/sems/Port\\_inicio](http://www.sems.gob.mx/en/sems/Port_inicio) Recuperado el 3 de abril de 2012

SEMS. Subsecretaría de Educación Media Superior, SEP. (2008) *Competencias Genéricas y el perfil del egresado de la Educación Media Superior*. México. Recuperado el 5/10/12 de [http://www.nl.gob.mx/pics/pages/d\\_med\\_superior\\_base/competenciasgenericas.pdf](http://www.nl.gob.mx/pics/pages/d_med_superior_base/competenciasgenericas.pdf)

Soto J., Urrea M., Jiménez J. (2011). *Diplomado Prácticas Docentes en las Matemáticas de Telesecundaria*. SEC. Secretaría de Educación y Cultura del Estado de Sonora. México

Suma por la Educación. (2012). México. Recuperado el 3 abril de 2012 de <http://www.sumaporlaeducacion.org.mx/quienesomos.html>

Urrea M., Grijalva A., Soto J. (2011). *Diplomado: Prácticas Docentes en las Matemáticas de Secundaria*. SEC. Secretaría de Educación y Cultura del Estado de Sonora. México

Vidal, R. (2012). *Manual técnico ENLACE Media Superior 2008-2010*. Dirección General Adjunta de Programas Especiales. Dirección de Programas Para la Administración Pública. CENEVAL. México.