Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Actividades didácticas para la enseñanza de la integral con apoyo de un software de geometría dinámica

Tesis que presenta

Juan Soto Álvarez

Para obtener el grado de

Maestría en Ciencias
con especialidad en Matemática Educativa

Director de Tesis:
Dr. Agustín Grijalva Monteverde

Miembros del Comité Revisor y Jurado:

M.C. Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez
M.C. José Álvaro Encinas Bringas
Dr. Ramiro Ávila Godoy
Dr. Agustín Grijalva Monteverde

Hermosillo, Sonora, México — Noviembre de 2011

AGRADECIMIENTOS

A mi Esposa Yadira y a mis hijos Daniel Alejandro y Juan Carlos por acompañarme en esta bonita experiencia impulsándome con su apoyo y cariño constantes.

A mis padres Rosario e Ignacio por su apoyo grande y siempre conmigo.

A mis hermanos que siempre estuvieron al pendiente.

A mi hermano Mario y su esposa Mary, así como a sus hijos por sus atenciones y gran apoyo.

A Jesús, Lupita y Danyah, así como a mi tía Angelina por todas sus atenciones y respaldo valiosos que me brindaron.

A mi director de tesis, Agustín, por su gran amistad, por su paciencia, y por todo su apoyo y gran gestión, en la conducción de este proceso.

A los miembros del Comité Revisor y Jurado, por los comentarios y sugerencias que permitieron mejorar y concluir esta tesis.

A Silvia Ibarra y Ana Guadalupe Del Castillo por su valiosa ayuda y guía en la redacción de la estructura de esta tesis.

A Ramiro Ávila por su gran amistad y valiosas aportaciones y sugerencias a nuestro trabajo.

A Enrique Hughes por su paciencia y gran ayuda en el inicio de este trabajo.

A mis profesores por sus sabias enseñanzas y su gran amistad.

Al Posgrado de esta Maestría por el apoyo y atenciones de que fui objeto en esta etapa de aprendizaje transcurrida y en mi asistencia este año a Montreal Canadá y Camagüey, Cuba a eventos de Matemática Educativa de gran importancia y trascendencia internacional.

A mis compañeros de clase María, Lupita, Saúl Ernesto, Gaby, Eivar y Eleazar por los buenos momentos que compartimos.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Las inquietudes surgidas a lo largo de nuestra experiencia docente y los resultados de investigación de diversos trabajos que hemos consultado, nos han permitido darnos cuenta de que existe una problemática compleja en los fenómenos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en todos sus niveles y que la comprensión de los estudiantes en torno a diferentes objetos matemáticos presentan serias deficiencias y existen diferencias notables entre los significados personales construidos por ellos y los que se promueven institucionalmente. En el caso de la integral de una función, objeto matemático de nuestro interés, esto es particularmente cierto.

Con base en lo anterior, se presenta una propuesta para la enseñanza de la integral dirigida a estudiantes del curso "Cálculo integral" de las carreras de Ingeniería del Instituto Tecnológico Superior de Cajeme que se encuentra ubicado en Ciudad Obregón, Sonora. Dicha propuesta está estructurada por una secuencia de actividades didácticas, que tiene como propósito promover la construcción de significados de la integral como el área bajo la curva, aplicada como herramienta didáctica en la resolución de situaciones problema en los distintos campos de la Ingeniería de contexto extra matemático, con el apoyo de ambientes dinámicos creados con el software de geometría dinámica *GeoGebra.*

Consideramos que esta secuencia didáctica, acompañada por las estrategias y los medios apropiados, constituirá un escenario de aprendizaje propicio para lograr que los estudiantes desarrollen un significado personal amplio. Para su diseño, se considera necesario identificar de manera más precisa las dificultades por las que atraviesan los estudiantes, los objetos matemáticos que intervienen en la integral, observar y analizar lo que los alumnos dicen y hacen acerca de ella, es decir, el significado personal que los alumnos tienen acerca del objeto matemático en cuestión y contrastar éste con el significado institucional del mismo.

Estas son las ideas que serán desarrolladas en los siguientes capítulos.

En el capitulo uno de este trabajo abordaremos la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo integral en que se ubica nuestro trabajo y que justifica la realización del mismo. Mostraremos algunos resultados de investigación al respecto de la presencia de dificultades en los estudiantes durante el estudio de este campo, en particular para modelar y resolver situaciones de contexto extra matemático. Señalaremos los resultados de algunos autores sobre la importancia del uso de diferentes formas de lenguaje y el establecimiento de relaciones entre éstas (grafico, analítico y numérico) en el estudio del cálculo.

Nuestro trabajo se apoya en elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la Instrucción Matemática, conocido como EOS. En particular, tomamos en cuenta la naturaleza pragmática de los *objetos matemáticos*, asumida en este marco teórico, como los *entes que emergen gradualmente de los sistemas de prácticas*, operativas (lo que se hace) y discursivas (lo que se dice), realizadas durante la resolución de problemas de un mismo tipo (Godino, Batanero y Font, 2008). Tales sistemas de prácticas son lo que llamamos *significado* de un objeto.

Teniendo en cuenta esta naturaleza pragmática de los objetos matemáticos, la importancia en coordinar diferentes formas de lenguaje y el hecho de que nuestra propuesta didáctica se dirige a estudiantes de ingeniería, los cuales durante su formación académica y su práctica profesional requieren modelar, describir y analizar situaciones cambiantes que puedan representarse como el área bajo la curva, creemos pertinente utilizar problemas de contexto extra matemático, y apoyarnos en las ventajas que ofrece el software de geometría dinámica GeoGebra, para promover en los estudiantes el desarrollo de prácticas de modelación matemática y la construcción de significados de los objetos matemáticos del cálculo integral de una manera más cercana a los significados institucionales de referencia para la integral de una función, de manera que para calcular el área bajo la curva utilizaremos la estrategia de obtener la altura promedio en la función misma que multiplicaremos por la longitud del intervalo que estemos considerando, para obtener el área de un rectángulo equivalente al área bajo la curva de acuerdo con el teorema del valor medio de la integral.

En este sentido, **nuestro trabajo de tesis tiene como objetivo general la elaboración de una serie de actividades didácticas** que a su vez tiene como

OBJETIVO GENERAL:

Promover en los estudiantes de ingeniería la construcción de significados personales sobre la “integral de una función”, en un ambiente de software de geometría dinámica, que les permita usarla en la resolución de problemas acordes a su formación y sus prácticas profesionales.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Promover que los alumnos construyan significados personales de la integral de una función próximos a los significados institucionales pretendidos.

- Proponer un sistema de prácticas institucionales diferente a la forma tradicional de abordar al cálculo integral, que tome en cuenta el uso de diferentes representaciones simbólicas, apoyado en herramientas tecnológicas.

- Promover que los alumnos desarrollen competencias para aplicar sus significados personales alcanzados en torno a la noción de integral para la resolución de situaciones problema relacionadas con su práctica profesional.

En el capítulo 2 hablaremos sobre los elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2008) que apoyaron el diseño de esta propuesta y la valoración de su pertinencia; en particular, puntualizaremos las nociones de *objeto*, *práctica* y *significado*. También presentaremos el significado institucional de referencia de la integral considerado para la elaboración de nuestra propuesta y el significado institucional pretendido en la misma.

En el capitulo tres mencionaremos algunas propuestas realizadas para la enseñanza del cálculo integral que otorgan un papel primordial a la resolución de problemas en la construcción de este objeto matemático, y que sugieren formas alternativas al tradicional y formal camino: integral indefinida → técnicas de integración → integral definida → aplicaciones de la integral, para la introducción de ésta. Algunas de nuestras propuestas parten de la resolución de problemas de movimiento para promover la construcción del significado de la integral como el área bajo la curva, y otras parten de problemas físicos de variación para construir la integral como la antiderivada en tanto herramienta para cuantificar y predecir el cambio como el área bajo la curva; algunas se apoyan en tecnología computacional.

También en el capítulo 3 abordaremos la forma en que se construyeron las actividades didácticas organizando los *objetos matemáticos* en *configuraciones* de acuerdo con una *trayectoria* que llamaremos epistémica y que tiene que ver con las formas en que se aborda a la integral.

En la parte final del capítulo 2 introduciremos la noción de *idoneidad didáctica* y sus dimensiones, que emplearemos para valorar la pertinencia de nuestra propuesta en distintos aspectos que influyen en la construcción de los significados personales de los estudiantes.

Es importante señalar que en el EOS se considera como *objeto matemático* a cualquiera de los siguientes seis tipos, y sus combinaciones:
• *Situaciones*, entendidas como problemas matemáticos, problemas extra-matemáticos (o aplicaciones), ejercicios, ejemplos, etc.
• *Lenguaje*, en diversas formas o representaciones semióticas: verbal, numérico, gráfico, geométrico, analítico (notación conjuntista, cuantificadores, expresiones Algebraicas, notación del límite, etc.), entre otros.
• *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.).
• *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos como teoremas, corolarios, propiedades, etc.).

• *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, etc.).
• *Conceptos (*expresados por medio de *definiciones o descripciones*).

Estos tipos de objetos se conocen como objetos primarios o componentes del significado. Si emergen durante la realización de prácticas para resolver campos de problemas, se les llama *objetos emergentes*, y si son objetos que se utilizan para hacer emerger nuevos objetos, se les llama *objetos intervinientes*.

El s*ignificado institucional pretendido* de la integral en nuestra propuesta considera como objetos intervinientes (o prerrequisitos), objetos básicos de aritmética, álgebra, geometría, trigonometría y cálculo diferencial de los distintos niveles escolares. Por ejemplo, *conceptos* como área, volumen, distancia y velocidad; *lenguaje:* expresión analítica del teorema de Pitágoras y expresiones analíticas para calcular área y volumen, *procedimientos* como usar las expresiones anteriores, calcular razones trigonométricas, hacer despejes, realizar operaciones algebraicas, identificar gráficamente la antiderivada como un cambio de posición de la función velocidad; *proposiciones: el área* es no negativa; *argumentos* intuitivos y *situaciones* de contexto extra matemático que retomamos de libros de texto propuestos en el programa de estudios del curso Cálculo Integral del sistema nacional de los Institutos Tecnológicos.

Las situaciones problema que elegimos, involucran contextos familiares para los estudiantes o afines a su carrera, lo que facilita que estos opinen, participen y se interesen en determinar y caracterizar los valores de las magnitudes que resuelven los problemas; y que, de esta manera, emerjan gradualmente los objetos matemáticos que presentamos a detalle en el capítulo dos y que tienen que ver con la emergencia del significado de la integral.

Nuestra propuesta consta de doce actividades didácticas, integradas por hojas de trabajo coordinadas con ambientes dinámicos virtuales. En el capítulo tres presentaremos las hojas de trabajo correspondientes a cada una de éstas, mostrando la forma en que se promueve el surgimiento de los objetos matemáticos del significado institucional pretendido, y el papel que juegan en esto los ambientes dinámicos virtuales creados con GeoGebra. También haremos un análisis a priori de la propuesta para valorar la idoneidad didáctica de la misma.

El software GeoGebra tiene las cualidades de permitir utilizar distintas formas de lenguaje (verbal, grafico, geométrico, algebraico, numérico, tabular) y vincularlas dinámicamente.
Estas características nos permitieron crear los ambientes dinámicos virtuales, que constan de una construcción dinámica y manipulable que simula el contexto de los problemas a

resolver; las representaciones tabular, analítica y grafica de la función que modela al problema con un punto variable (móvil) sobre la grafica en el eje x; y el área de la región que se va generando con el movimiento del punto variable en el eje de las abscisas.

En cada actividad se propone al estudiante la manipulación de la construcción dinámica que simula el fenómeno involucrado en el problema para que se percate de que existe una dependencia entre las magnitudes y se le facilite la construcción del modelo analítico. Enseguida se le pide al estudiante utilizar la expresión analítica que determinó, para argumentar los significados obtenidos.

Después se muestran las representaciones numérica, gráfica y analítica de la función en el ambiente dinámico y se guía al estudiante hacia la realización de un tratamiento numérico para determinar el valor de la altura promedio en la función como un proceso de límite y luego obtener el área bajo la curva equivalente al área de un rectángulo de base el cambio del valor de x desde a hasta b y de altura la altura promedio obtenida anteriormente.

En el capítulo cuatro hablaremos sobre la puesta en escena de cinco actividades didácticas de nuestra propuesta, la cual arrojó información importante:

- Resaltó aspectos positivos del uso de situaciones problema propios del campo de la física que se vieron reflejados en el interés y participación de los estudiantes.
- Sobre la actitud de los estudiantes hacia los ambientes dinámicos y su interacción con éstos.
- Mostró deficiencias en los significados personales de los estudiantes de algunos objetos considerados como previos o intervinientes.
- Mostró las ventajas de utilizar ambientes dinámicos como herramienta didáctica en la construcción de significados acerca de *la integral.*
- Las observaciones permiten hacer sugerencias de modificaciones al diseño de las actividades, a los ambientes dinámicos creados y a las hojas de trabajo presentadas en el capítulo tres.

Tales actividades fueron:

1. Encontrar la distancia recorrida durante un intervalo de tiempo, dada su velocidad, cuando ésta es constante.

2. Encontrar la distancia recorrida durante un intervalo de tiempo, dada su razón de cambio, expresada como la función identidad.

3. Encontrar la velocidad durante un intervalo de tiempo, dada su aceleración cuando esta es una razón de cambio, como función cuadrática.

4. Cálculo del trabajo total realizado por una fuerza constante.
5. Cálculo del trabajo total realizado por una fuerza variable.

Finalmente, también se mostrará en este capítulo, el análisis a posteriori de la idoneidad didáctica de nuestra propuesta y se comparará con el realizado a priori en el capítulo tres.

Posteriormente, mostraremos las conclusiones del trabajo, que incluyen la descripción del logro de los objetivos planteados en el capítulo dos y algunos aspectos sobresalientes del análisis de la idoneidad didáctica.

Finalmente presentamos las referencias bibliográficas que utilizamos para la elaboración de este trabajo.

CAPÍTULO UNO

PRESENTACIÓN, PROBLEMÁTICA, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Presentación

En nuestra experiencia docente impartiendo cursos de Matemáticas en el Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos, detectamos como una de las problemáticas más recurrentes la pobre comprensión alcanzada por los estudiantes sobre objetos matemáticos fundamentales que son requeridos posteriormente en situaciones tanto intra como extra matemáticas. Los estudiantes encuentran serias dificultades en el manejo de objetos matemáticos fundamentales que tienen como fuentes a diversos factores, entre los que cabe mencionar la incompatibilidad entre la labor docente y los estilos de aprendizaje y las deficiencias en los conocimientos supuestos.

Ése es el caso de los objetos del cálculo y muy particularmente de aquellos que son esenciales, como el caso de derivada e integral de una función. En esta tesis estamos interesados en plantear una propuesta de enseñanza para la integral de una función, partiendo de situaciones problema que den pie a enriquecer el significado institucional promovido en planes y programas de materia de la institución en que se desarrolla el trabajo.

Consideramos que una secuencia didáctica, acompañada por las estrategias y los medios apropiados, constituirá un escenario de aprendizaje propicio para lograr que los estudiantes desarrollen un significado personal amplio de la integral de una función. Para su diseño, se considera necesario identificar de manera más precisa las dificultades por las que atraviesan los estudiantes, los objetos matemáticos que intervienen, observar y analizar lo que los alumnos dicen y hacen acerca de la integral, esto es, identificar el significado personal que los alumnos tienen acerca del objeto matemático en cuestión y contrastar éste con el significado institucional del mismo.

Para profundizar y ubicar estas ideas en el contexto de interés, en los siguientes párrafos hacemos un estudio que sirve de marco de referencia al trabajo.

1.2 La problemática y su justificación

En el portal académico del Instituto Tecnológico Superior de Cajeme (ITESCA), institución de nivel superior dedicada a la formación de ingenieros y que se encuentra ubicada en Ciudad Obregón, Sonora, México, se encuentra un manual, llamado Taller de

Matemáticas I que es utilizado en las asignaturas de Matemáticas I y Matemáticas II, en todas las carreras de Ingeniería que se imparten en la Institución como material de apoyo.
Dicho manual está estructurado exclusivamente con base en ejercicios, y con respecto al Cálculo integral (Del Rivero S., 2000), los tópicos que en él se tratan son:

- Dibujar la región cuya área viene dada por la integral definida que se indica.
- Resolución de integrales definidas, usando el Teorema Fundamental del Cálculo.
- Resolución de integrales indefinidas donde el integrando es una función algebraica.
- Resolución de integrales indefinidas donde el integrando es una función trascendental.
- Usar el Teorema fundamental del cálculo para evaluar integrales definidas donde el integrando sea una función algebraica o una función trascendente.
- Algunas Técnicas de integración (Por partes y por fracciones parciales).
- Algunas aplicaciones de la integral definida (Áreas y Volúmenes de sólidos de revolución).

El uso del manual es importante porque de acuerdo con las formas de trabajo de los profesores, buena parte de la actividad que desarrollan los estudiantes tiene como base los ejercicios que están ahí formulados. Un hecho en el que coincidimos los profesores que hemos tenido a nuestro cargo este curso, es que observamos un desequilibrio entre el tratamiento conceptual y el algorítmico. Se abordan más los procesos algorítmicos que el concepto en sí mismo.

Para ilustrar lo anterior transcribimos algunos de los ejercicios ahí planteados, los cuales son:

INSTITUTO TECNOLOGICO SUPERIOR DE CAJEME
Academia de matemáticas
MATEMATICAS I

PARCIAL	TALLER	TEMA
TERCER	1	INTEGRACION DEFINIDA

1. Usar el Teorema fundamental del cálculo para evaluar las siguientes integra definidas.

a) $\int_0^2 (x-2)^2\, dx$

b) $\int_{-1}^{3} \frac{2}{\sqrt{x+2}}\, dx$

d) $\int_3^5 \sqrt[4]{x}(x-2)\, dx$

e) $\int_1^3 \left(\frac{1}{x^3}-3\right) dx$

f) $\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen} 3x\, dx$

g) $\int_{\pi/2}^{\pi} (2-\cos^2 x)\cos x\, \operatorname{sen} x\, dx$

h) $\int_{-1}^{3} 3^x\, dx$

i) $\int_4^6 \frac{3}{3x-5}\, dx$

j) $\int_0^1 x\, 2^{x^2} dx$

k) $\int_5^7 \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\, dx$

Como puede observarse, los ejercicios que se presentan tienen como propósito la búsqueda de las expresiones analíticas de funciones primitivas o antiderivadas, a partir de las expresiones analíticas de otras funciones, y evaluar y restar en los límites de integración, en concordancia con el Teorema Fundamental del Cálculo de funciones expresadas analíticamente-

Esta situación es congruente con el programa mismo, el cual está dedicado fundamentalmente a este tratamiento algorítmico, aunque incluye también lo que llama aplicaciones, con los problemas de áreas y volúmenes de sólidos de revolución.

Por otra parte, en ITESCA se usa también el libro de texto de Cálculo Integral de Larson (2009), como un proyecto que la editorial Mc Graw Hill realizó acomodando el temario de la asignatura de matemáticas II del sistema de Institutos Tecnológicos en el contenido del libro.

Una somera revisión del contenido de este libro nos deja ver que está organizado en cinco capítulos, con las siguientes temáticas: diferenciales, integrales indefinidas y métodos de integración, la integral definida, aplicaciones de la integral e integrales impropias, presentadas en este orden, el cual es asumido a plenitud por los profesores.

De los materiales señalados se desprenden u originan los sistemas de prácticas promovidos por los profesores en tanto representantes de la institución ante los alumnos, siguiendo un camino tradicional, en el que se siguen priorizando los procesos de algoritmia sobre la conceptualización de la integral y su aplicación en diferentes contextos.

En términos generales tanto el texto como el manual de la institución privilegian el uso de las representaciones analíticas y, en el caso de las representaciones gráficas se usan, en el mejor de los casos, para ilustrar algunos aspectos, sin que jueguen algún papel de verdadera importancia en alguna etapa de la solución de problemas o ejercicios. De acuerdo a estos mismos materiales, lo más común es iniciar la presentación de cada tema a partir de definiciones de conceptos y establecimiento de procedimientos algorítmicos, dejando los problemas para el final.

Para ilustrar esta situación reproducimos a continuación tres hojas de los materiales empleados, en los que puede observarse como es que al inicio se presentan los casos de resolución algorítmica de antiderivadas a partir de expresiones analíticas y, posteriormente se presentan ejercicios de los llamados de “aplicación”, entre los cuáles se encuentran algunos que parten de las representaciones gráficas para determinar expresiones analíticas, otros que tratan con problemas crecimiento y otros con situaciones físicas ligadas al movimiento.

Las situaciones planteadas son interesantes, al menos algunas de ellas, pero su ubicación al final deja claro que se parte de una presentación tradicional que deja a los problemas como un caso de aplicación y, hasta donde hemos podido constatar en reuniones de academia con los profesores de ITESCA, las situaciones de aplicación no se alcanzan a tratar o sólo se hace superficialmente en un corto lapso del semestre.

Antes de hacer los ejercicios se debe reconocer que uno de los pasos más importantes en la integración es *reescribir el integrando* en una forma que corresponda con las reglas básicas de integración. Para ilustrar este punto, a continuación se presentan algunos ejemplos adicionales.

Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
$\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$	$2\int x^{-1/2}\,dx$	$2\left(\frac{x^{1/2}}{1/2}\right) + C$	$4x^{1/2} + C$
$\int (t^2+1)^2\,dt$	$\int (t^4 + 2t^2 + 1)\,dt$	$\frac{t^5}{5} + 2\left(\frac{t^3}{3}\right) + t + C$	$\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t + C$
$\int \frac{x^3+3}{x^2}\,dx$	$\int (x + 3x^{-2})\,dx$	$\frac{x^2}{2} + 3\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + C$	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} + C$
$\int \sqrt[3]{x}(x-4)\,dx$	$\int (x^{4/3} - 4x^{1/3})\,dx$	$\frac{x^{7/3}}{7/3} - 4\left(\frac{x^{4/3}}{4/3}\right) + C$	$\frac{3}{7}x^{7/3} - 3x^{4/3}$

Ejercicios 2.3

En los ejercicios 1 a 4, verificar el enunciado demostrando que la derivada del lado derecho es igual al integrando del lado izquierdo.

1. $\int \left(-\frac{9}{x^4}\right) dx = \frac{3}{x^3} + C$

2. $\int \left(4x^3 - \frac{1}{x^2}\right) dx = x^4 + \frac{1}{x} + C$

3. $\int (x-2)(x+2)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$

4. $\int \frac{x^2-1}{x^{3/2}}\,dx = \frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}} + C$

En los ejercicios 5 a 8, encontrar la solución general de la ecuación diferencial y verificar el resultado mediante derivación.

5. $\frac{dy}{dt} = 3t^2$

6. $\frac{dr}{d\theta} = \pi$

7. $\frac{dy}{dx} = x^{3/2}$

8. $\frac{dy}{dx} = 2x^{-3}$

En los ejercicios 9 a 14, completar la tabla.

	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
9.	$\int \sqrt[3]{x}\,dx$			
10.	$\int \frac{1}{x^2}\,dx$			
11.	$\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$			
12.	$\int x(x^2+3)\,dx$			
13.	$\int \frac{1}{2x^3}\,dx$			
14.	$\int \frac{1}{(3x)^2}\,dx$			

En los ejercicios 15 a 34, encontrar la integral indefinida y verificar el resultado mediante derivación.

15. $\int (x+3)\,dx$

16. $\int (5-x)\,dx$

17. $\int (2x - 3x^2)\,dx$

18. $\int (4x^3 + 6x^2 - 1)\,dx$

19. $\int (x^3 + 2)\,dx$

20. $\int (x^3 - 4x + 2)\,dx$

21. $\int (x^{3/2} + 2x + 1)\,dx$

22. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

23. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

24. $\int (\sqrt[4]{x^3} + 1)\,dx$

25. $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

26. $\int \frac{1}{x^4}\,dx$

27. $\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}\,dx$

28. $\int \frac{x^2+2x-3}{x^4}\,dx$

29. $\int (x+1)(3x-2)\,dx$

30. $\int (2t^2-1)^2\,dt$

31. $\int y^2\sqrt{y}\,dy$

32. $\int (1+3t)t^2\,dt$

33. $\int dx$

34. $\int 3\,dt$

En los ejercicios 35 a 42, hallar la integral indefinida y verificar el resultado mediante derivación.

35. $\int (2 \operatorname{sen} x + 3\cos x)\,dx$

36. $\int (t^2 - \operatorname{sen} t)\,dt$

37. $\int (1 - \csc t \cot t)\,dt$

38. $\int (\theta^2 + \sec^2\theta)\,d\theta$

39. $\int (\sec^2\theta - \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$

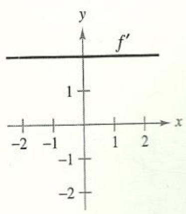
40. $\int \sec y(\tan y - \sec y)\,dy$

41. $\int (\tan^2 y + 1)\,dy$

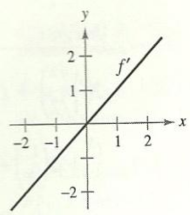
42. $\int \frac{\cos x}{1-\cos^2 x}\,dx$

En los ejercicios 43 a 46, se presenta la gráfica de la derivada de una función. Dibujar las gráficas de *dos* funciones que tengan la derivada señalada. (Hay más de una respuesta correcta.)

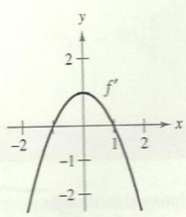
43.



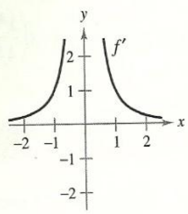
44.



45.

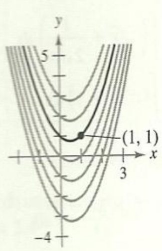


46.

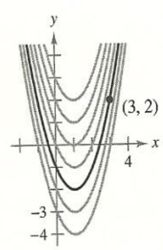


En los ejercicios 47 y 48, determinar la ecuación para *y*, dada la derivada y el punto indicado sobre la curva.

47. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 1$

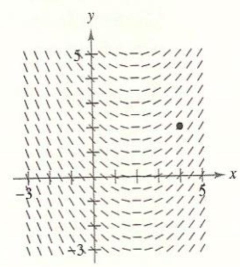


48. $\dfrac{dy}{dx} = 2(x - 1)$

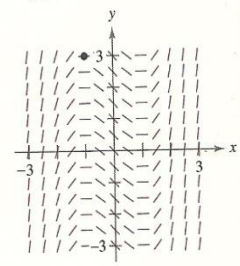


Campos de pendientes **En los ejercicios 49 a 52, se dan una ecuación diferencial, un punto y un campo de pendientes. Un *campo de pendientes* (o *campo de direcciones*) está compuesto por segmentos de recta con pendientes dadas por la ecuación diferencial. Estos segmentos de recta proporcionan una perspectiva visual de las pendientes de las soluciones de la ecuación diferencial. *a*) Dibujar dos soluciones aproximadas de la ecuación diferencial en el campo de pendientes, una de las cuales pasa por el punto indicado. *b*) Utilizar la integración para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y usar una computadora para hacer la gráfica de la solución. Comparar el resultado con los dibujos del apartado *a*).**

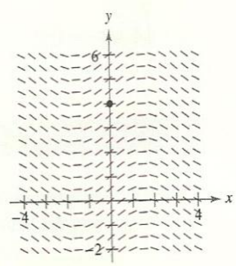
49. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x - 1, \quad (4, 2)$



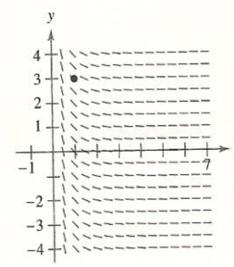
50. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 1, \quad (-1, 3)$



51. $\dfrac{dy}{dx} = \cos x, (0, 4)$



52. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}, x > 0, (1, 3)$



Campos de pendientes **En los ejercicios 53 y 54, *a*) utilizar una computadora para hacer la gráfica de un campo de pendientes para la ecuación diferencial, *b*) utilizar la integración y el punto indicado para determinar la solución particular de la ecuación diferencial y *c*) hacer la gráfica de la solución y el campo de pendientes.**

53. $\dfrac{dy}{dx} = 2x, (-2, -2)$

54. $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{x}, (4, 12)$

En los ejercicios 55 a 62, resolver la ecuación diferencial.

55. $f'(x) = 4x, f(0) = 6$

56. $g'(x) = 6x^2, g(0) = -1$

57. $h'(t) = 8t^3 + 5, h(1) = -4$

58. $f'(s) = 6s - 8s^3, f(2) = 3$

59. $f''(x) = 2, f'(2) = 5, f(2) = 10$

60. $f''(x) = x^2, f'(0) = 6, f(0) = 3$

61. $f''(x) = x^{-3/2}, f'(4) = 2, f(0) = 0$

62. $f''(x) = \operatorname{sen} x, f'(0) = 1, f(0) = 6$

63. ***Crecimiento de árboles*** Un vivero de plantas verdes suele vender cierto arbusto después de 6 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 6 años es, aproximadamente, $dh/dt = 1.5t + 5$, donde t es el tiempo en años y h es la altura en centímetros. Las plantas de semillero miden 12 centímetros de altura cuando se plantan ($t = 0$).

a) Determinar la altura después de t años.

b) ¿Qué altura tienen los arbustos cuando se venden?

64. ***Crecimiento de población*** La tasa de crecimiento dP/dt de una población de bacterias es proporcional a la raíz cuadrada de t, donde P es el tamaño de la población y t es el tiempo en días ($0 \leq t \leq 10$). Esto es, $dP/dt = k\sqrt{t}$. El tamaño inicial de la población es igual a 500. Después de un día la población ha crecido hasta 600. Estimar el tamaño de la población después de 7 días.

Desarrollo de conceptos

65. Usar la gráfica de f' que se muestra en la figura para responder lo siguiente, dado que $f(0) = -4$.

a) Aproximar la pendiente de f en $x = 4$. Explicar.

b) ¿Es posible que $f(2) = 1$? Explicar.

c) ¿Es $f(5) - f(4) > 0$? Explicar.

d) Aproximar el valor de x donde f es máxima. Explicar.

e) Aproximar cualquier intervalo en el que la gráfica de f es cóncava hacia arriba y cualquier intervalo en el cual es cóncava hacia abajo. Aproximar la coordenada x a cualquier punto de inflexión.

f) Aproximar la coordenada x del mínimo de $f''(x)$.

g) Dibujar una gráfica aproximada de f.

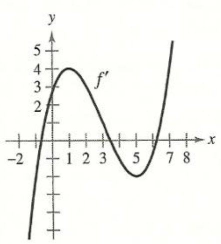


Figura para 65

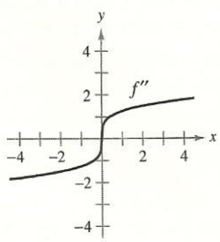


Figura para 66

66. Las gráficas de f y f' pasan cada una por el origen. Utilizar la gráfica de f'' que se muestra en la figura para dibujar las gráficas de f y f'.

Movimiento vertical **En los ejercicios 67 a 70, utilizar $a(t) = -32$ pies/s² como la aceleración debida a la gravedad. (Ignorar la resistencia al aire.)**

67. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde una altura de 6 pies con una velocidad inicial de 60 pies por segundo. ¿Qué altura alcanzará la pelota?

68. Mostrar que la altura a la que llega un objeto lanzado hacia arriba desde un punto s_0 pies a una velocidad inicial de v_0 por segundo está dada por la función

$$f(t) = -16t^2 + v_0t + s_0.$$

69. ¿Con qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde el nivel del suelo) para alcanzar la parte superior del monumento a Washington (cerca de 550 pies)?

70. Un globo aerostático, que asciende verticalmente con una velocidad de 16 pies por segundo, deja caer una bolsa de arena en el instante en el que está a 64 pies sobre el suelo.

a) ¿En cuántos segundos llegará la bolsa al suelo?

b) ¿A qué velocidad hará contacto con el suelo?

Movimiento vertical **En los ejercicios 71 a 74, emplear $a(t) = -9.8$ m/s² como aceleración de la gravedad. (Ignorar la resistencia al aire.)**

71. Mostrar que la altura sobre el suelo de un objeto que se lanza hacia arriba desde un punto s_0 metros sobre el suelo a una velocidad inicial de v_0 metros por segundo está dada por la función

$$f(t) = -4.9t^2 + v_0t + s_0.$$

72. El Gran Cañón tiene una profundidad de 1 800 metros en su punto más profundo. Se deja caer una roca desde el borde sobre ese punto. Escribir la altura de la roca como una función del tiempo t en segundos. ¿Cuánto tardará la roca en llegar al suelo del cañón?

73. Una pelota de béisbol es lanzada hacia arriba desde una altura de 2 metros con una velocidad inicial de [illegible] metros por segundo. Determinar su altura máxima.

74. ¿A qué velocidad inicial debe lanzarse un objeto hacia arriba (desde una altura de 2 metros) para que alcance una altura máxima de 200 metros?

75. ***Gravedad lunar*** Sobre la Luna, la aceleración de la gravedad es de -1.6 m/s². En la Luna se deja caer una piedra desde un peñasco y golpea la superficie de esta misma 20 segundos después. ¿Desde qué altura cayó? ¿Cuál era su velocidad en el momento del impacto?

76. ***Velocidad de escape*** La velocidad mínima que se requiere para que un objeto escape de su atracción gravitatoria se obtiene a partir de la solución de la ecuación

$$\int v\,dv = -GM\int \frac{1}{y^2}\,dy$$

donde v es la velocidad del objeto lanzado desde la Tierra, y es la distancia desde el centro terrestre, G es la constante de la gravitación y M es la masa de la Tierra. Demostrar que v y y están relacionados por la ecuación

$$v^2 = v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R}\right)$$

donde v_0 es la velocidad inicial del objeto y R es el radio terrestre.

Movimiento rectilíneo **En los ejercicios 77 a 80, considerar una partícula que se mueve a lo largo del eje x, donde $x(t)$ es la posición de la partícula en el tiempo t, $x'(t)$ su velocidad y $x''(t)$ su aceleración.**

77. $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 2, \quad 0 \le t \le 5$

a) Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula.

b) Encontrar los intervalos abiertos de t en los cuales la partícula se mueve hacia la derecha.

c) Encontrar la velocidad de la partícula cuando la aceleración es 0.

78. Repetir el ejercicio 77 para la función posición

$$x(t) = (t - 1)(t - 3)^2, \quad 0 \le t \le 5.$$

79. Una partícula se mueve a lo largo del eje x a una velocidad de $v(t) = 1/\sqrt{t}$, $t > 0$. En el tiempo $t = 1$, su posición es $x = 4$. Encontrar las funciones posición y la aceleración de la partícula.

En la primera hoja mostrada encontramos los ejercicios (más que problemas) que los profesores suelen abordar y las situaciones problema más interesantes, desde nuestro punto de vista, son las que se muestran en las siguientes dos páginas y que suelen obviarse o ignorarse por los profesores. Sin embargo, debe destacarse que algunas de las situaciones propuestas nos parecen adecuadas, como en el caso de las representaciones gráficas de algunas funciones para determinar la representación gráfica de al menos dos antiderivadas o primitivas, los campos de pendientes y otros.

Esta situación ha traído como consecuencia que una vez aprobado el curso la mayoría de los alumnos hayan construido un significado personal basado esencialmente en el uso de la algoritmia, pero sin referentes de mayor trascendencia. A esto hay que agregar que de cualquier manera el índice de reprobación del curso se encuentra alrededor del 40%.

Particularmente, en el caso de la integral y algunos de los resultados más trascendentes, como el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), los alumnos encuentran dificultades muy serias, ocasionando que tengan fallas de comprensión, significancia y de aplicabilidad del objeto, con el consecuente impacto en su desempeño en otras asignaturas.

Vale la pena mencionar que al hacer una revisión a diferentes estudios de matemática educativa que sistematizan resultados a escala mundial sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje, nos permitió reconocer que en el ITESCA, institución educativa de la que formamos parte desde 2003, a pesar de que institucionalmente se declara que se trabaja con un modelo constructivista, se sigue inercialmente en la labor docente tradicionalista. De esta problemática surge la idea de este trabajo de tesis.

En esta búsqueda de resultados recientes de investigaciones en el área de la matemática educativa sobre el tópico de interés, encontramos algunas que dan cuenta de las dificultades entre los estudiantes para comprender los procesos de integración, atribuidos fundamentalmente al desequilibrio entre el tratamiento conceptual con el algorítmico, por lo que coincidimos con quienes afirman que en el discurso matemático escolar, la enseñanza del cálculo integral, privilegia el tratamiento algorítmico a través de las distintas técnicas de integración en detrimento de la comprensión de nociones básicas (Quezada 1986; Artigue 1998, Cordero 2003;Cantoral 2000).

De acuerdo con Cabañas y Cantoral (2005 b), coincidimos que previo a la definición de la integral y al enfoque elemental de subdividir y de calcular mediante fórmulas, se precisa del estudio de la noción de área a través de otras actividades que bien pueden ser normadas por prácticas de naturaleza social que viven los estudiantes dentro y fuera del aula, Actividades que incluyan a la medición, a la comparación y a la conservación, para enseguida llevar ese concepto a otros contextos y explorar su impacto en el proceso del desarrollo del pensamiento matemático acerca del significado geométrico del objeto matemático integral definida y posteriormente intentar un acercamiento al significado Institucional del teorema fundamental del cálculo.

Farfán (1997), señala que la enseñanza del cálculo con el actual discurso matemático escolar, basado en aspectos rigurosos de la disciplina, no es el más apropiado para la comunicación de ideas matemáticas; por ello es necesaria una reconstrucción histórica de las ideas, que huyendo de los anacronismos, permita conducir nuestra labor educativa, (citado por Contreras y Ordóñez, 2006).

Al respecto, Alanís y Salinas (2009) expresan que existe un gran número de investigaciones que abordan la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo; Robert y Speer (2001) ofrecen una amplia revisión de los diferentes estudios a nivel mundial y plantean que este desarrollo se justifica ante el esclarecimiento de un paradigma tradicional de enseñanza que deja mucho que desear en cuanto al aprendizaje: elevados índices de reprobación, aprendizaje sin comprensión y actitud negativa hacia el aprendizaje de las matemáticas, son hechos que han sido reportados en los últimos treinta años con respecto a los cursos de Cálculo en el nivel medio superior y superior de educación. Artigue (1995) hizo pública a la comunidad una realidad que para 1995 era difícil justificar.

La problemática de la enseñanza del Cálculo era evidente: existe gran dificultad en lograr que los estudiantes muestren una comprensión satisfactoria de sus conceptos y métodos y la enseñanza tradicional se protege en el aprendizaje de prácticas algorítmicas y algebraicas que son a la vez el centro de la evaluación. Y continúan citando: para 2001, la situación no parecía haber cambiado: “la mayoría de los estudiantes piensan que la manera más segura para tratar satisfactoriamente con este dominio es no tratar de comprender, sino sólo funcionar mecánicamente” (Artigue, 2001, p. 213); en 2003, el Cálculo sigue siendo una preocupación de los investigadores; Artigue (2003) comenta que la situación actual se caracteriza por un sentimiento general de crisis que, aunque no sea percibido de la misma manera, sí parece trascender las diferencias culturales.

Las dificultades en el aprendizaje no han cambiado de manera sustancial. Alanís y salinas expresan también que el movimiento de reforma del Cálculo, que en Estados Unidos inició en 1986, es una reacción contra una práctica generalizada como la que Artigue menciona. Dicho movimiento ha tenido el apoyo de diferentes fuentes, entre ellas “de científicos que estaban frustrados por la inhabilidad de los estudiantes para usar el cálculo inteligentemente en aplicaciones reales y por administradores que estaban molestos por el alto fracaso o las tasas de deserción de los cursos de Cálculo” (Steen, 2003, p. 197). Su avance ha logrado que se pongan a discusión varias cuestiones, entre ellas la búsqueda de un adecuado balance entre dos dimensiones relativamente independientes: contenido y contexto. Algunos acercamientos son fuertes en una de esas dimensiones y otros en ninguna porque se siguen focalizando en mecánicas a expensas del contenido y el contexto.

Esta forma de abordar los contenidos se sigue dando cuando se ven las técnicas de integración dejando sesgado el concepto de la integral definida, la cual se mira sólo como un número, lo que hace emerger significados muy pobres acerca de este objeto, situación que da como resultado que los alumnos no logren siquiera acercarse al significado institucional pretendido y por lo tanto que ellos tengan problemas a la hora de contextualizarlo en otras asignaturas de la carrera de ingeniería que el alumno esté cursando.

Otras dificultades que tienen los estudiantes es que no relacionan a la integral como una función cuando ésta es indefinida y tampoco relacionan a ésta como una suma, mucho menos como promedio, tal vez por la forma de abordar el objeto por parte de los profesores limitando la visión del objeto matemático integral a un proceso algorítmico o numérico. Justificando lo anterior, Priemer y Lazarte (2008), en su investigación acerca de la integral definida: Ingeniería didáctica para su enseñanza-aprendizaje, citan en su resumen “la construcción del concepto de integral definida en las carreras de ingeniería surge a partir de la presentación de la teoría de las integrales de Riemann. Sin embargo esto no parece ser suficiente para que los alumnos identifiquen al proceso de límite de una suma como alternativa válida para resolver problemas. No interpretan a la integral definida como un proceso estrechamente asociado a una suma, incluso hasta la confunden con una resta. Frecuentemente se conforman con el conocimiento sobre su cálculo mediante el teorema fundamental y saber usarla en sus aplicaciones. Pero no se comprende el significado de la definición de integral definida”.

De esta forma, como dice Artigue (2003), los alumnos adquieren un razonable dominio de lo que se puede catalogar como “cálculo meramente algebraico”, y es así como la mayoría de los alumnos piensa que la manera más segura de enfrentarse con éxito a este dominio no es intentar comprender, sino simplemente comportarse mecánicamente simulando lo que hace el profesor en la resolución de ejercicios. Algunos docentes no siempre impulsamos a nuestros alumnos a trabajar con particiones, sumas y límites; sino que le damos un enfoque directo al TFC convirtiendo el objeto en un proceso rutinario, haciendo que de esta forma lo alejemos de su relación con situaciones reales y como resultado de esto, se origine un significado personal del objeto matemático de integral y del TFC alejado de su significado institucional y por ende no exista una comprensión adecuada del objeto. Thompson y Silverman (2008) cuestionan el débil aprendizaje de la *integral* expresada en la función de *acumulación* cuando el sentido de $F(x)$ es representar el área acotada entre una gráfica de una función $f(x)$ y el eje x, una imagen que debe preexistir en la mente del estudiante. En la expresión aparecen simultáneamente los problemas con la comprensión sobre el proceso de acumulación del área y con el proceso de determinación para los diferentes valores de la función de acumulación. Thompson y Silverman indican que la mayor fuente de problemas con la comprensión matemática de la acumulación se da porque es raro que dicha idea se enseñe en los cursos o, si se enseña, es raro que se tenga intención de que se aprenda.

Debido a que no es común referirse a la integral como *función de acumulación*, pensamos que el *cómo* intentan presentarla Thompson y Silverman altera el *qué* enseñar, y le otorga un significado diferente al tradicional del área. Sin embargo, a lo largo del trabajo se nota la preocupación por hacer que los estudiantes lleguen a conceptualizar la función de acumulación y, con ello, comprendan finalmente el sentido de la definición formal de la integral como el límite de sumas de Riemann.

Esto que mencionan los autores, sucede en el ITESCA y tal vez en otras instituciones educativas en el nivel superior. La problemática que comentan los autores es observable en la clase de cálculo integral referida a este tópico. Además los jefes de las carreras de ingeniería con que cuenta la institución, hacen la observación de la deficiencia que llevan los alumnos en el TFC cuando se hace necesario su aplicación en la resolución de problemas propios de alguna asignatura en particular sobre todo dentro del campo de la Física, situación que incide en contra de la formación del perfil de sus egresados, ocasionando que los alumnos tengan dificultades en esas otras asignaturas porque no tienen la competencia para contextualizar el TFC cuando se enfrentan a un problema donde es necesaria su referencia y utilización.

Es así como en este panorama, proponemos hacer el planteamiento de un nuevo escenario de clase que permita a los estudiantes abordar de una manera diferente el tema de integral mediante la resolución de una secuencia de actividades didácticas que tomen en cuenta los significados personales de los alumnos y que traten de que éstos no estén muy distantes del significado Institucional, mismas que serán diseñadas y evaluadas utilizando elementos teóricos y metodológicos propios de la Matemática Educativa.

Pensamos que el papel que desempeña el Cálculo en el currículo debe ser el de *medio* o *herramienta* que le permita al estudiante entender la realidad de otras áreas del conocimiento; es en tal contexto donde deberíamos estudiar las dificultades del aprendizaje.

Con nuestra propuesta deseamos mostrar y plantear la necesidad de experimentar diferentes acercamientos al Cálculo Integral. Cambiar el *cómo enseñar* es la primera alternativa que se presenta. El uso de aprendizaje activo, tecnología, ideas importantes (*ajuste, acumulación*) y utilidad del conocimiento matemático son acciones que llevaremos a cabo para intentar el logro de un aprendizaje viable en el aula.

Para cerrar estas argumentaciones comentaremos que contextualizar la integral, cuando se enfrentan a un problema donde es necesaria su referencia y utilización, para los futuros ingenieros puede ser, en un momento determinado, una herramienta de trabajo que apoye la solución de su problemática y de ahí la importancia y justificación de que los estudiantes construyan una sólida significación de la misma.

La problemática que hemos reseñado representa un área de oportunidad para aportar a la educación matemática una posible herramienta de trabajo que permita abordar esta situación. En este contexto nos planteamos el desarrollo de nuestro trabajo teniendo como **objetivo general la elaboración de una serie de actividades didácticas** que a su vez tiene como

OBJETIVO GENERAL:

Promover en los estudiantes de ingeniería la construcción de significados personales sobre la “integral de una función”, en un ambiente de software de geometría dinámica, que les permita usarla en la resolución de problemas acordes a su formación y sus prácticas profesionales.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Promover que los alumnos construyan significados personales de la integral de una función próximos a los significados institucionales pretendidos.

- Proponer un sistema de prácticas institucionales diferente a la forma tradicional de abordar al cálculo integral, que tome en cuenta el uso de diferentes representaciones simbólicas, apoyado en herramientas tecnológicas.

Promover que los alumnos desarrollen competencias para aplicar sus significados personales alcanzados en torno a la noción de integral para la resolución de situaciones problema relacionadas con su práctica profesional.

En algún sentido los objetivos específicos, particularmente el último, pueden considerarse como ambiciosos y debemos aclarar que estamos conscientes que el desarrollo de competencias por parte de los alumnos es un proceso complejo en el que intervienen diversos factores y para lo cual se requiere el concurso de otros profesores en sus respectivos cursos, tanto de matemáticas como del resto de las asignaturas.
Por ejemplo en la actividad de resolución de problemas que proponemos, se pretende que los estudiantes desarrollen competencias disciplinares para construir e interpretar modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos aritméticos,

algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales, también para que propongan explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos, argumenten la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático, analicen las relaciones entre dos o más variables de un proceso para determinar o estimar su comportamiento, interpreten tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Similarmente en lo que respecta a las competencias genéricas, el trabajo que realizamos presenta actividades para que propicien el trabajo colaborativo, se desarrollen habilidades para la comunicación entre estudiantes y el profesor, para el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, por citar algunas.

Esto es, aunque los objetivos específicos y el objetivo general sean, en un sentido, ambiciosos, partimos de que nuestro trabajo está encaminado a la consecución de los mismos, sin pretensiones de que por si sólo se puedan conseguir cabal y totalmente cada uno de ellos.

CAPÍTULO DOS

ELEMENTOS DEL MARCO TEÓRICO Y ANALÍSIS RELACIONADOS CON LA PROPUESTA DIDÁCTICA

A continuación abordaremos los elementos principales que forman parte del marco teórico que sustenta nuestra propuesta: el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2008), el cual permite utilizar una serie de herramientas teóricas y metodológicas necesarias para diseñar procesos de enseñanza y explicar con diferente grado de detalle lo que sucede cuando se llevan a cabo, valorar su pertinencia y dar pautas que guían hacia su mejoramiento. Algunas de estas herramientas por ejemplo, son las nociones de práctica matemática, objeto matemático, significado e idoneidad didáctica.

En la parte inicial de este capítulo hablaremos sobre las prácticas matemáticas, los significados y los objetos matemáticos. Enseguida presentaremos el significado institucional de referencia y el significado pretendido en nuestra propuesta para objetos matemáticos del cálculo integral y finalmente, hablaremos sobre la idoneidad didáctica y sus dimensiones.

2.1 Prácticas Matemáticas

En nuestro quehacer escolar ya sea como estudiantes o en el papel como docentes nos enfrentamos a situaciones que involucran la resolución de problemas matemáticos; realizamos acciones (actuaciones o manifestaciones verbales, simbólicas, mímicas, etc.) encaminadas a determinar la solución de los problemas y a comunicar, validar o generalizar los resultados obtenidos en ésta. A estas acciones les denominamos *prácticas matemáticas.*

Por sujeto entenderemos tanto una comunidad de personas comprometidas en la resolución de un mismo tipo de problemas matemáticos (a la que llamaremos *institución matemática*), como un individuo particular. De este modo asumiremos que las prácticas matemáticas son relativas al sujeto que las realiza: si son realizadas por una persona, les llamamos *prácticas matemáticas personales*, y si son promovidas por una institución o realizadas en el seno de la misma, les llamamos *prácticas matemáticas institucionales* (Godino y Batanero, 1994).

En una institución educativa, uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas es lograr que los estudiantes realicen, durante la resolución de determinados tipos de problemas, no prácticas aisladas, sino sistemas de prácticas que se aproximen en semejanza cada vez más, a las establecidas en dicha institución. En otras palabras, en una institución educativa se espera que los sistemas de prácticas personales de los estudiantes se correspondan a los sistemas de prácticas institucionales.

En el estudio de las matemáticas, interesa considerar los sistemas de prácticas que ostentan las personas en su modo de actuar ante tipos de situaciones problémicas.

2.2 Significados

Otro elemento teórico en el EOS es el *significado* que cada sujeto (persona o institución) da a un objeto matemático y que define como el sistema de prácticas matemáticas que emplea al resolver un mismo tipo de problemas donde usa el objeto o a partir de las cuales lo construye; en otras palabras, es lo que el sujeto pueda hacer y pueda decir sobre el objeto. Dado que el significado se define en términos de las prácticas matemáticas, si las prácticas realizadas son institucionales, le llamaremos *significado institucional*, y si las prácticas son personales, será *significado personal* (Grijalva, 2007; Godino, Batanero y Font, 2008; Font 2005).

Como expresan Ordóñez y Contreras (2010), esta manera de interpretar el significado desde la dualidad institucional-personal lleva a concebir la comprensión como un proceso social y no como proceso mental, interpretándola como la correspondencia, entre los significados personales y los institucionales. De esta forma podemos decir que en el EOS se entiende la comprensión como una competencia que posee el alumno y diremos que un alumno comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas.

Esta forma de entender la comprensión nos proporciona una interpretación de la no comprensión entendida, ahora, como una discrepancia entre los significados, personales y los propuestos por la institución. Así, se entienden las dificultades y errores en términos de conflictos semióticos, concebidos como “toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas.” (Godino 2002, p. 258).

Dada la dependencia de los significados a la persona que realiza los sistemas de prácticas, y sobre todo a la institución donde se realizan, al diseñar un proceso de instrucción sobre algún objeto matemático es necesario tener en cuenta el significado que se pretende promover en la institución en la que se implementará tal proceso.

En este sentido, nuestra propuesta didáctica pretende abordar la problemática en torno al concepto de la integral que se presenta en el quehacer académico del Instituto Tecnológico

Superior de Cajeme (localizado en Ciudad Obregón Sonora, México),institución que forma parte del sistema nacional de tecnológicos y que se dedica a la formación de ingenieros; y está dirigida especialmente a los estudiantes del curso "Cálculo Integral " correspondiente al área de ciencias básicas y que se imparte en el segundo semestre en todas las carreras de ingeniería que oferta la institución.

Las fuentes que nos pueden proporcionar información sobre las prácticas matemáticas, tipos de problemas y, por tanto, sobre los significados institucionales de referencia que se quiere promover en los estudiantes de esta institución, son el programa de estudios propuesto para la asignatura, la bibliografía sugerida en éste, el manual de ejercicios que está en la página WEB de la institución, el uso de la tecnología y los significados personales de los profesores que imparten este curso.

Analizando el programa de estudios y otras fuentes del significado institucional, algunos de los tipos de problemas que se mencionan son: problemas referentes a fenómenos físicos, geométricos y de la ingeniería, en particular a problemas de aplicaciones de la integral definida; y problemas relativos a funciones reales de una variable real, como: calcular el área bajo una curva, volumen de sólidos de revolución, longitud de una curva, trabajo realizado por una fuerza, presión hidrostática, momentos, centroides, etc.

En lo que respecta a las prácticas que se quiere lograr se ostenten entre los estudiantes, algunas de las que se señalan son las siguientes: explicar la integral como el área bajo la curva y como la antiderivada o primitiva de la razón instantánea de cambio, algoritmia de ejercicios de integrales indefinidas; utilizar técnicas de integración y el teorema fundamental del cálculo para encontrar el valor de la integral definida en funciones sencillas, modelar problemas físicos, geométricos y de la ingeniería y usar los conceptos y técnicas del cálculo integral para resolver estos problemas; utilizar software dinámico para reforzar el concepto de la integral a partir de su interpretación geométrica como un área bajo una curva; entre muchas otras.

2.3 OBJETOS MATEMÁTICOS

Es evidente que en las prácticas mencionadas en el párrafo anterior se involucran una serie de objetos: función, derivada como función, antiderivada o primitiva de una función, área bajo una curva, integral indefinida, Altura promedio de una región, integral como suma o acumulación, teorema fundamental del cálculo, integral definida, teorema del valor medio de la integral, etc. En general, podemos decir que, al desarrollar sistemas de prácticas matemáticas dentro de una institución, ligadas a la resolución de tipos de problemas, se precisa de un lenguaje especial: términos técnicos, símbolos, cuantificadores, gráficas, expresiones algebraicas, etc.; se usan definiciones de los objetos matemáticos, proposiciones sobre estos, procedimientos y argumentos que justifican y validan las acciones; pero también, durante la realización de dichas prácticas se crea nuevo lenguaje, se establecen nuevas definiciones, se hacen nuevas proposiciones, se construyen nuevos procedimientos, se usan nuevos argumentos y surgen otros tipos de problemas; es decir, de las prácticas matemáticas ligadas a la resolución de tipos de problemas emergen o se construyen *entes* matemáticos que modifican o complementan a los ya existentes. A estos entes matemáticos los podemos clasificar en los seis tipos siguientes:

• *Situaciones*, entendidas como problemas matemáticos (más o menos abiertos), problemas extra-matemáticos (o aplicaciones), ejercicios, ejemplos, situaciones problémicas (en el sentido que se usa en la enseñanza problémicas), etc.
• *Lenguaje*, en diversas formas: verbal, numérico, gráfico, analítico (entendido como notación conjuntista, cuantificadores, expresiones algebraicas, etc.).
• *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.).
• *Conceptos (*expresados por medio de *definiciones o descripciones*).
• *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos como teoremas, corolarios, propiedades, etc.).
•*Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, etc.).

A estos seis tipos de entes emergentes de los sistemas de prácticas, realizadas para resolver un cierto tipo o clase de problemas, les llamaremos *objetos matemáticos primarios.*

Por lo tanto asumiremos como objetos matemáticos no solo a lo que dentro de la matemática se le suele llamar objeto, sino también a cualquiera de los objetos matemáticos primarios mencionados arriba y combinaciones de los mismos. Por ejemplo, al referirnos a la integral como objeto matemático podemos hablar sobre: su definición, su gráfica, su tabla de valores, su expresión analítica, si cumple la propiedad de continuidad al considerarla como función, las reglas para obtener su expresión analítica, problemas en que se modela un fenómeno con una integral , lo que podemos argumentar con ella, etc. A todos estos entes ligados al objeto integral también los consideraremos objetos matemáticos.

Al igual que las prácticas y los significados, los objetos matemáticos también tienen una faceta personal y una institucional, es decir, si quien realiza los sistemas de prácticas es una persona, los objetos emergentes de dichas prácticas serán *objetos matemáticos personales*, mientras que si las prácticas son realizadas en el seno de una institución, los objetos emergentes de éstas serán *objetos matemáticos institucionales* (Godino, Batanero y Font, 2008; Font 2005).

2.4 TIPOLOGÍA DE SIGNIFICADOS

En esta propuesta, lo que interesa es promover la construcción de significados para algunos objetos del cálculo integral, de manera que estén ligados a problemas extra o intra matemáticos; queremos que los estudiantes realicen de cierta forma sistemas de prácticas que les permitan resolver problemas de contexto, de los que emerjan objetos matemáticos del cálculo integral, y donde se van a utilizar como intervinientes objetos que se consideran previamente construidos, pero que de cualesquier forma , el significado asociado a éstos va a enriquecerse en el curso de cálculo integral que llevan los alumnos en el ITESCA. Por ejemplo la antiderivada puede ser un objeto interviniente para hacer emerger el concepto de área bajo una curva. A su vez el concepto de área bajo una curva puede ser objeto también interviniente para la emergencia de la integral definida.

Para la realización de esta propuesta, tomamos en cuenta los sistemas de prácticas matemáticas presentes en el programa de estudios, en los libros de texto propuestos para el curso, en el manual de ejercicios de la página WEB de la institución, algunos resultados de investigación en matemática educativa y los sistemas de prácticas personales de algunos profesores de cálculo integral de la institución educativa anteriormente mencionada. A estos sistemas de prácticas les llamaremos si*gnificado institucional de referencia*.

Así mismo, al sistema de prácticas matemáticas que planeamos promover con nuestra propuesta didáctica, el cual está formado por la selección de prácticas matemáticas que hicimos del significado institucional de referencia, le llamamos *significado institucional pretendido.* En general en un proceso de enseñanza, este significado es el que aparece regularmente en las planificaciones del profesor y en el programa de estudios del curso.

Algunas de las actividades didácticas de nuestra propuesta se probarán en la clase de cálculo integral con alumnos del ITESCA, en donde se desarrollarán algunas de las prácticas planeadas, pero también se entiende que los alumnos realizarán prácticas no planeadas en el diseño. En este sentido, al sistema de prácticas efectivamente desarrolladas en el proceso de instrucción las identificaremos como el *significado institucional implementado*.

Otro tipo de significado institucional, es el *significado institucional evaluado*, el cuál es el sistema de prácticas que se considera fundamental que los estudiantes realicen, y que generalmente se le pide mostrar en un examen o proceso de evaluación del aprendizaje.

Referido a una persona también podemos identificar varios de sus tipos de significados: el g*lobal* es el sistema total de prácticas matemáticas que potencialmente puede manifestar un estudiante ante un determinado tipo de situaciones problémicas, no importa si dichas prácticas son correctas o no para la institución correspondiente. El d*eclarado* es el sistema de prácticas mostradas por el estudiante en el proceso educativo, en particular en los procesos de evaluación, ya sean consideradas como correctas o incorrectas, y el l*ogrado* es el sistema de prácticas manifestadas que son consideradas "correctas" por la institución.

2.4.1 SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA DE LA INTEGRAL

En el desarrollo de los sistemas de prácticas que conforman el significado (personal o institucional) de un objeto matemático, intervienen y/o emergen algunos (o todos) de los seis tipos de objetos matemáticos primarios y se considera que a través de la identificación de éstos se puede determinar con más detalle el significado del objeto, por lo que a los objetos matemáticos primarios, tanto intervinientes como emergentes del sistema de prácticas, se les llama *componentes del significado* del objeto.

A su vez los objetos matemáticos primarios se organizan en entidades más complejas llamadas *configuraciones epistémicas*, si se refieren a los significados institucionales (Godino, Contreras y Font, 2006) y *configuraciones cognitivas* si se refieren a los significados personales. Están definidas como redes de objetos emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.

Las configuraciones epistémicas hacen posible llegar a la noción de *significado global* entendido como el sistema de prácticas operativas y discursivas asociadas al objeto en los diversos contextos de uso, incluyendo el formal- estructural. Cada cambio significativo en algún elemento del significado producirá un nuevo tipo de tareas que activarán una parte del significado y, por lo tanto, una nueva configuración epistémica. Todas estas configuraciones y sus relaciones darán lugar al significado global.

Contreras y Ordoñez, 2010, hacen alusión al tipo de configuración epistémica de la integral en relación al desarrollo evolutivo de ésta ya que el estudio de dicho desarrollo permite determinar las distintas situaciones que originaron el nacimiento del objeto matemático integral definida los diferentes conflictos que provocaron su evolución, las diversas maneras de hacer dependiendo de los recursos o medios existentes en la época. Como ejemplo, podemos citar el gran cambio que supuso la aparición del álgebra; las grandes dificultades para soslayar el infinito o el interés por una buena fundamentación matemática.

Y continúan explicando: "Éstas son cuestiones que van provocando nuevos modos de hacer y cambios en el significado de la integral hasta llegar al estado actual. Así, como asegura

Labraña (2001), que hay dos tipologías de problemas de integración que *"responde a dos percepciones psicológicamente diferentes. Una estática, una densidad: densidad, presión (fuerza/superficie) intensidad de campo (cantidad de flujo/superficie),… que se conecta fácilmente con la idea de suma de todas las pequeñas cantidades f(x)dx, que constituyen la integral definida. Otra dinámica, una tasa de variación instantánea: velocidad, tasa de crecimiento de una población, ingreso marginal (ingreso/producción),…que permite conectar con la idea de antiderivación" (p. 290).* Esta doble tipología es la base de dos configuraciones epistémicas: ***la configuración epistémica geométrica*** *y* ***la configuración epistémica de resultado de un proceso de cambio.***

Contreras y Ordoñez, 2010, agregan también que en el desarrollo histórico han observado dos cambios importantes: la introducción del álgebra que permite nuevos métodos de cálculo y la generalización de las situaciones, y otro que se produce en el momento en que se establecen la derivación y la integración como procesos inversos apareciendo resultados como el teorema fundamental del cálculo. Este hecho aporta un nuevo significado a la integral, lo que consideramos otra configuración que es la ***configuración epistémica como inversa de la derivada***; Cauchy establece el límite como noción central del cálculo infinitesimal lo que proporciona una nueva manera de interpretar la integral, lo que nos da la ***configuración epistémica como aproximación al límite*****.** Las diferentes ampliaciones del campo de funciones integrables realizadas por Riemann y Darboux que no cambian significativamente este significado.

Por otra parte, la necesidad de ampliar el campo de funciones integrables obliga nuevamente a un cambio importante cuestionando las nociones de medida, generalizándolas y obteniendo un nuevo significado de integral, la integral de Lebesgue, que determina otra nueva configuración epistémica, ***configuración epistémica generalizada".***

De acuerdo con los autores anteriormente señalados, estas configuraciones que ellos denominan *históricas* han dado lugar a las configuraciones epistémicas actuales mismas que serán utilizadas en esta propuesta didáctica como significado global de la integral.

A continuación presentamos de manera inicial los objetos matemáticos primarios que componen el significado institucional de referencia de la integral, para el diseño de nuestra propuesta didáctica de acuerdo con las configuraciones epistémicas. Posteriormente presentaremos también el significado institucional pretendido en nuestro trabajo.
En Contreras y Ordoñez (2010, p. 28), se ha tomado como referencia la tabla siguiente para hacer la descripción de las primeras cuatro configuraciones ya que la última no será parte de nuestra propuesta.

Objeto matemático Primario	**Configuración Epistémica**			
	Geométrica	**Resultado de un Proceso de cambio o acumulación**	**Inversa de la derivada**	**Aproximación al límite**
Situaciones	Situaciones intramatemáticas • Cálculo de áreas • Cálculo de volúmenes • Cálculo de alturas promedio • Cálculo de la longitud de una curva	Situaciones extramatemáticas • Trabajo • Presión • Fuerza • Modelización	Situaciones intramatemáticas ligadas a la relación que existe entre la función derivada y la propia función.	Situaciones Intra-matemáticas: Cálculo de áreas por procedimientos de paso al límite.
Procedimientos	• Calcular puntos de corte. • Representar la gráfica de una función. • Métodos de integración. • Calcular la integral definida. • Asignación de un valor al área o al volumen.	Modelizar la situación a través de la integral definida. Cálculo de integrales y aplicación de la regla de Barrow. Interpretación del Resultado.	Extraer propiedades de la función y de su primitiva identificándolas como función y derivada.	Dada una función o figura realizar una partición y calcular una aproximación de su área. Hacer mejores aproximaciones e identificar el área con el límite.
Lenguaje	Verbal, algebraico, gráfico y tabular.	Verbal, algebraico, gráfico y tabular.	Verbal, algebraico, gráfico y tabular.	Verbal, algebraico, gráfico y tabular.
		Variación de una		Integral definida

Conceptos	Área Longitud de una curva	magnitud en el tiempo la integral modeliza el cambio total acumulado.	Inversión integral derivada	Integral indefinida
Propiedades	Regla de Barrow	Regla de Barrow	Teorema Fundamental del cálculo	Promedio del Límite de la suma de alturas inferiores y superiores coinciden y es el área cuando se multiplican por el valor b-a.
Argumentos	Justificación de los elementos de integración. Demostración de la regla de Barrow.	Justificación de los elementos de integración. Demostración de la regla de Barrow. Preguntas para justificar las afirmaciones y acciones que se realizan para llevar a cabo la actividad didáctica.	Demostración de las reglas de integración básicas.	Justificación de los elementos de integración. Demostración de la regla de Barrow. Preguntas para justificar las afirmaciones y acciones que se realizan para llevar a cabo la actividad didáctica.

Tabla 1. Configuraciones epistémicas.

En general los objetos matemáticos primarios que utilizaremos para las distintas configuraciones epistémicas son los siguientes:

Configuración epistémica geométrica

➢ *Situaciones*

- Determinar la longitud de una curva en un intervalo desde $x = a$, hasta $x = b$.
- Determinar el área de una región plana.
- Determinar el volumen de un sólido de revolución por el método de las cortezas.
- Determinar el volumen de un sólido de revolución por el método de discos.
- Determinar el centro de masa de una región plana.

➢ *Procedimientos*

- Cálculos de puntos de corte.
- Representar la gráfica de una función.
- Métodos de integración.
- Calcular la integral definida.
- Asignación de un valor al área o al volumen.
- Relacionar el área bajo la curva con la gráfica de la función velocidad constante para un intervalo de tiempo cualquiera.
- Relacionar la función de posición en un intervalo de tiempo con el área bajo la gráfica de la función velocidad $v(t) = t$, de esta situación para un intervalo de tiempo cualquiera.

- Relacionar la función de posición en un intervalo de tiempo con el área bajo la gráfica de la función velocidad constante para un intervalo de tiempo cualquiera.
- Promedio de alturas mayores y alturas inferiores.
- Calcular la distancia entre dos puntos.
- Comprobar el valor del área formada.
- Como un uso de recursos tecnológicos apoyarse en el Geogebra para determinar el área aproximada entre la curva y el eje *x*.

➢ *Conceptos*

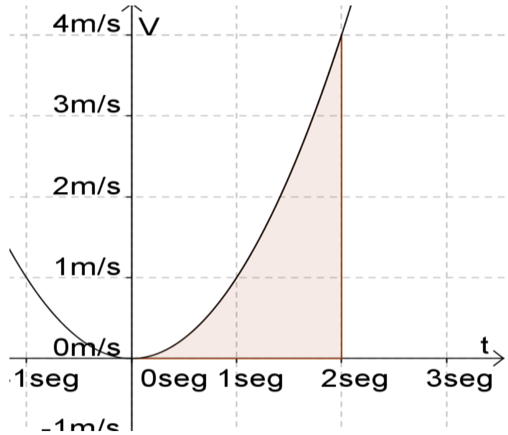
- Área bajo la curva como una función.
- Sólidos de revolución.
- Función
- La integral indefinida.
- La integral definida.
- Longitud de arco.
- Longitud de una curva.

➢ *Lenguaje*

- Terminología para los conceptos citados arriba; integral, antiderivada, área bajo la curva, etc.
- Lenguaje verbal .
- Tabla de valores :

$\int_a^x f(s)ds$, x, f´(x)

- Expresiones analíticas :
  - Funciones.
  - Para denotar las funciones integral, integral definida.
- Gráficas:
  - Área bajo la curva.



➢ *Propiedades*

- La continuidad implica integrabilidad; si una función es contínua en el intervalo cerrado *[a, b]*, entonces *f* es integrable en *[a, b]*.

- La regla de Barrow.

- El teorema del valor medio para integrales: si *f* es constante en el intervalo *[a, b]*, entonces existe un número *c* en el intervalo cerrado *[a,b]* tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

- Bajo ciertas condiciones: La integral definida como área de una región.

  Área = $\int_a^b f(x)dx$
- La integral indefinida es una función. F(x) = $\int f(x)dx$

- La integral definida es un número. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

➢ *Argumentos*

- Demostración de las propiedades anteriores enlistadas en la sección anterior.

Configuración epistémica como resultado de un proceso de cambio o acumulación

- *Situaciones*

- Determinar el cambio de la posición de un cuerpo que se mueve a velocidad constante en un intervalo de tiempo.
- Determinar el cambio de posición de un cuerpo que se mueve con una aceleración constante en un intervalo de tiempo donde la velocidad es $v\ (t) = t$.
- Determinar el cambio de posición de un cuerpo que se mueve con una aceleración no constante en un intervalo de tiempo.
- Determinar el trabajo realizado sobre un cuerpo por una fuerza constante cuando este recorre una distancia determinada.
- Determinar el trabajo realizado sobre un cuerpo por una fuerza variable cuando este recorre una distancia determinada.
- Determinar la fuerza de empuje que soporta la pared de un recipiente que contiene un fluido confinado.
- Problemas de aplicaciones extra matemáticos en situaciones de la vida diaria o profesional de un ingeniero.
- Fuerza de empuje producida por un fluido sobre las paredes de un recipiente: principio de pascal y presión soportada por un cuerpo sumergido en un fluido.

- *Procedimientos*

- Determinar la razón de cambio velocidad para un tiempo cualquiera en una situación de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado para una función $v(t) = t$.
- Determinar la función de posición de un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado a partir de la gráfica de la función velocidad $v(t) = t$ de esta situación para un tiempo cualquiera.
- Determinar de manera gráfica la razón de cambio velocidad para un tiempo cualquiera en una situación de movimiento rectilíneo uniforme.
- Determinar la función de posición de un cuerpo en movimiento rectilíneo uniforme a partir de la gráfica de la función velocidad de esta situación para un tiempo cualquiera.

- Determinar las velocidades mayores promedio y las velocidades inferiores promedio de un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado en un intervalo de tiempo a partir de un número discreto de ellas.

- Determinar la razón de cambio velocidad para un tiempo cualquiera en la modelización de una situación de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado para una función $v(t) = t$.

- Modelizar la situación a través de la integral definida.
- Cálculo de integrales y aplicación de la regla de Barrow.
- Interpretación del resultado.
- Calcular el cambio acumulado de una función que modele una situación.

➢ *Conceptos*

- La función velocidad; derivada de la posición respecto al tiempo.
- El centro de masa de una región está dado por C($\bar{x}$, $\bar{y}$), donde

$$\bar{x} = \frac{Vcortezas}{2\pi A} \qquad \bar{y} = \frac{Vdiscos}{2\pi A}$$

- La función trabajo; producto de una función fuerza por un desplazamiento o distancia recorrida.

$$P = \frac{F}{A}$$

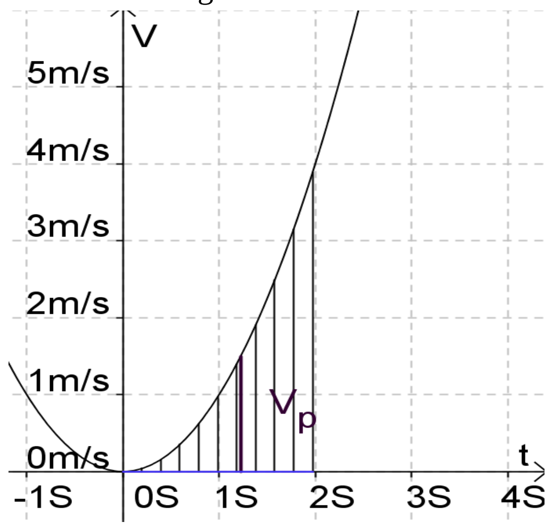
$$P = \rho\, g\, x$$

$$T = F\, d$$

➢ *Lenguaje*

- Se utilizarán los enlistados en la sección anterior además de los siguientes:

- función promedio velocidad en una región dada.



Gráfica de velocidades y velocidad promedio Vp.

➢ *Propiedades*

- Regla de Barrow.
- Teorema del valor medio de la integral.

➢ Argumentos

- Demostración de las propiedades enlistadas en esta sección.

Configuración epistémica inversa de la derivada

➢ *Situaciones*

- A partir de la expresión analítica de *f '*, determinar *f*.
- Trazar *f* a partir de *f '*.

➢ *Procedimientos.*

- Determinar como antiderivada la función de posición de un cuerpo para un intervalo de tiempo.

➢ *Conceptos*

- Antiderivada.
- Función derivada.
- Integral indefinida.

➢ *Lenguaje*

- Terminología para los conceptos citados arriba; derivada, integral, primitiva de una función, antiderivada, área bajo la curva, etc.
- Gráficas: Similares como en la configuración anterior.

➢ *Propiedades*

- El primer teorema fundamental del cálculo.

$$F(x) = \int_a^x F'(s)ds$$

- La integración indefinida es la "inversa" de la derivación

  $\int F'(x)dx = F(x) + C$, donde *F´(x)* es la derivada de *F(x)* y *C* se

  denomina constante de integración.

➢ Argumentos

- La demostración del primer teorema fundamental del cálculo.

Configuración epistémica como aproximación al límite

➢ *Situaciones*

- Estimar gráfica y numéricamente el valor de la integral.

- Estimar gráficamente el área entre dos curvas.

➢ *Conceptos*

- La integral definida como un límite: $\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(Ci)\Delta xi = \int_a^b f(x)dx$

  El límite recibe el nombre de integral definida de *f* de *a* a *b.* el número *a* es el límite inferior de integración y el número b es el límite superior de integración.

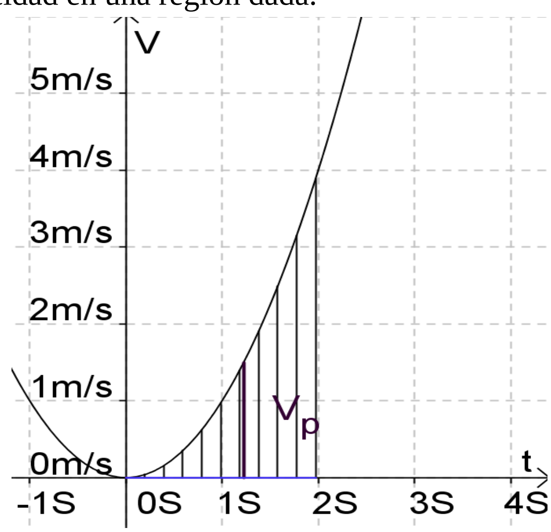
- Límite de una función.

➢ *Lenguaje*

Además del lenguaje utilizado en las configuraciones anteriores se utilizará lo siguiente:

- Expresiones analíticas :
  - ❖ Funciones
  - ❖ La integral vía límites.
  - ❖ Notación sigma.
  - ❖ Para denotar las funciones integral, integral definida, teorema fundamental del cálculo, teorema del valor medio, integral como límite y derivada.
- Gráficas:

- Función promedio velocidad en una región dada.



Gráfica de velocidades y velocidad promedio Vp.

➢ *Procedimientos*

- Evaluar la velocidad promedio como el límite de una suma infinita de velocidades dividido por la cantidad de ellas *n*.

- Calcular el límite del promedio de la suma de alturas inferiores y superiores y utilizarlo para obtener el área.
- Tomando la definición del área de un rectángulo, resulta apropiado obtener el área bajo una curva relacionando ésta de manera aproximada con un área rectangular equivalente de base "*b-a* " y altura promedio *f(c)* determinada discretamente . al ir incrementando el número de alturas se pueden obtener aproximaciones más y más cercanas al área de la región

➢ *Propiedades*

- Si el límite del promedio de la suma de alturas inferiores y superiores coinciden entonces es cuando se multiplican por el valor *b-a*, se obtiene el área.

➢ *Argumentos*

- Justificar las propiedades anteriores.

Para determinar el significado institucional de referencia de la integral, consultamos los siguientes libros de texto sugeridos en la bibliografía del programa analítico de estudios del curso de Cálculo Integral que propone el sistema nacional de Institutos Tecnológicos así como otras fuentes de información:

1. Hugues-Hallet-Gleason-Look-Flath. Calculo Aplicado. 2ª edición. Grupo Editorial Patria. 3ª reimpresión, México 2009.

2. Alanís R. Juan Antonio-Salinas M. Patricia .Manual de cálculo I. Instituto Tecnológico de Sonora(ITSON).

3. Larson – Hostetler. Cálculo con Geometría. Edit. McGraw-Hill.

4. Thomas Jr. George B. Cálculo de una variable. 11ª edición 2006. Pearson. Educación.

5. Waner Stefan-Costenoble Steven R. Cálculo Aplicado. 2ª edición, 2002.Editorial Thomson Learning.

A continuación efectuaremos un recorrido por los textos anteriores para mencionar brevemente la forma en cómo se aborda la integral y el papel que juegan las situaciones descritas anteriormente en estos libros de texto. En una siguiente etapa describiremos cómo se abordará este objeto matemático en nuestra propuesta didáctica.
En Hugues (2009), capítulo 5, se parte de una situación problémica extra matemática, la razón de cambio de la distancia respecto al tiempo a velocidad constante, para determinar la distancia recorrida por un cuerpo durante un tiempo determinado; luego lo hace para el caso en que la velocidad no es constante utilizando representaciones algebraicas y gráficas donde se hace alusión al área bajo la curva como la distancia recorrida en un intervalo de tiempo, posteriormente utiliza representaciones tabulares variando los intervalos de tiempo y visualizando la distancia en la gráfica de la velocidad para luego llevar el mismo método a la determinación del cambio total a partir de una razón de cambio de otras magnitudes.

A continuación aborda otra situación problémica extra matemática realizando estimaciones por defecto y exceso para el cambio total en periodos determinados de tiempo, graficando como rectángulos bajo la curva de altura *f(c)* y base Δt para inducir a como encontrar el cambio total utilizando notación sigma y dar paso al concepto de límite de una suma de Riemann para obtener la integral definida y luego definirla como el área bajo la curva. Establece el teorema fundamental del cálculo como resultado de lo anterior.

En el capítulo 6, utiliza la integral definida para resolver situaciones problémicas que implican valor promedio y otras, iniciando en cada caso con la evaluación de la cantidad por medio de una suma de Riemann. Finalmente en el capítulo 7 plantea el concepto de la antiderivada como la integral indefinida estableciendo su diferencia con respecto a la integral definida, algunas propiedades y hace la conexión con el teorema fundamental del cálculo con la forma de utilizar antiderivadas para calcular exactamente integrales definidas utilizando las diferentes formas de representación algebraica, gráfica, tabular y verbal.

En Alanís (manual de cálculo I del Instituto tecnológico de Sonora, ITSON), se aborda el concepto de la integral a partir de situaciones problemas extra matemáticas también a partir de la razón de cambio constante y luego no constante iniciando con el concepto de antiderivada solamente en representaciones algebraicas utilizando funciones derivada polinomiales y después, aborda otro tipo de funciones.

Hace alusión también al cambio acumulado utilizando el método de Euler para aquellas funciones que no poseen una antiderivada simple. Utiliza la noción de diferenciales para redimensionar la noción de cambio acumulado de una magnitud emergiendo el concepto de la integral que se interpreta como una suma infinita de diferenciales de magnitud utilizando esto para el planteamiento del Teorema Fundamental del cálculo y para posteriormente

utilizar éste en la solución de problemas referentes al cálculo de áreas, volúmenes de sólidos de revolución por el método de discos y por el método de las cortezas, presión hidrostática, trabajo realizado por una fuerza variable intercalando los métodos de integración de cambio de variable, por partes, por sustitución trigonométrica y por fracciones parciales.
En Larson (2006), se sigue un orden diferente a las fuentes anteriormente citadas; podríamos decir que tradicionalista ya que aborda primero a la integral indefinida y los métodos de integración, después a la integral definida y en una tercera etapa a las aplicaciones de la integral. En el caso de la integral indefinida inicia dando el concepto de antiderivada. Luego se le da paso a la algoritmia solamente no contemplando problemas extra matemáticos. En el caso de la integral definida también parte de establecer conceptos; notación sigma, área, área de una región plana. Utiliza aproximaciones al área de una región plana subdividiendo esta en subintervalos iguales de área rectangular situados por defecto o por exceso los cuales son sumados primero discretamente y luego mediante un proceso de límite y finalmente citar algunas propiedades de la integral definida.

Por separado define el TFC, el teorema del valor medio para integrales y el valor medio de una función así como el segundo teorema fundamental del cálculo. Se le da aplicación al TFC y a la como una fórmula ya que los objetos matemáticos antiderivada, integral definida y TFC no se muestran conectados. Finalmente se abordan las aplicaciones de la integral definida como procesos de algoritmia ya que se siguen fórmulas para cada caso por ejemplo, volumen de un solido de revolución, longitud de una curva, área, centros de masa, trabajo realizado por una fuerza variable, etc.

En Thomas Jr. (2006), se aborda primero la integral indefinida como antiderivada, en capitulo posterior se aborda el tema de integración partiendo de una situación intra matemática de realizar aproximaciones del área bajo una curva. Relaciona esto en el contexto de la velocidad encontrando la distancia recorrida en un intervalo de tiempo también por aproximaciones visualizando esta como el área. Enseguida aborda en este mismo capítulo el concepto de notación sigma y límites de sumas infinitas para llegar a lo que se conoce como suma de Riemann en el intervalo $[a, b]$ y definir la integral definida como el límite de esta suma expresando esto siempre en forma conceptual. No utiliza situaciones problémicas en donde emerja el objeto. Se nota también una forma tradicional de abordar a la integral. Al final del capítulo plantea al TFC, tomando como referencia el teorema del valor medio para integrales, en este caso, a sus límites; valor mínimo y máximo de la función promedio.

En Waner Stefan (2002), en primer lugar se aborda a la integral indefinida como antiderivada. Posteriormente se aborda la integral definida como una suma partiendo de una situación problema extra matemática en donde se utiliza a la razón de cambio costo marginal para evaluar el costo total en la misma forma que autores anteriores hacen con la velocidad para evaluar la distancia total recorrida por un objeto, utiliza la suma de Riemann y luego define la integral definida como el límite de esta suma. En esta fuente se utiliza aplicación de la tecnología para aproximar la integral definida con la hoja de cálculo presentando registro tabular par el estimado de la integral como suma o total, en la solución de algunas situaciones problema que se muestran como ejemplos. Enseguida se plantea el cálculo del área bajo la curva conectando esto con la definición de integral definida como el límite de la suma de Riemann para dar lugar a la interpretación geométrica de la integral definida. Finalmente relaciona la antiderivada con la integral definida apareciendo el TFC. En un capítulo aparte se ven aplicaciones del TFC en situaciones extramatemáticas.

Se puede observar en las fuentes anteriores que existen diferencias en el orden en que son abordados los objetos matemáticos integral indefinida, antiderivada, integral definida, área bajo la curva y el teorema fundamental del cálculo para determinar el significado institucional de referencia de la integral; En Hugues (2009) y Waner Stefan (2002), se aprecian los cuatro tipos de configuraciones epistémicas detallados en la tabla 3.1. En Alanís (Manual de cálculo del ITSON), se da mayor peso a las configuraciones epistémicas geométrica y resultado de un proceso de cambio o de acumulación. En Larson (2006) y en Thomas Jr. (2006), los tipos de configuraciones epistémicas aparecen de forma aislada y no se conectan posteriormente por que siempre definen el concepto al empezar el tema del capítulo; la enseñanza de la integral es de forma tradicionalista partiendo del concepto y no de situaciones problémicas.

En este sentido, podemos ubicar estos libros de texto, por la forma en que se introduce el significado de la integral, dentro de una de las perspectivas siguientes (Font, 2007):

• La perspectiva formalista, en la que los objetos matemáticos se introducen partiendo de su definición y posteriormente se presentan ejemplos de estos y se hace un estudio teórico. Ubicamos en esta perspectiva a Larson (2006) y Thomas Jr. (2006).

• La perspectiva contextualizadora, en la que los objetos matemáticos se introducen partiendo de situaciones de contexto extramatemático. Ubicamos en esta perspectiva a Hugues (2009), Alanís y Waner Stefan (2002).

Como se puede observar en los párrafos anteriores, el objeto integral tiene un significado muy amplio según corresponda al tipo de configuración epistémica de cómo se aborda. En nuestra propuesta didáctica, nos enfocaremos a la construcción de significados ligados a los aspectos geométricos de la integral, de la antiderivada y que tienen que ver con el proceso de límite de la suma de alturas ya que es posible obtener el área bajo una curva relacionando ésta de manera aproximada con un área rectangular equivalente de base "b-a " y altura promedio f(c) determinada discretamente ; al ir incrementando el número de alturas se pueden obtener aproximaciones más y más cercanas al área de la región, esto tomando como base el teorema del valor medio de la integral. Cabe mencionar también que dicha propuesta se ubicará dentro de la perspectiva contextualizadora.

A continuación presentaremos, los objetos matemáticos primarios que componen el significado institucional pretendido de la integral en nuestra propuesta.

2.4.2 SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDO DE LA INTEGRAL

- *Situaciones*

Las *situaciones intervinientes,* cuya resolución motiva la realización de prácticas matemáticas y la emergencia de los objetos del cálculo integral, son los problemas extramatemáticos que se presentan a continuación, y las preguntas e indicaciones guía de las actividades didácticas.

Los problemas intra y extramatemáticos que se presentan enseguida, son situaciones que seleccionamos de libros de texto.

- **DISTANCIA RECORRIDA A VELOCIDAD CONSTANTE:**

  Un cuerpo se mueve con una velocidad de $3\frac{m}{s}$ durante un viaje de *4* segundos. ¿cuál es la distancia total recorrida?

Tomado de Hugues-Hallet-Gleason-Look-Flath (2009, p. 220). También puede encontrarse en Thomas Jr. George B (2006, p.328) y en Alanís R. Juan Antonio-Salinas M. Patricia Manual de cálculo I. Instituto Tecnológico de Sonora, p. 1.

- **DISTANCIA RECORRIDA A VELOCIDAD VARIABLE (*v(t)* = *t*).**

  Un automóvil se mueve con una velocidad dada por la función $v(t) = t$ sobre una carretera recta durante un viaje de *4* segundos. ¿cuál es la distancia total recorrida?

En Thomas Jr. George B (2006, p. 351) y en Waner Stefan-Costenoble Steven R. (2002, p. 346) aparece la misma función pero referido a calcular el área bajo la curva.

- **DISTANCIA RECORRIDA A VELOCIDAD VARIABLE** ***($v(t) = t^2$)***:

  Un automóvil se desplaza con una velocidad dada por la función $v(t) = t^2$. Determinar el cambio de la velocidad entre los *2* y los *5* segundos.

En Thomas Jr. George B (2006, p. 351) y en Waner Stefan-Costenoble Steven R. (2002, p. 346) aparece la misma función pero referido a calcular el área bajo la curva.

- **VELOCIDAD DADA LA ACELERACIÓN:**

  Un automóvil se desplaza con una aceleración dada por la función $a(t) = t^2$. Determinar el cambio de la velocidad entre los *2* y los *5* segundos.

En Waner Stefan-Costenoble Steven R. (2002, p. 346) aparece la función cuadrática, pero referido a calcular el área bajo la curva.

- **TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE:**

  Una caja que tiene un peso *F* de *20N*, tiene un movimiento en caída libre desde una altura *y* de *32m.* Suponiendo que inicia su caída a partir del reposo, deseamos determinar el trabajo total realizado por la fuerza de gravedad sobre la caja.

Tomado de Alanís R. Juan Antonio-Salinas M. Patricia Manual de cálculo I. Instituto Tecnológico de Sonora, p. 131.

- **TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE:**

  Calcular el trabajo que se necesita hacer para estirar un resorte medio metro hacia la derecha a partir de su posición de equilibrio sabiendo que cuando el resorte se estira *0.1m* a la derecha se ejerce una fuerza *F* de *5N.* En donde $F=Kx$ siendo *K* la constante de elasticidad del resorte y *x* su alargamiento.

Tomado de Alanís R. Juan Antonio-Salinas M. Patricia Manual de cálculo I. Instituto Tecnológico de Sonora, p. 130.

- **TRABAJO REALIZADO PARA VACIAR EL FLUIDO DE UN TANQUE:**

Un recipiente esférico de *2m* de radio está lleno hasta la mitad de un líquido con densidad de masa constante e igual a ρ = 1200 $\frac{Kgs}{m^3}$ .Se desea desalojar el líquido por un hoyo que se encuentra en la parte superior del recipiente. ¿Cuánto trabajo se necesita desarrollar para realizar esta tarea de desalojo?

Tomado de Alanís R. Juan Antonio-Salinas M. Patricia Manual de cálculo I. Instituto Tecnológico de Sonora, p. 133.

- **FUERZA PRODUCIDA POR UN FLUIDO CONFINADO SOBRE UNA DE LAS PAREDES DEL RECIPIENTE QUE LO CONTIENE:**

Suponiendo que una cortina vertical de una presa, llena a su máxima capacidad, tiene forma rectangular con una altura de *6m* y un ancho de *8m*, obtener la fuerza total que ejerce el agua contra la cortina.

Tomado de Alanís R. Juan Antonio-Salinas M. Patricia Manual de cálculo I. Instituto Tecnológico de Sonora, p. 140.

- **LONGITUD DE ARCO UNA CURVA:**

- Un cable eléctrico cuelga entre dos torres que están a *200* pies de distancia. El cable toma la forma de una catenaria cuya ecuación es $y = 75\left(e^{\frac{x}{150}} + e^{\frac{-x}{150}}\right) = 150cosh\frac{x}{150}$ .Encontrar la longitud de arco del cable entre las dos torres.

Tomado de Larson (2006, p. 161).

- **ÁREA ENTRE CURVAS QUE SE INTERSECAN:**

Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x)=2 - x^2$, $g(x) = x$ y el Eje *y*.

Tomado de Larson (2006, p. 150).

- **VOLUMEN DEUN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN:**

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de:

$y = x^2 + 1$, $x = 0$, y $x = 1$

alrededor del Eje *y*.

Tomado de Larson (2006, p. 183).

- **CENTRO DE MASA DE UNA REGIÓN PLANA:**

  Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$.

Tomado de Larson (2006, p. 195).
Las *situaciones emergentes* son:

• Determinación de la posición de un cuerpo en un intervalo de tiempo a partir de la razón de cambio velocidad como la función antiderivada en casos de movimiento rectilíneo uniforme y de movimiento uniformemente acelerado.
• Representación gráfica de la posición de un cuerpo en un intervalo de tiempo a partir de la gráfica de la velocidad vs tiempo como la función antiderivada.
• Determinación de la velocidad de un objeto dada su aceleración en función del tiempo como antiderivada y como área.
Estas situaciones *emergentes* promueven a su vez la emergencia del objeto integral definida, con la significación geométrica como "el área bajo la curva" en un intervalo desde $t = a$ hasta $t = b$ y del Teorema Fundamental del Cálculo.
De esta manera, se promueve la emergencia de nuevas situaciones, centradas en la determinación del área bajo la curva y, posteriormente, en la determinación de la función integral.

➢ Procedimientos Intervinientes:

- Hacer despejes sencillos, calcular el área, el volumen, el trabajo, la fuerza, presión, posición, la longitud de una curva, etc.

- Graficar puntos en un plano a partir de datos numéricos correlacionados en una tabla.
- Construir una tabla de valores a partir de una fórmula.

- Realizar operaciones algebraicas.

- Cálculos de puntos de corte.

- Representar gráficamente una función.

- Métodos de integración.

- Determinar la razón de cambio velocidad para un tiempo cualquiera en una situación de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado para una función $a(t) = t$.

- Determinar la función de posición de un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado a partir de la gráfica de la función velocidad $v(t) = t$ de esta situación para un tiempo cualquiera.

- Determinar de manera gráfica la razón de cambio velocidad para un tiempo cualquiera en una situación de movimiento rectilíneo uniforme.

- Determinar la función de posición de un cuerpo en movimiento rectilíneo uniforme a partir de la gráfica de la función velocidad de esta situación para un tiempo cualquiera.
- Determinar la razón de cambio velocidad para un tiempo cualquiera en una situación de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado para una función $v(t) = t$.

- Determinar el promedio de velocidades mayores y velocidades inferiores.

- Determinar las velocidades mayores promedio y las velocidades inferiores promedio de un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado en un intervalo de tiempo a partir de un número discreto de ellas.

- Comprobar el valor del área formada bajo la curva y sobre el eje x para el intervalo de tiempo determinado, dividiendo esta en n segmentos separados todos a un mismo intervalo Δx, desde un valor $x = a$ hasta $x = b$, y posteriormente obtener la suma promedio de la longitud de estos segmentos $\Sigma f(x_i)$; dicha suma multiplicarla por el intervalo b-a y representar este producto en la gráfica. Hacer dicha suma primero desde el segmento $i = 0$ hasta el segmento $i = n$-1; luego hacer también dicha suma desde el segmento $i = 1$ hasta el segmento $i = n$.

- Apoyarse en el Geogebra para determinar el área aproximada entre la curva y el eje x, variando la cantidad de segmentos de longitud $f(x)$ y efectuando el procedimiento citado en el enunciado anterior.

Emergentes:
- Determinar la expresión analítica de la función que modele la situación problémica.

- Aproximar el valor del área variando el número de alturas mayores y menores.

- Reconocer gráficamente la integral definida como el área bajo la curva y conectarla con el teorema Fundamental del cálculo.

- Cálculo de las integrales definidas.

- Asignación de un valor al área o al volumen.

- Relacionar la función de posición en un intervalo de tiempo con el área bajo la gráfica de la función velocidad constante para un intervalo de tiempo cualquiera.

- Relacionar la función de posición en un intervalo de tiempo con el área bajo la gráfica de la función velocidad $v(t)= t$, de esta situación para un intervalo de tiempo cualquiera.
- Determinar discretamente la altura promedio y utilizarla para calcular el área de un rectángulo que tenga por longitud la base b-a y por anchura dicha altura promedio.

- Aplicar el proceso de límite al procedimiento anterior para obtener el área aproximada bajo la curva.

- Usar el teorema del valor medio para la integral.

➢ Lenguaje

Interviniente:

- Expresiones algebraicas para calcular la posición de un cuerpo en movimiento y el área de un rectángulo, la altura promedio, límite del promedio de la suma de alturas.
- Términos: referentes a magnitudes como área, volumen, densidad, trabajo, fuerza, velocidad, aceleración, cambio de posición o distancia recorrida, tiempo, tabla, fórmula, derivada, altura menor, altura mayor.

Emergente:

- Expresiones analíticas, verbales, gráficas, numéricas y tabulares de las funciones involucradas.
- Notación para intervalos, para el incremento en x, para la integral indefinida y definida.

- Términos como variable dependiente e independiente, función, integral como suma o acumulación, integral como antiderivada, Integral como Límite de una suma y área bajo la curva.

➢ Conceptos

Intervinientes:

- Área, volumen, longitud, tiempo, distancia, aceleración, trabajo, presión hidrostática, Presión.
- Velocidad constante y no constante.
- *Función*.
- Sólido de revolución.

Emergentes:

Variable, variable dependiente, variable independiente, función, dominio, cambio acumulado de la variable dependiente.

- Área bajo la curva como una función.
- La integral indefinida; una función.
- La integral definida; un número.

➢ Propiedades

Intervinientes:

- El área es no negativa.
- Teorema del valor medio para la integral.
- Teorema de Pappus.
- Teorema de Pitágoras.

Emergentes:

- La integración indefinida o antiderivación es la “inversa” de la derivación.

- La derivación es la “inversa” de la integración indefinida.

- La integral indefinida es una función. $F(x) = \int f(x)dx$.

- La integral definida es un número. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- La regla de Barrow.

➢ Argumentos

Los argumentos que se utilicen durante el desarrollo de las actividades didácticas de esta propuesta se espera que justifiquen las acciones llevadas a cabo para la resolución de problemas.

Podemos expresar además que estos objetos matemáticos primarios, tanto intervinientes como emergentes, no se encuentran aislados en el momento de realizar los sistemas de prácticas matemáticas ligadas a la resolución de tipos de problemas, sino que se relacionan unos con otros formando redes. Y como se ha mencionado anteriormente, a estas redes de objetos emergentes e intervinientes en los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos se les llama *configuraciones* de tal manera que si los objetos son institucionales, las configuraciones se llamaran *epistémicas* y si los objetos matemáticos son personales, se llamaran *configuraciones cognitivas* (Godino, Batanero y Font, 2008).

2.5 IDONEIDAD DIDÁCTICA Y SUS DIMENSIONES.

Hasta este momento se ha realizado una caracterización de lo que representan el significado institucional de referencia y el significado institucional pretendido en nuestra propuesta mediante la determinación de sus componentes. Pero para diseñar, o llevar a cabo un proceso de instrucción, se deben considerar otros elementos intervinientes en dicho proceso que influyen en la construcción de los significados personales de los estudiantes: la metodología de enseñanza del profesor, si los contenidos matemáticos son de interés para los estudiantes, el papel que el estudiante cree que tiene en la clase (como espectador o como propio constructor de su aprendizaje, etc.), los materiales y herramientas tecnológicas con que se cuenta en la institución educativa, entre otros.

En este sentido, el EOS proporciona una herramienta muy útil para valorar la pertinencia de un proceso de instrucción diseñado o implementado; esta herramienta es la noción de *idoneidad didáctica*, que se define como la articulación de seis idoneidades parciales: *epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional* y *ecológica;* que contemplan los elementos ya mencionados en el párrafo anterior, entre muchos otros (Godino,Batanero y Font, 2008).

Para cada una de las seis idoneidades parciales, en Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007) sugieren una serie de componentes y descriptores que facilitan su valoración, los cuáles mostraremos a continuación y que serán utilizados en el siguiente capítulo para realizar una valoración a priori a la idoneidad didáctica de nuestra propuesta.

2.5.1 Idoneidad *epistémica*: es el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia, los componentes y descriptores de esta idoneidad se muestran a continuación (Tabla 1).

Tabla 1. Componentes y descriptores de la idoneidad epistémica.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Situaciones-problema	• Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. • Propuesta de situaciones de generación de problemas (problematización).
Lenguaje	• Uso de diferentes modos de expresión (verbal, grafico, simbólico...), traducciones y conversiones entre los mismos. • Nivel del lenguaje adecuado a quienes se dirige. • Propuesta de situaciones de expresión e interpretación.
Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos).	• Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. • Presentación de los enunciados y procedimientos fundamentales del tema según el significado de referencia y el nivel educativo. • Propuesta de situaciones para la generación y negociación de las reglas.
Argumentos	• Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al

	nivel educativo a que se dirigen. • Se promueven momentos de validación.
Relaciones (conexiones, significados)	• Relación y articulación significativa de los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.

2.5.2. Idoneidad *cognitiva*: Grado en que los significados implementados (pretendidos) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados. Sus componentes y descriptores son los siguientes (Tabla 2).

Tabla 2. Componentes y descriptores de la idoneidad cognitiva.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Conocimientos previos (Componentes similares a la dimensión epistémica).	• Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). • Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	• Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.
Aprendizaje	• Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidas o implementadas.

2.5.3. Idoneidad *mediacional*: Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje. Ver la Tabla 3.

Tabla 3. Componentes y descriptores de la idoneidad mediacional.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Recursos Materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores).	• Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido. • Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Numero de alumnos, horario y condiciones del aula	• El numero y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. • El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a ultima hora). • El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (De enseñanza colectiva/tutorización; tiempo de aprendizaje).	• Adecuación de los significados pretendidos/implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial). • Inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema. • Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad.

2.5.4. Idoneidad *emocional*: Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes. Sus componentes y descriptores se presentan enseguida (Tabla 4).

Tabla 4. Componentes y descriptores de la idoneidad emocional.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Intereses y necesidades	• Selección de tareas de interés para los alumnos. • Proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	• Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. • Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en si mismo y no por quien lo dice.
Emociones	• Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. • Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

2.5.5. Idoneidad *interaccional*: Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje. Los componentes y descriptores de esta idoneidad son los siguientes (Tabla 5).

Tabla 5. Componentes y descriptores de la idoneidad interaccional.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Interacción docente-discente	• El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) • Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de

	preguntas y respuestas adecuado, etc.). • Se busca llegar a consensos con base en el mejor argumento. • Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. • Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión.
Interacción entre discentes	• Se favorece el dialogo y comunicación entre los estudiantes. • Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	• Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación).
Evaluación formativa	• Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos

2.5.6. Idoneidad *ecológica*: Grado de adaptación curricular, socio-profesional y conexiones intra e interdisciplinares. Los componentes y descriptores en este caso, son los siguientes (Tabla 6).

Tabla 6. Componentes y descriptores de la idoneidad ecológica.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Adaptación al currículo	• Los significados, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	• Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socioprofesional y cultural	• Los significados contribuyen a la formación socioprofesional de los

	estudiantes.
Conexiones intra e interdisciplinares	• Los significados se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

CAPÍTULO 3

LA PROPUESTA DIDÁCTICA

3.1 CARACTERÍSTICAS DE LA PROPUESTA

Nuestra propuesta didáctica está dirigida a estudiantes del curso de Cálculo Integral que se imparte en el Instituto Tecnológico Superior de Cajeme localizado en Ciudad Obregón, Sonora, y que forma parte del Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos en México, en donde se busca promover la construcción de significado de la integral, y otros objetos matemáticos relacionados con este tópico ya especificados en el significado institucional pretendido, mediante la resolución de algunas actividades didácticas que hemos diseñado apoyándonos en los elementos teóricos del EOS y que constan de unas hojas de trabajo para los estudiantes y un archivo manipulativo de GeoGebra.

En este capítulo se describirá la estructura de las actividades didácticas, y ejemplificaremos con algunas de ellas el modo en que se promoverá la emergencia de los objetos matemáticos del cálculo integral y el papel que juegan en esto los ambientes dinámicos (en nuestro caso, la manipulación del archivo con GeoGebra) y enseguida realizaremos un análisis de la propuesta para valorar a priori la idoneidad didáctica de la misma, y finalmente presentaremos las hojas de trabajo de las actividades didácticas que la conforman.

Para la implementación de nuestra propuesta didáctica, consideramos que lo más favorable será trabajar en un centro de cómputo donde se disponga de al menos una computadora por cada dos o tres estudiantes. De no ser posible tener tales condiciones, al menos debe contarse con una computadora y un proyector.

Cabe mencionar que resolver las situaciones problema no es el propósito principal de nuestras actividades didácticas, sino más bien, promover la construcción de objetos matemáticos del cálculo integral durante la resolución de éstas.

Dado que este trabajo se diseñó para estudiantes del segundo semestre de ingeniería, las actividades didácticas se han estructurado para abordarse utilizando los sistemas de prácticas matemáticas ostensivos y no ostensivos que los estudiantes tienen acerca de aritmética, algebra, geometría, trigonometría y cálculo diferencial, mismos que se construyen en la escuela preparatoria y en el curso de cálculo diferencial que han llevado en el primer semestre de la carrera. Las hojas de trabajo manejan un lenguaje coloquial, familiar para los estudiantes, sin términos técnicos pensando desde nuestro punto de vista que la introducción de estos términos y la institucionalización de los objetos matemáticos emergentes deben hacerse gradualmente, mediante discusiones y consensos grupales guiados por el profesor.

Nuestra propuesta didáctica incluye 12 actividades, cada una de ellas correspondiente a los siguientes problemas, en el orden respectivo de presentación:

1. Encontrar la distancia recorrida durante un intervalo de tiempo, dada su velocidad cuando ésta es constante.
2. Encontrar la distancia recorrida durante un intervalo de tiempo, dada su velocidad expresada como una función identidad y como función promedio.
3. Encontrar la distancia recorrida durante un intervalo de tiempo, dada su velocidad cuando esta es una razón de cambio expresada como función cuadrática a partir de la determinación de su velocidad promedio.
5. Cálculo del Trabajo total realizado por una fuerza constante.
6. Cálculo del Trabajo total realizado por una fuerza variable.
7. Trabajo realizado para vaciar el fluido de un tanque.
8. Cálculo de la fuerza producida por un fluido confinado sobre una de las paredes del recipiente que lo contiene.
9. Determinar la longitud de una curva.
10. Determinar el área entre curvas que se intersecan.
11. Determinar el volumen de un sólido de revolución.
12. Determinar el centro de masa de una región plana.

3.2 Trabajos relacionados

Revisando algunos artículos referentes donde se menciona al objeto matemático *integral definida*, encontramos citado por Camacho y Garbín (2008), que éste es un concepto relevante para abordar una amplia gama de problemas que los estudiantes de Ingeniería utilizan en su programa de estudios. Está presente en diversos contenidos y se requiere en actividades de aprendizaje a lo largo de su formación universitaria. Para llevar a cabo estas actividades, los alumnos deben tener una sólida comprensión de este concepto. Es necesario identificar las dificultades que los estudiantes encuentran al aprenderlo para diseñar actividades de enseñanza que logren en el estudiante un aprendizaje más sólido.

Uno de los aspectos relacionados con el concepto de la integral definida tiene que ver con el tipo de respuesta que dan los estudiantes a problemas en diversos contextos. Se entiende como "problemas en diversos contextos" tanto los planteados en el ámbito estrictamente matemático como las aplicaciones a otras ciencias (Gravemeijer y Dormán, 1999, pp. 111-129).

Muñoz G. (2000), cita en su trabajo "Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral", que hay un escenario en la clase de cálculo integral de las universidades que privilegia la ejercitación algorítmica de integrales sobre el concepto y solo se ven algunas aplicaciones casi al final del semestre escolar. Acerca de las dificultades a la que los alumnos se enfrentan, otros autores señalan que éstas se atribuyen fundamentalmente a este desequilibrio entre el tratamiento conceptual con el algorítmico (Quezada 1986; Artigue 1998, Cordero 2003; Cantoral 2000).

Una opción que se está utilizando es el empleo de tecnología que ayude a mejorar el vínculo entre lo conceptual y lo algorítmico que se emplea en el diseño de secuencias de actividades didácticas, como dice Ruiz G (2008), en su exposición en la que expresa que realiza un análisis de la construcción del Teorema Fundamental del cálculo a través de actividades realizadas con la ayuda del programa GeoGebra, mismo que pretendemos también utilizar para este trabajo.

Grijalva A., Ibarra S. y Bravo J. (2001 y 2002) en inicio presentan la descripción del diseño de algunas de las actividades de un proyecto de investigación cuyo principal objetivo es estudiar los efectos del empleo de diversos registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo integral, el cual es continuación de otro cuya atención se centra en el cálculo diferencial, donde para la realización de las actividades elaboraron materiales usando recursos computacionales en los que se hiciera necesaria la articulación de distintos registros de representación semiótica (numéricos, gráficos y algebraicos), teniendo especial interés en la detección de obstáculos didácticos, cognitivos y epistemológicos asociados a los conocimientos en juego, pero en este trabajo, por lo reciente de su implementación, en ese momento no se mostraron resultados y sólo se limitaron a plantear las consideraciones con las que se elaboraron las actividades a la vez que mostraron algunas de ellas. La idea es aprovechar algunos elementos de este proyecto que pensamos pudieran incorporarse en la construcción de las actividades de la secuencia didáctica sobre todo en el de desarrollar la habilidad en la detección de los obstáculos que se presentan en los significados personales de los estudiantes con la finalidad de mejorar su proceso de construcción.

Investigaciones más recientes (Grijalva A., 2007), a partir de una concepción teórica con eje en el enfoque ontosemiótico de Juan Díaz Godino, hacen alusión al uso de elementos teórico-metodológicos correspondientes al mismo, aplicados en el proceso de construcción de significados de la integral, de acuerdo al sistema de prácticas personales e institucionales que realizan alumnos y docentes. Nos apoyaremos pues en éstas y otras referencias que se irán agregando paulatinamente en el proceso de construcción de nuestro trabajo, tomando como punto de partida aprender a detectar los significados personales que tienen los alumnos acerca del concepto de la integral definida.

En lo que respecta a los significados institucionales que se han ido construyendo en torno a los objetos matemáticos a partir de sus sistemas de prácticas, éstos se han construido mediante mecanismos de consenso. Como afirma Cantoral en su artículo, "*La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: Una mirada emergente*", la integral desde *a* hasta *b* puede entenderse de diferentes maneras según se trate de un programa teórico o de otro. Consideremos, a manera de ejemplo, tres de las versiones más conocidas de la integral. La primera, la más usada en la enseñanza contemporánea para definir a la integral se conoce como la integral de Cauchy Riemann. Otra, la integral de Newton Leibniz, es la más empleada al momento de resolver integrales por métodos elementales y finalmente, la menos conocida en la literatura escolar, la integral de Wallis. Esta integral fue tratada como parte de un programa tendiente a dar un tratamiento aritmético del infinito. (Grattan Guinness 1984, Edwards 1979).

Ahora bien, sigue citando Cantoral, para quienes estamos interesados en la enseñanza no podemos reducir un concepto a su definición, sino que habremos de preguntarnos: ¿cuál tratamiento de la integral conviene más a fin de favorecer el aprendizaje de los alumnos? y ¿cómo articularla en propuestas didácticas? Referente a esta cita de Cantoral, para este trabajo permutaremos la palabra concepto por el de objeto para ubicarnos en la terminología del EOS y conviene tomar estas preguntas para tratar de responder y de justificar la naturaleza de este trabajo. También comenta que no tenemos al momento evidencia empírica suficiente que muestre que alguna de las distintas presentaciones de la integral esté mejor adaptada para efectos de aprendizaje, de hecho ése es todavía un problema abierto. Sin embargo, es aceptado por una especie de consenso escolar que la presentación de Cauchy Riemann y la explicación mediante rectángulos inscritos y circunscritos como medio de aproximación del área bajo la curva es la que todos los profesores debemos usar en nuestras clases.

En ese problema abierto que comenta cantoral, es donde encontramos un espacio para hacer algunas aportaciones con nuestro trabajo dentro de lo que se refiere al objeto "integral".

Turegano (1994), lleva a cabo un estudio sobre los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal. La finalidad de su investigación es encontrar un modelo dentro del contexto matemático (definición de integral alternativa a la de Riemann) para elaborar una propuesta didáctica que permita introducir a nivel conceptual la integral definida en estudiantes de preparatoria que no han sido iniciados en el estudio del cálculo infinitesimal. La integral sería la primera introducción al análisis tomando como punto de partida el cálculo de áreas planas y basándose en la definición geométrica de integral definida, presentada por Lebesgue (1928). La hipótesis de trabajo de Turegano, siguiendo la corriente constructivista, es que los estudiantes pueden aprender de forma intuitiva conceptos de cálculo antes que dominar las actividades algorítmicas, utilizando la visualización a través del uso de tecnologías computacionales para dar significado al concepto de integral definida y sus propiedades a través de la idea del área bajo la curva.

Por otra parte, en su artículo "Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa", Alanís y Salinas, 2009, citan lo siguiente: Al revisar la historia del Cálculo, Gravemeijer y Doorman (1999) proponen que su desarrollo comience con la elección de la gráfica de la velocidad respecto al tiempo como el modelo para los problemas de velocidad y distancia. Observan que Oresme fue el primero en dibujar gráficas para visualizar el problema del movimiento; por tal motivo, esperan que el trabajo con gráficas discretas de la velocidad se constituya en el estudiante como un modelo de aproximaciones discretas al fenómeno del movimiento rectilíneo con aceleración constante.

Mientras interactúan con esta idea, esperan ver que surja en los estudiantes la acción de modelar la velocidad instantánea con una barra vertical, de tal modo que la gráfica de la velocidad, ya continua, sea la base para el estudio más formal del Cálculo. El papel del profesor resulta determinante para tratar de mantener lo más cercana posible la brecha entre lo que los estudiantes hacen y lo que se ha mostrado que deben hacer. Estas ideas nos sirven de apoyo para las actividades didácticas que se pretende diseñar para los alumnos, procurando obtener una visión más integradora acerca del objeto matemático en cuestión.

De esta forma se ofrece una alternativa distinta al introducir el estudio del movimiento con el fin de ofrecer al estudiante un significado asociado a la representación gráfica de la velocidad y esperando con ello que apoyen su pensamiento al involucrarse posteriormente en el estudio del Cálculo. Es importante observar que ésto deja percibir las dificultades que surgen en el aprendizaje del estudiante cuando se promueve la interacción de una nueva forma (*cómo*) y con contenidos que no coinciden con el tradicional (*qué*).

Pero, ¿por qué utilizar el objeto área como consenso? Al respecto Cabañas y cantoral (2004), señalan "El área en particular es una noción arraigada a la cultura de las sociedades, a la ciencia y a la tecnología, así como a las vicisitudes de la vida diaria de las personas. Las situaciones en las que se presenta son prácticamente ilimitadas: en la elaboración de planos y mapas, la cantidad de tela a comprar, la superficie de terreno a construir, el territorio que ocupa un municipio, etc. El concepto de área se vincula al de cuantificación de una superficie a la que se asocia una unidad de medida y que se expresa como unidad cuadrada". Y hacen la siguiente cita; el concepto de medida de área consta del concepto de unidad, el concepto de iteración de unidad, la cantidad de unidades y el cálculo de fórmulas

(Kordaki y Potari, 1998). Los sistemas de prácticas relacionadas con este objeto pueden ser representados a través de formas diversas de representación: gráfica, algebraica, tabular, lingüística.

En su tesis doctoral dirigida por el Dr. Mario Arrieche, Capace L., 2008, escribe en su resumen que la integral es una variable real, que es un tópico del cálculo infinitesimal que tiene variadas aplicaciones en el quehacer tecnológico, de allí que esté presente en la formación técnica universitaria. También hace referencia a que los estudiantes presentan dificultades para comprender y aplicar este objeto matemático. Es por ello que esta investigación indagó de forma profunda y sistemática en esta problemática. Se asumió como marco teórico el enfoque Ontológico-semiótico de la cognición e instrucción de la matemática (Godino, 2003), ya que éste nos proporciona herramientas para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática desde las dimensiones epistemológica, cognitiva e instruccional, puestos en juego en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

La metodología de investigación se conformó por enfoques cualitativos y cuantitativos, pero con predominio de lo cualitativo. Se desarrolló un análisis epistémico con el que además de profundizar en los significados institucionales de referencia (pretendidos, implementados y evaluados) sobre la integral en una variable real, se determinaron seis configuraciones epistémicas (Godino, 2003), significados institucionales, trayectoria didáctica, idoneidad didáctica y configuración epistémica. Este trabajo se relaciona con el nuestro porque utilizaremos elementos teóricos similares en la construcción de esta tesis.

Una de las ventajas con que se cuenta es la amplia información que se ha generado debido a que existe abundante investigación en torno a la integral como objeto matemático. La idea es apoyarnos en estos trabajos que por lo pronto se mencionan y otros que se irán agregando conforme se vaya avanzando en la construcción de esta tesis. Y por supuesto que el uso de la tecnología es imprescindible, en nuestro caso la idea es apoyarnos en algunos trabajos que ya han sido pioneros sobre todo en el uso de GeoGebra.

En un párrafo anterior, se mencionó la importancia de dos preguntas que plantea Cantoral; ¿cuál tratamiento de la integral conviene más a fin de favorecer el aprendizaje de los alumnos? y ¿cómo articularla en propuestas didácticas? Aunque él se refiere a las tres formas en que se conoce la integral, consideramos que un punto de partida lo expresa Vigotsky, *"El conocimiento no es un objeto que se pasa de uno a otro, sino que es algo que se construye por medio de operaciones y habilidades cognoscitivas que se inducen en la interacción social"*. También expresa que una aproximación cultural a la mente comienza con el supuesto de que la acción está mediada, y que no puede ser separada del medio en el que se lleva a cabo.

Un elemento central en la teoría de Vigotsky consiste en notar que no habitamos un mundo simplemente concreto y material, sino un mundo lleno de significados y que estos significados pertenecen al mundo de los signos. Él escribió: “junto con los fenómenos naturales, junto con los equipos tecnológicos y con los artículos de consumo existe un mundo especial, *el mundo de los signos*.” El signo siempre está enmarcado en la actividad práctica del individuo, por lo que el signo se concibe como un objeto semiótico funcionando en un medio donde las características específicas de la actividad tienen que ser tomadas en cuenta.

En la perspectivas de Vigotsky, el proceso mediante el cual se construyen los conceptos, requiere de la construcción de un lenguaje especial, un lenguaje semiótico. Por lo que consideramos que éste se constituirá como la piedra angular en la elaboración de nuestra tesis, por que precisamente se trata de buscar dar un interpretación con elementos del EOS a los significados personales emergentes de los respectivos sistemas de prácticas que lleven a cabo los estudiantes y de alguna manera acortar la distancia con los significados institucionales, en nuestro caso de la integral.

Como dice Castaño J., 2006, la enseñanza integrada de diferentes sistemas conceptuales pertenecientes a los diferentes sistemas matemáticos, es una necesidad y una posibilidad derivada de tres consideraciones complementarias formuladas desde el conocimiento matemático, de la psicología y de la pedagogía:

- Del carácter integrado del cuerpo de conocimientos de la (o las) matemática, (s).
- De las demandas cognitivas comunes que hace a los sujetos que aprenden la compresión de diferentes sistemas conceptuales de los distintos subcampos de lo matemático.
- Del proceso de construcción de los sistemas conceptuales por parte de los estudiantes.

Consideraciones que justifican una educación matemática integradora. Visión que también se persigue alcanzar en nuestro trabajo.

3.3 ACTIVIDADES DIDÁCTICAS.

El uso de la tecnología jugará un papel preponderante en el diseño y resolución de las actividades de la secuencia didáctica porque nos permitirá interaccionar entre las distintas representaciones en el camino de resolución de la situación problema que se presente potenciando el promover del uso de terminología propia de la matemática y del análisis matemático en los estudiantes.

En este panorama de la situación de cómo se aborda la integral en la educación del nivel medio y superior es donde se percibe la oportunidad de hacer investigación en matemática educativa, por lo pronto con la puesta en escena de las actividades de la secuencia didáctica para irlas monitoreando y posteriormente mejorando, sustentando tales actividades en el paradigma del constructivismo pensando en darle a la matemática una visión integradora en donde se tome en cuenta el dominio afectivo del estudiante y ayudarle a construir su propio conocimiento por si mismo, de manera natural. No se trata únicamente de encontrar relaciones entre unos contenidos sino de estructurar un currículo, se trata de una enseñanza que promueve que el estudiante construya y reconstruya en nuevos contenidos y con nuevas conexiones lo que ya ha construido en conexiones anteriores en nuestro caso acerca de la integral de una función.

Castaño en su exposición en el Foro Educativo Nacional del año 2006 menciona "la Investigación en Matemática Educativa reconoce que los conceptos se construyen a partir de la coordinación de las acciones y de la reflexión que el sujeto hace acerca de éstas y sobre las coordinaciones mismas. Estas acciones deben ser múltiples y deben aplicarse a variados contenidos ya que esto permite tejer la red de relaciones que estructuran un sistema de conceptos. De ahí la necesidad de un currículo que permita enfrentar a los alumnos a múltiples y variadas experiencias, ya que esto les permitirá reconocer la estructura común entre ellos, al identificar lo que permanece constante e invariable a pesar de las diferencias especificas".

En este proceso de construcción se irán abordando los contenidos matemáticos que intervienen en la matematización de éste; el área bajo la curva, la integral como una función, la integral como una suma o cambio acumulado, la integral como una antiderivada, primera versión del teorema fundamental del cálculo y segunda versión del TFC, que darán un matiz a cada una de las actividades didácticas según corresponda. Consideramos conveniente iniciar con actividades referentes al cálculo de distancias recorridas ligadas al cálculo de áreas, porque es mas didáctico el proceso de intentar que el alumno construya la idea de lo que es el objeto matemático "integral" y de las connotaciones que se le pueden atribuir a través de las distintas aplicaciones que se le pueden dar en contextos diferentes, en situaciones dentro y fuera de la matemática con el apoyo de tecnología (Turegano 1994). Se diseñarán las actividades de la secuencia didáctica de forma que se promueva la interacción de los sistemas de representaciones semióticas: algebraica, gráfica, tabular y lingüística para que los estudiantes realicen transiciones entre ellas y que esto contribuya al acercamiento entre los significados personal e institucional del objeto matemático en cuestión.

Es por eso que el presente trabajo lleva como nombre "Actividades didácticas para la enseñanza de la integral con apoyo en software de geometría dinámica" y se pretende ubicarla en el Nivel Superior, específicamente para los alumnos del Sistema de los Institutos Tecnológicos de nuestro País.

Para describir el proceso de estudio, partimos de situaciones fundamentales que se constituyen en un eje generador de la organización didáctica de contenidos implicados en el tratamiento de la integral, de lo que exponemos a continuación un primer acercamiento.

Para ello, se pretende utilizar contextos diferentes de área, trabajo y velocidad en donde se desarrollan ciertas actividades tendientes a problematizar al alumno para lograr llevarlo a la significación de la integral como área y como una suma. La idea es que pueda llegar a ser capaz de relacionar y usar el proceso de calcular el área en otros contextos como una operación de suma y, por medio de más actividades que se irán incorporando, se propondrá introducir la integral definida mediante situaciones problema que le sean familiares y contribuyan a generar y enriquecer el significado del objeto matemático en cuestión.

Para eso resulta de gran importancia el uso de una diversidad de sistemas de representación para que el alumno pueda construir diversas formas de acercarse y de emplear la integral en la resolución de situaciones problema que se le presenten ya sea en otras asignaturas de su carrera o bien de su vida profesional. Para nuestras actividades hemos tomado en cuenta los cuestionamientos que plantea Brousseau (1980), quién destaca como centrales las preguntas siguientes: ¿cuáles son las componentes del significado que pueden deducirse del comportamiento matemático observado en el alumno?, ¿cuáles son las condiciones que conducen a la reproducción de la conducta, teniendo la misma significación, el mismo significado? (p. 132). Por lo tanto nuestra próxima tarea para seguir avanzando en este trabajo consistirá en tratar de responder a los siguientes planteamientos:

¿Cuál es el significado institucional acerca del objeto matemático "integral" en el ITESCA?, ¿Cuál es el significado personal que los alumnos tienen acerca de la integral?, ¿Qué tanto se aproxima el objeto matemático personal de integral al institucional en los otros contextos de las distintas carreras?, ¿Qué significado matemático de las concepciones de los alumnos podemos inferir a partir de una observación de su conducta?, ¿Qué clase de significado pueden construir los alumnos en el contexto de la enseñanza de las matemáticas?, ¿Cuál es la relación entre el significado del contenido a enseñar y el del conocimiento matemático elegido como referencia? y ¿Cómo podemos caracterizar el significado de los conceptos matemáticos?

Los cuestionamientos que nos hemos formulado no pretenden convertirse en guías para realizar aquí una investigación exhaustiva, toda vez que la orientación de nuestro trabajo de tesis lo hemos orientado más hacia lo que conocemos con el nombre de "desarrollo docente". Sin embargo, no podemos hacer una separación de los aspectos docentes de la investigación y, necesariamente, en nuestro proyecto surgen preguntas que deben responderse en algún sentido para formular, estructurar y evaluar de mejor manera el impacto de la secuencia de actividades didácticas en el aprendizaje de nuestros estudiantes. Esto es, responder estos cuestionamientos es imprescindible para que la secuencia de actividades esté mejor estructurada.

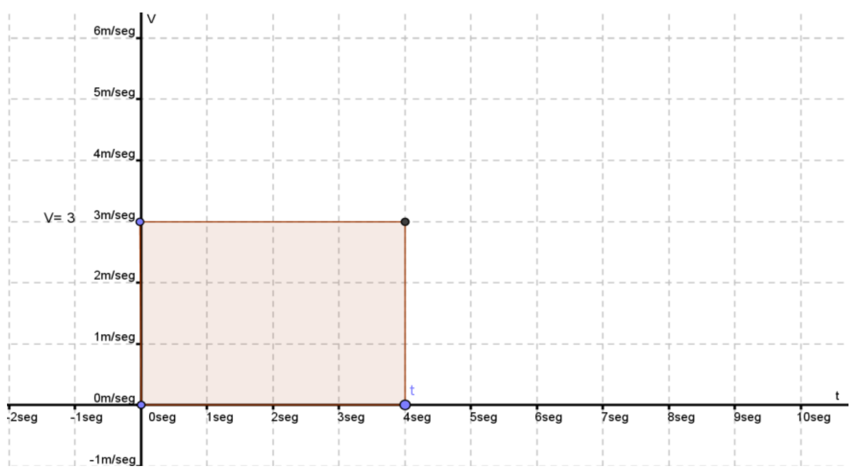
Tomando en cuenta estas consideraciones presentamos en las líneas siguientes las doce actividades didácticas elaboradas para la enseñanza de la integral, las cuales analizaremos a profundidad en el apartado siguiente.

3.3.1 Actividades didácticas propuestas.

Actividad 1

- **DISTANCIA RECORRIDA A VELOCIDAD CONSTANTE:**

  Un cuerpo se mueve con una velocidad de $3\frac{m}{s}$ durante un viaje de *4* segundos. ¿cuál es la distancia total recorrida?



1.1 Abre el siguiente hipervínculo Problema 1, y contesta lo que se solicita. Para hacer manipulaciones coloca el cursor del punto azul t en t = 4 segundos.

1.2 ¿Cuál es la velocidad a los *2* segundos? ¿Y a los *3* segundos?

1.3 ¿Qué distancia recorre el automóvil en los primeros *4* segundos? ¿Por qué?

1.4 Si la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo y como dice en el problema es igual a *3 m/s*, entonces ¿cuál función se tiene que derivar para obtener este resultado?

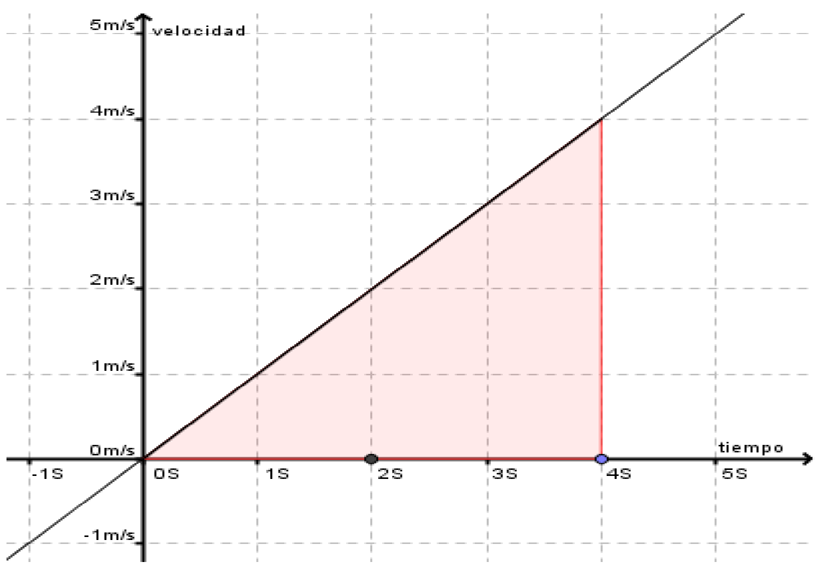
1.5 Con la expresión que obtuviste en el inciso anterior vuelve a calcular la distancia que recorre el objeto durante los primeros *4* segundos. ¿Es posible representar en la gráfica este procedimiento? ¿Cómo?

1.6 ¿Está representada gráficamente la distancia recorrida? ¿Cómo?

Actividad 2

- **DISTANCIA RECORRIDA A VELOCIDAD VARIABLE (*v(t)* = *t*).**

- Un automóvil se mueve con una velocidad dada por la función $v(t) = t$ sobre una carretera recta durante un viaje de *4* segundos. ¿cuál es la distancia total recorrida?



1.1 Abre el siguiente hipervínculo [Problema 2](), y contesta lo que se solicita. Para hacer manipulaciones coloca el cursor del punto azul t en t = 4 segundos.

1.2 ¿Cuál es la velocidad después de *1* segundo? ¿Y a los *3* segundos?

1.3 ¿Qué distancia recorre el automóvil en los primeros *4* segundos? ¿Por qué?

1.4 Si la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo y como dice en el problema es igual a $v(t) = t\ m/s$, entonces qué función se tiene que derivar para obtener ese resultado $v(t) = t$?

1.5 Con la expresión que obtuviste en el inciso anterior vuelve a calcular la distancia que recorre el objeto durante los primeros *4* segundos. ¿Es posible representar en la gráfica este procedimiento? ¿Cómo?

1.6 ¿Está representada gráficamente la distancia recorrida? ¿Cómo?

1.7 ¿Cuál es la velocidad promedio del automóvil después de *4* segundos? Si el automóvil se hubiera movido a una velocidad constante igual a la velocidad promedio durante esos *4* segundos ¿qué distancia hubiera recorrido?

1.8 ¿Cómo se representa en la gráfica la distancia recorrida a velocidad constante (igual a la velocidad promedio)?

NOTA: En esta situación problema, el hecho de calcular el promedio de todas las alturas es equivalente a calcular la velocidad media ya que nuestra función es precisamente la velocidad, es decir, en este contexto, la altura significa" velocidad".

1.9 El área "debajo" de dicha función: gráfica comprendida entre ella, el eje '*t*' y la recta $t = 4$, es igual al área del rectángulo que tiene la misma base que el triángulo y la mitad de su altura. Esto resulta fácil de probar geométricamente. Sin embargo, en este caso la intención será probar aritméticamente que la altura promedio (que se obtiene sumando las alturas y dividiendo entre el número de ellas) es igual a la mitad de la altura del triángulo (en este caso particular, la altura promedio deberá ser igual a dos, ya que la altura del triángulo es igual a cuatro). Para llevar a cabo esta prueba contesta las siguientes cuestiones:

- 1.9.1 Si dividimos el intervalo [*0,4]* en cuatro subintervalos iguales, ¿cuál es la longitud en cada subintervalos?
- 1.9.2 ¿Cuál es la máxima altura en cada uno de los cuatro subintervalos? ¿Y cuál es la mínima?
- 1.9.3 ¿Cuál es el promedio de las alturas máximas en cada uno de los cuatro subintervalos?
- 1.9.4 ¿Y el promedio de las mínimas?
- 1.9.5 ¿Cómo es el promedio de la totalidad de alturas con respecto al promedio de las alturas máximas calculadas en el inciso (1.8.3)? ¿Con respecto al promedio de las alturas mínimas calculadas en (1.8.4)?

1.9.6 Si ahora dividimos el intervalo *[0,4]* en ocho subintervalos iguales, y repetimos las preguntas formuladas en los incisos (1.8.2), (1.8.3), (1.8.4), (1.8.5) para dicho intervalo, ¿cuáles son las respuestas?

1.9.7 ¿Cómo resultó ser el promedio de las alturas máximas calculado en *8* subintervalos con respecto al promedio calculado en 4 subintervalos? ¿Y el de las alturas mínimas?

1.9.8 Y si ahora cada uno de los 8 subintervalos lo dividimos en 2 subintervalos iguales, ¿qué pasará con el promedio de las alturas máximas? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas?

1.9.9 ¿Qué sucede con el promedio de las alturas máximas en cada subintervalo a medida que aumenta el número de ellos? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas?

De lo hasta aquí dicho pueden establecerse algunas cuestiones:

1.9.9.1 La altura promedio de las alturas máximas (y mínimas) es una función de *n*, (donde *n* es el número de intervalos).

1.9.9.2 La altura promedio de las alturas mínimas es una función creciente siempre menor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

1.9.9.3 La altura promedio de las alturas máximas es una función decreciente siempre mayor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

1.10 Con base a estas conclusiones, ¿cómo puede definirse la altura promedio de la totalidad de las alturas?

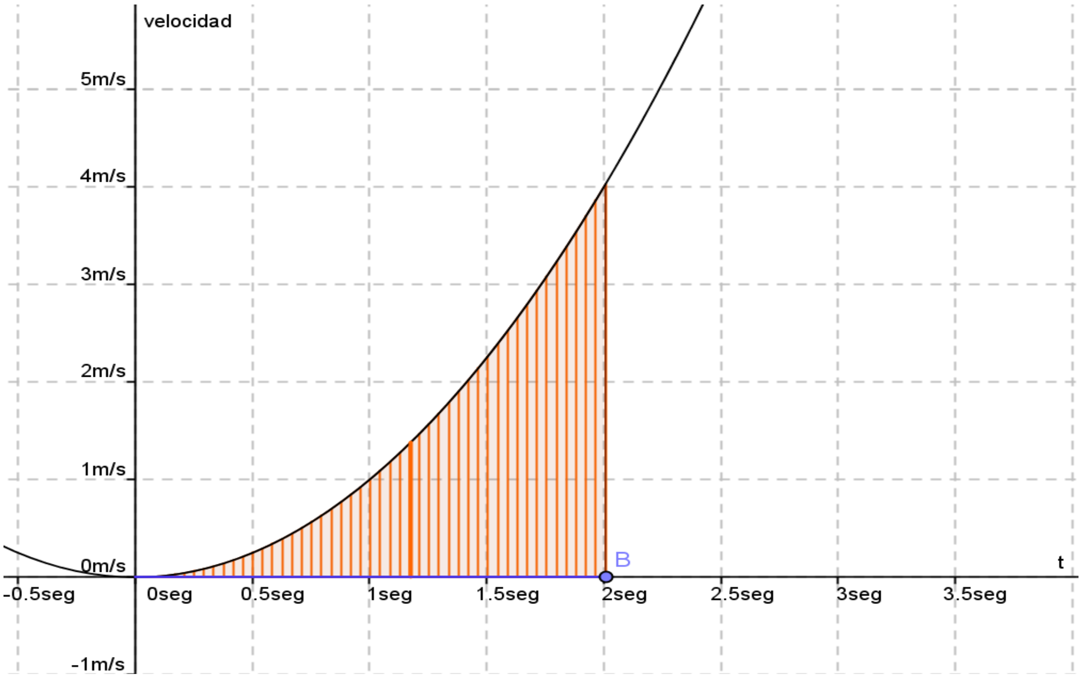
1.10.1 Determina las funciones 'altura promedio' (tanto de las alturas máximas como de las mínimas) como una función de *n*.

1.10.2 A partir de la definición establecida para "altura promedio de la totalidad de las alturas", calcula su valor en este caso. ¿Coincide con la que habías calculado geométricamente?

Actividad 3

- **DISTANCIA RECORRIDA A VELOCIDAD VARIABLE $(v(t) = t^2)$:**

Un automóvil se desplaza con una velocidad dada por la función $v(t) = t^2$. Determinar el cambio de la velocidad entre los *2* y los *5* segundos.



1.1 Abre el siguiente hipervínculo Problema 3, y contesta lo que se solicita. Para hacer manipulaciones coloca el cursor del punto azul t en t = 2 segundos.

1.2 ¿Cuál es la velocidad después de *1* segundo? ¿Y a los *2* segundos?

1.3 ¿Qué distancia recorre el automóvil en los primeros *2* segundos? ¿Por qué?

1.4 Si la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo y como dice en el problema es $v(t) = t^2$ m/s, entonces ¿qué función se tiene que derivar para obtener ese resultado $v(t) = t^2$?

1.5 Con la expresión que obtuviste en el inciso anterior vuelve a calcular la distancia que recorre el objeto durante los primeros *2* segundos. ¿Es posible representar en la gráfica este procedimiento? ¿Cómo?

1.6 ¿Está representada gráficamente la distancia recorrida? ¿Cómo?

1.7 ¿Cuál es la velocidad promedio del automóvil después de *2* segundos? Si el automóvil se hubiera movido a una velocidad constante igual a la velocidad promedio durante esos *2* segundos ¿qué distancia hubiera recorrido?

1.8 ¿Cómo se representa en la gráfica la distancia recorrida a velocidad constante (igual a la velocidad promedio)?

En esta situación problema, el hecho de calcular el promedio de todas las alturas es equivalente a calcular la velocidad media ya que nuestra función es precisamente la velocidad, es decir, en este contexto, la altura significa” velocidad”.

1.9 El área “debajo” de dicha función: gráfica comprendida entre ella, el eje ‘*t*’ y la recta *t = 4*, es igual al área del rectángulo que tiene la misma base que esta región y altura la velocidad promedio o sea el promedio de las alturas. Para determinar dicho promedio contesta las siguientes cuestiones:

1.9.1 Si dividimos el intervalo *[0,2]* en cuatro subintervalos iguales, ¿cuál es la longitud en cada subintervalos?

1.9.2 ¿Cuál es la máxima altura en cada uno de los cuatro subintervalos? ¿Y cuál es la mínima?

1.9.3 ¿Cuál es el promedio de las alturas máximas en cada uno de los cuatro subintervalos?

1.9.4 ¿Y el promedio de las mínimas?

1.9.5 ¿Cómo es el promedio de la totalidad de alturas con respecto al promedio de las alturas máximas calculadas en el inciso (1.8.3)? ¿Con respecto al promedio de las alturas mínimas calculadas en (1.8.4)?

1.9.6 Si ahora dividimos el intervalo *[0,2]* en ocho subintervalos iguales, y repetimos las preguntas formuladas en los incisos (1.8.2), (1.8.3), (1.8.4), (1.8.5) para dicho intervalo, ¿cuáles son las respuestas?

1.9.7 ¿Cómo resultó ser el promedio de las alturas máximas calculado en 8 subintervalos con respecto al promedio calculado en 4 subintervalos? ¿Y el de las alturas mínimas?

1.9.8 Y si ahora cada uno de los 8 subintervalos lo dividimos en 2 subintervalos iguales,

1.9.9 ¿qué pasará con el promedio de las alturas máximas? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas?

1.9.10 ¿Qué sucede con el promedio de las alturas máximas en cada subintervalo a medida que aumenta el número de ellos? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas?

De lo hasta aquí dicho pueden establecerse algunas cuestiones:

1.9.10.1 La altura promedio de las alturas máximas (y mínimas) es una función de *n*, (donde *n* es el número de intervalos).

1.9.10.2 La altura promedio de las alturas mínimas es una función creciente siempre menor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

1.9.10. La altura promedio de las alturas máximas es una función decreciente siempre mayor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

1.9 Con base a estas conclusiones, ¿cómo puede definirse la altura promedio de la totalidad de las alturas?

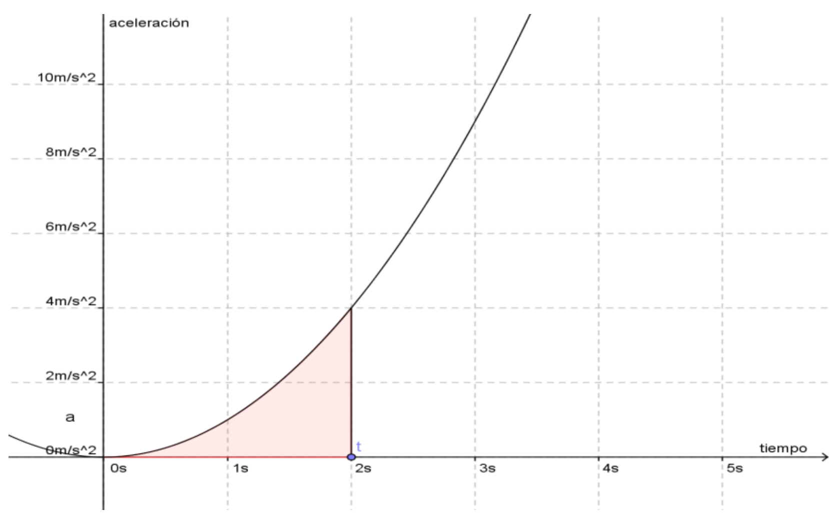
1.10.1 Determina las funciones 'altura promedio' (tanto de las alturas máximas como de las mínimas) como una función de *n*.

1.10.2 A partir de la definición establecida para "altura promedio de la totalidad de las alturas", calcula su valor en este caso. ¿Coincide con la que habías calculado geométricamente?

Actividad 4

- **VELOCIDAD DADA LA ACELERACIÓN:**

Un automóvil se desplaza con una aceleración dada por la función $a(t) = t^2$. Determinar el cambio de la velocidad entre los *2* y los *5* segundos.



1.1 Abre el siguiente vínculo Problema 4 y contesta lo que se solicita.

1.2 ¿Cuál es la aceleración a los *2* segundos? ¿Y a los *3* segundos?

1.3 ¿Con qué velocidad se desplaza el automóvil en los primeros *4* segundos? ¿Por qué?

1.4 Si la aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo y como dice en el problema es igual a $a(t) = t^2$ *m/s*, entonces qué función se tiene que derivar para obtener ese resultado $a(t) = t^2$?

1.5 Con la expresión que obtuviste en el inciso anterior vuelve a calcular la velocidad que lleva el objeto a los *2* segundos. ¿Es posible representar en la gráfica este procedimiento? ¿Cómo?

1.6 ¿Está representada gráficamente la velocidad con que se está moviendo el objeto? ¿Cómo?

1.7 Ahora Dada la curva $a(t) = t^2$ en el intervalo *[0,2]*, calcula la altura promedio de las alturas de los puntos de las curvas en los siguientes casos:

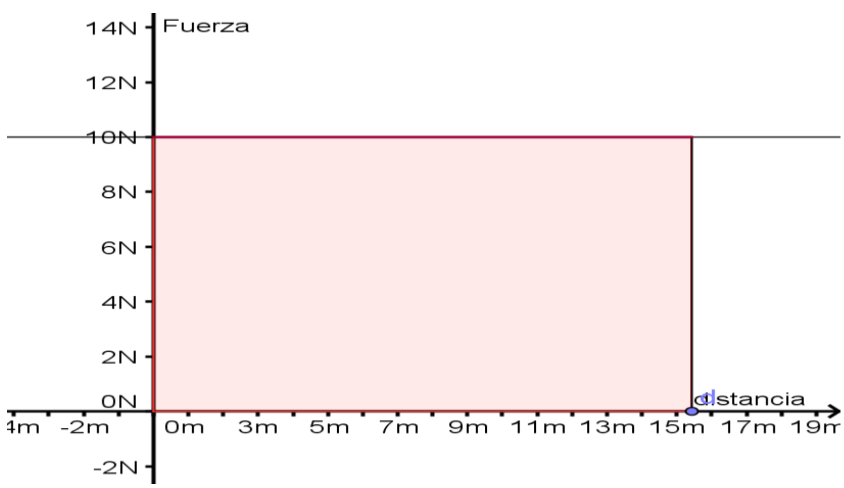
- 1.7.1 Tomando las alturas máximas de cuatro subintervalos iguales.
- 1.7.2 Tomando las alturas mínimas de cuatro subintervalos iguales.
- 1.7.3 Tomando las alturas máximas de ocho subintervalos iguales.
- 1.7.4 Tomando las alturas mínimas de ocho subintervalos iguales.
- 1.7.5 Tomando las alturas máximas de *n* subintervalos iguales.
- 1.7.6 Tomando las alturas mínimas de *n* subintervalos iguales.
- 1.7.7 Tomando la totalidad de las alturas.

1.8 Determinar el cambio de la velocidad entre los cero y los *2* segundos.

Actividad 5

- **TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE:**

Una caja que tiene un peso *F* de *20N*, tiene un movimiento en caída libre desde una altura *y* de *32m*. Suponiendo que inicia su caída a partir del reposo, deseamos determinar el trabajo total realizado por la fuerza de gravedad sobre la caja.



1.1 Abre el siguiente vínculo Problema 5 y contesta lo que se solicita.

1.2 ¿Cuál es la fuerza de gravedad cuando a partir de su posición inicial ha descendido *2* metros? ¿y cuando ha descendido 3 metros?

1.3 ¿Qué trabajo realiza la fuerza cuando la caja desciende en los primeros *4* metros? ¿Por qué?

1.4 Si la fuerza es la derivada del trabajo T respecto a la distancia recorrida x, y como dice en el problema es igual a *10 N*, entonces ¿qué función se tiene que derivar para obtener este resultado?

1.5 Con la expresión que obtuviste en el inciso anterior vuelve a calcular el trabajo que realiza la fuerza cuando la caja desciende en los primeros *4* metros.

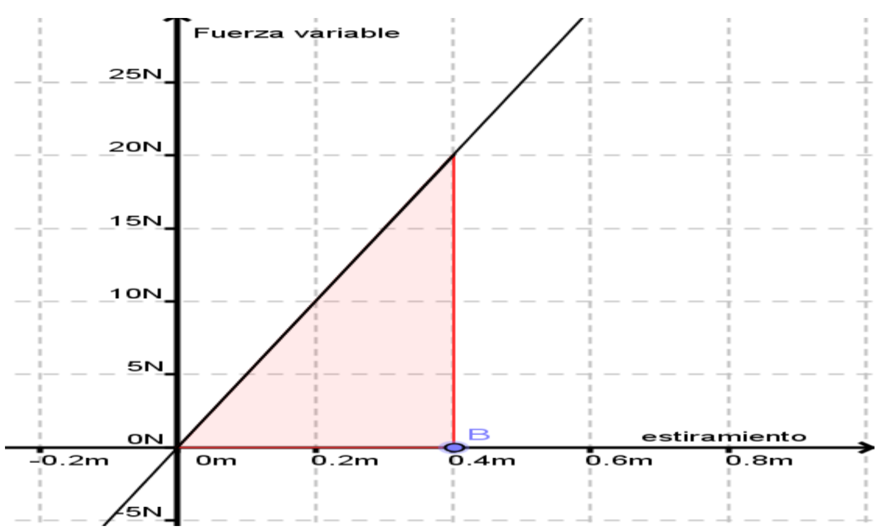
1.6 ¿Está representado gráficamente el trabajo realizado? ¿Cómo?

1.7 ¿Cuánto cambia el trabajo realizado cuando el cuerpo desciende de *3* a *8* metros?

Actividad 6

- **TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE:**

  Calcular el trabajo que se necesita hacer para estirar un resorte medio metro hacia la derecha a partir de su posición de equilibrio sabiendo que cuando el resorte se estira *0.1m* a la derecha se ejerce una fuerza F de *5N*. En donde $F=Kx$ siendo K la constante de elasticidad del resorte y x su alargamiento.



1.1 ¿Cuál es el valor de la constante *K* del resorte?
1.2 ¿Cuál es la fuerza que estira al resorte una longitud de *0.2m*? ¿Y para *0.4m*?

1.3 Si la fuerza es la derivada del trabajo respecto a la distancia recorrida y como dice en el problema es igual a *Kx* Newtons, entonces, ¿qué función se tiene que derivar para obtener este resultado?

1.4 Con la expresión que obtuviste en el inciso anterior, calcula el trabajo que realiza la fuerza sobre el objeto cuando este se estira *0.4m*. ¿Es posible representar en la gráfica este procedimiento? ¿Cómo?

1.5 ¿Está representado gráficamente dicho trabajo? ¿Cómo?

1.6 ¿Cuál es la fuerza promedio que estira el resorte después de *0.4* metros? Si el resorte se hubiera estirado con una fuerza constante igual a la fuerza promedio durante esos *0.4* metros, ¿qué distancia hubiera recorrido?

1.7 ¿Cómo se representa en la gráfica el trabajo realizado en el resorte por la fuerza constante (igual a la fuerza promedio)?

En esta situación problema, el hecho de calcular el promedio de todas las alturas es equivalente a calcular la fuerza media ya que nuestra función es precisamente la fuerza, es decir, en este contexto, la altura significa” fuerza”.

El área debajo de la función $f(x) = F = Kx$, gráfica comprendida entre ella, el eje ‘estiramiento *x’* y la recta $x = 0.4$, es igual al área del rectángulo que tiene la misma base que el triángulo y la mitad de su altura. Esto resulta fácil de probar geométricamente. Sin embargo, en este caso la intención será probar aritméticamente que la altura promedio (que se obtiene sumando las alturas y dividiendo entre el número de ellas) es igual a la mitad de la altura del triángulo (en este caso particular, la altura promedio deberá ser igual a diez, ya que la altura del triángulo es igual a veinte). Para llevar a cabo esta prueba contesta las siguientes cuestiones:

1.7.1 Si dividimos el intervalo *[0,4]* en cuatro subintervalos iguales, ¿cuál es la longitud en cada subintervalos?
1.7.2 ¿Cuál es la máxima altura en cada uno de los cuatro subintervalos? ¿Y cuál es la mínima?
1.7.3 ¿Cuál es el promedio de las alturas máximas en cada uno de los cuatro subintervalos?
1.7.4 ¿Y el promedio de las mínimas?
1.7.5 ¿Cómo es el promedio de la totalidad de alturas con respecto al promedio de las alturas máximas calculadas en el inciso (1.7.3)? ¿Con respecto al promedio de las alturas mínimas calculadas en (1.7.4)?

1.7.6 Si ahora dividimos el intervalo *[0,4]* en ocho subintervalos iguales, y repetimos las preguntas formuladas en los incisos (1.7.2), (1.7.3), (1.7.4), (1.7.5) para dicho intervalo, ¿cuáles son las respuestas?

1.7.7 ¿Cómo resultó ser el promedio de las alturas máximas calculado en 8 subintervalos con respecto al promedio calculado en 4 subintervalos? ¿Y el de las alturas mínimas?

1.7.8 Y si ahora cada uno de los 8 subintervalos lo dividimos en 2 subintervalos iguales, ¿qué pasará con el promedio de las alturas máximas? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas?

1.7.9 ¿Qué sucede con el promedio de las alturas máximas en cada subintervalo a medida que aumenta el número de ellos? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas?

De lo hasta aquí dicho pueden establecerse algunas cuestiones:

1.7.9.1 La altura promedio de las alturas máximas (y mínimas) es una función de *n*, (donde *n* es el número de intervalos)

1.7.9.2 La altura promedio de las alturas mínimas es una función creciente siempre menor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

1.7.9.3 La altura promedio de las alturas máximas es una función decreciente siempre mayor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

1.8 Con base a estas conclusiones, ¿cómo puede definirse la altura promedio de la totalidad de las alturas?

1.8.1 Determina las funciones 'altura promedio' (tanto de las alturas máximas como de las mínimas) como una función de *n*.

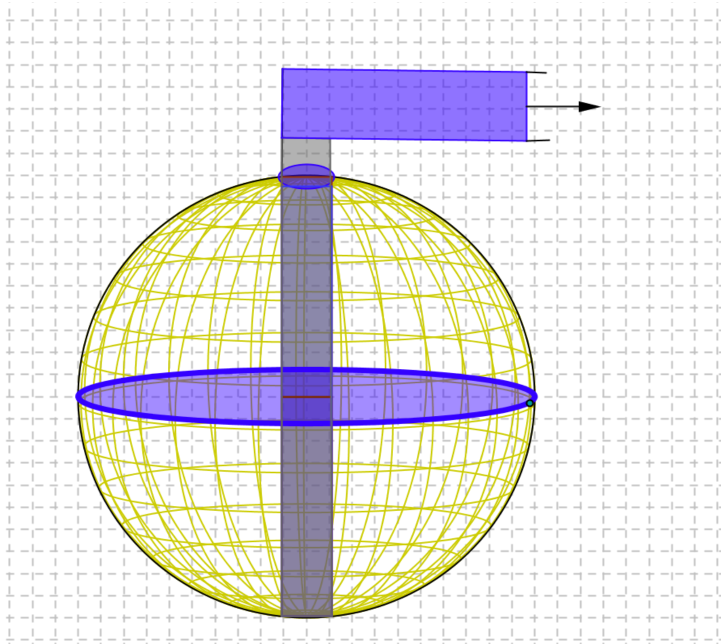
1.8.2 A partir de la definición establecida para 'altura promedio de la totalidad de las alturas', calcula su valor en este caso. ¿Coincide con la que habías calculado geométricamente?

1.9 Abre el siguiente hipervínculo Problema 6, y comprueba lo que has contestado colocando el cursor del punto azul en x=0.4 segundos. ¿Qué concluyes respecto a tus respuestas?

Actividad 7

- **TRABAJO REALIZADO PARA VACIAR EL FLUIDO DE UN TANQUE:**

Un recipiente esférico de *2m* de radio está lleno hasta la mitad de un líquido con densidad de masa constante e igual a $\rho = 1200\ \frac{Kgs}{m^3}$ .Se desea desalojar el líquido por un hoyo que se encuentra en la parte superior del recipiente. ¿Cuánto trabajo se necesita desarrollar para realizar esta tarea de desalojo?



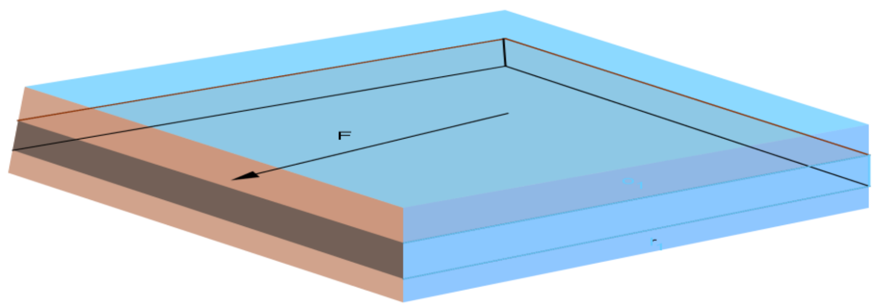
Para calcular el trabajo realizado por una bomba para vaciar un recipiente de un fluido, es necesario considerar un diferencial de volumen sumergido a una distancia "***y***" del fondo del recipiente, así como la presión que soporta debido al peso del agua que le afecta. En este sentido contesta las siguientes preguntas.

1. Si ρ = masa/volumen, o bien *dm/dv*, escribe una expresión para un diferencial de masa; *dm* = _________.
2. Escribe una expresión para un diferencial horizontal en forma de disco de volumen del fluido que esté en función de *y*; *dv* = ________.
3. Sabiendo que el peso del fluido es el producto de la masa por la gravedad, entonces el peso del diferencial de volumen es *dF* = ____________.
4. Como el trabajo es el producto de la fuerza por el desplazamiento que tiene el fluido, entonces el diferencial de trabajo es *dT* = ___________________
5. Escribe una expresión para representar a la suma de diferenciales *dT* desde *y = 0* hasta *y = 4*.
6. Resuelve la expresión anterior y determina la cantidad total de trabajo que se realiza para extraer todo el fluido por la parte superior del tanque.
7. ¿Existe otra forma para obtener la expresión de la actividad 5?
8. Abre el siguiente hipervínculo Problema 7 y comprueba lo que has contestado colocando el cursor del punto azul. ¿Qué concluyes respecto a tus respuestas?

Actividad 8

- **FUERZA PRODUCIDA POR UN FLUIDO CONFINADO SOBRE UNA DE LAS PAREDES DEL RECIPIENTE QUE LO CONTIENE:**

  Suponiendo que una cortina vertical de una presa, llena a su máxima capacidad, tiene forma rectangular con una altura de *6m* y un ancho de *8m*, obtener la fuerza total que ejerce el agua contra la cortina.



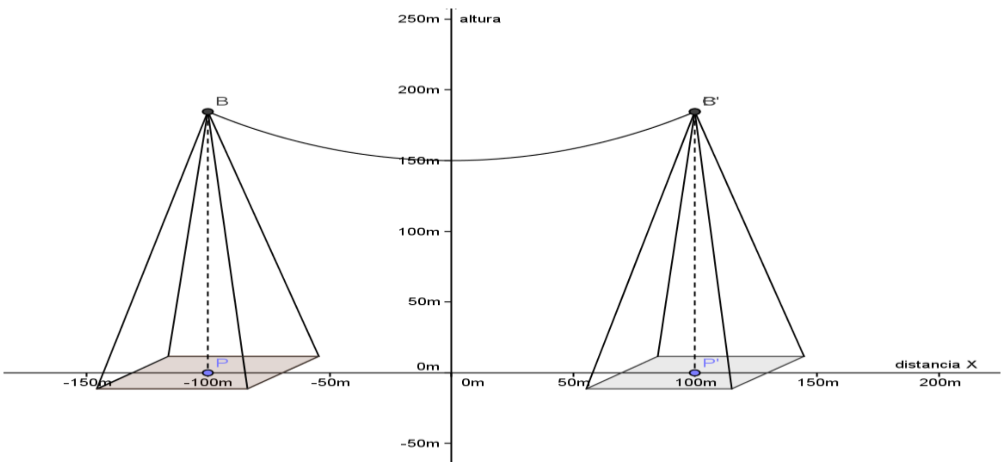
Para calcular la fuerza total sobre la pared causada dentro de un recipiente de un fluido, es necesario considerar un diferencial de área horizontal de la pared sumergido a una distancia "***y***" del fondo del recipiente, así como la presión que soporta debido al peso del agua que le afecta. En este sentido contesta las siguientes preguntas.

1. Si P = fuerza/área, o bien dF/dA, escribe una expresión para un diferencial de fuerza; dF = __________.
2. Escribe una expresión para un diferencial horizontal en forma de rectángulo de área de la pared que esté en función de y; dA = _________.
3. Sabiendo que la presión dentro del fluido es el producto de la densidad por la gravedad por la profundidad 6-y, entonces el diferencial de fuerza es dF = _____________.
4. Escribe una expresión para representar a la suma de diferenciales dF desde $y = 0$ hasta $y = 6$.
5. Resuelve la expresión anterior y determina la fuerza total que soporta la pared del recipiente.
6. ¿Existe otra forma para obtener la expresión de la actividad 5?
7. Abre el siguiente hipervínculo Problema 8.b, y comprueba lo que has contestado colocando el cursor del punto azul . ¿Qué concluyes respecto a tus respuestas?

Actividad 9

- **LONGITUD DE ARCO UNA CURVA:**

- Un cable eléctrico cuelga entre dos torres que están a *200* pies de distancia. El cable toma la forma de una catenaria cuya ecuación es $y = 75\left(e^{\frac{x}{150}} + e^{\frac{-x}{150}}\right) = 150cosh\frac{x}{150}$ .Encontrar la longitud de arco del cable entre las dos torres.

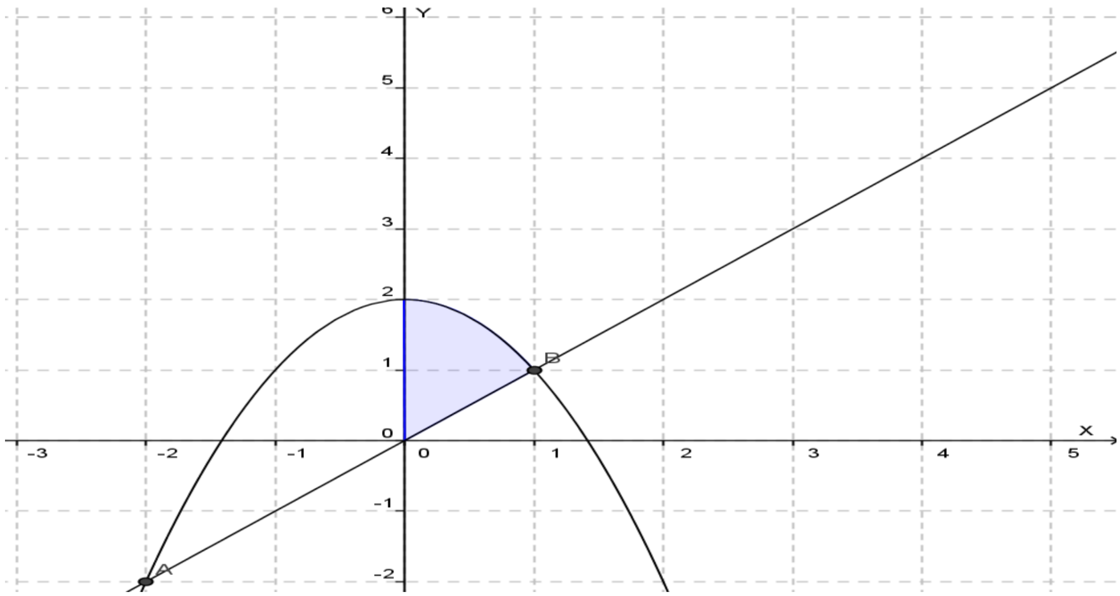


1. Determina la derivada de *y* con respecto a *x*.
2. Determina una expresión para el cuadrado de la derivada que obtuviste en el paso anterior.
3. Sabiendo que la derivada de la longitud de la curva respecto a la distancia *x* es $\frac{dL}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, escribe su equivalencia para esta situación problema.
4. ¿Será posible determinar visualmente de qué función resulta esta derivada? ¿Cómo?
5. Con ayuda de un software, por ejemplo el GeoGebra, traza la gráfica de la función derivada. Representa en ella un diferencial de área. Este diferencial representa al diferencial de longitud.
6. Escribe una expresión para el diferencial de Longitud a partir de su derivada (ver instrucción 3); *dL* = _________.
7. Escribe una expresión para representar a la suma de diferenciales *dL* desde *x* = *-100* hasta *x* = *100*.
8. Resuelve la expresión anterior. ¿Qué representa este resultado?
9. ¿Existe otra forma para obtener la expresión de la actividad 6?
10. Abre el siguiente hipervínculo Problema 9 , y comprueba lo que has contestado colocando el cursor del punto azul. ¿Qué concluyes respecto a tus respuestas?

Actividad 10

- **ÁREA ENTRE CURVAS QUE SE INTERSECAN:**

  Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x)=2-x^2$, $g(x) = x$ y el Eje *y*.



1.1 Determina una expresión que permita calcular la altura desde un punto de la recta hacia un punto de la curva dentro del intervalo $x = 0$ hasta $x = 1$.
1.2 Si la expresión obtenida es una función derivada, entonces de que función proviene esta derivada?
1.3 Encuentra cuanto cambia el valor de ésta función desde $x = 0$ hasta $x = 1$. ¿Está representada en la gráfica dicho valor? ¿Cómo?

1.4 El área de la región que se quiere determinar, es igual al área del rectángulo que tiene la misma base que esta región y altura la función promedio o sea el promedio de las alturas. Para determinar dicho promedio contesta las siguientes cuestiones:
1.4.1 Si dividimos el intervalo [0,1] en cuatro subintervalos iguales, ¿cuál es la longitud en cada subintervalo?
1.4.2 ¿Cuál es la máxima altura en cada uno de los cuatro subintervalos? ¿Y cuál es la mínima?
1.4.3 ¿Cuál es el promedio de las alturas máximas en cada uno de los cuatro subintervalos?

1.4.4 ¿Y el promedio de las mínimas?

1.4.5 ¿Cómo es el promedio de la totalidad de alturas con respecto al promedio de las alturas máximas calculadas en el inciso (1.4.3)? ¿Con respecto al promedio de las alturas mínimas calculadas en (1.4.4)?

1.4.6 Si ahora dividimos el intervalo *[0,1]* en ocho subintervalos iguales, y repetimos las preguntas formuladas en los incisos (1.4.2), (1.4.3), (1.4.4), (1.4.5) para dicho intervalo, ¿cuáles son las respuestas?

1.4.7 ¿Cómo resultó ser el promedio de las alturas máximas calculado en 8 subintervalos con respecto al promedio calculado en 4 subintervalos? ¿Y el de las alturas mínimas?

1.4.8 Y si ahora cada uno de los 8 subintervalos lo dividimos en 2 subintervalos iguales, ¿qué pasará con el promedio de las alturas máximas? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas?

1.4.9 ¿Qué sucede con el promedio de las alturas máximas en cada subintervalo a medida que aumenta el número de ellos? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas?

De lo hasta aquí dicho pueden establecerse algunas cuestiones:

1.4.9.1 La altura promedio de las alturas máximas (y mínimas) es una función de *n*, (donde *n* es el número de intervalos).

1.4.9.2 La altura promedio de las alturas mínimas es una función creciente siempre menor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

1.4.9.3 La altura promedio de las alturas máximas es una función decreciente siempre mayor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

1.5 Con base a estas conclusiones, ¿cómo puede definirse la altura promedio de la totalidad de las alturas?

1.5.1 Determina las funciones ‘altura promedio’ (tanto de las alturas máximas como de las mínimas) como una función de *n*.

1.5.2 A partir de la definición establecida para “altura promedio de la totalidad de las alturas”, calcula su valor en este caso. ¿Coincide con la que habías calculado geométricamente?

1.6 Abre el siguiente hipervínculo Problema 10, y comprueba lo que has contestado colocando el cursor del punto azul en x=1. ¿Qué concluyes respecto a tus respuestas?

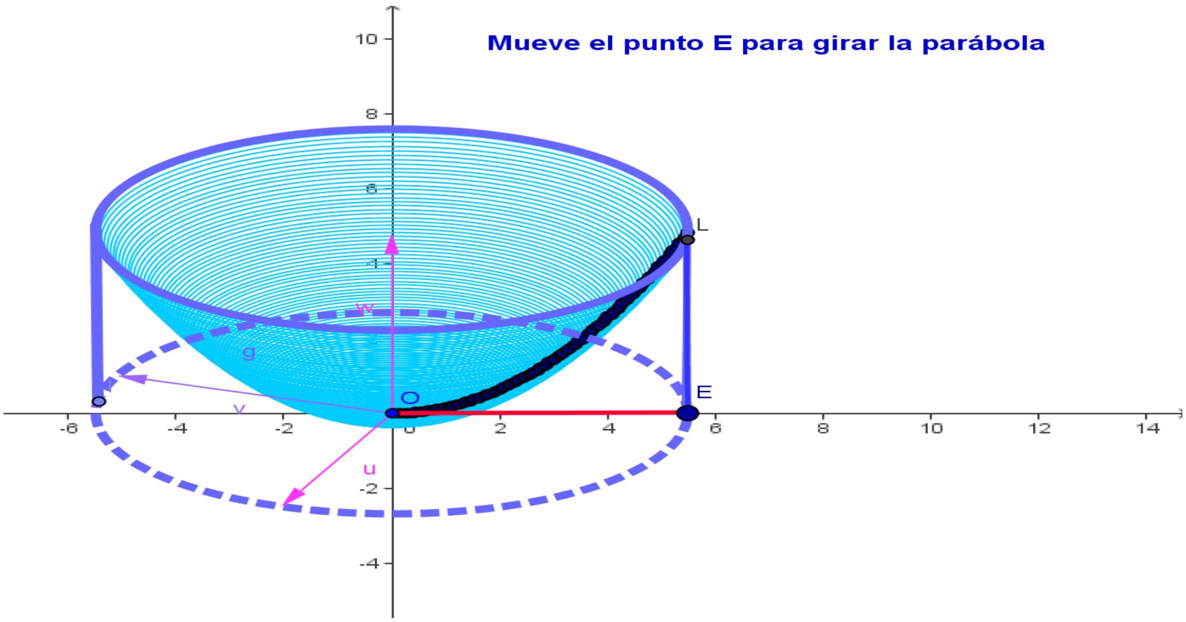
Actividad 11

- **VOLUMEN DEUN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN:**

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de:

$y = x^2 + 1, \qquad x = 0, \qquad \text{y} \qquad x = 1$

alrededor del Eje *y*.



1.1 Sabiendo que la derivada del volumen del sólido de revolución es $\frac{dV}{dx} = 2\pi x f(x)$, traza su gráfica y determina una expresión para el diferencial de volumen *dV*.

1.2 Escribe una expresión para representar el cambio de volumen del sólido de revolución desde $x = 0$ hasta $x = 1$. ¿Está representada en la gráfica dicho valor? ¿Cómo?.

1.3 El área de la región que se quiere determinar en la gráfica significa el volumen del sólido de revolución y es igual al área del rectángulo que tiene la misma base que esta región y altura la función promedio obtenida en el paso (1.1) o sea el promedio de las alturas. Para determinar dicho promedio contesta las siguientes cuestiones:

1.3.1 Si dividimos el intervalo [0,1] en cuatro subintervalos iguales, ¿cuál es la longitud en cada subintervalo?

1.3.2 ¿Cuál es la máxima altura en cada uno de los cuatro subintervalos? ¿Y cuál es la mínima?

1.3.3 ¿Cuál es el promedio de las alturas máximas en cada uno de los cuatro subintervalos?

1.3.4 ¿Y el promedio de las mínimas?

1.3.5 ¿Cómo es el promedio de la totalidad de alturas con respecto al promedio de las alturas máximas calculadas en el inciso (1.4.3)? ¿Con respecto al promedio de las alturas mínimas calculadas en (1.4.4)?

1.3.6 Si ahora dividimos el intervalo [0,1] en ocho subintervalos iguales, y repetimos las preguntas formuladas en los incisos (1.4.2), (1.4.3), (1.4.4), (1.4.5) para dicho intervalo, ¿cuáles son las respuestas?

1.3.7 ¿Cómo resultó ser el promedio de las alturas máximas calculado en 8 subintervalos con respecto al promedio calculado en 4 subintervalos? ¿Y el de las alturas mínimas?

1.3.8 Y si ahora cada uno de los 8 subintervalos lo dividimos en 2 subintervalos iguales, ¿qué pasará con el promedio de las alturas máximas? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas?

1.3.9 ¿Qué sucede con el promedio de las alturas máximas en cada subintervalo a medida que aumenta el número de ellos? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas?

De lo hasta aquí dicho pueden establecerse algunas cuestiones:

1.3.9.1 La altura promedio de las alturas máximas (y mínimas) es una función de *n*, (donde *n* es el número de intervalos).

1.3.9.2 La altura promedio de las alturas mínimas es una función creciente siempre menor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

1.3.9.3 La altura promedio de las alturas máximas es una función decreciente siempre mayor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

1.4 Con base a estas conclusiones, ¿cómo puede definirse la altura promedio de la totalidad de las alturas?

1.4.1 Determina las funciones 'altura promedio' (tanto de las alturas máximas como de las mínimas) como una función de *n*.

1.4.2 A partir de la definición establecida para "altura promedio de la totalidad de las alturas", calcula su valor en este caso. ¿Coincide con la que habías calculado geométricamente y con la que obtuviste en el paso 1.2?

1.5 Abre el siguiente hipervínculo Problema 11, y comprueba lo que has contestado colocando el cursor del punto azul en x=1. ¿Qué concluyes respecto a tus respuestas?

Actividad 12

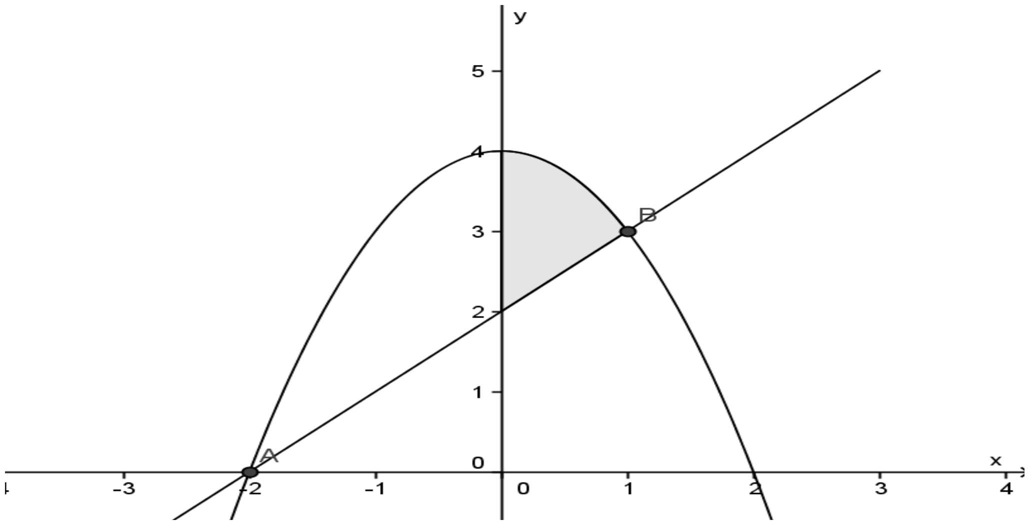
- **CENTRO DE MASA DE UNA REGIÓN PLANA:**

Encontrar el centroide de la región acotada por las gráficas de $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$.

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de :

$y = x^2 + 1, x = 0, \quad y \quad x = 1$

alrededor del Eje *y*.



El teorema de Pappus establece la siguientes expresiones que permiten calcular las coordenadas del centro de masa *(x, y)* de una región plana, y que relaciona el volumen del sólido de revolución que esta región genera al rotarse en torno a los ejes *x* e *y* con su respectiva área.

$V_{\text{por cortezas}} = 2\pi A \mathbf{x}$ $\qquad$ $V_{\text{por discos}} = 2\pi A \mathbf{y}$

PARA RESOLVER ESTA SITUACIÓN PROBLEMA CONTESTA LO SIGUIENTE:

1. Observa la gráfica de las funciones *f(x)* y *g(x)*.
2. Encuentra una expresión que represente la función altura desde un punto en la recta *g(x)* hasta un punto en la curva *f(x)* para un mismo valor de *x*.
3. Si esta expresión representa una derivada, entonces de que función proviene esta derivada?
4. ¿Está representada esta función en la gráfica que trazaste? ¿cómo? ¿Cuánto cambia su valor desde $x = 0$ hasta $x = 1$?
5. Encuentra la función altura promedio siguiendo la metodología citada en las actividades anteriores y determina el valor del área bajo la curva obteniendo el área equivalente del rectángulo con altura la función promedio y base desde $x = 0$ hasta $x = 1$. Apóyate en el software de GeoGebra Problema 12 para lograr lo anterior. Compara tu resultado con obtenido en el paso (4). ¿Qué concluyes?
6. Encuentra el volumen por el método de cortezas siguiendo los pasos de la actividad 11. Apóyate en el software de GeoGebra Problema 12a.

Para calcular el volumen por el método de discos realiza lo siguiente:

7. Sabiendo que la derivada del volumen de un disco de radio y espesor no constantes está dada por $\frac{dV}{dx} = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2$, encuentra su expresión y traza la gráfica de ésta. ¿de qué otra expresión proviene esta derivada?
8. ¿Está representada esta función en la gráfica que trazaste? ¿cómo? ¿Cuánto cambia su valor desde $x = 0$ hasta $x = 1$?
9. Encuentra la función altura promedio siguiendo la metodología citada en las actividades anteriores y determina el valor del área bajo la curva obteniendo el área equivalente del rectángulo con altura la función promedio y base desde $x = 0$ hasta $x = 1$. ¿Qué representa ésta área? Apóyate en el software de GeoGebra Problema 12b para lograr lo anterior. ¿Qué representa ésta área?; Compara tu resultado con el obtenido en el paso (8). ¿Qué concluyes?
10. Utilizando las expresiones del Teorema de Pappus citadas al inicio de esta actividad, ¿Cuáles son las coordenadas del centro de masa (x, y)?; Ubica este punto en la gráfica que trazaste en el paso (1). ¿Qué concluyes?

3.4 ANÁLISIS DE TRAYECTORIAS E INTERACCIONES DIDÁCTICAS

El siguiente nivel de análisis para procesos de instrucción que haremos, siguiendo los lineamientos de nuestro marco teórico, consiste en el análisis de trayectorias e interacciones didácticas. Considerando que un proceso de instrucción comprende distintas dimensiones, las cuales están interconectadas entre sí: *epistémica* (significados institucionales), *docente* (funciones del profesor), *discente* (funciones de los alumnos), *mediacional* (recursos materiales y temporales), *cognitiva* (significados personales), *emocional* (sentimientos y afectos), estas dimensiones pueden modelarse como un proceso estocástico, de manera que, en cada realización del proceso de instrucción se produce una serie de estados posibles, es decir, se produce una trayectoria muestral del proceso, que describe la secuencia particular de funciones o componentes que han tenido lugar a lo largo del tiempo. (Godino, 2006).

De acuerdo al EOS se distinguen seis tipos de procesos y trayectorias muestrales:

1. *Trayectoria Epistémica*: es la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado institucional implementado. Donde los componentes (problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades, argumentos) se van sucediendo en un cierto orden en el proceso de instrucción.

2. *Trayectoria Docente*: es la distribución de las tareas y acciones del profesor a lo largo del proceso de instrucción.

3. *Trayectorias Discentes*: es la distribución de las acciones desempeñadas por los estudiantes (una para cada estudiante).

4. *Trayectoria Mediacional:* es la representación de la distribución de los elementos o recursos temporales y tecnológicos utilizados (libros, apuntes, objetos para manipular, software, etc.).

5. *Trayectorias Cognitivas*: son aquéllas que producen los significados personales de los estudiantes.

6. *Trayectorias Emocionales*: es la distribución a lo largo del tiempo de los estados emocionales (actitudes, valores, afectos y sentimientos) de cada estudiante con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

Cada trayectoria es la realización de un proceso estocástico, ya que el proceso de instrucción posee características no deterministas, debido a que siempre están presentes elementos aleatorios que pueden producir cambios a cada trayectoria, de acuerdo a la necesidad de hacer adaptaciones a las características y requerimientos propios de los estudiantes.

El tercer nivel de análisis se da a partir de las hojas de trabajo de las actividades didácticas cuya finalidad es la de describir la secuencia de interacciones didácticas que se espera se presenten a lo largo del proceso de instrucción como un análisis del sistema de prácticas que se desea implementar.

Se pretende entonces elaborar las trayectorias epistémica, la docente y la discente de acuerdo a la distribución en el tiempo que tendrán los objetos matemáticos involucrados con el cálculo integral desde el punto de vista de sus significados institucionales y funciones semióticas, de los sistemas de prácticas que realiza el profesor facilitador y de las acciones que realizan los estudiantes.

3.4.1 Trayectoria Epistémica

En este nivel de análisis se describe el modo en que los objetos matemáticos se conectan entre sí en un orden específico durante el desarrollo de las actividades, esto con el fin de comprender de mejor manera lo que sucede dentro del aula en el proceso de instrucción.

Para el análisis epistémico se elaborará una tabla donde se resumen las tareas planteadas en el diseño didáctico. En dicha tabla se recurre a las nociones de configuración epistémica, trayectoria epistémica y a los estados potenciales. La *configuración epistémica* es el sistema de objetos y de funciones semióticas entre los objetos relacionados con la resolución de situaciones problémicas. La *trayectoria epistémica* consiste en la distribución a lo largo del tiempo de los objetos matemáticos y sus funciones semióticas que se espera sucedan en un cierto orden durante su proceso de instrucción, lo que permitiría caracterizar el significado institucional pretendido. En este caso la configuración epistémica sería un elemento de la trayectoria epistémica, y de aquí que el análisis epistémico consista en la caracterización de las configuraciones epistémicas.

En la tabla descrita se mencionan las *unidades naturales*, las cuales se relacionan con cada situación problémica, así como las *unidades epistémicas*, referidas a las unidades elementales presentadas ordenadamente a lo largo de toda la trayectoria. También en la tabla se identifican los *estados potenciales* sucesivos de la trayectoria, los cuales están relacionados con los objetos primarios que constituyen un sistema de prácticas: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, proposiciones y argumentos. Entonces se cuenta con los siguientes seis estados potenciales:

1. *Situacional*: se enuncia un ejemplo de un cierto tipo de problemas.
2. *Actuativo*: se aborda el desarrollo de una cierta forma de resolver los problemas.
3. *Lingüístico*: se introducen representaciones gráficas, tablas, expresiones verbales, notaciones, etc.
4. *Conceptual*: se formulan o interpretan definiciones de los objetos matemáticos que se ponen en juego.
5. *Proposicional*: se enuncian e interpretan propiedades o atributos de los objetos matemáticos que se ponen en juego.
6. *Argumentativo*: se justifican o explican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

Estos estados se suceden a lo largo del proceso de instrucción relativo al estudio de un cierto tema. El análisis de la trayectoria epistémica de un proceso instrucción permitirá caracterizar el significado efectivamente implementado.

A continuación se presenta la trayectoria epistémica elaborada a partir de las actividades consideradas en el desarrollo de la secuencia didáctica.

Trayectoria epistémica de las actividades didácticas de nuestra propuesta

Unidad Natural	**Configuración Epistémica**	**Unidad Epistémica**	**Descripción**	**Estado**
1	CE-1	1	Encontrar la distancia recorrida por un objeto durante un intervalo de tiempo cuando su velocidad es constante e interpretar a ésta como la gráfica del área bajo la curva y como la función antiderivada.	Situacional
		2	Preguntar el valor de la velocidad.	Lingüística
		3	Determinación de la distancia recorrida.	Actuativo
		4	Visualizar la representación del área en la gráfica como la distancia recorrida por el móvil durante un intervalo de tiempo.	Lingüística
		5	Con la ayuda de GeoGebra, hacer simulaciones del movimiento de velocidad constante para analizarlo, y manipular variables para observar los efectos que esto tiene.	Actuativo
		6	Interpretar la representación del área en la gráfica como parte del resultado de un proceso de antiderivación.	Actuativo
2	CE-2	7	Encontrar la distancia recorrida por un objeto durante un intervalo de tiempo cuando su	Situacional

			velocidad no es constante e interpretar a ésta como la gráfica del área bajo la curva de la función identidad y como la función antiderivada.	
		8	Preguntar el valor de la velocidad.	Lingüística
		9	Determinación de la distancia recorrida.	Actuativo
		10	Validar el cálculo anterior	Argumentativo
		11	Calcular el área aproximada bajo la curva dividiendo a ésta en subintervalos y obteniendo la altura promedio de la totalidad de los subintervalos, multiplicar a ésta por el intervalo de tiempo.	Actuativo
		12	Definir altura promedio	Proposicional
		13	Determinar función altura promedio	Actuativo
		14	Calcular la altura promedio utilizando la función obtenida	Actuativo
		15	Comparar	Lingüística
		16	Con la ayuda de GeoGebra, hacer simulaciones cambiando el número de subintervalos para analizar y manipular las alturas mayores y menores y observar los efectos que esto tiene en su promedio y en él cálculo del área.	Actuativo
		17	Interpretar la representación del área en la gráfica como parte del resultado de un proceso de antiderivación.	Actuativo
3	CE-3	18	Encontrar la velocidad durante un intervalo de tiempo cuando su aceleración no es constante e interpretar a ésta como la	Situacional

			gráfica del área bajo la curva de la función cuadrática aceleración y como la función antiderivada.	
		19	Preguntar el valor de la aceleración.	Lingüística
		20	Determinación de la velocidad que lleva el cuerpo en movimiento.	Actuativo
		21	Preguntar si la velocidad está representada en la gráfica de la aceleración vs tiempo	Lingüística
		22	Calcular el área aproximada bajo la curva dividiendo a ésta en subintervalos y obteniendo la altura promedio de la totalidad de los subintervalos, multiplicar a ésta por el intervalo de tiempo.	Actuativo
		23	Con la ayuda de GeoGebra, hacer simulaciones cambiando el número de subintervalos para analizar y manipular las alturas mayores y menores y observar los efectos que esto tiene en su promedio y en él cálculo del área.	Actuativo
		24	Interpretar la representación del área en la gráfica como parte del resultado de un proceso de antiderivación equivalente a obtener el cambio de la velocidad durante un intervalo.	Actuativo
4	CE-4	25	Encontrar el trabajo total realizado por el peso de un cuerpo cuando este desciende en un movimiento de caída libre desde cierta altura e	Situacional

			interpretar a éste como la gráfica del área bajo la curva y como la función antiderivada de la función fuerza constante.	
		26	Preguntar el valor de la fuerza.	Lingüística
		27	Determinación del trabajo realizado por la fuerza constante en un intervalo de caída libre.	Actuativo
		28	Preguntar si el trabajo está representado en la gráfica de la fuerza vs desplazamiento.	Lingüística
		29	Con la ayuda de GeoGebra, hacer simulaciones de movimiento para analizarlo, y manipular variables para observar los efectos que esto tiene en el trabajo que se realiza.	Actuativo
		30	Interpretar la representación del área en la gráfica como parte del resultado de un proceso de antiderivación equivalente a obtener el cambio del trabajo realizado por una fuerza constante durante un intervalo de distancia recorrida.	Actuativo
		31	Obtener una expresión como resultado de la unidad epistémica anterior	Lingüística
		32	Validar	Argumentativo.
5	CE-5	33	Encontrar el trabajo total realizado por una fuerza variable F, en el caso de estirar un resorte previo cálculo de su constante de elasticidad K, donde $F = Kx$	Situacional
		34	Calcular la constante de	Actuativo

			elasticidad.	
		35	Preguntar por el valor de la fuerza que es necesario para aplicar para estirar el resorte cierta longitud.	Lingüística
		36	Determinación del trabajo realizado por la fuerza variable al alargar el resorte.	Actuativo
		37	Validar	Argumentativo
		38	Calcular el área aproximada bajo la curva dividiendo a ésta en subintervalos y obteniendo la altura promedio de la totalidad de los subintervalos, multiplicar a ésta por el intervalo de tiempo.	Actuativo
		39	Con la ayuda de GeoGebra, hacer simulaciones cambiando el número de subintervalos para analizar y manipular las alturas mayores y menores y observar los efectos que esto tiene en su promedio y en él cálculo del área.	Actuativo
		40	Interpretar la representación del área en la gráfica como parte del resultado de un proceso de antiderivación equivalente a obtener el cambio del trabajo realizado por una fuerza variable durante un alargamiento de resorte.	Conceptualización
				Proposición
		41	Validar	Argumentativo
6	CE-6	42	Encontrar el trabajo total realizado para vaciar el fluido de un tanque.	Situacional
		43	Si ρ = *masa/volumen*, o bien *dm/dv*, escribir una expresión	Lingüística

			para un diferencial de masa.	
		44	Determinar una expresión para un diferencial de volumen del fluido.	Lingüística
		45	Determinar el peso del diferencial de volumen, sabiendo que el peso del fluido es el producto de la masa por la gravedad.	Proposición
		46	Expresar el diferencial de trabajo	Lingüística
		47	Escribe una expresión para representar a la suma de diferenciales dT	Conceptualización
		48	Con la expresión anteriormente obtenida, calcular la cantidad total de trabajo que se realiza para extraer todo el fluido por la parte superior del tanque.	Actuativa
		49	Con la ayuda de GeoGebra, hacer simulaciones del movimiento del fluido para analizar y manipular variables para observar los efectos que esto tiene en el trabajo resultante.	Actuativa
		50	Validar	Argumentativo
7	CE-7	51	Cálculo de la fuerza producida por un fluido confinado sobre una de las paredes del recipiente que lo contiene.	Situacional
		52	Si $P = Fuerza/Área$, o bien dF/dA, escribir una expresión para un diferencial de fuerza.	Lingüística
		53	Determina un diferencial de área a partir de la geometría de la pared del recipiente.	Actuativo
		54	Sabiendo que la presión que soporta un punto dentro de un	Actuativo

			fluido es $P= \rho g(h\text{-}y)$, determina dF relacionando con las dos unidades epistémicas anteriores.	
		55	Escribe una expresión para representar a la suma de diferenciales dF	Actuativo
		56	Con la ayuda de GeoGebra, hacer simulaciones del movimiento del fluido para analizar y manipular variables para observar los efectos que esto tiene en la fuerza resultante.	Actuativo
		57	Validar	Argumentativo
8	CE-8	58	Encontrar la longitud de una curva en un intervalo.	Situacional
		59	Construir un triángulo diferencial característico que tenga por hipotenusa un diferencial de longitud.	Lingüística
		60	Obtener una expresión para el diferencial de longitud a partir del teorema de Pitágoras y de $f\ddot{}(x)=dy/dx$	Actuativa.
		61	Escribe una expresión para representar a la suma de diferenciales dL.	Actuativa.
		62	Con la ayuda de GeoGebra, hacer simulaciones de funciones para analizar y manipular variables para observar los efectos que esto tiene en la longitud resultante.	Actuativa.
		63	Validar	Argumentativo
9	CE-9	64	Encontrar el área entre curvas que se intersecan.	Situacional.
		65	Calcular el área aproximada	Actuativa.

			bajo la curva dividiendo a ésta en subintervalos y obteniendo la altura promedio de la totalidad de los subintervalos, multiplicar a ésta por el intervalo de x.	
		66	Con la ayuda de GeoGebra, hacer simulaciones cambiando el número de subintervalos para analizar y manipular las alturas mayores y menores y observar los efectos que esto tiene en su promedio y en el cálculo del área.	Actuativa.
		67	Interpretar la representación del área en la gráfica como parte del resultado de un proceso de antiderivación equivalente a obtener el cambio del área entre dos curvas durante un intervalo de x.	Conceptualización
		68	Obtener una expresión que relacione entre sí la información de la unidad epistémica anterior.	Conceptualización.
		69	Validar	Argumentativo.
10	CE-10	70	Encontrar el volumen de un sólido de revolución por el método de las cortezas.	Situacional.
		71	Dibujar el sólido de revolución que se forma al girar el área de un rectángulo con base x en el eje x positivo alrededor del eje y.	Lingüística
		72	Determinar la superficie de la pared lateral del sólido de revolución.	Actuativa
		73	Suponiendo un espesor	Actuativa

			diferencial *dx* de la pared, encuentra una expresión para el diferencial de volumen de esta pared.	
		74	Escribe una expresión para representar a la suma de diferenciales de volumen *dV*.	Lingüística.
		75	Con la ayuda de GeoGebra, hacer simulaciones con otras funciones para analizar y manipular variables y observar los efectos que esto tiene en el volumen resultante.	Actuativa
		76	Validar	Argumentativo
11	CE-11	77	Encontrar el volumen de un sólido de revolución por el método de los discos.	Situacional
		78	Dibujar el sólido de revolución que se forma al girar el área de un rectángulo con base x en el eje *x* positivo alrededor del eje *x*.	Lingüística.
		79	Determinar la superficie de la pared lateral del solido de revolución.	Actuativa
		80	Suponiendo un espesor diferencial *dx* de la pared, encuentra una expresión para el diferencial de volumen de esta pared.	Actuativa
		81	Escribe una expresión para representar a la suma de diferenciales de volumen *dV*.	Lingüística.
		82	Con la ayuda de GeoGebra, hacer simulaciones con otras funciones para analizar y manipular variables y observar los	Actuativa

			efectos que esto tiene en el volumen resultante.	
		83	Validar	Argumentativo
12	CE-12	84	Encontrar el centro de masa de una región plana.	Situacional
		85	Utiliza el teorema de Pappus y apoyarse en las unidades epistémicas 75 y 81 para encontrar las coordenadas del centro de masa.	Actuativo
		86	Con la ayuda de GeoGebra, hacer simulaciones con otras funciones para analizar y manipular variables y observar los efectos que esto tiene en el centro de masa resultante	Actuativo.
		87	Validar	Argumentativo

3.5 ANÁLISIS Y VALORACIÓN A PRIORI DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA *DE LAS ACTIVIDADES DE LA PROPUESTA.*

El análisis que hemos hecho hasta el momento nos da una idea de las características de la propuesta didáctica que estamos presentando, y podemos observar en las tablas que cada actividad, analizándola en su trayectoria epistémica, inicia con el planteamiento de una situación problema y, posteriormente encontramos elementos de significado diferentes, incluyendo todos los que consideramos, en órdenes diferentes, en dependencia de la actividad que se esté proponiendo. Esto es, podemos ubicar elementos de actuación, de establecimiento o reconocimiento de proposiciones, argumentación, de orden lingüístico y de orden conceptual.

Pero incluir todos los elementos de significado y tipos de objetos matemáticos no es suficiente para asegurar que el diseño que hemos realizado es adecuado y debemos tomar en cuenta otros elementos que nos conduzcan a los mejores resultados posibles en lo que nos hemos propuesto.

Cuando se diseñan actividades didácticas, en su planeación, en su implementación y en su evaluación es necesario considerar que su idoneidad didáctica (pertinencia y adecuación de estos procesos dentro de un sistema educativo), depende de varios factores, mismos que podemos ubicar en seis dimensiones: epistémica, cognitiva, emocional, mediacional, ecológica e interaccional (Godino, Batanero y Font, 2008). Con base en lo anterior, nuestra propuesta se planeó para que su idoneidad fuera alta a priori en cada una de las seis dimensiones anteriores, de acuerdo con los componentes y descriptores propuestos por Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007).

A continuación presentamos una valoración a priori a las actividades didácticas de nuestra propuesta:

3.5.1 IDONEIDAD EPISTÉMICA

Consideramos que la idoneidad epistémica es el grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos, respecto del significado de referencia. Las componentes de esta idoneidad se refieren a los seis tipos de objetos matemáticos primarios. Para la primera componente, que corresponde a las situaciones, se proponen dos indicadores:

1. ¿Son las situaciones una muestra representativa y articulada de las incluidas en el significado de referencia, las cuales permiten la contextualización y ejercitación de los conocimientos que se pretende construir y su aplicación a situaciones relacionadas?

En el capítulo anterior hemos mencionado que en Labraña (2001) se señala y asegura que hay dos tipologías de problemas de integración que responden a dos percepciones psicológicamente diferentes: **Una estática** (densidad, presión (fuerza/superficie) intensidad de campo (cantidad de flujo/superficie), que se conecta fácilmente con la idea de suma de todas las pequeñas cantidades *f(x)dx*, que constituyen la integral definida y **Otra dinámica** (una tasa de variación instantánea: velocidad, tasa de crecimiento de una población, ingreso marginal (ingreso/producción), que permite conectar con la idea de antiderivación (p. 290)) y que forman parte de las situaciones presentes en el significado de referencia, y mostramos que los problemas que seleccionamos para nuestra propuesta, están presentes en los libros de texto sugeridos para el curso. Estos problemas acerca de la integral implican diferentes modelos matemáticos y distintos contextos y conceptos (área, volumen de sólidos de revolución, longitud de una curva, trabajo, posición, velocidad, fuerza de un fluido, etc.), por lo que consideramos que nuestra propuesta contempla una muestra representativa de situaciones extra matemáticas.

Las actividades didácticas de nuestra propuesta buscan promover en forma gradual al desarrollo de un sistema de prácticas que logren favorecer la emergencia de los objetos matemáticos pretendidos, los cuales son básicamente los mismos en las mayoría de las actividades, así no sólo se abona en cada actividad a la emergencia de dichos objetos matemáticos y a la construcción de significados para éstos, sino también a la ejercitación y al reforzamiento de los mismos.

Debido a que la emergencia de los objetos matemáticos en nuestra propuesta, está ligada a problemas extra matemáticos, podemos decir que estamos desarrollando prácticas de contextualización de estos objetos, ya que éstos son útiles en algunos otros problemas de aplicación.

El segundo indicador para la idoneidad epistémica de las situaciones es el siguiente:

2. ¿Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan la oportunidad de plantear problemas, reformularlos y/o de problematizarse (en el sentido de asumir los problemas como propios)?

Las situaciones que proponemos para las actividades didácticas tienen un contexto familiar para los estudiantes, lo cual consideramos favorece que éstos puedan participar en su planteamiento al realizarse un diálogo con ellos sobre el contexto del problema, antes de entregarles las hojas de trabajo. En el capítulo siguiente mostraremos cómo durante la puesta en escena de seis de las actividades didácticas de nuestra propuesta con estudiantes de ingeniería, se logró que éstos participaran en el planteamiento de los problemas correspondientes. Las situaciones propuestas en las actividades didácticas que diseñamos, son potenciales situaciones problémicas, pues los contextos de los problemas que tienen que ver con la integral son familiares para los estudiantes o propios de la ingeniería, por lo que éstos pueden opinar sobre aspectos de tal contexto e interesarse en la resolución del problema y hacerlo suyo.

Para la segunda componente, correspondiente al lenguaje, se proponen tres indicadores de la idoneidad epistémica.

1. ¿Se hace uso de diferentes formas de lenguaje (verbal, gráfico, analítico, etc.) y se establecen traducciones y conversiones entre las mismas?

Podemos decir que las actividades didácticas diseñadas para los problemas de enseñanza de la integral promueven el uso y la emergencia de diversas formas de lenguaje, pues los problemas son planteados en el lenguaje verbal en las hojas de trabajo, y en lenguaje geométrico-dinámico en GeoGebra, posteriormente se guía a los estudiantes a que establezcan analíticamente la función que modela la situación y obtengan con ésta valores numéricos para construir a la función en lenguaje tabular y luego en lenguaje gráfico, después en el archivo de GeoGebra se presenta a la función en tales formas de lenguaje, pero dinámicamente vinculadas.

El segundo indicador de la idoneidad epistémica correspondiente al lenguaje es éste:

2. ¿El nivel del lenguaje es adecuado a quienes se dirige?

Las actividades didácticas que hemos diseñado, están pensadas para estudiantes del segundo semestre que ya han llevado cálculo diferencial y que continúan ahora el estudio del cálculo integral, por lo que pensamos que el lenguaje utilizado es apropiado al nivel de los estudiantes. Decidimos comenzar la construcción de significados para los objetos matemáticos del cálculo integral partiendo de formas de lenguaje, que en el caso de los problemas elegidos, son intuitivas: el lenguaje geométrico-dinámico, el numérico y la lengua natural; y a partir de las cuales pretendemos promover la construcción de significados en el lenguaje gráfico.

Si bien es cierto, el lenguaje formal de la matemática (uso de cuantificadores, literales, notación de limite, etc.) es muy eficiente para expresar sin ambigüedad proposiciones sobre los objetos matemáticos, realizar demostraciones, procedimientos, etc., pensamos que comenzar la construcción de significados para los objetos matemáticos con los estudiantes partiendo de esta forma de lenguaje puede resultar más complicado para ellos que iniciar con otras diferentes e ir gradualmente formalizando.

Por otra parte si los estudiantes ya comprenden algunas formas de lenguaje matemático, entonces es factible cambiar el lenguaje escrito de las actividades a un enunciado más formal dentro de las matemáticas.
El tercer indicador de la idoneidad epistémica correspondiente al lenguaje es éste:

3. ¿Se proponen situaciones de expresión e interpretación en las actividades didácticas?

Consideramos que las actividades didácticas de nuestra propuesta promueven en el estudiante prácticas de expresión y de interpretación ya que en las preguntas guía que vienen en la actividad se le pide a éste que describa lo que observa de una manera gráfica y también numéricamente el área de una región como una función antiderivada o bien como una integral definida, incluso el área de una región como el equivalente a otra magnitud: (Trabajo, fuerza, velocidad, posición, etc.) y que justifique sus respuestas. Así mismo los alumnos pueden participar expresando sus ideas y los resultados que haya obtenido interpretando a éstos y a sus representaciones dinámicas en el GeoGebra.

En lo que se refiere a los conceptos, proposiciones y procedimientos se sugieren tres indicadores.

1. ¿Las definiciones, procedimientos y proposiciones están clara y correctamente enunciados, y adaptados al nivel educativo al que se dirigen?
2. ¿Se presentan las definiciones, procedimientos y proposiciones fundamentales del tema según el significado de referencia y el nivel educativo al que se dirigen?

En las hojas de trabajo correspondientes a las actividades didácticas no se enuncian conceptos, ni proposiciones; algunas actividades si muestran un procedimiento que será considerado para valorar su pertinencia en el proceso de hacer emerger el objeto matemático integral.

Pretendemos que al realizar las actividades didácticas de nuestra propuesta, se promueva en los estudiantes la construcción gradual (a través de momentos de trabajo individual y en equipo, además de negociación grupal) de significados (y en particular una definición) para los objetos área bajo la curva, función antiderivada, integral como acumulación, integral indefinida, integral definida, integral como el producto de la altura promedio por el intervalo "*b-a*" donde la altura promedio sea el límite del promedio de la suma de alturas mayores de una región, entre otros; de una manera intuitiva y apoyada en las bondades visuales y dinámicas que brinda GeoGebra, lo cual consideramos adecuado para estudiantes de ingeniería que inician el estudio del cálculo integral. Como ya mostramos en el capitulo anterior, las definiciones de estos, las propiedades y los procedimientos, cuya emergencia buscamos promover, forman parte del significado institucional de referencia.

Con nuestra propuesta abonamos a la emergencia de proposiciones que tienen que ver con el objeto matemático integral, la integral indefinida, la integral definida, el teorema fundamental del cálculo, el teorema del valor medio de la integral, el área de una región bajo una curva, la integral como un proceso de límite, etc.

En cuanto a los procedimientos, las actividades retoman algunos que probablemente el estudiante ya realizó en la escuela preparatoria, como darle valores a una expresión analítica para construir una tabla de valores y luego colocar estos en ejes coordenados.

Después estos procedimientos se vuelven dinámicos al apoyarse en las capacidades de cómputo y graficación de GeoGebra. También emergen procedimientos nuevos como la exploración de intervalos cada vez más finos para aproximar el valor de la altura promedio en la función.

El último indicador para las definiciones, proposiciones y procedimientos es:

3. ¿Se proponen situaciones para la generación y negociación de los elementos regulativos (o sea las definiciones, proposiciones y los procedimientos)?

Las preguntas guía de las hojas de trabajo correspondientes a las actividades didácticas, como ya se mostró en el significado institucional pretendido, están encaminadas a promover la generación o emergencia de definiciones, proposiciones y procedimientos a través de la promoción de sistemas de prácticas para resolver los problemas que tienen que ver con la enseñanza de la integral. La negociación de estos objetos matemáticos se dará principalmente durante las discusiones grupales sobre los resultados obtenidos en las hojas de trabajo y durante el trabajo en equipo.

Para los *argumentos* se sugieren dos indicadores:

1. ¿Son adecuadas las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen?
2. ¿Se promueven momentos de validación?

Sobre estos dos indicadores, podemos decir que en las hojas de trabajo se les pide a los estudiantes, que expliquen sus respuestas a las preguntas, esperando que utilicen en sus argumentos el contexto del problema, los valores de la tabla y la gráfica (tanto los plasmados en las hojas de trabajo, como los presentes en el ambiente dinámico), dejando momentos para una discusión en común, de carácter grupal sobre los resultados obtenidos, promoviendo que los estudiantes validen sus respuestas y lleguen a un consenso.

3.5.2 IDONEIDAD COGNITIVA

La idoneidad cognitiva expresa el grado en que los significados pretendidos (o implementados) estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos (o implementados).

La primera componente de la idoneidad cognitiva corresponde a los *conocimientos previos* (situaciones, lenguaje, procedimientos, proposiciones, argumentos y conceptos), y consta de dos indicadores, de los cuales se presenta a continuación el primero:

1. ¿Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio?

Pensamos que los alumnos en el nivel superior traen ya los conocimientos previos que se necesitan para abordar el estudio de la integral. Como ya se mostró, al analizar el significado institucional pretendido, las situaciones problema que proponemos requieren de conceptos matemáticos elementales, como área de rectángulos y de círculos, para calcular volumen (de un paralelepípedo, un cilindro recto, una esfera), distancia, velocidad, aceleración, trabajo mecánico, presión de un fluido, etc., los cuáles se estudian en la escuela preparatoria y en el primer curso de cálculo en la universidad, al igual que elementos lingüísticos como expresiones analíticas, literales para variables, procedimientos como construir expresiones analíticas, construir una tabla de valores a partir de una expresión analítica, graficar puntos en un plano a partir de datos numéricos correlacionados en una tabla, usar el teorema de Pitágoras, hacer despejes y sustituciones; propiedades de la recta asociadas al signo de su pendiente, la derivada de una función, algoritmia de derivadas, entre otras.

2. ¿Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes?

Dado el carácter intuitivo y el contexto familiar con que se propone iniciar la emergencia y construcción de los objetos matemáticos del cálculo integral en las actividades didácticas de nuestra propuesta, además de las ventajas visuales y dinámicas que proporciona GeoGebra, consideramos que los significados pretendidos tienen una dificultad apropiada para los estudiantes del segundo semestre de ingeniería cuando estos se enfrenten a su resolución.

La segunda componente de la idoneidad cognitiva se refiere a las *adaptaciones curriculares a las diferencias individuales* y consta de un indicador:

1. ¿Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo?

Las actividades didácticas de nuestra propuesta tienen una estructura similar, lo cual favorece que los estudiantes refuercen los significados que vayan construyendo durante el desarrollo de las primeras actividades. Por otro lado, contribuyen a la ampliación del significado de la integral.

La tercer componente de esta idoneidad corresponde al *aprendizaje* y tiene un indicador:

1. ¿Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos o competencias pretendidos o implementados?

Este indicador se refiere a un proceso de instrucción implementado, así que no lo consideraremos para el análisis a priori de nuestra propuesta.

3.5.3 IDONEIDAD MEDIACIONAL

Se define a la idoneidad mediacional como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y de aprendizaje.

El primer componente corresponde a los *recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores),* el cual contiene dos indicadores. Presentamos enseguida el primero:

1. ¿Se propone el uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones, adaptadas al significado pretendido?

En nuestra propuesta utilizamos como recursos materiales principales las hojas de trabajo para los estudiantes y una herramienta computacional: GeoGebra, el cuál es un software de geometría dinámica que permite, además de hacer construcciones geométricas en el plano, graficar funciones, trabajar con expresiones analíticas, definir parámetros y vincular todo dinámicamente.

GeoGebra es un software libre, de código abierto, disponible en la página http://www.geogebra.org/cms/ de la cual se puede descargar un archivo instalador, o bien, elegir la opción GeoGebra WebStart, en la cual se instala y se actualiza GeoGebra directamente desde Internet. Este software también se puede usar sin la necesidad de instalarlo en la computadora, ya sea desde Internet trabajando en un applet completamente funcional, o creando páginas interactivas HTML (también llamadas hojas de trabajo dinámicas), las cuales se pueden usar con tan solo tener un navegador de Internet (como Explorer o Mozilla Firefox). Como GeoGebra está basado en Java puede correr en cualquier sistema operativo y está disponible en varios idiomas, entre ellos el español.

En lo referente a situaciones, con GeoGebra se pueden construir detallados modelos dinámicos de éstas, por ejemplo, permite modelar el cambio de un área bajo una curva, el problema de calcular la altura promedio de una curva, modificar el volumen de un fluido confinado en un recipiente y la fuerza que soportan sus paredes, el volumen de un sólido de revolución entre muchas otras cosas más.

En cuanto al lenguaje, GeoGebra permite presentar al problema en lenguaje geométrico-dinámico (simulación del fenómeno) y verbal; a la función que modela el problema en lenguaje gráfico, analítico y numérico, y vincular estas formas de lenguaje dinámicamente, lo cual favorece el establecimiento de relaciones entre éstas.

GeoGebra permite que el estudiante realice rápidamente procedimientos como tabulación de valores eligiendo un intervalo de valores y un incremento para la variable independiente, graficación de los puntos de la tabla, graficación de funciones, rectas tangentes, la integral definida, sumas de Riemann, áreas de polígonos, realizar acercamientos sucesivos (*zoom*) en torno a un punto, etc.

La animación que simula al fenómeno pretende facilitar al estudiante la argumentación de porque las magnitudes solo pueden tomar ciertos valores.

En lo que respecta a las proposiciones, el manejo de GeoGebra favorece la observación de que la integral se interpreta geométricamente como el área bajo una curva en un intervalo dado, pues los estudiantes después de aproximar la solución al problema aumentando el número de subintervalos, trataran de obtener el valor de la altura promedio mayor y de la menor, observándolas en la gráfica y haciendo acercamientos sucesivos, con lo cual observarán cómo el área bajo la curva se convierte en la superficie del mismo valor pero de un rectángulo, al multiplicar la altura promedio por el intervalo *b-a*. También favorece la elaboración de conjeturas sobre la relación entre la función área cuando se quiere determinar el cambio de alguna magnitud al ver dinámicamente cómo ocurre esto, por ejemplo con el cambio de posición de una partícula en un movimiento rectilíneo uniforme, entre muchos otros.

El segundo indicador se presenta a continuación:

2. ¿Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones, modelos concretos y visualizaciones?

Nuestra propuesta, como se ha mencionado antes, promueve la instrucción o emergencia de distintos objetos matemáticos primarios del cálculo integral (en particular definiciones y propiedades) a partir de la modelación y resolución de problemas de cálculo de áreas que tienen un significado de contexto extra matemático y con apoyo de los recursos visuales y dinámicos de GeoGebra, por lo que se coincide ampliamente con este indicador.

La siguiente componente de la idoneidad mediacional corresponde al *número de alumnos, horario y condiciones del aula* y consta de dos indicadores:

1. ¿Son el aula, el número de alumnos y su distribución adecuados para llevar a cabo la enseñanza pretendida?

Dado que no se está analizando un proceso de instrucción implementado, no contamos con un aula ni un grupo de estudiantes para analizar las condiciones que plantea el indicador, pero podemos decir que nuestra propuesta está diseñada para desarrollarse en un centro de cómputo donde lo ideal sería que hubiera una computadora para cada estudiante, o por lo menos computadoras suficientes para equipos pequeños de estudiantes, pero de no ser posible, consideramos que nuestra propuesta puede modificarse sin muchas complicaciones para desarrollarse en un aula que cuente con al menos una computadora y un proyector, la cual podrían manipular por turnos algunos estudiantes o el profesor.

El segundo indicador es el siguiente:

2. ¿El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora)?

Esta propuesta no está dirigida a algún grupo de estudiantes predeterminado con un horario asignado, por lo que no consideraremos este indicador en el análisis.

La ultima componente de la idoneidad mediacional se refiere al *tiempo (de enseñanza colectiva /tutorías; tiempo de aprendizaje)* y comprende tres indicadores.

1. ¿Son adecuados los significados pretendidos /implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial)?

Consideramos que el tiempo requerido para el desarrollo de las actividades didácticas será cada vez menor dadas las similitudes en la estructura de las mismas.

El resto de los indicadores de esta componente son los siguientes:

2. ¿Se invierte el tiempo adecuado en los contenidos más importantes o nucleares del tema?

3. ¿Se invierte el tiempo pertinente en los contenidos que presentan más dificultad de comprensión?

Dado que las situaciones presentes en nuestra propuesta son de contexto extra matemático, más precisamente, de aplicaciones en la Física, y que se busca el desarrollo de sistemas de prácticas para su resolución, a partir de las cuales se promueva la construcción de significados para la integral en tales contextos, donde ésta como función, por ejemplo, en sus distintas formas del lenguaje sea una herramienta para la modelación de fenómenos de la vida real; consideramos que el tiempo invertido en nuestras actividades didácticas, se dedica a partes esenciales del curso de cálculo integral que como hemos señalado en capítulos anteriores, se imparte en el ITESCA y en todos los Institutos tecnológicos del país.

3.5.4 IDONEIDAD EMOCIONAL

La Idoneidad emocional se refiere al grado en que el proceso de instrucción permite la implicación (interés, motivación, apropiación de los problemas) de los alumnos en éste.

Para la idoneidad emocional, se proponen tres componentes: *intereses y necesidades, actitudes, y emociones*; cada una de las cuales cuenta con dos indicadores.

Para la componente correspondiente a los *intereses y necesidades*, se proponen los siguientes dos indicadores:

1. ¿Se cuenta con una selección de tareas de interés para los alumnos?

2. ¿Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional?

Las situaciones problema que planteamos en las actividades didácticas, son problemas extra matemáticos de un contexto familiar para los estudiantes e incluso algunos de ellos están relacionados con la ingeniería, por lo que se facilita que éstos participen en su planteamiento con la guía del profesor y que se interesen en su resolución, ya que pueden abordarlos con sus conocimientos previos. De esta forma consideramos a priori que los alumnos se percatarán de la utilidad de las matemáticas que conocen para resolver problemas afines a su área profesional y de la vida cotidiana experimentando a la vez, la construcción de unas nuevas matemáticas.
Para la componente que considera a las *actitudes* se tienen dos indicadores:

1. ¿Se promueve la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.?

2. ¿Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quien lo dice?

Al plantear actividades con situaciones de interés se promueve la implicación de los estudiantes en la resolución de los problemas sobre las cuales puede opinar por serle familiares, aunque consideramos que este indicador se dirige mas a un proceso de enseñanza y aprendizaje implementado.

Para la tercera componente, referente a las *emociones,* tenemos dos indicadores:

1. ¿Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas?

2. ¿Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas?

Al igual que en la componente anterior, consideramos que estos indicadores corresponden mas a un proceso de instrucción implementado que a un diseño como el nuestro, pero podemos comentar lo siguiente: el hecho de que las situaciones de nuestra propuesta sean de un contexto familiar, de interés para los estudiantes y simuladas en GeoGebra dinámicamente, favorece en estos la participación e implicación en la resolución del problema; además el que se utilice en las primeras preguntas guía de las primeras actividades de las hojas de trabajo, procedimientos elementales como el determinar valores de velocidad, de aceleración, de posición, etc., y la graficación de estos en los ejes coordenados, puede dar cierta confianza al estudiante pues no se hace intervenir (al menos no explícitamente para los estudiantes) objetos matemáticos abstractos sobre los que no se tiene un significado útil construido.

3.5.5 IDONEIDAD ECOLOGICA

La Idoneidad ecológica se refiere al grado en que el proceso de estudio se ajusta al currículo de la institución, contempla las necesidades e implicaciones del medio social en que se ubica la misma, y considera las conexiones intra e interdisciplinares.
La primera componente de esta idoneidad corresponde a la a*daptación de la propuesta al currículo* y consta de un indicador:

1. ¿Los significados, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares?

Dentro de los objetivos del programa de estudios para el curso de Cálculo Integral que se imparte en el sistema de Institutos Tecnológicos del país (que tomamos como significado institucional de referencia) se indica que los estudiantes modelen y resuelvan problemas usando los objetos del cálculo integral; problemas físicos, geométricos y relacionados con los principales temas de la ingeniería que usen la integral para describir el comportamiento de las funciones, entre otros.

Consideramos que nuestra propuesta encaja en gran parte con lo establecido en tales objetivos, sin embargo, en las actividades didácticas que diseñamos, no buscamos que los estudiantes “apliquen” la integral para resolver los problemas, sino que al contrario, a través de intentar resolverlos construyan objetos matemáticos del cálculo y que posean con esto, la competencia para visualizar a la integral en situaciones que se le presenten y que utilice el cálculo como una herramienta para solucionar problemas ya en su vida cotidiana y profesional, entre otros.

La segunda componente habla sobre la *apertura hacia la innovación didáctica*, y su primer indicador es el siguiente:

1. ¿La propuesta es innovadora y basada en la investigación y la práctica reflexiva?

Aunque ya se han hecho propuestas didácticas diferentes a lo tradicional para la enseñanza del cálculo integral, que parten de la resolución de problemas, consideramos que nuestra propuesta didáctica es innovadora en el sentido siguiente: incorpora el uso de un software novedoso con grandes potencialidades tanto gráficas como numéricas y analíticas, y se fundamenta con una teoría cada vez más reconocida y utilizada, el EOS.

Para la elaboración de este trabajo también retomamos resultados de trabajos de investigación y de propuesta didáctica que reportan dificultades para aprender por parte de los estudiantes cuando se enfrentan a los tópicos que tienen que ver con el cálculo integral; que hablan sobre el estado de la enseñanza de éste en el nivel medio superior y superior y los aspectos importantes que tal forma de enseñanza descuida, entre ellas el uso y la articulación de distintas formas de lenguaje.

2. ¿Se integran nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.)?

En la búsqueda de tratar de enfrentar la problemática señalada en el párrafo anterior, se plantean formas de enseñanza alternativas a la tradicional y/o que se apoyan en herramientas tecnológicas y computacionales, sobre los cuales ya se ha comentado en capítulos previos.

La tercera componente de la idoneidad ecológica se refiere a la *adaptación socioprofesional y cultural*, para la cual se propone el siguiente indicador:

1. ¿Los significados pretendidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes?

Con nuestra propuesta buscamos favorecer que los estudiantes construyan significados para objetos matemáticos del cálculo integral en contextos extra matemáticos, y de esta forma contribuir a la preparación del estudiante en la utilización de tales objetos para modelar y resolver problemas de ingeniería.

Consideramos que la participación de los estudiantes en el planteamiento de los problemas puede favorecer la incorporación a su sistema de prácticas, de algunas prácticas importantes para su formación profesional, como identificar información relevante que se requiere conocer, descartar lo que no es relevante en ese momento, construir modelaciones de situaciones problema (aunque luego se utilice el la simulación dinámica de GeoGebra), etc.

La cuarta componente corresponde a las *conexiones intra e interdisciplinares,* para la cual se tiene el siguiente indicador:

1. ¿Los significados se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares?

En este caso hemos buscado identificar cuáles conocimientos matemáticos tienen relación con otros que se revisarán en cursos posteriores que se relacionan y situaciones propias de la ingeniería. Hemos tomado como ejemplo situaciones problema que ocurren dentro de la Física, buscando que con la resolución de las actividades didácticas de nuestra propuesta se promueva en general, el desarrollo de habilidades y competencias que serán de utilidad a los estudiantes en dichos cursos y también para la resolución de problemas de la ingeniería.

3.5.6 IDONEIDAD INTERACCIONAL

La Idoneidad interaccional se refiere al grado en que los modos de interacción en un episodio de clase, permiten identificar y resolver conflictos de significado así como favorecer la autonomía en el aprendizaje.
La primera componente corresponde a la *Interacción docente-discente*, para la cual se tienen los siguientes indicadores:

1. ¿El profesor hace una presentación adecuada del tema (clara, bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.)?
2. ¿Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos) se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.)?
3. ¿Se busca llegar a consensos con base en mejor argumento?
4. ¿Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos?
5. ¿Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y se evita la exclusión?

La segunda componente corresponde a la *Interacción entre discentes* para la que se tienen los siguientes indicadores:

1. ¿Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes?
2. ¿Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión?

La tercera componente se refiere a la *Autonomía* para la que se tiene el siguiente indicador:

1. ¿Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación)?

La cuarta componente y última se refiere a la *Evaluación formativa* para la que se tiene el indicador siguiente:

1. ¿Ocurre por parte del profesor una observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos?

Consideramos que por ser una evaluación a priori de nuestras actividades didácticas, esta idoneidad podrá ser aplicada después que las actividades sean resueltas por los estudiantes.

CAPÍTULO 4

PUESTA EN ESCENA DE LA PROPUESTA DIDACTICA, ANÁLISIS A POSTERIORI Y CONCLUSIONES

4.1 DESCRIPCION GENERAL

En esta sección hablaremos sobre los aspectos principales de la puesta en escena de cinco actividades de nuestra propuesta, mismas que se aplicaron a un grupo de 7 estudiantes de la carrera de Ingeniería Electrónica del Instituto Tecnológico Superior de Cajeme, ITESCA, en el curso de cálculo integral. Tales actividades fueron:

1. Encontrar la distancia recorrida durante un intervalo de tiempo, dada su velocidad, cuando ésta es constante.
2. Encontrar la distancia recorrida durante un intervalo de tiempo, dada su razón de cambio, expresada como la función identidad.
3. Encontrar la velocidad durante un intervalo de tiempo, dada su aceleración cuando esta es una razón de cambio, como función cuadrática.
4. Cálculo del trabajo total realizado por una fuerza constante.
5. Cálculo del trabajo total realizado por una fuerza variable.

Estas actividades fueron seleccionadas por tener un contexto muy relacionado con la carrera de los estudiantes. Sus correspondientes hojas de trabajo están agregadas en los anexos de esta tesis.

Para tener un mejor panorama de lo que sucedió y auxiliarnos con las observaciones y valoración de las mismas, asistió como espectador un profesor con experiencia en el curso y formación en matemática educativa. Asimismo, cada sesión se video grabó y los materiales surgidos se tienen a disposición.

4.2 ANÁLISIS Y VALORACIÓN A POSTERIORI DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LAS ACTIVIDADES DE LA PROPUESTA.

Las observaciones que realizamos nos permitieron hacer una valoración de lo sucedido en el pilotaje y nos proporcionaron pautas para mejorar los diseños. En términos generales empleamos los criterios de idoneidad para hacer dicha valoración y a continuación presentamos las reflexiones que hemos hecho, como una valoración a posteriori de las idoneidades, las cuales se contrastaron con la valoración a priori que previamente habíamos realizado.

IDONEIDAD EPISTÉMICA

Tomando en cuenta las características de este trabajo pensamos que al hacer un análisis a posteriori de la idoneidad epistémica de las actividades, ésta será alta ya que con ese fin se diseñaron, de tal manera que los indicadores de ésta y que se utilizaron en el análisis a priori son los mismos y no hay diferencia notoria entre ellos entre uno y otro análisis con respecto a los objetos matemáticos primarios.

Las situaciones problema que se manejaron constituyen una muestra representativa de las que se incluyen en el significado institucional de referencia y que además permiten la contextualización y ejercitación de los conocimientos que se pretende construir y su aplicación a situaciones relacionadas

Para el objeto matemático correspondiente al **lenguaje**, los alumnos no tuvieron problema en relacionar y usar las distintas formas usadas, excepto cuando se les pidió encontrar la función antiderivada en el contexto de trabajo, lo cual se les complicó. Tal vez se deba preguntar antes de esta pregunta otra que pida la función utilizando el área de la gráfica. En algunos alumnos se presentó la dificultad con algunos objetos intervinientes como es el caso del concepto de trabajo, peso y gravedad pero, por ejemplo, al momento de preguntarles si es posible representar el trabajo en la gráfica dada, los alumnos inmediatamente establecieron la relación entre él área y la función trabajo, entre otras.

En lo que se refiere a los **conceptos, proposiciones y procedimientos** hubo algunas dificultades en el sentido de que los alumnos no supieron escribir la función antiderivada en el caso de contexto de trabajo realizado por una fuerza constante como lo hicieron en las primeras actividades. Sin embargo, estos objetos surgieron como un resultado generado a partir de las situaciones que se plantearon durante el pilotaje con el grupo de alumnos anteriormente mencionado, en donde se promovieron momentos de validación, explicación adecuada y comprobaciones que se constituyeron en los **argumentos** de esta secuencia didáctica.

IDONEIDAD COGNITIVA

La idoneidad cognitiva expresa el grado en que los significados pretendidos (o implementados) estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos (o implementados). Con base en esto analizamos su pertinencia en cinco actividades que se pilotearon.

En lo que respecta a los conocimientos previos necesarios, esto es, a los objetos matemáticos intervinientes que son necesarios para el desarrollo de las actividades, en su mayoría eran conocidos por los estudiantes, pero se presentaron también algunas deficiencias, como es el hecho de que la notación funcional causó dificultades en tres de los siete alumnos que participaron en el pilotaje.

Otros casos son los referentes al uso y cálculo de sumatorias, los procesos de límite de una función, y el peso y trabajo realizado por una fuerza variable. En todos los casos fue necesario intervenir para superar estas deficiencias, al menos para que tuvieran una significación que les permitiera avanzar y no se detuviera el proceso de estudio de la integral.

El tipo de actividades resultó novedoso para los estudiantes y en la primera actividad sólo un alumno logró un significado personal adecuado, pero esta situación fue cambiando y mejorando paulatinamente, particularmente cuando los participantes hicieron conexiones entre los procedimientos analíticos y las visualizaciones que resultaban de la manipulación con el aplett correspondiente a cada actividad. De esta manera los significados personales de la integral se fueron aproximando a los significados institucionales que pretendíamos.

IDONEIDAD MEDIACIONAL

Se define a la idoneidad mediacional como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y de aprendizaje. En nuestra propuesta utilizamos como recursos materiales principales las hojas de trabajo para los estudiantes y una herramienta computacional, GeoGebra, el cual es un software de geometría dinámica que permite, además de hacer construcciones geométricas en el plano, graficar funciones, trabajar con expresiones analíticas, definir parámetros y vincular todo dinámicamente.

Para implementar el pilotaje contamos con un aula equipada con una computadora por alumno además de un proyector. Se trabajó con un grupo de 7 estudiantes por lo que

pensamos que nuestra propuesta podía llevarse a cabo adecuadamente. Nuestras observaciones se resumen en las siguientes líneas.
En lo que respecta a las proposiciones, el manejo de GeoGebra favoreció la observación de que la integral se interpreta geométricamente como el área bajo una curva en un intervalo dado, pues los estudiantes después de aproximar la solución al problema aumentando el número de subintervalos, trataron de obtener el valor de la altura promedio mayor y de la menor observándolas en la gráfica y haciendo acercamientos sucesivos, con lo cual observaron cómo el área bajo la curva de convierte en la superficie del mismo valor pero de un rectángulo, al multiplicar la altura promedio por el intervalo *b-a*.

También se favoreció en los alumnos la elaboración de conjeturas sobre la relación entre la función área al observar dinámicamente lo que sucedía al cambiar alguna magnitud, como es el caso del cambio de posición en unos problemas, de distancia recorrida en otros, flujo de agua, etc.

El uso de GeoGebra facilitó el manejo de situaciones diversas en un tiempo relativamente corto, en las cuales un elemento común, de carácter visual, estaba representado por el área de una región, con la cual se daba respuesta a diferentes situaciones relativas a fenómenos físicos o matemáticos que previamente se habían modelado. La diversidad de situaciones que se diseñaron difícilmente puede abordarse en un tiempo adecuado sin contar con el recurso de la geometría dinámica y las posibilidades que ofrece para simular los fenómenos y posibilitar la manipulación de objetos matemáticos en diferentes formas de representación simbólica.

IDONEIDAD EMOCIONAL

La Idoneidad emocional se refiere al grado en que el proceso de instrucción permite la implicación (interés, motivación, apropiación de los problemas) de los alumnos en éste.

Las situaciones problema incluidas las actividades didácticas son de tipo extra matemático y se plantean en un contexto familiar para los estudiantes, algunos de ellos están relacionados con la ingeniería, lo cual facilita que éstos participen en su planteamiento con la guía del profesor y se interesen en su resolución, ya que pueden abordarlos con sus conocimientos previos.

Una de las evidencias que tuvimos sobre la forma en la cual se involucraron los alumnos en las actividades consistió en observar cómo, al finalizar el tiempo para la sesión en el aula, se agruparon y discutieron los significados que cada uno de ellos había logrado dándose una discusión de manera natural valorando entre ellos sus argumentos, por lo que pensamos que de esta forma, ellos se percataron de la utilidad de las matemáticas que conocen para resolver problemas afines a su área de estudio y profesional y experimentaron, a la vez, la construcción de unas nuevas matemáticas.

Al utilizar el GeoGebra en el diseño de las actividades, se promovió otra forma de ver a las matemáticas. La utilización de las preguntas guía de las actividades de las hojas de trabajo, el inicio con procedimientos elementales, entre ellos determinar valores de velocidad, de aceleración, de posición, etc., y la graficación de éstos en los ejes coordenados, les dio confianza y no sintieron que estuvieran trabajando con objetos matemáticos alejados de sus intereses.

IDONEIDAD ECOLOGICA

La Idoneidad ecológica se refiere al grado en que el proceso de estudio se ajusta al currículo de la institución, contempla las necesidades e implicaciones del medio social en que se ubica la misma, y considera las conexiones intra e interdisciplinares. De manera similar a lo que comentamos para el caso de la idoneidad epistémica, dada que los problemas se diseñaron tomando en consideración el resto de los cursos de los estudiantes y las actividades propias de su formación profesional, la valoración a posteriori la consideramos alta y el pilotaje difícilmente puede influir en una valoración diferente.

De hecho, en la medida que tomamos a las situaciones problema como el eje central para el desarrollo de los procesos de aprendizaje, no buscamos que los estudiantes “apliquen” la integral para resolver los problemas, sino que al contrario, a través de intentar resolverlos construyan objetos matemáticos del cálculo y vayan desarrollando competencias para concebir y utilizar la integral en situaciones que se les presenten y utilicen el cálculo como una herramienta para solucionar problemas en su vida cotidiana y profesional.

La utilización del software de geometría dinámica se ubica también en este camino, toda vez que una competencia importante que los estudiantes deben desarrollar es la referente a la utilización adecuada de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, la cual tiene sus propias expresiones concretas en las matemáticas, en este caso en el cálculo diferencial e integral.

IDONEIDAD INTERACCIONAL

La Idoneidad interaccional se refiere al grado en que los modos de interacción en un episodio de clase, permiten identificar y resolver conflictos de significado así como favorecer la autonomía en el aprendizaje.

En este caso, como lo planeamos en su momento, podemos afirmar que la idoneidad interaccional fue alta, los estudiantes compartieron entre sí sus reflexiones durante y después del trabajo en el aula, preguntaron al profesor y respondieron sus cuestionamientos. El trabajo lo realizaron atendiendo a las indicaciones que les fueron formulados, tanto cuando se trató de hacerlo de manera individual, como en equipo y discusión grupal.

Con el propósito de llegar a consensos con base en mejores argumentos, las respuestas que fueron dando los alumnos se ponían a discusión general y en principio las respuestas sólo eran de uno, dos o tres alumnos, pero la dinámica condujo a que cada vez se expresaran más aquéllos que primero guardaban silencio. Las discusiones dieron pie a que se pusieran de manifiesto deficiencias o conflictos semióticos, particularmente en los significados de algunos objetos matemáticos intervinientes, como los señalados en la idoneidad cognitiva, referentes al límite de funciones, trabajo, fuerza y otros.

Por último, para finalizar nuestro análisis, finalmente pensamos que en esta propuesta de actividades se notó paulatinamente el progreso cognitivo de los alumnos no sólo en la emergencia de significados sino también en la forma de relacionar y aplicarlos algunos de ellos en otros contextos de la ingeniería. Sin embargo será necesario hacer mejoras para que el proceso de aprendizaje por parte de los alumnos vaya siendo cada vez más eficaz y de esta manera se logre cada vez mejor el acercamiento entre los significados personales de los alumnos y los significados institucionales acerca de la integral, objetivo de nuestro trabajo.

CONCLUSIONES

En el capítulo 2 mencionamos que de nuestra experiencia docente impartiendo cursos de Matemáticas en el Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos, detectamos como una de las problemáticas más recurrentes la pobre comprensión alcanzada por los estudiantes sobre objetos matemáticos fundamentales que son requeridos posteriormente en situaciones tanto intra como extra matemáticas. También citamos cómo los estudiantes encuentran serias dificultades en el manejo de objetos matemáticos fundamentales que tienen como fuentes a diversos factores, entre los que cabe mencionar la incompatibilidad entre la labor docente y los estilos de aprendizaje y las deficiencias en los conocimientos supuestos que tienen que ver en nuestro caso, con el cálculo integral.

Nuestra aportación para enfrentar dicha problemática, fue una propuesta didáctica que buscó promover la propuesta de un sistema de prácticas institucionales diferente respecto a la forma tradicional de abordar al cálculo integral, de tal manera que los estudiantes pudieran construir significaciones más ricas de los objetos matemáticos del cálculo integral y llevaran a cabo acciones para promover el desarrollo de las competencias establecidas en los programas del sistema tecnológico nacional y particularmente de ITESCA.

Una primera conclusión de nuestra parte que queremos resaltar es el hecho de que pudimos constatar que para el desarrollo de competencias tanto disciplinares como generales se requiere el esfuerzo conjunto de la institución, de sus maestros y sus autoridades, modificando las formas metodológicas de enseñanza, promoviendo la actividad de resolución de problemas como eje para la emergencia de conocimientos, promoviendo el trabajo colaborativo y propiciando mejores ambientes de aprendizaje, incluyendo la infraestructura necesaria para que los cursos de matemáticas se puedan desarrollar con apoyo en las nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

Otra conclusión importante la tenemos en la convicción a la que hemos arribado sobre la utilidad que representa el uso de un marco teórico adecuado para el diseño y la valoración del trabajo docente. En ese sentido planteamos que el EOS tiene una serie de herramientas de análisis que nos permitieron diseñar las actividades didácticas, valorar el trabajo que se desarrolló en el aula y nos marcó pautas para mejorar el diseño y las formas de conducción de las actividades de aprendizaje de los estudiantes.

En cuanto al trabajo de tesis en sí, sobre el que consideramos más importante presentar nuestras conclusiones, es pertinente recordar que nos propusimos la elaboración de una serie de actividades didácticas cuyo objetivo general consistió en:

OBJETIVO GENERAL:

Promover en los estudiantes de ingeniería la construcción de significados personales sobre la “integral de una función”, en un ambiente de software de geometría dinámica, que les permita usarla en la resolución de problemas acordes a su formación y sus prácticas profesionales.

Para valorar en qué medida se logró el objetivo general de la serie de actividades didácticas diseñadas, planteamos que pretendíamos el logro de tres objetivos específicos. Tomándolos como eje de análisis y basándonos en las valoraciones a posteriori de los criterios de idoneidad didáctica, presentamos a continuación nuestras conclusiones, desglosando cada uno de los objetivos específicos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1. Promover que los alumnos construyan significados personales de la integral de una función próximos a los significados institucionales pretendidos.

A priori consideramos que este objetivo era alcanzable pues supusimos que:

• La construcción manipulable que simula la situación problema correspondiente, facilitaría la identificación de los objetos intervinientes en el cálculo integral y la observación de cómo éstos se relacionan entre sí.

• Al pedirle al estudiante, en las hojas de trabajo, probar con un valor particular del número de alturas, y promover la observación de que hay mas valores posibles para ésta, se favorecería la construcción del modelo analítico, y posteriormente del numérico y del gráfico, referentes a la determinación del área bajo la curva y posteriormente al significado de ésta en los otros contextos que se utilizaron.

• Con ayuda de la hoja de vista gráfica de GeoGebra, los estudiantes determinarían sistemáticamente y con mayor facilidad los valores que resolvían el problema.

A posteriori, consideramos que este primer objetivo específico se alcanzó, pues durante la puesta en escena se constató que tras la observación de la simulación dinámica del fenómeno, los estudiantes percibieron una dependencia entre las magnitudes involucradas y pudieron determinar el valor promedio de las alturas correspondientes a la función dada; y aunque algunos estudiantes presentaron dificultades para construir la expresión analítica del proceso de límite que determina el área, a pesar de observar dinámicamente que la función promedio *altura* podía tomar distintos valores, se logró que los participantes aproximaran numéricamente la solución al problema con ayuda de la vista gráfica en el GeoGebra.

2. Proponer un sistema de prácticas institucionales diferente a la forma tradicional de abordar al cálculo integral, que tome en cuenta el uso de diferentes representaciones simbólicas, apoyado en herramientas tecnológicas.

A priori, se consideró que este objetivo se podía lograr, pues en las actividades se le pedía al estudiante la construcción de una expresión analítica, una tabla de valores y una gráfica; y se promovían análisis numéricos y gráficos del problema: luego con la simulación dinámica del fenómeno permitiría analizar intuitivamente el problema. Luego, el análisis de los valores de la función promedio *altura* promovería que se propusiera una estrategia para buscar numéricamente la solución para determinar el área bajo la curva. Posteriormente se esperaba la realización de un análisis gráfico usando el valor del área bajo la curva como el valor de la integral definida equivalente al valor del área de un rectángulo de *altura* la *altura promedio* y *base* el *intervalo* de un valor para x desde $x = a$ hasta $x = b$ que son los límites de la región situada entre la curva $f(x)$ y el eje x.

Consideramos que lo anterior se lograría ya que previamente se hizo un análisis de *trayectorias* e interacciones didácticas dentro de nuestra propuesta, un proceso de instrucción que comprende distintas dimensiones, las cuáles están interconectadas entre sí: *epistémica* (significados institucionales), *docente* (funciones del profesor), *discente* (funciones de los alumnos), *mediacional* (recursos materiales y temporales), *cognitiva* (significados personales), *emocional* (sentimientos y afectos) y en donde nos enfocamos en la trayectoria epistémica que es la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado institucional implementado, donde los componentes (problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades, argumentos) se van sucediendo, es decir, el modo en que los objetos matemáticos se conectan entre sí en un orden específico durante el desarrollo de las actividades, esto con el fin de comprender de mejor manera lo que sucede dentro del aula en el proceso de instrucción, utilizando también la noción de configuración epistémica como sistema de objetos.

Durante la puesta en escena de las actividades, constatamos que el objetivo se alcanzó, pues pudimos observar que realmente los estudiantes modelaron el fenómeno implicado, en diferentes formas de lenguaje; propusieron calcular mas valores de la altura promedio variando el número de subintervalos para encontrar el valor del área bajo la curva y con ayuda de la vista gráfica en el GeoGebra se aproximó la solución numérica al problema dado por la función involucrada.

3. Promover que los alumnos desarrollen competencias para aplicar sus significados personales alcanzados en torno a la noción de integral para la resolución de situaciones problema relacionadas con su práctica profesional.

Pensamos que lo anterior se logró ya que los estudiantes desarrollaron sistemas de prácticas que promovieron la emergencia de objetos del cálculo integral. A priori consideramos que era posible alcanzar este objetivo pues:

• Al simular con GeoGebra las alturas mayores y menores cambiantes de acuerdo con el número de intervalos y representar objetos variables, como un punto o un área bajo la curva en la vista gráfica, se favorecería la construcción de un significado para el objeto *variable*.

• Se promoverían prácticas de modelación, que favorecerían la construcción de un significado inicial para las diferentes formas epistémicas de la integral como la *función área promedio*, como herramienta para modelar el fenómeno implicado en las situaciones problema que se manejaron en esta propuesta y que relaciona dos magnitudes, haciendo esto en las diferentes representaciones del lenguaje.

• Se favorecerían prácticas de análisis numérico y gráfico del comportamiento de los valores de las magnitudes, lo que ayudaría a la emergencia de objetos como: *función antiderivada*, *altura promedio*, el *área bajo la curva*, la *integral definida*, La *integral como resultado de un proceso de límite*, el *Teorema Fundamental del Cálculo* y el *Teorema del valor medio de la integral*.

.

• Se facilitarían análisis gráficos que contribuirían a la caracterización gráfica del significado de la integral en otros contextos usando el área bajo la curva como herramienta didáctica.

En la puesta en escena de las primeras cinco actividades que mencionamos en el capítulo 4, aunque no pudimos evaluar el grado en que nuestra propuesta contribuyó a la construcción de los significados personales esperados, si pudimos observar que las prácticas anteriores se llevaron a cabo y que los estudiantes describieron el comportamiento de las magnitudes tanto numéricamente como gráficamente con el valor promedio de la función (altura promedio) multiplicada por la diferencia entre los valores de x desde $x = a$ hasta $x = b$.

Con base en lo expresado anteriormente, consideramos que nuestra propuesta sí promueve la construcción de los distintos significados de la integral, además de la construcción de significado para otros objetos del cálculo, mediante el desarrollo de prácticas extra matemáticas ligadas a la resolución de problemas de los distintos campos de la ingeniería y haciendo uso de las herramientas proporcionadas por los ambientes dinámicos.

De manera general, dado que en el análisis a priori de la idoneidad didáctica de nuestra propuesta calificamos como altas las seis idoneidades parciales, considerando que las habíamos integrado todas ellas en la secuencia de actividades. Por otro lado, aunque con la puesta en escena de las actividades, observamos que el contexto de los problemas y la presencia de los ambientes dinámicos favorecieron el interés y la participación activa de los estudiantes, y se alcanzaron los objetivos propuestos, valoramos a posteriori, en el capítulo cinco, como altas a las idoneidades *epistémica* y *ecológica* y como medias las idoneidades, *cognitiva*, *emocional*, *mediacional* e *interaccional*.

Las razones por las cuáles la valoración a posteriori no coincidió con la realizada a priori, son por un lado, que percibimos la necesidad de realizar algunos cambios pequeños en:

a) La redacción de algunas preguntas para detectar a la función derivada en cada situación problema.
b) El momento en que se trabajaba en el lenguaje analítico
c) La introducción del objeto *área bajo la curva.*
d) El momento en la hoja de trabajo donde aplicar los ambientes dinámicos, para que el valor numérico de la *altura* y del *área promedio* no resulte ser un distractor.

Por otro lado, se detectaron algunas dificultades relacionadas con la construcción de la expresión analítica de la función derivada y de la altura promedio mediante un proceso de sumatorias que modelaba al problema y en algunos objetos intervinientes que los estudiantes no dominaban y que hizo necesaria la participación por parte del profesor y explicarlos para que los estudiantes pudieran continuar con el desarrollo de las actividades.

Dado que nuestro trabajo es de desarrollo docente, se propone realizar los cambios mencionados tras la puesta en escena, e incorporarlos al diseño de las actividades, con lo cual mejoramos la idoneidad didáctica en las componentes que no salieron altas a posteriori y así sucesivamente seguir aplicando las actividades didácticas para que se vayan mejorando continuamente, ya que precisamente la presencia de las dificultades mencionadas señala puntos de las actividades en los cuáles los estudiantes pueden requerir más apoyo.

Por último, una conclusión personal a la que he arribado estriba en el hecho de que he podido constatar que las grandes situaciones problema que he enfrentado al hacer la tesis, que básicamente son dos: diseñar la serie de actividades didácticas y evaluar su pertinencia al ponerla a prueba, me problematizaron y me hicieron avanzar en una mejor comprensión de los problemas docentes, desde su complejidad hasta la necesidad de tener fortaleza en el uso de las consideraciones teóricas con las cuales abordamos nuestra actividad laboral.

Consecuentemente y haciendo una analogía con la actividad de aprendizaje de los estudiantes, estoy ahora más convencido de que lo más importante es enfrentar a los estudiantes a situaciones problema, y que en la búsqueda de soluciones para las mismas, deberán ir emergiendo y reforzándose las herramientas intelectuales necesarias para hacerles frente, particularmente las de las matemáticas, centro de nuestro interés.

REFERENCIAS

Alanís R. Juan Antonio-Salinas M. Patricia. (2002) *Manual de cálculo I.* Instituto Tecnológico de Sonora, p. 1.

Alanís J., Salinas P. (2009). *Hacia un nuevo paradigma en la construcción del cálculo dentro de una institución educativa*. Relime vol.12 num.3, noviembre, 2009, pp. 355-382.

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos.* En P. Gómez (Ed.). Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la innovación en la enseñanza y aprendizaje y el aprendizaje de las matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica., 97 140.

Artigue, M. (1998). *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 1(1) 40-55.

Artigue, M. (2001). *What can we learn from educational research at the university level?* In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study* (pp. 207–220). Holland: Kluwer Academic.

Artigue, M. (2003). *Reaction. Learning and teaching analysis: What can we learn from the past in order to think about the future?* In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson & G. Schubring (Eds.), *One hundred years of l'enseignement mathématique: moments of mathematics education in the twentieth century. Monograph No. 39* (pp. 211–223). Génova, Italia: L'Enseignement Mathématique.

Brousseau, Guy (1980). "Les obstacles épistemologiques et les problémes en mathematiques" *Recherches en didactique des mathématiques*. 4 (2). Grénoble. La Pensée Sauvage.

Cabañas, G. (2004). *Un estudio sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas: El papel de la noción de conservación del área en la explicación escolar del concepto de integral*. Proyecto doctoral.

Cabañas, G., Cantoral, R. (2004). *Una aproximación socioepistemológica al estudio de la integral definida* (enviado para su publicación).

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2005b). *La conservación en el estudio del área. Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. México: Reverté-Clame, A.C. (en prensa).

Camacho, M., Depool, R. y Garbín, S.(2008). *Integral definida en diversos contextos*. *Un estudio de casos*. Educación Matemática, Vol. 20, Núm. 3, Diciembre, 2008, pp. 33-57. Santillana, México.

Cantoral R. (2000). *Sobre la construcción social del conocimiento matemático avanzado*. Documento interno del CINVESTAV, pp. 1-4.

Capace, L. (2008). *La integral en una variable real en la formación técnica universitaria: Dimensiones presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje.* Tesis doctoral dirigida por el Dr. Mario Arrieche. Maracay Venezuela.

Castaño, J. (2006). En la búsqueda de una educación matemática integradora. Posibilidades y obstáculos. Foro Educativo Nacional 2006. Pontificia Universidad Javeriana. Cali, Colombia.

Contreras Ángel, Ordóñez Lourdes. (2006) *Complejidad Ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida.* Relime vol. 9, núm. 1. Marzo, pp. 65-84.

Cordero O. Francisco. (2001) *La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana*. Relime vol. 4, núm. 2, julio, pp. 103-128.

Cordero, F., Muñoz, G. y Solís, M. (2003). *La integral y la noción de variación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Del Rivero, S. (2000, pp.12-18). *Manual de Talleres de Matemáticas I (Ingeniería).* Rescatable en http://www.itesca.edu.mx/portalacademico/fileview.asp

Edwards, Ch. (1979). *The historical development of calculus*. EUA: Springer Verlag.

Farfán Rosa M. (1997). *Ingeniería didáctica. Un estudio de la variación y el cambio.* México: Editorial Iberoamérica.

Godino D. J., Batanero C. (1994). *Significado Institucional y personal de los objetos matemáticos.* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14, nº 3, pp. 325-355.

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas: un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: Universidad de Granada.

Godino D. J., Contreras, A. y Font, V. (2006). *Análisis de procesos de instrucción basado en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática.* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 26, nº 1, pp. 39-88.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas*. Paradigma, Volumen XXVII, Nº 2.

Godino, D. J., Batanero C. y Font, V. (2008). *Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Un marco teórico integrativo para la didáctica de la matemática.* Seminario pluridisciplinar sobre el Enfoque Ontosemiótico. Abril de 2008. Programa de Doctorado Inter-institucional en Educación, Universidad del Valle (Cali, Colombia).

Grattan Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos*: 1630-1910. España: Alianza.

Gravemeijer, K. y M. Doorman (1999), *"Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example", Educational Studies in Mathematics,* Kluwer Academic Publishers, núm. 39, pp. 111-129.

Grijalva M. Agustín, Ibarra O. Silvia E., Bravo T. José M. (2001 y 2002). *El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo Integral*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora.

Grijalva, A. (2007). *El Papel del Contexto en la Asignación de Significados a los Objetos Matemáticos. El Caso de la Integral de una Función.* Tesis Doctoral. Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. U. Legaria, México D. F.

Hugues-Hallet-Gleason-Look-Flath. (2009). *Cálculo aplicado.* 2a. edición. Grupo editorial Patria, p. 220.

Kordaki, M., Potari, D. (1998). *"A learning environment for the conservation of area and its measurement: a computer microworld".* Computers and Education (31) 405-422.

Larson R., Edwards, B. (2009). *Cálculo*. Adaptado de la octava edición. Editorial McGraw-Hill, pp. 9-81, 83-124 y 148-199.

Labraña, P. A. (2000). *La avaliación das concepcións dos alumnos de COU e bacharelato acerca do significado do cálculo integral*. Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Campostela.

Lebesgue, H. (1928). *Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives*. París: Éditions Jacques Gabay. (Reimpresión Gauthier-Villars et Cie Éditeurs, 1989).

Muñoz O. Germán. (2000). *Elementos de Enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral.* Relime vol. 3, Núm. 2, julio, pp. 131-170.

Priemer, N., Lazarte G. (2008*). Integral Definida: Ingeniería Didáctica para su enseñanza-aprendizaje*. Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de Jujuy. San Salvador, Argentina.

Quezada, M. (1986). *Cálculo de primitivas en el bachillerato: su correlación con los algoritmos algebraicos y de cálculo diferencial*. Tesis de maestría. México: Cinvestav.

Robert, A. & Speer, N. (2001). *Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary analysis.* In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 283–299). Holland: Kluwer Academic.

Ruiz G., Seoane, A. y Di Blasi Regner, M. (2008). *Uso de recursos informáticos para Potenciar las Diferentes Representaciones del Concepto Teorema Fundamental del Cálculo***.** Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco. Santa Rosa, La Pampa, Argentina, agosto de 2008.

Steen, l. a. (2003). analysis 2000: challenges and opportunities. in d. coray, f. furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson & G. Schubring (Eds.), *One hundred years of I'enseignement mathématique: moments of mathematics education in the twentieth century. Monograph No. 39* (pp. 191–210). Genova, Italia: L'Enseignement Mathématique.

Thompson, PW, y Silverman, J. (2008). *The concept of accumulation in calculus*. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43-52). Washington, DC: Mathematical Association of America DC.

Thomas Jr. George B (2006). *Cálculo de una variable*. Undécima edición. Pearson. Educación, p. 328.

Turegano, P. (1994). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal*. Tesis doctoral en microfichas. Universidad de Valencia.

Waner Stefan-Costenoble Steven R. (2002). *Cálculo aplicado*. 2a. edición. Editorial Thomson Learning, p. 346.

ANEXOS

ANEXO 1. PROGRAMA DE ESTUDIOS DEL CURSO DE MATEMÁTICAS II (CÁLCULO INTEGRAL).

1.- DATOS DE LA ASIGNATURA

Nombre de la asignatura: **Matemáticas II (Cálculo Integral)**

Carrera: **Todas las Ingenierías**

Clave de la asignatura: **ACM – 0404 3-2-8**

2.- HISTORIA DEL PROGRAMA

Lugar y fecha de elaboración o revisión	**Participantes**	**Observaciones (cambios y justificación)**
Dirección General de Institutos Tecnológicos. Cd. de México de 7 y 8 agosto 2003. Dirección General de Institutos Tecnológicos. Cd. de México del 24 al 25 de noviembre de 2003. Cd. de México del 21 al 23 de Enero de 2004.	Representante de los Institutos Tecnológicos de Cd. Juárez, Toluca, Hermosillo, Culiacán, Tuxtla Gutiérrez y Chihuahua II. Representante de los Institutos Tecnológicos de Cd. Juárez, Toluca, Hermosillo, Culiacán, Tuxtla Gutiérrez y Chihuahua II. Representante de los Institutos Tecnológicos de Cd. Juárez, Toluca, Hermosillo, Culiacán, Tuxtla Gutiérrez y Mexicali.	Propuesta de contenidos temáticos comunes de matemáticas para las ingenierías. Análisis y mejora de los programas de matemáticas para ingeniería, tomando como base las Reuniones Nacionales de Evaluación Curricular de las diferentes carreras. Definición de las estrategias Didácticas.

3.- UBICACIÓN DE LA ASIGNATURA

a). Relación con otras asignaturas del plan de estudio

ANTERIORES		**POSTERIORES**	
ASIGNATURAS	**TEMAS**	**ASIGNATURAS**	**TEMAS**
Matemáticas I (Cálculo Diferencial)	Funciones Límites de Funciones Funciones Derivadas	Matemáticas III (Cálculo Vectorial) Matemáticas V (Ecuaciones Diferenciales)	Integrales Múltiples Solución de ecuaciones diferenciales Definición de Transformada de Laplace. Series de Fourier.

b). Aportación de la asignatura al perfil del egresado

Desarrolla un pensamiento lógico matemático formativo que le permite analizar fenómenos reales, sumas infinitas de diferenciales y modelarlos.

Desarrolla su habilidad para la resolución de problemas.

4.- OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DEL CURSO

El estudiante dominará el concepto de diferencial e integral y observará la relación que existe entre el cálculo diferencial e integral.

Aplicará la integral como una herramienta para la solución de problemas prácticos del área de ingeniería en que se imparte esta materia

5.- TEMARIO

Unidad	**Temas**	**Subtemas**
1	Diferenciales	1.1 Definición de diferencial. 1.2 Incrementos y diferenciales, su interpretación geométrica. 1.3 Teoremas típicos de

		diferenciales 1.4 Cálculo de diferenciales. 1.5 Cálculo de aproximaciones usando la diferencial.
2	Integrales Indefinidas y Métodos de Integración.	2.1 Definición de Función Primitiva 2.2 Definición de Integral Indefinida 2.3 Propiedades de la Integral Indefinida 2.4 Cálculo de Integrales Indefinidas. 2.4.1 Directas. 2.4.2 Por cambio de variable. 2.4.3 Por Partes 2.4.4 Trigonométricas 2.4.5 Por sustitución trigonométrica 2.4.6 Por fracciones parciales.
3	Integral definida	3.1 Definición de integral definida. 3.2 Propiedades de la integral definida. 3.3 Teorema de existencia para integrales definidas. 3.4 Teorema fundamental del Cálculo 3.5 Cálculo de integrales definidas. 3.6 Teorema del valor medio para integrales.
4	Aplicaciones de la integral	4.1 Longitud de curvas.

		4.2 Cálculo de áreas 4.3 Áreas entren curvas 4.4 Cálculo de volúmenes. 4.5 Volúmenes de sólidos de revolución 4.6 Cálculo de volúmenes por el método de los discos 4.7 Cálculo de momentos, centros de masa y trabajo.
5	Integrales Impropias	5.1 Definición de integral impropia. 5.2 Integral impropia de 1ra clase 5.3 Integral impropia de 2da clase.

6.- APRENDIZAJES REQUERIDOS

- Cálculo diferencial.

7.- SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

- Investigar el origen histórico, el desarrollo y definiciones planteadas en los conceptos involucrados en el tema.
- Analizar y discutir, sobre la aplicación de las definiciones del tema en problemas reales relacionados con la ingeniería en que se imparta esta materia.
- Propiciar el uso de Software de matemáticas (Derive, Mathcad, Mathematica, Maple, Matlab) o la calculadora graficadora como herramientas que faciliten la comprensión de los conceptos, la resolución de problemas e interpretación de los resultados.
- Interrelacionar a las academias correspondientes, a través de reuniones en las que se discutan las necesidades de aprendizaje de los estudiantes, establecer la profundidad con que se cubrirán cada uno de los temas de esta materia, así como determinar problemas de aplicación.
- En cada unidad iniciar con un proceso de investigación de los temas a tratar.

- Promover grupos de discusión y análisis sobre los conceptos previamente investigados.
- Al término de la discusión se formalicen y establezcan definiciones necesarias y suficientes para el desarrollo de esta unidad.
- Proporcionar al estudiante una lista de problemas del tema y generar prácticas de laboratorio para confrontar los resultados obtenidos.
- Resolver en algunos casos problemas con el uso de softwares.

8.- SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN

- Diagnóstica
- Temática
- Ejercicios planteados en clase.
- Evidencias de aprendizaje (Análisis y discusión grupal, elaboración de prototipos, modelos, actividades de investigación, reportes escritos, solución de ejercicios extraclase).
- Problemas resueltos con apoyo de software.

9.- UNIDADES DE APRENDIZAJE

UNIDAD 1.- Diferenciales

Objetivo Educacional	Actividades de Aprendizaje	Fuentes de Información
El estudiante adquirirá los conocimientos básicos de la diferencial de una función y los aplicará en la solución de problemas.	1.1 Investigar el concepto de diferencial de una función y relacionarlo con la derivada. 1.2 Establecer la interpretación geométrica de la diferencial 1.3 Conocer y aplicar los teoremas típicos de diferenciación	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8,9,10,11,12, 13, 14,15,16, 17, 18, 19 y 20

UNIDAD 2.- Integrales indefinidas y métodos de integración

Objetivo Educacional	Actividades de Aprendizaje	Fuentes de Información
Comprenderá el concepto de función primitiva o antiderivada a partir del cual desarrollará habilidades para el cálculo de	2.1 Investigar la definición de función primitiva y comprender el concepto de integral indefinida.. 2.2 Analizar las propiedades de la integral indefinida.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8,9,10,11,12, 13, 14,15,16, 17, 18, 19 y 20.

integrales indefinidas	2.3 Aplicar las propiedades anteriores y calcular integrales indefinidas. 2.4 Analizar las técnicas de integración: directa, cambio de variable, por partes, integrales trigonométricas, por sustitución trigonométrica y por fracciones parciales. 2.5 Analizar cuándo se pueden aplicar las diferentes técnicas de integración para resolver problemas.	

UNIDAD 3.- Integral definida

Objetivo Educacional	**Actividades de Aprendizaje**	**Fuentes de Información**
Conceptualizará la integral definida a través de sumas infinitas a partir de lo cual se establecerá el teorema fundamental del cálculo.	3.1 Interpretar las Sumas de Riemann 3.2 Establecer el concepto de integral definida. 3.3 Establecer e ilustrar geométricamente el Teorema Fundamental del Cálculo. 3.4 Analizar y aplicar las propiedades de la integral definida. 3.5 Aplicar el Teorema del Valor Medio.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8,9,10,11,12, 13, 14,15,16, 17, 18, 19 y 20

UNIDAD 4.- Aplicaciones de la integral definida

Objetivo Educacional	**Actividades de Aprendizaje**	**Fuentes de Información**
Aplicará la integral definida en la solución de problemas prácticos.	4.1 Investigar diferentes aplicaciones de la integral definida. 4.2 Determinar el área comprendida entre dos curvas. 4.3 Analizar y calcular volúmenes de sólidos de	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8,9,10,11,12, 13, 14,15,16, 17, 18, 19 y 20.

	revolución. 4.4 Analizar, definir y resolver problemas que involucren el trabajo realizado por una fuerza. 4.5 Determinar: momentos, centros de masa y centroides.	

UNIDAD 5.- Integrales impropias

Objetivo Educacional	Actividades de Aprendizaje	Fuentes de Información
Adquirirá los conocimientos sobre la integral impropia	5.1 Analizar el concepto de integral impropia. 5.2 Evaluar integrales impropias de diferentes tipos.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8,9,10,11,12, 13, 14,15,16, 17, 18, 19 y 20.

10. FUENTES DE INFORMACIÓN

1. James – Stewart. Cálculo de una variable. Edit. Thomson Editores.
2. Swokowski Earl W. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica.
3. Roland E. Hostetler Robert P. Cálculo y Geometría Analítica. Edit. McGraw-Hill.
4. Zill Dennis G. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica.
5. Edwards Jr. C. H. y Penney David E. Cálculo y Geometría Analítica. Edit. Prentice-Hall.
6. Fraleigh John B. Cálculo con Geometría Analítica. Edit. Addison- Wesley.
7. Anton Howard. Cálculo con Geometría Analítica. Edit. Wiley.
8. The Calculus problem solver. Edit. R.E.A.
9. Leithold Louis. El Cálculo. Edit. OXFORD. University Press.
10. Swokowski Earl W. Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica. Grupo editorial Iberoamérica.
11. Granville William A. Cálculo Diferencial e Integral. Edit. Noriega – LIMUSA.
12. Thomas Jr- George / Finney Ross. CÁLCULO una variable. Edit, Pearson Education.
13. Larson – Hostetler. Cálculo con Geometría. Edit. McGraw-Hill.
14. Purcell, Edwing J. y Dale Varberg. Cálculo con Geometría Analítica.Prentice Hall
15. Derive (Software).
16. Mathematica (Software).

17. MathCad (Software).
18. Maple (Software).
19. Historia de las Matemáticas. C. Boyer Edit. Alianza.
20. Historia de las Matemáticas. H. Bell. Edit. Fondo de Cultura Económica.

11. PRÁCTICAS

Unidad Práctica

- Graficación y resolución de problemas utilizando software matemático.
- Análisis y discusión en el aula de la aplicación de las herramientas matemáticas en la solución de problemas de .ingeniería

ANEXO 2. HOJAS DE TRABAJO UTILIZADAS EN LA PUESTA EN ESCENA

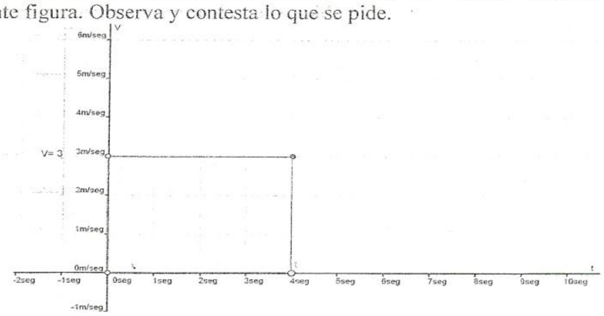
Se incluyen las hojas de trabajo que se aplicaron en el pilotaje realizado a un grupo de siete alumnos que estaban llevando el curso de matemáticas II (Cálculo Integral). Hemos tomado como muestra las actividades contestadas por dos alumnos de dicho grupo de estudiantes.

Marco Antonio
de Acha Elizalde

Actividad didáctica.

ENCONTRAR LA DISTANCIA RECORRIDA DURANTE UN INTERVALO DE TIEMPO, DADA SU VELOCIDAD CUANDO ÉSTA ES CONSTANTE:

Un automóvil se mueve con una velocidad de $3\frac{m}{s}$ en una carretera recta como se indica en la siguiente figura. Observa y contesta lo que se pide.



1.1 ¿Cuál es la velocidad a los 2 segundos? ¿y a los 3 segundos?

$V= 3\,m/s$ $\quad V= 3\,m/s$ Porque "V" es constante

1.2 ¿Qué distancia recorre el automóvil en los primeros 4 segundos? ¿Por qué?

12mts porque en cada segundo, avanza 3 mts.

1.3 ¿Está representada gráficamente la distancia recorrida? ¿Cómo?

Sí, como area, porque si multiplicamos $\frac{m}{s}$ (eje y) y s (eje x) el resultado queda en metros $\frac{m}{s}\cdot s = m$

1.4 Abre el siguiente hipervínculo hoja dina. Dgg (*Escribir el archivo de Geogebra en la línea anterior para que el alumno lo abra*), y comprueba lo que has contestado colocando el cursor del punto azul t en t=4 segundos. ¿Qué concluyes respecto a tus respuestas?

Que si estan correctas

1.5 Si la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo y como dice en el problema es igual a 3 m/s, entonces ¿qué función se tiene que derivar para obtener este resultado ?

$f(x) = 3x+C$, porque la integral de 3 es $\int 3dt = 3x+C$

1.6 Con la expresión que obtuviste en el inciso anterior vuelve a calcular la distancia que recorre el objeto durante los primeros 4 segundos. ¿Es posible representar en la gráfica este procedimiento? ¿cómo?

$$\int_0^4 3dt = 3x\Big|_0^4 = [3(4)] - [3(0)] = 12$$

Sí se puede representar, utilizando el eje x para el tiempo y al eje y para la velocidad, de este modo quedaría como el area bajo la recta y=3 evaluada de ∅ a 4.

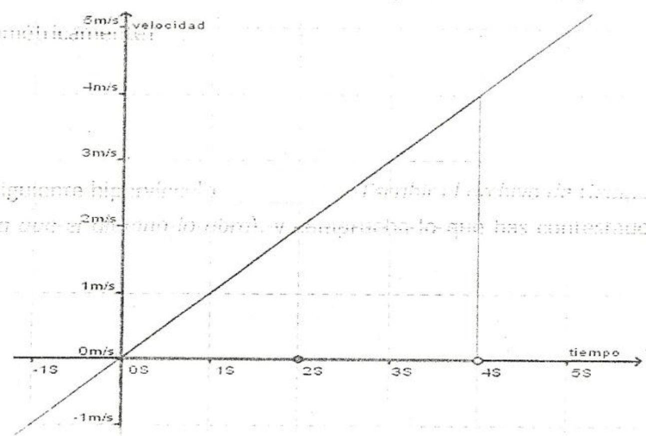
La respuesta a la pregunta
1.2 lo podemos resolver
contando los cuadros que
se encuentran el en Interior
del área, que mide cada uno
una unidad cuadrada

Marco Antonio
de Acho Elizalde

Actividad didáctica.

ENCONTRAR LA DISTANCIA RECORRIDA DURANTE UN INTERVALO DE TIEMPO, DADA SU RAZÓN DE CAMBIO EXPRESADA COMO LA FUNCIÓN IDENTIDAD

Un automóvil se mueve con una velocidad dada por la función v (t) = t sobre una carretera recta durante un viaje de 4 segundos. ¿Cuál es la distancia total recorrida?



1.1 ¿Cuál es la velocidad a los 1 segundos? ¿y a los 3 segundos?

1 m/s 3 m/s

1.2 ¿Qué distancia recorre el automóvil en los primeros 4 segundos? ¿Por qué?

8 mts porque el area de la grafica es la distancia y se obtiene como $\frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$

1.3 ¿Está representada gráficamente la distancia recorrida? ¿Cómo?

sí, como el area bajo la diagonal

1.4 El área debajo de dicha función, gráfica comprendida entre ella, el eje 't' y la recta t = 4, es igual al área del rectángulo que tiene la misma base que el triángulo y la mitad de su altura. Esto resulta fácil de probar geométricamente. Sin embargo, en este caso la intención será probar aritméticamente que la altura promedio (que se obtiene sumando las alturas y dividiendo entre el número de ellas) es igual a la mitad de la altura del triángulo (en este caso particular, la altura promedio deberá ser igual a dos, ya que la altura del triángulo es igual a cuatro). Para llevar a cabo esta prueba contesta las siguientes cuestiones:

1.4.1 Si dividimos el intervalo [0,4] en cuatro subintervalos iguales, ¿cuál es la longitud en cada subintervalos?

1s

1.4.2 ¿Cuál es la máxima altura en cada uno de los cuatro subintervalos? ¿Y cuál es la mínima? Al reverso de la hoja

1.4.3 ¿Cuál es el promedio de las alturas máximas en cada uno de los cuatro subintervalos?

A. Max $5/2$ A. min $3/2$

1.4.4 ¿Y el promedio de las mínimas?

1.4.5 ¿Cómo es el promedio de la totalidad de alturas con respecto al promedio de las alturas máximas calculadas en el inciso 1.4.3? ¿Con respecto al promedio de las alturas mínimas calculadas en 1.4.4?

es menor

es mayor

$\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2}=2$

1.4.6 Si ahora dividimos el intervalo [0,4] en ocho subintervalos iguales, y repetimos las preguntas formuladas en los incisos (b), (c), (d), (e) para dicho intervalo, ¿cuáles son las respuestas?

A Max $9/4$ A min $7/4$ $\left(9/4+7/4\right)\frac{1}{2}=2$

1.4.7 ¿Cómo resultó ser el promedio de las alturas máximas calculado en 8 subintervalos con respecto al promedio calculado en 4 subintervalos? ¿Y el de las alturas mínimas?

A max $9/4$ A min $7/4$ $\left(9/4+7/4\right)\frac{1}{2}=2$

1.4.8 Y si ahora cada uno de los 8 subintervalos lo dividimos en 2 subintervalos iguales, ¿qué pasará con el promedio de las alturas máximas? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas?

A max $67/32$ A min $15/8$ $\left(67/32+15/8\right)\frac{1}{2}=\frac{127}{64}$

1.4.9 ¿Qué sucede con el promedio de las alturas máximas el cada subintervalos a medida que aumenta el número de ellos? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas? Se van acercando una a la otra

1.4.10 De lo hasta aquí dicho pueden establecerse algunas cuestiones:

1.4.10.1 La altura promedio de las alturas máximas (y mínimas) es una función de n, (donde n es el número de intervalos).

1.4.10.2 La altura promedio de las alturas mínimas es una función creciente siempre menor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

1.4.10.3 La altura promedio de las alturas máximas es una función decreciente siempre mayor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

1, 4. 2

Intervalo	Alturas menores	Alturas mayores
∅ - 1	∅	1
1 - 2	1	2
2 - 3	2	3
3 - 4	3	4

1, 4, 6

Inciso a

Intervalo	Alturas menores	Alturas mayores
∅ - 0.5	0	0.5
0.5 - 1	0.5	1
1 - 1.5	1	1.5
1.5 - 2	1.5	2
2 - 2.5	2	2.5
2.5 - 3	2.5	3
3 - 3.5	3	3.5
3.5 - 4	3.5	4

Con base a estas conclusiones, ¿cómo puede definirse la altura promedio de la totalidad de las alturas? Como el promedio de la suma de las alturas mayores y menores

1.4.10 Determina las funciones 'altura promedio' (tanto de las alturas máximas como de las mínimas) como una función de n.

1.4.11 A partir de la definición establecida para "altura promedio de la totalidad de las Alturas", calcula su valor en este caso. ¿Coincide con la que habías calculado geométricamente? Si

1.5 Abre el siguiente hipervínculo ____________(*Escribir el archivo de Geogebra en la línea anterior para que el alumno lo abra*), y comprueba lo que has contestado colocando el cursor del punto azul en t=4 segundos. ¿Qué concluyes respecto a tus respuestas?

1.6 Si la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo y como dice en el problema es igual a 3 m/s, entonces ¿qué función se tiene que derivar para obtener ese resultado 3? Se tiene que derivar $\frac{1}{2}t^2$

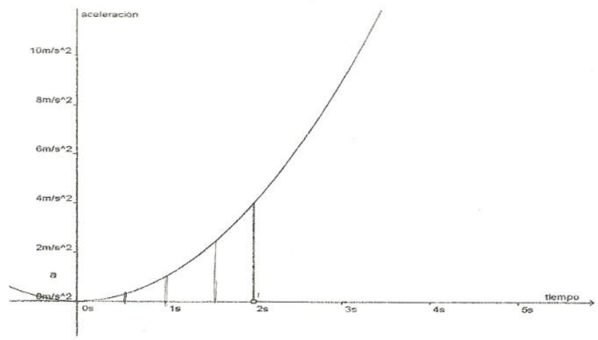
1.7 Con la expresión que obtuviste en el inciso anterior vuelve a calcular la distancia que recorre el objeto durante los primeros 4 segundos. ¿Es posible representar en la gráfica este procedimiento? ¿Cómo?

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2$$
$$f(4) = \frac{1}{2}(4)^2$$
$$f(4) = \frac{1}{2}(16)$$
$$\underline{f(4) = 8}$$

Marco Antonio
de Acho Elizalde

ENCONTRAR LA VELOCIDAD DURANTE UN INTERVALO DE TIEMPO, DADA SU ACELERACIÓN CUANDO ESTA ES UNA RAZÓN DE CAMBIO COMO FUNCIÓN CUADRÁTICA

Un automóvil se desplaza con una aceleración dada por la función $a(t) = t^2$. sobre una carretera recta durante un viaje de 4 segundos como se indica en la siguiente figura. Observa y contesta lo que se pide.



1.1 ¿Cuál es la aceleración a los 2 segundos? ¿y a los 3 segundos? a los dos segs. - $4\ m/s^2$ y a los 3s, $9\ m/s^2$

1.2 ¿Con qué velocidad se desplaza el automóvil en los primeros 4 segundos? ¿Por qué?

$64/3 = 21.3\ m/s$

1.3 ¿Está representada gráficamente la velocidad con que se está moviendo el objeto? ¿Cómo? Sí, como parabola

1.4 Ahora Dada la curva $a(t) = t^2$ en el intervalo [0,2], calcula la altura promedio de las alturas de los puntos de las curvas en los siguientes casos:

1.4.1 Tomando las alturas máximas de cuatro subintervalos iguales.
3.76

1.4.2 Tomando las alturas mínimas de cuatro subintervalos iguales.
1.77

1.4.3 Tomando las alturas máximas de ocho subintervalos iguales.
3.2

1.4.4 Tomando las alturas mínimas de ocho subintervalos iguales.
2.19

1.19
0.808

1.4.5 Tomando las alturas máximas de n subintervalos iguales.
n=10 3.08

1.4.6 Tomando las alturas mínimas de n subintervalos iguales.
n=10 2.28

1.4.7 Tomando la totalidad de las alturas.
0.99916

1.5 Abre el siguiente vínculo________y comprueba lo que has contestado. ¿Qué concluyes respecto a tus respuestas?

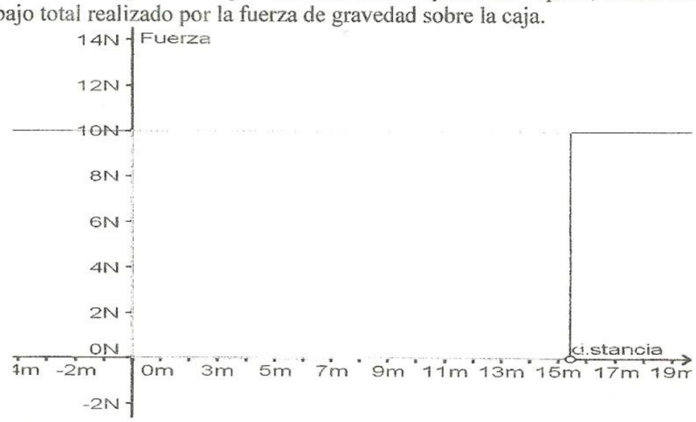
1.6 Determinar el cambio de la velocidad entre los cero y los 2 segundos.

Con una integral definida de Øs a 2s $= \frac{8}{3}$

Marco Antonio
de Anda Elizalde

CÁLCULO DEL TRABAJO TOTAL REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Una caja que tiene un peso "F" de 10N, tiene un movimiento en caída libre desde una altura "Y" de 16m. Suponiendo que inicia su caída a partir del reposo, deseamos determinar el trabajo total realizado por la fuerza de gravedad sobre la caja.



1.1 ¿Cuál es la fuerza de gravedad cuando a partir de su posición inicial ha descendido 2 metros? ¿y cuando ha descendido 3 metros?

$9.8\ m/s^2$ $9.8\ m/s^2$ Porque la gravedad es constante.

1.2 ¿Qué trabajo realiza la fuerza cuando la caja desciende en los primeros 4 metros? ¿Por qué?

40 Joules porque trabajo (W) = Fuerza · Distancia.

W = F·d = 10Nw · 4m = 40 Joules

1.3 ¿Está representado gráficamente el trabajo realizado? ¿Cómo?

Sí como área del rectangulo

1.4 Abre el siguiente hipervínculo *Escribir el archivo de Geogebra en la línea anterior para que el alumno lo abra*), y comprueba lo que has contestado colocando el cursor del punto azul . ¿Qué concluyes respecto a tus respuestas?

Fueron las mismas respuestas

1.5 Si la fuerza es la derivada del trabajo T respecto a la distancia recorrida x, y como dice en el problema es igual a **10 N**, entonces ¿qué función se tiene que derivar para obtener este resultado? f(m) = 10Nwm

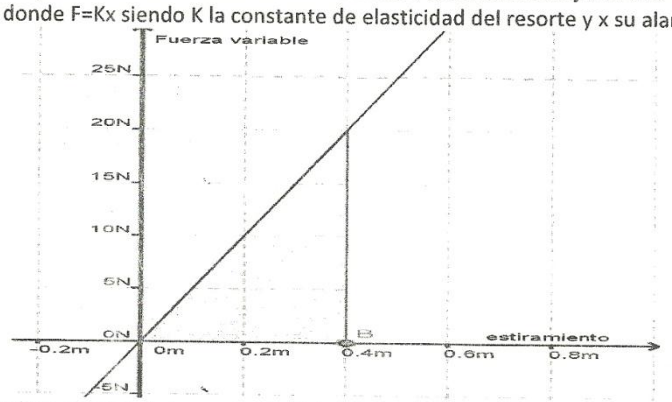
1.6 ¿Cuánto cambia el trabajo realizado cuando el cuerpo desciende de 3 a 8 metros?

Cambio es 50 Joulos

Marco Antonio
de Acha Elizalde

CÁLCULO DEL TRABAJO TOTAL REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

Calcular el trabajo que se necesita hacer para estirar un resorte 0.4 metros hacia la derecha a partir de su posición de equilibrio (representado por el origen en la gráfica), sabiendo que cuando el resorte se estira 0.1mts a la derecha se ejerce una fuerza F de 5N. En donde F=Kx siendo K la constante de elasticidad del resorte y x su alargamiento.



1.1 ¿Cuál es el valor de la constante K del resorte? 50 kg

1.2 ¿Cuál es la fuerza que estira al resorte una longitud de 0.2m? ¿y para 0.4m?
$F = kx \rightarrow F = 50(0.2) = 10kg$ $F = kx \rightarrow F = (50N)(0.4) = 20kg$

1.3 ¿Qué trabajo se necesita hacer para estirar un resorte 0.4 metros hacia la derecha a partir de su posición de equilibrio? ¿Por qué?
4 Joules, porque el trabajo se representa como el área, en este caso un triangulo y para obtener su area hacemos $\frac{b \times h}{2} = \frac{(0.4)(20N)}{2} = 4$ Joules

1.4 ¿Está representado gráficamente dicho trabajo? ¿Cómo?

El área debajo de la función f(x) = F = Kx, gráfica comprendida entre ella, el eje 'estiramiento x' y la recta x = 0.4m, es igual al área del rectángulo que tiene la misma base que el triángulo y la mitad de su altura. Esto resulta fácil de probar geométricamente. Sin embargo, en este caso la intención será probar aritméticamente que la altura promedio (que se obtiene sumando las alturas y dividiendo entre el número de ellas) es igual a la mitad de la altura del triángulo (en este caso particular, la altura promedio deberá ser igual a diez, ya que la altura del triángulo es igual a veinte). Para llevar a cabo esta prueba contesta las siguientes cuestiones utilizando el siguiente hipervínculo __________(*Escribir el archivo de Geogebra en la línea anterior para que el alumno lo abra*), colocando el cursor del punto azul en x=0.4 metros.

1.4.1 Si dividimos el intervalo [0,4] en cuatro subintervalos iguales, ¿cuál es la longitud en cada subintervalos? 0.1 m

1.4.2 ¿Cuál es la máxima altura en cada uno de los cuatro subintervalos? ¿Y cuál es la mínima? A. max. = 4 A. min = Ø

1.4.3 ¿Cuál es el promedio de las alturas máximas en cada uno de los cuatro subintervalos? 12.5

1.4.4 ¿Y el promedio de las mínimas?
7.5

Marco Antonio
de Acho Elizalde

1.4.5 ¿Cómo es el promedio de la totalidad de alturas con respecto al promedio de las alturas máximas calculadas en el inciso (1.4.3)? ¿Con respecto al promedio de las alturas mínimas calculadas en (1.4.4)? menor mayor

1.4.6 Si ahora dividimos el intervalo [0,4] en ocho subintervalos iguales, y repetimos las preguntas formuladas en los incisos (1.4.2), (1.4.3), (1.4.4), (1.4.5) para dicho intervalo, ¿cuáles son las respuestas? A max. = 11.25 A min. =

1.4.7 ¿Cómo resultó ser el promedio de las alturas máximas calculado en 8 subintervalos con respecto al promedio calculado en 4 subintervalos? ¿Y el de las alturas mínimas?

1.4.8 Y si ahora cada uno de los 8 subintervalos lo dividimos en 2 subintervalos iguales, ¿qué pasará con el promedio de las alturas máximas? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas? el promedio se acerca mas al 10

1.4.9 ¿Qué sucede con el promedio de las alturas máximas el cada subintervalos a medida que aumenta el número de ellos? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas? en ambos casos el promedio de las alturas se acerca mas al valor real

1.4.10 De lo hasta aquí dicho pueden establecerse algunas cuestiones:

1.4.10.1 La altura promedio de las alturas máximas (y mínimas) es una función de n, (donde n es el número de intervalos)

1.4.10.2 La altura promedio de las alturas mínimas es una función creciente siempre menor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

1.4.10.3 La altura promedio de las alturas máximas es una función decreciente siempre mayor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

Con base a estas conclusiones, ¿cómo puede definirse la altura promedio de la totalidad de las alturas?

1.4.11 Determina las funciones 'altura promedio' (tanto de las alturas máximas como de las mínimas) como una función de n.

1.4.12 A partir de la definición establecida para 'altura promedio de la totalidad de las alturas', calcula su valor en este caso. ¿Coincide con la que habías calculado geométricamente?

1.5 Si la fuerza es la derivada del trabajo respecto a la distancia recorrida y como dice en el problema es igual a Kx Newtons, entonces ¿qué función se tiene que derivar para obtener este resultado? $f(x) = \frac{1}{2} k x^2$

1.6 Con la expresión que obtuviste en el inciso anterior vuelve a calcular el trabajo que realiza la fuerza sobre el objeto cuando este se estira 0.4m. ¿Es posible representar en la gráfica este procedimiento? ¿Cómo?

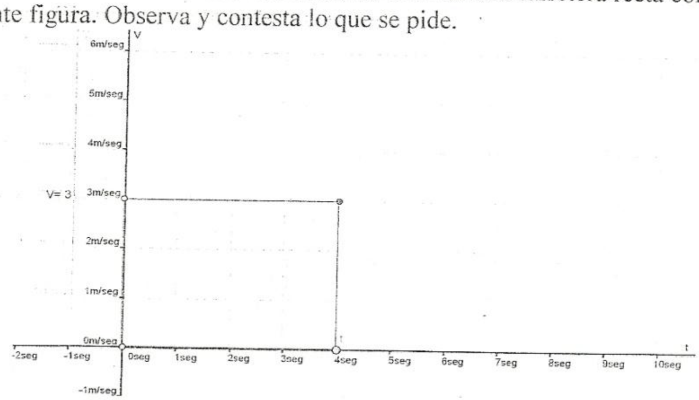
Trabajo $= \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2}(50)(0.4)^2 = 4$

Gilberto Vzla. Rivera

Actividad didáctica.

ENCONTRAR LA DISTANCIA RECORRIDA DURANTE UN INTERVALO DE TIEMPO, DADA SU VELOCIDAD CUANDO ÉSTA ES CONSTANTE:

Un automóvil se mueve con una velocidad de $3\frac{m}{s}$ en una carretera recta como se indica en la siguiente figura. Observa y contesta lo que se pide.



1.1 ¿Cuál es la velocidad a los 2 segundos? ¿y a los 3 segundos? $3\ m/s$ Velocidad Constante

1.2 ¿Qué distancia recorre el automóvil en los primeros 4 segundos? ¿Por qué? $12\ m/s$.
Por cada segundo recorre 3 mtr.

1.3 ¿Está representada gráficamente la distancia recorrida? ¿Cómo?
Si como el area de un rectangulo porque calculamos la distancia como base por la altura.

1.4 Abre el siguiente hipervínculo hoja dina..(*Escribir el archivo de Geogebra en la línea anterior para que el alumno lo abra*), y comprueba lo que has contestado colocando el cursor del punto azul t en t=4 segundos. ¿Qué concluyes respecto a tus respuestas?

1.5 Si la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo y como dice en el problema es igual a 3 m/s, entonces ¿qué función se tiene que derivar para obtener este resultado ?

1.6 Con la expresión que obtuviste en el inciso anterior vuelve a calcular la distancia que recorre el objeto durante los primeros 4 segundos. ¿Es posible representar en la gráfica este procedimiento? ¿cómo?

$$f(x) = (3x)\,t$$
$$= (3)(4)$$
$$= 12\ \text{metros}/\text{seg}^2$$

$$f(x) = 3x$$
$$3 + C$$

¿como?

1.4 = Concluimos que la distancia es como el area de un rectangulo por que se calcula como b x h por que la altura es constante y la distancia cambio con respecto al tiempo

1.5 La deriva de $f(x) = 3x = 3$ $d = V \cdot t$

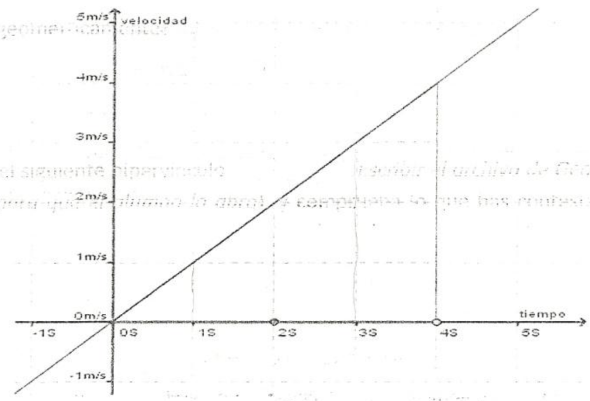
$$F(d) = (3x)(t)$$

Gilberto Ventura Valenzuela Rivera.

Actividad didáctica.

ENCONTRAR LA DISTANCIA RECORRIDA DURANTE UN INTERVALO DE TIEMPO, DADA SU RAZÓN DE CAMBIO EXPRESADA COMO LA FUNCIÓN IDENTIDAD

Un automóvil se mueve con una velocidad dada por la función v (t) = t sobre una carretera recta durante un viaje de 4 segundos. ¿Cuál es la distancia total recorrida?



1.1 ¿Cuál es la velocidad a los 1 segundos? ¿y a los 3 segundos?

$1\ m/s$ y $3\ m/s$

1.2 ¿Qué distancia recorre el automóvil en los primeros 4 segundos? ¿Por qué?

Sacando el area de un triangulo $\frac{b \times h}{2}$ $\frac{4 \times 4}{2} = \frac{16}{2} = 8m$

1.3 ¿Está representada gráficamente la distancia recorrida? ¿Cómo?

Si en forma de una area triangular

1.4 El área debajo de dicha función, gráfica comprendida entre ella, el eje 't' y la recta t = 4, es igual al área del rectángulo que tiene la misma base que el triángulo y la mitad de su altura. Esto resulta fácil de probar geométricamente. Sin embargo, en este caso la intención será probar aritméticamente que la altura promedio (que se obtiene sumando las alturas y dividiendo entre el número de ellas) es igual a la mitad de la altura del triángulo (en este caso particular, la altura promedio deberá ser igual a dos, ya que la altura del triángulo es igual a cuatro). Para llevar a cabo esta prueba contesta las siguientes cuestiones:

1.4.1 Si dividimos el intervalo [0,4] en cuatro subintervalos iguales, ¿cuál es la longitud en cada subintervalos? Es (1segundo)

1.4.2 ¿Cuál es la máxima altura en cada uno de los cuatro subintervalos? ¿Y cuál es la mínima?

1.4.3 ¿Cuál es el promedio de las alturas máximas en cada uno de los cuatro subintervalos? 2.5 Promedio de Altura Maxima

1.4.4 ¿Y el promedio de las mínimas? 1.5 Promedio de Altura minima

1.4.5 ¿Cómo es el promedio de la totalidad de alturas con respecto al promedio de las alturas máximas calculadas en el inciso (c)? ¿Con respecto al promedio de las alturas mínimas calculadas en (d)? 2 Promedio de Altura Total

1.4.6 Si ahora dividimos el intervalo [0,4] en ocho subintervalos iguales, y repetimos las preguntas formuladas en los incisos (b), (c), (d), (e) para dicho intervalo, ¿cuáles son las respuestas? 2

1.4.7 ¿Cómo resultó ser el promedio de las alturas máximas calculado en 8 subintervalos con respecto al promedio calculado en 4 subintervalos? ¿Y el de las alturas mínimas? 1.75

1.4.8 Y si ahora cada uno de los 8 subintervalos lo dividimos en 2 subintervalos iguales, ¿qué pasará con el promedio de las alturas máximas? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas? 2.25

1.4.9 ¿Qué sucede con el promedio de las alturas máximas el cada subintervalos a medida que aumenta el número de ellos? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas? Se van acercando los valores una a la otro con mejor precisión

1.4.10 De lo hasta aquí dicho pueden establecerse algunas cuestiones:

1.4.10.1 La altura promedio de las alturas máximas (y mínimas) es una función de n, (donde n es el número de intervalos). Si

1.4.10.2 La altura promedio de las alturas mínimas es una función creciente siempre menor que la altura promedio de la totalidad de las alturas. Si

1.4.10.3 La altura promedio de las alturas máximas es una función decreciente siempre mayor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

Con base a estas conclusiones, ¿cómo puede definirse la altura promedio de la totalidad de las alturas? $\frac{\text{Altura Maxima} + \text{Altura Minima}}{2} = \text{Altura promedio total}$

1.4.10 Determina las funciones 'altura promedio' (tanto de las alturas máximas como de las mínimas) como una función de n.

1.4.11 A partir de la definición establecida para "altura promedio de la totalidad de las Alturas", calcula su valor en este caso. ¿Coincide con la que habías calculado geométricamente?

$$h_M = C - (b-a)^2 \left[\frac{1}{3}\right]$$

1.5 Abre el siguiente hipervínculo ____________(*Escribir el archivo de Geogebra en la línea anterior para que el alumno lo abra*), y comprueba lo que has contestado colocando el cursor del punto azul en t=4 segundos. ¿Qué concluyes respecto a tus respuestas?

1.6 Si la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo y como dice en el problema es ~~igual~~ a 3 m/s, entonces ¿qué función se tiene que derivar para obtener ese resultado 3? $Vt = \frac{1}{2}T^2$

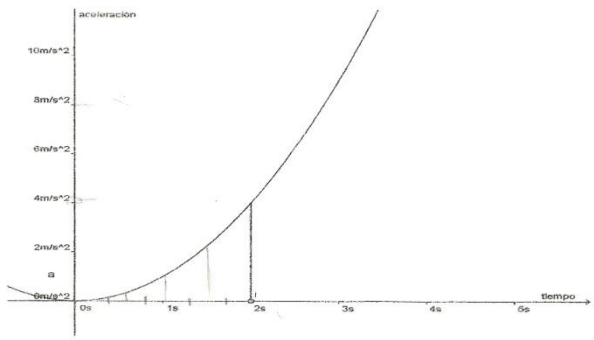
1.7 Con la expresión que obtuviste en el inciso anterior vuelve a calcular la distancia que recorre el objeto durante los primeros 4 segundos. ¿Es posible representar en la gráfica este procedimiento? ¿Cómo?

$$x(4) = \frac{1}{2}(4)^2 = 8$$

Gilberto Valenzuela Rivera

ENCONTRAR LA VELOCIDAD DURANTE UN INTERVALO DE TIEMPO, DADA SU ACELERACIÓN CUANDO ESTA ES UNA RAZÓN DE CAMBIO COMO FUNCIÓN CUADRÁTICA

Un automóvil se desplaza con una aceleración dada por la función $a(t) = t^2$. sobre una carretera recta durante un viaje de 4 segundos como se indica en la siguiente figura. Observa y contesta lo que se pide.



1.1 ¿Cuál es la aceleración a los 2 segundos? ¿y a los 3 segundos? 4 m/s y 9 m/s

1.2 ¿Con qué velocidad se desplaza el automóvil en los primeros 4 segundos? ¿Por qué?

16 m/s Por que cada segundo se eleva al cuadrado

1.3 ¿Está representada gráficamente la velocidad con que se está moviendo el objeto? ¿Cómo? En forma de parabola.

1.4 Ahora Dada la curva $a(t) = t^2$ en el intervalo [0,2], calcula la altura promedio de las alturas de los puntos de las curvas en los siguientes casos:

1.4.1 Tomando las alturas máximas de cuatro subintervalos iguales. 1.25

1.4.2 Tomando las alturas mínimas de cuatro subintervalos iguales. 0.75

1.4.3 Tomando las alturas máximas de ocho subintervalos iguales. 1.127

1.4.4 Tomando las alturas mínimas de ocho subintervalos iguales. .875

1.4.5 Tomando las alturas máximas de n subintervalos iguales. 1.2

n = 5

1.4.6 Tomando las alturas mínimas de n subintervalos iguales. 0.8

n = 5

1.4.7 Tomando la totalidad de las alturas. .99916

1.5 Abre el siguiente vínculo_________y comprueba lo que has contestado. ¿Qué concluyes respecto a tus respuestas?

1.6 Determinar el cambio de la velocidad entre los cero y los 2 segundos.

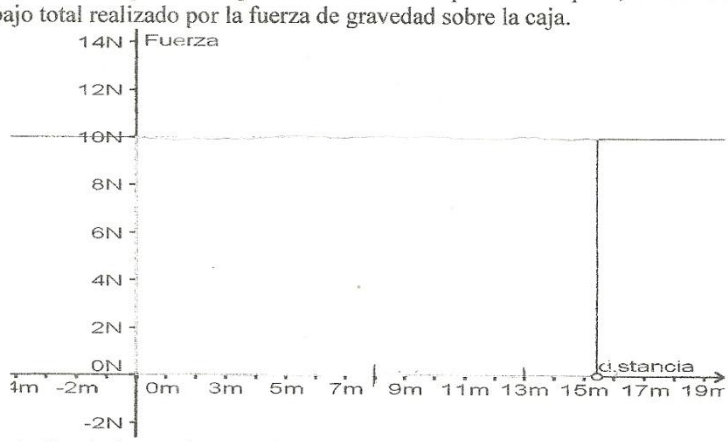
Area bajo la curva $\frac{1}{3} t^3 = \frac{8}{3}$

Gilberto Ventura Valenzuela Rivera

CÁLCULO DEL TRABAJO TOTAL REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

$P = mg$

Una caja que tiene un peso "F" de 10N, tiene un movimiento en caída libre desde una altura "Y" de 16m. Suponiendo que inicia su caída a partir del reposo, deseamos determinar el trabajo total realizado por la fuerza de gravedad sobre la caja.



1.1 ¿Cuál es la fuerza de gravedad cuando a partir de su posición inicial ha descendido 2 metros? ¿y cuando ha descendido 3 metros? 10N

1.2 ¿Qué trabajo realiza la fuerza cuando la caja desciende en los primeros 4 metros? ¿Por qué? 140 metros el trabajo realizado por cada metro es igual a 10metros $W = Fd$ $w = (10N)(12) = 40J$

1.3 ¿Está representado gráficamente el trabajo realizado? ¿Cómo?
Si como el area de un rectangulo.

1.4 Abre el siguiente hipervínculo *Escribir el archivo de Geogebra en la línea anterior para que el alumno lo abra*), y comprueba lo que has contestado colocando el cursor del punto azul . ¿Qué concluyes respecto a tus respuestas?

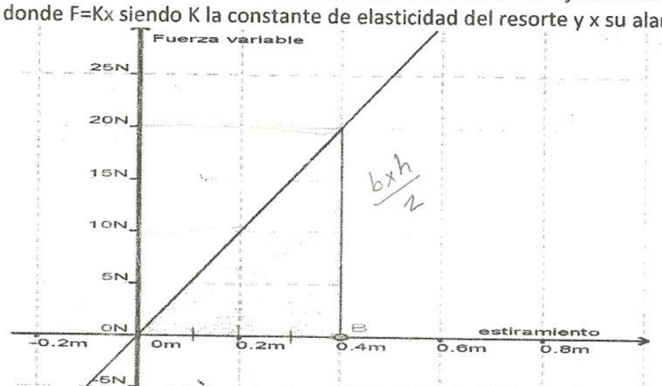
1.5 Si la fuerza es la derivada del trabajo T respecto a la distancia recorrida x, y como dice en el problema es igual a **10 N**, entonces ¿qué función se tiene que derivar para obtener este resultado? $f(m) = 10N$

1.6 ¿Cuánto cambia el trabajo realizado cuando el cuerpo desciende de 3 a 8 metros?
50 Joul de trabajo
3m 8m
130 - 80 = 50 Joul

Gilberto Ventura Valenzuela Rivera

CÁLCULO DEL TRABAJO TOTAL REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

Calcular el trabajo que se necesita hacer para estirar un resorte 0.4 metros hacia la derecha a partir de su posición de equilibrio (representado por el origen en la gráfica), sabiendo que cuando el resorte se estira 0.1mts a la derecha se ejerce una fuerza F de 5N. En donde F=Kx siendo K la constante de elasticidad del resorte y x su alargamiento.



$k = \frac{N}{m}$

$k = \frac{5}{.1} = 50\ N/m$

1.1 ¿Cuál es el valor de la constante K del resorte? 50 N/m

1.2 ¿Cuál es la fuerza que estira al resorte una longitud de 0.2m? ¿y para 0.4m? 50 N/m

1.3 ¿Qué trabajo se necesita hacer para estirar un resorte 0.4 metros hacia la derecha a partir de su posición de equilibrio? ¿Por qué? 4 J El trabajo esta representado como area de un triangulo $b \times h/2$

1.4 ¿Está representado gráficamente dicho trabajo? ¿Cómo?

El área debajo de la función f(x) = F = Kx, gráfica comprendida entre ella, el eje 'estiramiento x' y la recta x = 0.4m, es igual al área del rectángulo que tiene la misma base que el triángulo y la mitad de su altura. Esto resulta fácil de probar geométricamente. Sin embargo, en este caso la intención será probar aritméticamente que la altura promedio (que se obtiene sumando las alturas y dividiendo entre el número de ellas) es igual a la mitad de la altura del triángulo (en este caso particular, la altura promedio deberá ser igual a diez, ya que la altura del triángulo es igual a veinte). Para llevar a cabo esta prueba contesta las siguientes cuestiones utilizando el siguiente hipervínculo __________(*Escribir el archivo de Geogebra en la línea anterior para que el alumno lo abra*), colocando el cursor del punto azul en x=0.4 metros.

Calcular la Altura $F = (k)(.1)$

1.4.1 Si dividimos el intervalo [0,4] en cuatro subintervalos iguales, ¿cuál es la longitud en cada subintervalos? 0.1 metros

1.4.2 ¿Cuál es la máxima altura en cada uno de los cuatro subintervalos? ¿Y cuál es la mínima? 20 altura maxima y 0 Altura minima

1.4.3 ¿Cuál es el promedio de las alturas máximas en cada uno de los cuatro subintervalos? 12.5 N

1.4.4 ¿Y el promedio de las mínimas? 7.5 N

11.25

1.4.5 ¿Cómo es el promedio de la totalidad de alturas con respecto al promedio de las alturas máximas calculadas en el inciso (1.4.3)? ¿Con respecto al promedio de las alturas mínimas calculadas en (1.4.4)? 10 N

1.4.6 Si ahora dividimos el intervalo [0,4] en ocho subintervalos iguales, y repetimos las preguntas formuladas en los incisos (1.4.2), (1.4.3), (1.4.4), (1.4.5) para dicho intervalo, ¿cuáles son las respuestas?

1.4.7 ¿Cómo resultó ser el promedio de las alturas máximas calculado en 8 subintervalos con respecto al promedio calculado en 4 subintervalos? ¿Y el de las alturas mínimas? 11.25

1.4.8 Y si ahora cada uno de los 8 subintervalos lo dividimos en 2 subintervalos iguales, ¿qué pasará con el promedio de las alturas máximas? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas? Se van acercan al 10

1.4.9 ¿Qué sucede con el promedio de las alturas máximas el cada subintervalos a medida que aumenta el número de ellos? ¿Y con el promedio de las alturas mínimas? Las alturas se acercan al valor real

1.4.10 De lo hasta aquí dicho pueden establecerse algunas cuestiones:

1.4.10.1 La altura promedio de las alturas máximas (y mínimas) es una función de n, (donde n es el número de intervalos)

1.4.10.2 La altura promedio de las alturas mínimas es una función creciente siempre menor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

1.4.10.3 La altura promedio de las alturas máximas es una función decreciente siempre mayor que la altura promedio de la totalidad de las alturas.

Con base a estas conclusiones, ¿cómo puede definirse la altura promedio de la totalidad de las alturas? Como un limite de las alturas cuando n tiende a infito

1.4.11 Determina las funciones 'altura promedio' (tanto de las alturas máximas como de las mínimas) como una función de n.

1.4.12 A partir de la definición establecida para 'altura promedio de la totalidad de las alturas', calcula su valor en este caso. ¿Coincide con la que habías calculado geométricamente?

1.5 Si la fuerza es la derivada del trabajo respecto a la distancia recorrida y como dice en el problema es igual a Kx Newtons, entonces ¿qué función se tiene que derivar para obtener este resultado? $\frac{1}{2}k$ $w = (x)(kx)/2$ $A = \frac{b \times h}{2}$ $A = \frac{kx}{2}$

1.6 Con la expresión que obtuviste en el inciso anterior vuelve a calcular el trabajo que realiza la fuerza sobre el objeto cuando este se estira 0.4m. ¿Es posible representar en la gráfica este procedimiento? ¿Cómo? Si

$W = \frac{(x)(k)}{2}$