

Estudio numérico de órbitas en la métrica de Schwarzschild

Una tesis presentada a la Universidad de Sonora
para la obtención del Título de
Licenciado en Física

por

Alan Aganza Torres



Departamento de Física
Universidad de Sonora
Agosto de 2011

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

A la memoria de mi padre

y a la del Jimmy.

Agradecimientos

A Helio Carlos, Concepción, Criseida Cosett e Hiram, por siempre contar con su apoyo a lo largo de toda mi vida. Simplemente agradezco haber sido parte de esta familia.

A Calcáneo, por haber aceptado dirigir esta tesis. Desde el inicio de la licenciatura como coordinador de programa, después como profesor y también como un amigo siempre estuvo a mi lado para cualquier duda, problema o inquietud que tuviera. Por sugerirme este tema en particular, que será el inicio de todo lo que sigue.

A la maestra Angelina, por el apoyo y los consejos que a lo largo de estos últimos años recibí de su parte, por ser como una segunda madre para mí. También por permitirme usar su cubículo como lugar de trabajo, aquí fue donde me dejé caer la greña.

A María Elena, por haber sido la primera persona en la licenciatura que me mostró todo el universo que encierra la Física y que gracias a ello, seguiré en esto toda mi vida.

Al maestro Jáuregui, por ser un buen crítico de este trabajo, sus comentarios fueron de gran ayuda. Y claro, por las buenas clases que recibí de su parte.

Al profe Martín, por su ayuda y consejos que por más de cinco años me ha dado. Y por aceptarme como un hijo postizo en su familia.

A mis amigos, compañeros, colegas pero sobre todo hermanos: Neto, Galaviz, Amy y Gerardo. Sin ustedes probablemente no hubiera siquiera terminado la carrera, ni mucho menos escrito este trabajo. Gracias por estos cinco años que se nos fueron sin darnos cuenta, así como las horas que gastamos platicando de todo y nada.

Y a ti, por tomarte el tiempo de leer o al menos hojear lo que viene a continuación y perdona si mi español no es muy bueno.

Contenido

Lista de Figuras	III
Introducción	1
1 Elementos de Mecánica Clásica y Relatividad Especial	3
1.1. Mecánica Clásica	3
1.2. Relatividad Especial	6
1.2.1. Espaciotiempo	6
1.2.2. Vectores en Relatividad Especial	9
1.2.3. Tensores en Relatividad Especial	12
1.2.4. Tensor de energía-momento	14
2 Física en espaciotiempos curvos	17
2.1. La relación entre la gravedad y la curvatura	17
2.2. El tensor métrico de nuevo	20
2.3. Símbolos de Christoffel y la derivada covariante	21
2.4. Transporte paralelo	23
2.5. Geodésicas	24
2.6. Tensor de curvatura	25
2.6.1. Identidades de Bianchi	28
2.6.2. Tensor de Ricci	28
2.6.3. Tensor de Einstein	29
2.7. La transición de la curvatura a la Física	29
2.8. Aproximación de campo débil	31
2.9. Ecuaciones de Campo de Einstein	33

3	La métrica de Schwarzschild	37
3.1.	Solución de Schwarzschild	37
3.2.	Cantidades conservadas en la Métrica de Schwarzschild	44
3.3.	Geodésicas en la Métrica de Schwarzschild	46
3.4.	Potencial efectivo en la métrica de Schwarzschild	47
4	Estudio numérico de las órbitas	51
4.1.	Solución numérica a las ecuaciones de movimiento	51
4.2.	Órbita circular estable	53
4.3.	Órbitas precesantes	54
4.4.	Órbitas Abiertas	56
4.5.	Órbita circular inestable	57
4.6.	Órbita que cae al horizonte	58
	Conclusiones	60
	Apéndices	64
A	Cálculo de los símbolos de Christoffel no nulos	64
B	Código fuente del programa en Fortran 90	66
	Bibliografía	70

Lista de Figuras

1.1. Diagrama de espaciotiempo	7
1.2. Sección de un elemento cúbico de un fluido con z constante	15
2.1. Vagón cayendo sobre la superficie de la Tierra	18
2.2. Corrimiento al rojo gravitacional	19
2.3. Transporte paralelo	23
2.4. Ciclo alrededor de una espacio curvo	25
3.1. Potenciales efectivos	48
3.2. Potenciales efectivos con diferentes valores de energía	49
4.1. Órbita circular estable	54
4.2. Órbita circular precesante	55
4.3. Órbita elíptica precesante	56
4.4. Órbita abierta	57
4.5. Órbita circular inestable	58
4.6. Órbita que cae al horizonte	59

Introducción

En el presente trabajo resolveremos numéricamente las ecuaciones de movimiento de una partícula que se mueve en el espaciotiempo de Schwarzschild.

El movimiento de los cuerpos celestes siempre ha causado fascinación al hombre. Su descripción es uno de los resultados más importantes que tiene la Mecánica Clásica, pero se queda incompleta al tratar de describir el movimiento a velocidades cercanas a la de la luz y en las regiones más cercanas a los objetos masivos.

A principios del siglo XX nació la Relatividad Especial resolviendo el primero de estos problemas, al tomar como pilares la Relatividad de Galileo y que la velocidad de la luz es la misma para cualquier observador. Con esto nos dio una nueva concepción y entendimiento del espacio y el tiempo al unirlos en un solo ente, el espaciotiempo.

Tiempo después llegó la Relatividad General uniendo ahora a la Relatividad Especial y a la gravedad, para lograr una descripción más precisa de esta interacción. La consecuencia de esto fue que ahora la gravedad no es una fuerza, sino que se debe a la curvatura del espaciotiempo provocada por la presencia de masa en una región determinada. Con esto llegó la descripción relativista de como es el espaciotiempo en el exterior de un cuerpo como el Sol y nos ayudó a resolver problemas que habían quedado pendientes en la Mecánica Clásica como el avance en el perihelio de la órbita de Mercurio.

Presentamos el contenido de este trabajo de la siguiente manera:

En el capítulo uno presentamos un breve repaso de los conceptos de la Mecánica Clásica que tienen que ver con el movimiento de los objetos alrededor de objetos masivos, desde el punto de vista de la formulación lagrangiana. También hablaremos sobre conceptos de la Relatividad Especial, así como la descripción del contenido energético en un región del espaciotiempo.

En el capítulo dos, encontraremos la relación entre la curvatura del espaciotiempo y la gravedad. Primero estudiaremos conceptos sobre geometría de espacios curvos, después describiremos como es la Física en espaciotiempos curvos con ayuda de la Relatividad General.

En el capítulo tres, después de haber encontrado la relación entre la curvatura del espaciotiempo y el contenido material de una región, resolveremos las ecuaciones de Einstein para

encontrar la métrica que describe el espaciotiempo en el exterior de un objeto esférico que no rota ni tiene carga. También encontraremos las ecuaciones de movimiento para una partícula que se mueve en este espaciotiempo.

Finalmente en el capítulo cuatro resolveremos numéricamente las ecuaciones encontradas en el capítulo tres y presentaremos las soluciones para distintas condiciones iniciales.

Capítulo 1

Elementos de Mecánica Clásica y Relatividad Especial

Uno de los resultados más importantes de la Mecánica Clásica fue la descripción del movimiento de los cuerpos celestes que dio lugar a Ley de Gravitación Universal. Esta ley establece que la fuerza con la cual dos cuerpos se atraen es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos en la dirección del vector que los une

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{e}_r, \quad (1.1)$$

donde G es la constante gravitacional que mide la intensidad de la interacción, M y m las masas de los cuerpos, r la distancia entre ellos y \hat{e}_r el vector unitario en la dirección que los une. Para M y m fijas, esta fuerza solamente depende de la distancia entre las masas por lo que conviene utilizar coordenadas esféricas r , θ y ϕ .

En este capítulo hablaremos sobre la solución clásica al problema de dos cuerpos interactuando gravitacionalmente. Pero sabemos que la Mecánica Clásica es el límite a bajas velocidades de una teoría más general: La Relatividad Especial, por ello, antes de terminar el capítulo, revisaremos brevemente esta teoría que nos lleva a reconsiderar nuestras concepciones del espacio y el tiempo.

1.1. Mecánica Clásica

Otra manera de formular la Mecánica Clásica es en base al Principio de Hamilton. Este principio nos dice que un sistema que se mueve, de un tiempo t_i a un tiempo t_f , es tal que la integral llamada acción

$$\mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt,$$

tiene un valor estacionario para el camino que sigue al movimiento. \mathcal{L} es la lagrangiana del sistema que, en general, depende de las coordenadas, las velocidades y el tiempo. Esto es, de todos los posibles caminos que puede seguir el sistema entre estos dos tiempos, realmente viajará a lo largo del camino para el cual el valor de esta integral sea estacionario. Por estacionario nos referimos a que \mathcal{S} tendrá el mismo valor para intervalos infinitesimalmente pequeños a primer orden. Entonces podemos decir que el principio de Hamilton nos dice que el movimiento de un sistema será tal que la variación de la acción entre dos tiempos dados es cero

$$\delta\mathcal{S} = \delta \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt = 0.$$

De esta manera podemos obtener las ecuaciones de movimiento para un sistema. En particular para una lagrangiana que es función solamente de las coordenadas y las velocidades, las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen a partir de la variación de la acción [1]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (1.2)$$

donde q_i y \dot{q}_i son las coordenadas y las velocidades que describen al sistema respectivamente.

Debido a que el efecto de la gravedad está solamente sobre la dirección radial conviene escribir a la lagrangiana que describe nuestro problema en coordenadas esféricas

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\text{sen}^2\theta\dot{\phi}^2 \right) + \frac{GMm}{r}. \quad (1.3)$$

Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos las ecuaciones de movimiento, para r

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\text{sen}^2\theta\dot{\phi}^2 + \frac{GMm}{r^2} = 0. \quad (1.4)$$

De igual manera para θ

$$\frac{d}{dt} \left(mr^2\dot{\theta} \right) - mr^2\dot{\phi}^2 \text{sen}\theta \cos\theta = 0. \quad (1.5)$$

Para ϕ podemos ver que la lagrangiana no depende de esta coordenada, por lo tanto la parcial respecto a esta variable será cero, por lo que tendremos que

$$\frac{d}{dt} \left(mr^2\text{sen}^2\theta\dot{\phi} \right) = 0. \quad (1.6)$$

Esto nos dice que $mr^2\text{sen}^2\theta\dot{\phi}$ es constante, pero no cualquier constante sino que debido a que la lagrangiana no se modifica ante cambios en ϕ entonces esta constante será la componente z del momento angular L por lo que tendremos que

$$mr^2\text{sen}^2\theta\dot{\phi} = L_z. \quad (1.7)$$

Así mismo, de la ecuación (1.5) tenemos otra ecuación de conservación

$$m^2 r^4 \dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{\text{sen}^2 \theta} = L^2, \quad (1.8)$$

donde L es la magnitud del momento angular. Dado que la magnitud del momento angular se conserva y que es constante en una dirección, el movimiento estará restringido a un plano por lo que podemos escoger $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Además del momento angular hay otra constante de movimiento, que podemos encontrar si multiplicamos a (1.4) por \dot{r} , obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 - \frac{GMm}{r} \right) = 0. \quad (1.9)$$

La cantidad entre paréntesis es otra constante que podemos identificar como $T + V$, así que esta constante será la energía mecánica total

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 - \frac{GMm}{r} = E. \quad (1.10)$$

Con esta técnica hemos reducido el problema de describir el movimiento a la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Ya no tenemos que resolver las ecuaciones de movimiento, es decir, las ecuaciones diferenciales de segundo orden, sino que podemos encontrar la solución usando las constantes de movimiento y así conocer como se mueve el sistema. Resolviendo el sistema formado por (1.7) y (1.10) llegamos a que

$$r(\phi) = \frac{r_0(1 + \epsilon)}{1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)}, \quad (1.11)$$

donde r_0 y ϕ_0 son las condiciones iniciales del sistema, r_0 representa la distancia radial inicial a la que se encuentra la partícula del centro atractor y ϕ_0 es el ángulo inicial en el plano de la órbita. La ecuación (1.11) es la ecuación general para una sección cónica, donde $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}$ es su excentricidad. Dependiendo del valor de la energía del sistema tendremos distintas órbitas, que corresponden a excentricidades diferentes:

$\epsilon > 1$	$E > 0$	Hiperbólica
$\epsilon = 1$	$E = 0$	Parabólica
$\epsilon < 1$	$E < 0$	Elíptica
$\epsilon = 0$	$E = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2}$	Circular

1.2. Relatividad Especial

La Mecánica Clásica describe muy bien el movimiento de los cuerpos, pero falla a la hora de describir sistemas que se mueven a velocidades cercanas a la de la luz, es por ello que necesitamos una teoría que también describa este tipo de fenómenos. Esta teoría es la Relatividad Especial, la cual se basa en un postulado y un hecho experimental:

- **Principio de Relatividad de Galileo:** Todos los experimentos que sean hechos por un observador no dependen de su velocidad relativa a otros observadores que no están involucrados en el experimento.
- **Constancia de la velocidad de la luz:** La velocidad de la luz es la misma para cualquier observador inercial y su valor experimental es $c = 2.99792458 \times 10^8 m/s$ [7].

En este trabajo usaremos unidades donde $c = 1$ debido a que, como la velocidad de la luz tiene siempre el mismo valor, nos conviene usar un número más sencillo. En estas unidades el tiempo y la longitud se medirán en las mismas unidades.

El principio de relatividad de Galileo es en el cual descansa la mecánica clásica, lo nuevo que presenta la Relatividad Especial es este hecho experimental de que la velocidad de la luz es la misma en cualquier sistema de referencia. Esto nos dice que el tiempo y el espacio de alguna manera deben relacionarse para que esto suceda, al contrario de lo que sucede en la Mecánica Clásica, donde no hay manera de concebir esta relación y tomamos al tiempo solamente como un parámetro. Que la velocidad de la luz sea una constante universal implica que el espacio y el tiempo se combinan en el espaciotiempo.

1.2.1. Espaciotiempo

Clásicamente hacemos Física pensando en un espacio de tres dimensiones y al tiempo como un parámetro, ahora consideraremos al lugar donde se llevan a cabo los sucesos como un espacio de cuatro dimensiones (tres espaciales y una temporal). Para visualizar el comportamiento de los objetos transitando en el espaciotiempo hacemos uso de diagramas de espaciotiempo. Consideremos un espacio de dos dimensiones, en el eje horizontal la coordenada x y en el vertical al tiempo t . Basta con solo considerar una coordenada ya que solo buscamos visualizar el espacio en el cual trabajaremos. En la Figura 1.1 hemos ilustrado los conceptos básicos que nos serán de utilidad más adelante.

A un punto en este espacio, es decir con t y x fijas, se le llama evento, esto consiste en fijar las coordenadas ¿Cuándo? y ¿Dónde? de un suceso. Una línea representa la relación $x = x(t)$ y es la posición de una partícula en diferentes tiempos medidos por un observador en particular, llamada la línea mundo de la partícula. La pendiente m de la recta estará relacionada con su velocidad

$$m = dt/dx = 1/v$$

Un rayo de luz siempre tendrá una pendiente de 45° en este diagrama.

Antes de continuar es necesario que hagamos el uso de algunas convenciones para facilitar el lenguaje que vamos a utilizar en este trabajo. Para localizar un evento en el espaciotiempo usaremos la coordenadas (t, x, y, z) o bien (x^0, x^1, x^2, x^3) para no hablar necesariamente de las coordenadas cartesianas. También podemos usar índices griegos como la notación x^μ con μ que va desde cero hasta tres. Si solo queremos considerar las componentes espaciales podemos referirnos a ellas con índices latinos como x^i con i que va de uno a tres. Ahora para conocer como es que

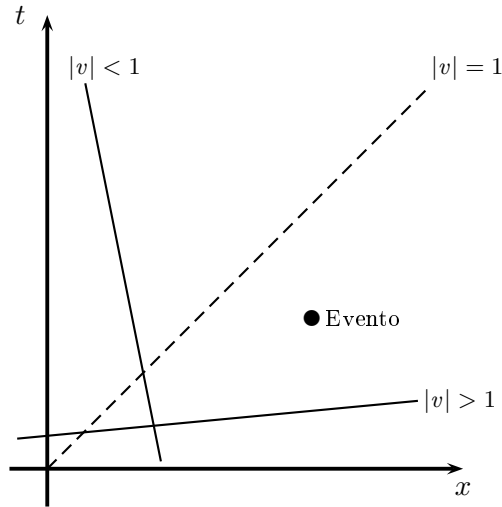


Figura 1.1: Diagrama que nos representa la posición de una partícula en el espaciotiempo.

medimos intervalos de espaciotiempo haremos uso de que la velocidad de la luz es constante para cualquier sistema de referencia. Consideremos un rayo de luz que en un sistema de referencia S pasa por dos puntos, la velocidad de la luz en nuestras unidades será

$$1 = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{\Delta t}, \quad (1.12)$$

donde $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ es la distancia espacial y Δt es el intervalo de tiempo entre los

eventos. De aquí se cumple que

$$-(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 0. \quad (1.13)$$

Consideremos el mismo suceso pero ahora visto por un sistema de referencia S' , debido a la constancia de la velocidad de la luz tenemos de igual manera que

$$1 = \frac{\sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2}}{\Delta t'}, \quad (1.14)$$

entonces

$$-(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = 0. \quad (1.15)$$

Motivados por lo anterior, definimos el intervalo de espaciotiempo entre dos eventos como

$$\Delta s^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \quad (1.16)$$

con esto podemos identificar las siguientes cualidades para el intervalo de espaciotiempo

$$\Delta s^2 = \begin{cases} > 0 & \text{Espacialoide} \\ = 0 & \text{Nulo} \\ < 0 & \text{Temporaloide} \end{cases} \quad (1.17)$$

Si el intervalo entre dos eventos es temporaloide significa que para ir de un lugar a otro se requieren velocidades menores a la de la luz, que sea nulo significa que se puede transitar de uno a otro a la velocidad de la luz y que sea espacialoide significa que para ir de uno a otro se requerirían velocidades mayores a la de la luz. Por construcción el intervalo de espaciotiempo permanece invariante ante el cambio de sistema de referencia, esto es, la distancia entre dos puntos del espaciotiempo es la misma medida por un observador en un sistema de referencia que por otro, así como la distancia en el espacio de tres dimensiones no depende de donde se calcula. Esto es un punto muy importante que debemos tener en cuenta porque con esto podemos construir toda la teoría. Si hacemos que los eventos estén infinitesimalmente cercanos tendremos que el intervalo de espaciotiempo será

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.18)$$

La ecuación 1.18 puede ser escrita también de la siguiente manera

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.19)$$

aquí hemos usado el convenio de sumas sobre índices repetidos, lo que quiere decir que cuando tengamos índices repetidos arriba y abajo en una ecuación significará que hay una suma implícita a lo largo del rango posible de los índices.

$\eta_{\mu\nu}$ es la métrica del espaciotiempo que se puede representar como una matriz de 4×4 cuyas componentes son

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Más adelante en este capítulo veremos su importancia.

Veamos ahora una implicación importante. Consideremos dos eventos que ocurren en el origen desde un tiempo cero hasta un tiempo medido por un observador S' , definiremos el tiempo propio $d\tau$ como el tiempo medido por un reloj tal que los eventos ocurren en el mismo lugar, tendremos entonces que el intervalo de espaciotiempo es

$$ds^2 = -dt'^2 = -d\tau^2, \quad (1.20)$$

esto nos dice, por una parte, que numéricamente el tiempo propio es la raíz cuadrada del negativo del intervalo y por otra, que el espaciotiempo se puede medir usando relojes. Si expresamos el tiempo propio en términos del intervalo tendremos que

$$\begin{aligned} d\tau &= [dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2]^{1/2} \\ &= \gamma^{-1} dt, \end{aligned} \quad (1.21)$$

donde $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. La relación anterior es la llamada dilatación del tiempo. Esto nos dice que el tiempo medido por un observador en sistema de referencia distinto a S' se verá contraído. Al factor γ se le llama factor de contracción de Lorentz y nos dice que tanto cambiará el tiempo medido.

1.2.2. Vectores en Relatividad Especial

Al igual que en el espacio euclidiano podemos definir vectores en el espaciotiempo. Dados dos eventos A y B , podemos considerar que un vector V será en realidad el ir de un evento a otro. Si

$$A \rightarrow (A^0, A^1, A^2, A^3) \quad \text{y} \quad B \rightarrow (B^0, B^1, B^2, B^3),$$

entonces tendremos que

$$\mathbf{V} = (B^0 - A^0, B^1 - A^1, B^2 - A^2, B^3 - A^3), \quad (1.22)$$

si A resulta ser el origen esto es más sencillo, entonces tendremos que sus componentes en un sistema de referencia dado serán $\mathbf{V} = (V^0, V^1, V^2, V^3)$. Si quisiéramos conocer la norma de ese vector, como sabemos que es una distancia en el espaciotiempo, podemos calcularla como

$$\Delta s_{AB} = |\mathbf{V}|, \quad (1.23)$$

pero sabemos que

$$|\mathbf{V}|^2 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}, \quad (1.24)$$

entonces calcular el intervalo es calcular el producto punto. Definimos el producto punto entre dos vectores en el espaciotiempo como

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = -U^0V^0 + U^1V^1 + U^2V^2 + U^3V^3. \quad (1.25)$$

Con esto, la magnitud de un vector en el espaciotiempo será

$$|\mathbf{V}| = -(V^0)^2 + (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2. \quad (1.26)$$

Al igual que el intervalo de espaciotiempo la norma de un vector puede ser temporaloide, espacialoide o nula. Es importante distinguir entre un vector nulo y el vector cero, ya que en el primero, al calcular su norma sus componentes se eliminan. En particular hemos estado hablando del vector posición, al cual definiremos como \mathbf{x} . También podemos escribir como $\mathbf{x} = x^\mu \hat{e}_\mu$ donde \hat{e}_μ son los vectores de la base donde está definido \mathbf{x} , entonces tendremos que

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}|^2 &= \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu x^\mu x^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \end{aligned} \quad (1.27)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ son las componentes de la métrica del espaciotiempo en el cual está definido el vector.

De la definición de producto punto entre vectores, podemos recuperar la misma definición para la ortogonalidad entre dos vectores en el espaciotiempo que teníamos en el espacio euclidiano, a saber: dos vectores son ortogonales si $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0$.

Con esta definición tenemos que los elementos de la métrica son el producto punto de los vectores de la base y, como hemos dicho que un vector puede tener magnitud -1 , entonces podemos decir que \hat{e}_μ forma una base ortonormal. Esto es

$$\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}, \quad (1.28)$$

entonces para dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} el producto punto será

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \eta_{\mu\nu} u^\mu v^\nu. \quad (1.29)$$

Podemos trasladar los conceptos de velocidad y aceleración de la Mecánica Clásica a la Relatividad Especial teniendo cuidado con respecto a quien derivamos. Podemos escoger al tiempo propio como variable independiente pues este es el mismo para todos los observadores. Definimos la cuatrovelocidad como

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}. \quad (1.30)$$

En un sistema de referencia en particular, podemos repetir la Mecánica Clásica. Parametrizando la posición usando el tiempo medido en este, tenemos que $x^i = x^i(t)$. De la relación entre el tiempo propio y el tiempo $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$ tendremos que la cuatrovelocidad será

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx^1}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx^2}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx^3}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) \\ &= \gamma (1, v^1, v^2, v^3). \end{aligned} \quad (1.31)$$

De la ecuación (1.31) podemos ver que las componentes espaciales de la cuatrovelocidad son las componentes de la velocidad en Mecánica Clásica, en el límite de bajas velocidades. De manera similar definimos la cuadriaceleración

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \\ &= \gamma (0, a^1, a^2, a^3). \end{aligned} \quad (1.32)$$

También podemos encontrar la dinámica mediante leyes de conservación. Si no hay campos externos la energía total será solo la energía cinética. Dependiendo de la interacción también encontraremos que el momento lineal y la energía son constantes de movimiento. Redefinamos el concepto de momento, como un vector en el espaciotiempo

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u}, \quad (1.33)$$

donde m es la masa de la partícula y \mathbf{u} su cuatrovelocidad. Así el cuadrimento tiene componentes

$$\mathbf{p} = m\gamma (1, v^1, v^2, v^3), \quad (1.34)$$

donde reconocemos a las componentes espaciales del cuadrimento como las componentes del momento lineal clásico en el límite de bajas velocidades. Examinemos ahora la componente

temporal

$$\begin{aligned} p^0 &= m\gamma \\ &= m(1-v^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Si la velocidad tiende a cero podemos hacer un desarrollo en serie a primer orden para tener

$$p^0 = m + \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{O}(v^4). \quad (1.36)$$

El primer término de la ecuación (1.36) es la masa y el segundo es la energía cinética, definimos entonces la energía total como

$$p^0 = E = m\gamma, \quad (1.37)$$

entonces tendremos que las componentes del cuatromomento serán

$$\mathbf{p} = (E, P^1, P^2, P^3). \quad (1.38)$$

Ahora como ya conocemos la manera de obtener la norma de cualquier vector en el espaciotiempo, calculemos la norma del cuatromomento

$$|\mathbf{p}|^2 = -E^2 + P^2, \quad (1.39)$$

donde P^2 es la norma al cuadrado del momento lineal. Pero también tenemos que

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}|^2 &= -m^2\gamma^2(1-v^2) \\ &= -m^2. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Hemos encontrado que $E^2 - P^2 = m^2$, si la partícula está en reposo tendremos que $E = m$, esto es, la energía del reposo es la masa.

1.2.3. Tensores en Relatividad Especial

Ya hemos obtenido la manera de calcular el producto punto entre dos vectores en el espaciotiempo y motivados por este hecho pudimos construir un nuevo objeto, el tensor métrico η . El tensor métrico es una función que admite vectores y produce un número cuyo valor es el producto punto entre ellos, esto nos dará información sobre como se miden las distancias. Este objeto es lineal en sus argumentos y no depende del sistema de coordenadas. Generalizando podemos decir que un tensor es una función multilineal de V^N espacios vectoriales y nos da como resultado un número real

$$P : V^1 \otimes V^2 \otimes \dots \otimes V^N \longrightarrow \mathbb{R}.$$

El número de vectores que tome un tensor nos dirá de que tipo es. Un tensor de tipo $\binom{0}{N}$ es una función de N vectores que nos da un número real. Por ejemplo un tensor $\binom{0}{0}$ es una función escalar ya que no toma ningún vector.

Un tensor de tipo $\binom{0}{1}$ se le llama covector o 1-forma, \tilde{V} , cuyas componentes se denotan como V_μ [2], No pretendemos hacer una descripción completa de este tipo de tensores ya que nuestro objetivo principal es hablar del tensor métrico.

Un tensor de tipo $\binom{0}{2}$ toma dos vectores y nos da un escalar. Podemos clasificar a los tensores de acuerdo a su simetría, un tensor es simétrico si, al intercambiar el orden de los vectores de los cuales es función, no cambia el resultado de manera que $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$. Un tensor antisimétrico es aquel que al intercambiar el orden de sus entradas el resultado será del signo opuesto al obtenido normalmente, tal que $T_{\beta\alpha} = -T_{\alpha\beta}$.

El tensor métrico tiene en particular la propiedad de ser simétrico debido a las propiedades del espaciotiempo, en este caso la métrica es la del espaciotiempo plano $\eta_{\mu\nu}$, sin embargo podemos tener métricas para espaciotiempos con distintas curvaturas, y en general las denotamos como $g_{\mu\nu}$. Una de las propiedades que tiene la métrica es que, al aplicarla a un vector, lo convierte en una 1-forma y viceversa [2][3], esto se conoce coloquialmente como subir y bajar índices. Esto es

$$V_\mu = g_{\mu\nu}V^\nu, \quad (1.41)$$

de manera inversa

$$V^\mu = g^{\mu\nu}V_\nu, \quad (1.42)$$

donde $g^{\mu\nu}$ es la inversa a la métrica y debido a las características del espaciotiempo plano esta es igual a $g_{\mu\nu}$. Debemos tener mucho cuidado con la manera en la que subimos y bajamos índices, debido a que nuestra métrica tiene -1 en su primera componente y eso se verá reflejado en el cambio de signo de la primera componente del vector o la 1-forma, como ejemplo tenemos el vector de cuádrimomento y la 1-forma correspondiente

$$g_{\mu\nu}p^\nu = p_\mu = (-E, P_i, P_2, P_3). \quad (1.43)$$

También tendremos tensores de tipo $\binom{M}{0}$ los cuales toman M 1-formas y nos dan un número real. En general tendremos entonces que un tensor del tipo $\binom{M}{N}$ es aquel que toma M 1-formas y N vectores y nos da como resultado un escalar.

El hecho de que los tensores no dependan del sistema de coordenadas nos será de mucha utilidad más adelante a la hora de revisar una teoría más general de la Relatividad.

1.2.4. Tensor de energía-momento

Anteriormente hablabamos del vector de cuádrimomento el cual contiene información sobre la energía y el momento de una partícula, pero debido a que el siguiente paso en nuestro trabajo es hablar sobre una teoría más general de la Relatividad, en la cual la energía contenida en una región del espaciotiempo afecta la geometría, necesitamos un objeto más general que describa el contenido material de una región.

Definiremos el tensor de energía-momento T el cual será un tensor de tipo $\binom{2}{0}$, en términos de componentes tendremos $T^{\mu\nu}$. Así tendremos que T^{00} será la densidad de energía ρ , T^{0i} será el flujo de energía a través de una superficie con x^i constante, T^{i0} será el flujo del momento p^i con x^0 constante y T^{ij} será el flujo del momento a través de superficies con x^j constante. La componente T^{00} del tensor de energía-momento nos será de mucha importancia más adelante cuando hablemos sobre la correspondencia entre la Relatividad General y la Mecánica Clásica. La discusión del tensor de energía-momento es más rica que la que hemos presentado, sin embargo, es suficiente para los fines de este trabajo. Si bien hemos dado una definición general del tensor, su forma específica dependerá de lo que querramos describir, ya sea el vacío, un fluido o el contenido de energía electromagnética por citar algunos ejemplos [3].

Para hacer más concreto lo anterior consideremos el polvo, este se define como una colección de partículas que se encuentran en reposo entre sí, dado que todas las partículas tienen la misma velocidad en cualquier sistema de referencia podemos definir el vector de flujo de número de partículas

$$N = nu, \quad (1.44)$$

donde n es la densidad numérica de partículas y u la cuádrivelocidad. Analizando las componentes tenemos que N^0 es la densidad numérica de partículas medida en cualquier sistema de referencia, mientras que N^i es el flujo por la superficie con la coordenada x^i constante. Imaginemos ahora que todas las partículas tienen masa m , entonces tendremos que la densidad de energía del polvo es

$$\rho = mn \quad (1.45)$$

Pero notemos que m y n son las componentes temporales del cuádrimomento y del vector de flujo de número de partículas respectivamente. Por lo tanto ρ deberá ser la $\mu = 0 \nu = 0$ componente de un tensor $p \otimes N$, que hacemos coincidir con el tensor de energía-momento

$$T^{\mu\nu} = p^\mu N^\nu = \rho u^\mu u^\nu, \quad (1.46)$$

con ρ la densidad de energía del polvo.

Dado que T representa el contenido de energía y momento se puede usar para expresar la conservación de estas cantidades. Para ilustrar esta conservación tomemos por ejemplo el caso de un fluido. Consideremos un cubo de lado l por el cual puede fluir la energía, en la Figura 1.2 tenemos un elemento cúbico del fluido visto en una sección transversal, es decir, hemos suprimido la dirección z . La energía puede fluir por todos los lados del cubo. El flujo a través de la cara 4 es $l^2 T^{0x}(x=0)$ y través de la cara 2 es $-l^2 T^{0x}(x=l)$, tenemos un signo menos debido a que T^{0x} representa la energía fluyendo en la dirección x positiva, el cual está afuera del volumen a través de la cara 2. Similarmente tenemos que la energía fluyendo en la dirección y es $l^2 T^{0y}(y=0) - l^2 T^{0y}(y=l)$. Si nos preguntamos por cambios en la energía total tendremos que

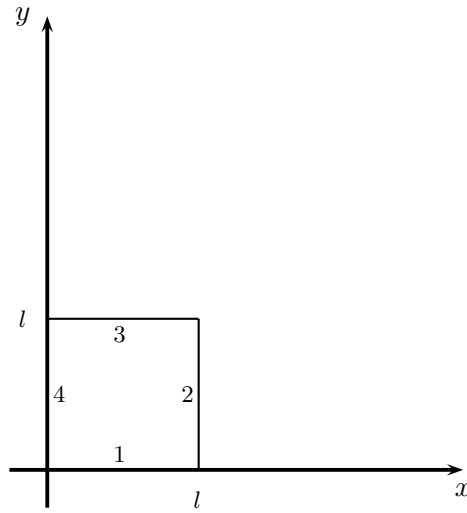


Figura 1.2: La energía puede fluir a través de todos los lados del cubo. En la figura hemos representado la cara 1 con el segmento de la recta $y=0$ delimitada por $x=0$ y $x=l$, la cara 2 con el segmento de la recta $x=l$ delimitada por $y=0$ y $y=l$, la cara 3 con el segmento de la recta $y=l$ delimitada por $x=0$ y $x=l$ y por último la cara 4 con el segmento de la recta $x=0$ delimitada por $y=0$ y $y=l$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l^3 T^{00}}{\partial t} &= l^2 [T^{0x}(x=0) - T^{0x}(x=l) + T^{0y}(y=0) - T^{0y}(y=l) \\ &\quad + T^{0z}(z=0) - T^{0z}(z=l)] \end{aligned} \quad (1.47)$$

Como el tamaño del volumen es arbitrario no cambia en el tiempo, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} &= -\frac{1}{l} [T^{0x}(x=l) - T^{0x}(x=0)] - \frac{1}{l} [T^{0y}(y=l) - T^{0y}(y=0)] \\ &\quad - \frac{1}{l} [T^{0z}(z=l) - T^{0z}(z=0)]. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Considerando elementos arbitrariamente pequeños tendremos que

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} = -\frac{\partial T^{0x}}{\partial x} - \frac{\partial T^{0y}}{\partial y} - \frac{\partial T^{0z}}{\partial z}, \quad (1.49)$$

con esto llegamos que

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0x}}{\partial x} + \frac{\partial T^{0y}}{\partial y} + \frac{\partial T^{0z}}{\partial z} = 0, \quad (1.50)$$

que puede ser reescrito como

$$T^{0\nu}{}_{,\nu} = 0. \quad (1.51)$$

Hemos introducido una nueva notación para las derivadas parciales, derivada con respecto a x^ν se representará como $,\nu$.

Se puede repetir el cálculo para todas las componentes del tensor, de tal manera que la conservación de la energía es

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \quad (1.52)$$

La conservación del tensor nos dice que el flujo de la energía y el momento a través de un elemento de volumen será constante. Esta ley cobrará mayor relevancia en el capítulo dos a la hora de encontrar una ecuación que nos de información sobre como la energía afecta a la geometría del espaciotiempo.

Capítulo 2

Física en espaciotiempos curvos

En el capítulo anterior hablamos de como la Relatividad Especial resuelve algunos de los problemas que tiene la Mecánica Clásica. El siguiente paso es describir al espaciotiempo en presencia de la gravedad, ya que más adelante describiremos como se mueven los objetos bajo su efecto, para estudiar las órbitas alrededor de objetos masivos.

En este capítulo hablaremos sobre la geometría de un espacio curvo y también de las herramientas necesarias para describirlo. Esto lo hacemos para poder utilizarlas más adelante en el estudio de la Física en espaciotiempos curvos.

2.1. La relación entre la gravedad y la curvatura

Para entender la relación entre la gravedad y la curvatura del espaciotiempo, conviene considerar dos experimentos pensados.

Tomemos primero la siguiente situación: un vagón sin ventanas que cae a una altura considerable sobre la superficie de la Tierra. Dentro del vagón se encuentran dos esferas con masa colocadas en sus extremos como se muestra en la Figura 2.1. Justo al dejar caer el vagón las esferas se encuentran en reposo de tal manera que podemos definir un sistema de referencia de acuerdo con la Relatividad Especial. Al dejar caer el vagón, las esferas se mueven al centro de este debido a la acción de la gravedad. Si nos colocamos en el centro del vagón veremos que las esferas se acercan hacia nosotros. Desde este momento ya no nos encontramos en un sistema de referencia inercial, por lo que suponemos que existe una fuerza externa que hace que las esferas se atraigan.

Consideremos ahora dos movimientos sobre la superficie de una esfera: Inicialmente colocamos a dos viajeros en el ecuador separados por una distancia dada y les pedimos que viajen a la misma velocidad hacia el norte por el camino más recto posible. Después de un tiempo determinado los viajeros se dan cuenta de que se están acercando cada vez más y piensan que si ellos siguieron

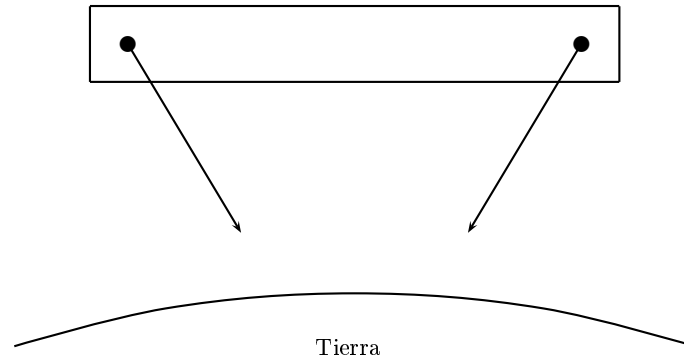


Figura 2.1: Un vagón a una altura considerable se deja caer bajo el campo gravitacional de la Tierra.

un movimiento rectilíneo uniforme no habría por que atraerse por lo que relacionan este efecto a la existencia de una fuerza, a pesar de que solo se están moviendo sobre la superficie de la esfera.

En estos dos experimentos vemos como podemos relacionar a la curvatura con la gravedad: para los viajeros, la curvatura de la superficie causó su acercamiento, no es necesario pensar en la existencia de una fuerza. Para las esferas en el vagón se plantea que su acercamiento es gracias a la existencia de una fuerza, sin embargo, podemos pensar que aquí también el movimiento es debido a que se mueven sobre la geometría curva del espaciotiempo.

Veamos ahora como es que el tiempo se ve afectado por la presencia de un campo gravitacional. Desde una torre de altura h se deja caer una partícula de masa m , supongamos que al llegar al suelo es convertida en un fotón con energía total igual a la de la partícula. Ahora se emite hacia arriba como se muestra en la Figura 2.2. Tendremos entonces que las energías serán

$$E_u = m$$

$$E_d = m + K = m + \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{O}(v^4).$$

Donde E_u es la energía arriba de la torre y E_d abajo. Al ser regresado a la altura de la torre se convierte de nuevo en una partícula, al terminar el viaje la partícula tiene energía

$$E_{u\gamma} = m.$$

Las masas de la partícula inicial y de la final son iguales ya que no podemos generar masa de la nada. Conocemos la energía del fotón cerca del centro del campo gravitacional de la Tierra y

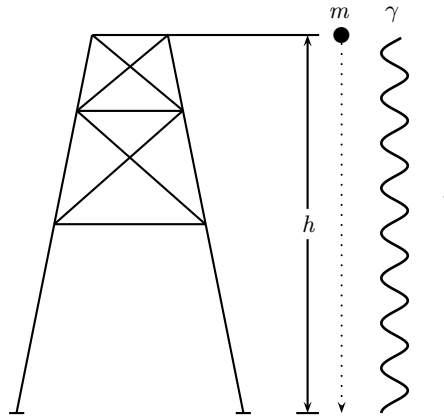


Figura 2.2: Una partícula de masa m se deja caer desde una torre de altura h , al llegar al suelo es convertida en un fotón que se emite hacia arriba.

lejos a una altura h por lo que tendremos que

$$\frac{E_{u\gamma}}{E_{d\gamma}} = \frac{m}{m + \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{O}(v^4)} < 1. \quad (2.1)$$

Ahora si reescribimos las energías en términos de las frecuencias obtenemos

$$\frac{h\nu'}{h\nu} = \frac{E_{u\gamma}}{E_{d\gamma}} < 1. \quad (2.2)$$

Llegamos entonces a que la frecuencia del fotón emitido abajo es mayor a la del recibido arriba $\nu' < \nu$. Este es el llamado corrimiento al rojo gravitacional. Extrapolando este experimento vemos que cualquier fenómeno periódico se ve más lento cuando se observa desde lejos de un campo gravitacional. Esta es la manifestación en el tiempo de la curvatura del espaciotiempo. A pesar de que el experimento anterior es idealizado, el fenómeno se ha verificado con gran precisión, ver por ejemplo [4].

Dado que hemos hablado de sistemas que se encuentran bajo el efecto de un campo gravitacional, podríamos pensar que no es posible definir un sistema de referencia inercial. Pero existe una observación que debemos tomar en cuenta: el Principio de Equivalencia. En resumen, este principio dice que no podemos distinguir entre experimentos realizados bajo el campo gravitacional constante y los realizados en un sistema que se mueve con aceleración constante.

En la Segunda Ley de Newton aparece la masa de una partícula que relacionamos con la inercia, pero también en la Ley de Gravitación Universal aparece la masa de una partícula que se ve afectada por el campo generado por un objeto masivo. Lo que quiere decir el Principio de

Equivalencia es que el término de masa que aparece en la Segunda Ley (masa inercial) es igual al término de masa que aparece en la Ley de Gravitación (masa gravitacional).

Dado que la aceleración de una partícula no depende de su masa, podemos colocarnos en un sistema de referencia lo suficientemente cerca como para decir que la partícula se encuentra en un movimiento rectilíneo uniforme. Esto es, que para intervalos pequeños de espaciotiempo podemos aplicar la Relatividad Especial, este hecho será de mucha relevancia para poder construir una teoría que incluya a la gravedad.

2.2. El tensor métrico de nuevo

En el capítulo anterior, en la ecuación (1.29) hablamos de la manera de calcular el producto punto de dos vectores y también dijimos que para obtener este número haríamos uso de las componentes del tensor métrico $\eta_{\mu\nu} = \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu$, lo que obtuvimos en coordenadas cartesianas para el espaciotiempo plano fue

$$\begin{aligned}\eta_{00} &= \hat{e}_0 \cdot \hat{e}_0 = -1 \\ \eta_{11} &= \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = 1 \\ \eta_{22} &= \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = 1 \\ \eta_{33} &= \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = 1 \\ \eta_{\mu\nu} &= \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu = 0 \quad \mu \neq \nu.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Debido a la definición del tensor métrico no solo podemos escribirlo en términos de coordenadas cartesianas sino que también, conociendo las ecuaciones de transformación de los vectores de la base, podemos escribirlo en términos de otras coordenadas como las esféricas que nos serán de utilidad al final de este trabajo. En estas coordenadas

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}.\tag{2.4}$$

Notemos que el tensor métrico ha quedado en forma diagonal de nuevo, esto se debe a la ortogonalidad de las coordenadas y a las simetrías del espaciotiempo que describimos, pero puede ser diferente. Con esta métrica el intervalo de espaciotiempo es

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2).\tag{2.5}$$

2.3. Símbolos de Christoffel y la derivada covariante

Si quisiéramos calcular las derivadas de un vector base, de las coordenadas cartesianas obtendríamos que son cero debido a que estos son constantes. En cambio, si calculáramos las derivadas de la base de las coordenadas polares, entonces el resultado sería distinto. Consideremos un vector con componentes V^α , su derivada será

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \hat{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \hat{e}_\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (2.6)$$

El último término en (2.6) es de gran importancia, dado que $\frac{\partial \hat{e}_\alpha}{\partial x^\beta}$ es un vector también, puede ser escrito como una combinación lineal de los vectores base. Introducimos el símbolo $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ para denotar los coeficientes en esta combinación

$$\frac{\partial \hat{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \hat{e}_\mu. \quad (2.7)$$

La interpretación de este símbolo es que es las componentes de $\frac{\partial \hat{e}_\alpha}{\partial x^\beta}$ necesitan tres índices: α nos da el vector base siendo derivado, β nos da la coordenada con respecto a la cual está siendo derivado y μ nos denota la componente resultante del vector que fue obtenido. A estos símbolos se les llama símbolos de Christoffel.

Usando la definición de los símbolos de Christoffel (2.7) en la ecuación (2.6) se convierte en

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \hat{e}_\alpha + V^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \hat{e}_\mu. \quad (2.8)$$

En el segundo término hay dos sumas, sobre α y μ . Renombrando los índices nos ayudará aquí, si cambiamos μ por α y α por μ en el segundo término, tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \hat{e}_\alpha + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \hat{e}_\alpha. \quad (2.9)$$

La razón por la cual hicimos esto es que ahora \hat{e}_α puede ser factorizado

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^\beta} = \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \right) \hat{e}_\alpha. \quad (2.10)$$

Cuando hablamos de derivadas de vectores nos referimos a ellas como $V^\alpha_{;\beta}$, ahora introduciremos una nueva notación

$$V^\alpha_{;\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha, \quad (2.11)$$

esta es la llamada derivada covariante. Esta derivada nos da el cambio de un vector a lo largo de una superficie curva donde los vectores de la base ahora pueden variar en magnitud, dirección

y sentido. Dado que los símbolos de Christoffel son derivadas de los vectores base, podemos encontrar una expresión para ellos a partir de la métrica [2]

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (2.12)$$

Una vez encontrada la métrica que describe al espaciotiempo, solo tenemos que derivar sus componentes para encontrar los símbolos de Christoffel.

La métrica nos dice como es la geometría de un espacio curvo, es decir, si un espacio tiene métrica definida, entonces podemos obtener la información de ella. Como la métrica depende de las coordenadas se puede encontrar para un sistema de referencia en especial, al cual llamaremos sistema de referencia local, un desarrollo en serie de Taylor de tal manera que

$$g_{\mu\nu}(x^{\alpha}) = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}\left[(x^{\alpha})^2\right]. \quad (2.13)$$

Como habíamos dicho anteriormente localmente un espaciotiempo curvo se asemeja al espaciotiempo plano, formalmente esto se sustenta en el teorema de la planicie local [2]

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\gamma}|_P &= 0 \\ g_{\mu\nu,\gamma\sigma\dots\omega}|_P &\neq 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

es decir, que alrededor de un punto P las primeras derivadas de la métrica serán cero para toda μ, ν y γ . Mientras que, en general, las derivadas de orden superior no necesariamente son cero para al menos algunos valores de los índices si el espacio no es exactamente plano. El hecho que las primeras derivadas de la métrica sean cero nos dice que las partículas se moverán en líneas mundo que son localmente rectas en ese sistema de referencia en particular. Como los coeficientes de la métrica son los productos punto de los vectores de la base, que sus derivadas sean cero nos dice que su magnitud y su dirección (a lo largo de la dirección en las que son derivadas) permanecerán constantes.

Con la definición de la derivada covariante en la sección anterior podemos llegar a un hecho muy útil. Dado que en la derivada covariante aparecen símbolos de Christoffel, que a su vez dependen de las derivadas de la métrica, en un sistema de referencia local, como definimos anteriormente, éstas serán cero lo que implicará que

$$V^{\alpha}_{;\beta} = V^{\alpha}_{,\beta}. \quad (2.15)$$

Esto es válido para cualquier tensor, incluida la métrica

$$g_{\mu\nu}{}_{;\gamma} = g_{\mu\nu, \gamma} = 0. \quad (2.16)$$

2.4. Transporte paralelo

En geometría, para estudiar la curvatura de un espacio podemos hacerlo de dos maneras: extrínsecamente e intrínsecamente. La primera de ellas se refiere a medir la curvatura de una superficie desde un espacio de dimensión mayor y la segunda se refiere a medir la curvatura desde la superficie en sí.

Para nuestro caso solamente usaremos la medida intrínseca de curvatura debido a que las trayectorias de las partículas se llevan a cabo sobre el espaciotiempo y no fuera de él.

Si tenemos un vector tangente a una esfera y lo transportamos en un ciclo alrededor de esta, de tal manera que el vector en un punto sea paralelo al anterior, como en la Figura 2.3. Así, el vector será transportado de A a B luego de B a C y de regreso hasta A , pero no será el mismo vector que teníamos inicialmente, debido al ciclo tomado. Lo que hemos obtenido implica que en un espacio curvo no podemos tener una definición de paralelismo de manera global como en el caso de un espacio plano. Se le llama transporte paralelo al proceso por el cual hicimos pasar al vector sobre la esfera.

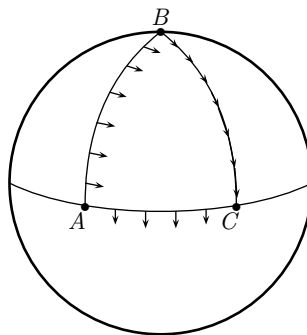


Figura 2.3: Un vector tangente a la superficie es transportado de manera que permanezca paralelo a lo largo del camino.

Para explicar cuantitativamente al transporte paralelo consideremos de nuevo un vector \mathbf{V} y veamos como es que cambia a lo largo de una curva si estos cambios son tales que, los puntos están separados infinitesimalmente y mantienen a \mathbf{V} paralelo con sí mismo, conservando su longitud. Si $U = \frac{dx}{d\lambda}$ es el vector tangente a lo largo de la curva entonces en un sistema de referencia local

se cumple que

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = 0, \quad (2.17)$$

donde λ es el parámetro que describe a la curva. Haciendo uso de la regla de la cadena y de que en un sistema de referencia local los símbolos de Christoffel son cero, podemos reescribir (2.17) como

$$U^\beta V^\alpha_{;\beta} = 0, \quad (2.18)$$

pero podemos escribir la ecuación anterior para que sea válida en cualquier espaciotiempo y tendremos finalmente la definición de transporte paralelo

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = U^\beta V^\alpha_{;\beta} = 0. \quad (2.19)$$

2.5. Geodésicas

Sabemos de la geometría plana que dos líneas rectas permanecen paralelas cuando se prolongan, es decir que cada una de ellas siempre se mantiene en la dirección en la que va. Una manera de precisar esto es decir que la tangente a la curva en un punto es paralela a la tangente en el punto anterior. En un espacio curvo también podemos generar líneas lo más rectas posibles si pedimos que el vector tangente a las curvas sea transportado paralelamente a lo largo de ellas. Las curvas con estas características se les llama geodésicas.

De la definición de transporte paralelo (2.19) tenemos que

$$U^\beta U^\alpha_{;\beta} = U^\beta U^\alpha_{;\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} U^\mu U^\beta = 0. \quad (2.20)$$

Para describir una curva podemos hacerlo mediante un parámetro, el cual nos dirá como se comporta la curva a lo largo de su trayecto en un espacio. Si usamos λ como el parámetro, entonces $U^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ y $U^\beta \partial/\partial x^\beta = d/d\lambda$. Con esto llegamos a que

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.21)$$

Una de las características de las geodésicas es que podemos parametrizarla no solo con un parámetro sino también con cualquier transformación lineal de éste. Por ejemplo si definimos $\tau = a\lambda + b$ con a y b constantes vemos que se cumple que

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (2.22)$$

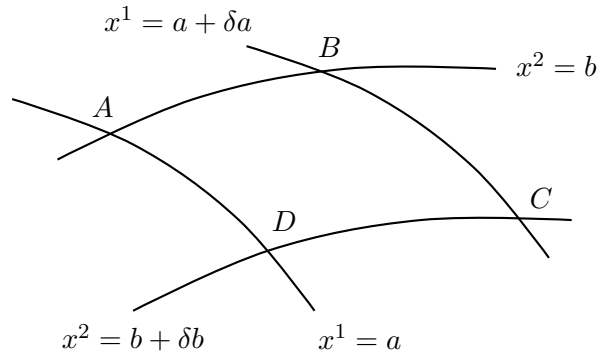


Figura 2.4: Un vector es transportado paralelamente sobre un espacio curvo.

A parámetros que cumplen con esa transformación se les llama parámetros afines. El parámetro que usaremos en nuestro trabajo será el tiempo propio para poder describir las trayectorias en el espaciotiempo.

Una geodésica es una curva de longitud extrema, es decir, dados dos puntos la distancia entre ellos es lo más corta posible. De igual manera que se obtienen las ecuaciones de movimiento a partir del principio de Hamilton, podemos obtener la ecuación para la geodésica usando un principio equivalente llamado Principio de Extremo Envejecimiento, el cual nos dice que el camino que una partícula recorre entre dos eventos en el espaciotiempo es tal que el intervalo de tiempo propio es extremo [3][6].

2.6. Tensor de curvatura

Empecemos de nuevo usando un ejemplo: tomemos un pequeño ciclo cerrado sobre una superficie curva cuyas líneas son: $x^1 = a$, $x^1 = a + \delta a$, $x^2 = b$ y $x^2 = b + \delta b$, como se muestra en la Figura 2.4. Por tratarse de una superficie, hemos parametrizado el ciclo con solo dos coordenadas. Ahora, tomemos un vector, \mathbf{V} , definido en A y transportémoslo paralelamente a B. Entonces

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} = -\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu. \quad (2.23)$$

Integrando de A a B

$$V^\alpha(B) = V^\alpha(A) - \int_{x^2=b} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1. \quad (2.24)$$

Hemos denotado $x^2 = b$ como la trayectoria que va de A a B . De manera similar tenemos que

$$V^\alpha(C) = V^\alpha(B) - \int_{x^1=a+\delta a} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 \quad (2.25)$$

$$V^\alpha(D) = V^\alpha(C) + \int_{x^2=b+\delta b} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1. \quad (2.26)$$

En la última hemos tomado el signo negativo debido a la dirección en la que hemos transportado de C a D . Ahora para completar el ciclo regresando al lugar inicial tendremos que

$$V^\alpha(A_{final}) = V^\alpha(D) + \int_{x^1=a} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2. \quad (2.27)$$

Sumando las ecuaciones anteriores encontramos que el cambio neto del vector $V^\alpha(A)$ es un vector

$$\delta V^\alpha = V^\alpha(A_{final}) - V^\alpha(A)$$

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha &= \int_{x^1=a} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 - \int_{x^1=a+\delta a} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 \\ &+ \int_{x^2=b+\delta b} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 - \int_{x^2=b} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1. \end{aligned} \quad (2.28)$$

De la ecuación anterior podemos reescribir las integrales, reagrupando los términos con diferenciales iguales. Ahora bien, como las integrales son evaluadas sobre las trayectorias en x^1 y x^2 respectivamente, podemos considerarlas como funciones de estas coordenadas y hacer un desarrollo de Taylor a primer orden para tener

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha &\simeq - \int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu) dx^2 \\ &+ \int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu) dx^1. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ahora, como cada uno de los integrandos son constantes respecto a la respectiva variable de integración, la integral es inmediata y obtenemos

$$\delta V^\alpha \approx \delta a \delta b \left[-\frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu) \right]. \quad (2.30)$$

En la ecuación (2.30) nos hemos encontrado con derivadas que involucran productos de los símbolos de Christoffel y las componentes del vector, podemos reescribirlas usando (2.23) y tendremos que

$$\delta V^\alpha = \delta a \delta b [\Gamma_{\mu 1, 2}^\alpha - \Gamma_{\mu 2, 1}^\alpha + \Gamma_{\nu 2}^\alpha \Gamma_{\mu 1}^\nu - \Gamma_{\nu 1}^\alpha \Gamma_{\mu 2}^\nu] V^\mu, \quad (2.31)$$

para obtener la expresión anterior hemos hecho una sustitución de índices mudos en los términos donde hay productos de símbolos de Christoffel.

También notemos que la expresión para δV^α es antisimétrica ante cambios en los índices 1 y 2, esto se debe a que su signo dependerá de como recorramos el ciclo, lo cual se verá reflejado en intercambiar los índices.

En este ejercicio parametrizamos con las coordenadas x^1 y x^2 , pero podemos generalizar a las cuatro coordenadas del espaciotiempo, x^σ , x^λ , tendremos ahora el cambio de V^α transportado paralelamente primero por $\delta a e_\sigma$, seguido por $\delta b e_\lambda$ luego por $-\delta a e_\sigma$ y finalmente por $-\delta b e_\lambda$

$$\delta V^\alpha = \delta a \delta b [\Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^\alpha + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\nu] V^\mu. \quad (2.32)$$

Ahora si definimos

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha \equiv \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma, \quad (2.33)$$

entonces $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ serán las componentes de un tensor R , en el cual, nos dará el cambio en el vector V , después de que lo transportemos paralelamente alrededor del ciclo. Este tensor es llamado tensor de curvatura de Riemann y nos caracteriza la curvatura de un espacio. Un espacio plano es aquel en el cual podemos definir paralelismo global a lo largo de alguna curva. Esto es que

$$\delta V^\alpha = 0 \implies R_{\beta\mu\nu}^\alpha = 0. \quad (2.34)$$

Para poder conocer las propiedades del tensor de Riemann conviene conocer sus componentes en un sistema de referencia local. Ahí tenemos que $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$, pero podemos encontrar sus derivadas

$$\Gamma_{\mu\nu,\sigma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu\sigma} + g_{\beta\nu,\mu\sigma} - g_{\mu\nu,\beta\sigma}). \quad (2.35)$$

Dado que las segundas derivadas de la métricas no son cero. Aprovechando la simetría de esta expresión

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}). \quad (2.36)$$

Para llegar al resultado anterior también hemos aprovechado que las derivadas parciales conmutan. Ahora bien, si bajamos el índice α en (2.36), con la ayuda de la métrica, llegamos a que

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} R_{\beta\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}) \quad (2.37)$$

Con ayuda de esta última expresión podemos llegar a las siguientes identidades

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (2.38)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0. \quad (2.39)$$

De las ecuaciones anteriores podemos ver que el tensor de Riemann es antisimétrico ante el cambio del primer par de índices, ante el cambio en el segundo par de ellos y simétrico ante el cambio de los pares de índices. Debido a que este tensor tiene 4 índices libres cuenta con 256 términos, pero debido a las propiedades que mencionamos anteriormente solo tendremos 20 términos independientes.

2.6.1. Identidades de Bianchi

Hemos obtenido la manera de medir la curvatura, ahora lo que sigue es encontrar otras propiedades del tensor de Riemann que nos serán útiles más adelante. Si derivamos la ecuación (2.37) con respecto a x^λ tenemos que

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}) \quad (2.40)$$

Dado que la métrica es simétrica, y del hecho de que las derivadas parciales conmutan, podemos mostrar que

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu} = 0. \quad (2.41)$$

Ya que hemos escogido un sistema de referencia local, sabemos que los símbolos de Christoffel en este punto se anulan por lo que (2.41) es equivalente a

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0, \quad (2.42)$$

como esta es una ecuación tensorial, es válida para cualquier sistema de referencia. A (2.42) se les conoce como identidades de Bianchi.

2.6.2. Tensor de Ricci

Contrayendo el primer y tercer índice del tensor de Riemann, podemos definir el tensor de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha}. \quad (2.43)$$

Con esto hemos pasado de un tensor antisimétrico en los cambios de α con β y μ con ν a un tensor simétrico ante el cambio de índices.

De igual manera podemos definir el escalar de Ricci como

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (2.44)$$

El tensor de Ricci y el escalar de Ricci son objetos de mayor simetría que contienen información del tensor de curvatura.

2.6.3. Tensor de Einstein

Si contraemos la ecuación (2.42) de la misma forma que lo hicimos para obtener el tensor de Ricci tenemos que

$$g^{\alpha\mu} [R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}] = 0. \quad (2.45)$$

De aquí, aprovechando que $g^{\alpha\beta}{}_{;\mu} = 0$ y el tensor de Riemann es antisimétrico se sigue que

$$R_{\beta\nu;\lambda} (-R_{\beta\lambda;\nu}) + R_{\beta\nu\lambda;\mu}^{\mu} = 0, \quad (2.46)$$

ahora, si de nuevo contraemos de tal manera que

$$g^{\beta\nu} [R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R_{\beta\nu\lambda;\mu}^{\mu}] = 0, \quad (2.47)$$

o bien

$$R_{;\lambda} - R_{\lambda;\mu}^{\mu} + (R_{\lambda;\mu}^{\mu}) = 0. \quad (2.48)$$

Reescribiendo (2.48) llegamos a que

$$\left(R_{\lambda}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\lambda}^{\mu} R \right)_{;\mu} = 0. \quad (2.49)$$

Estas son las llamadas identidades de Bianchi doblemente contraídas o en ocasiones llamadas también identidades de Bianchi. Si definimos un tensor simétrico tal que

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = G^{\nu\mu}, \quad (2.50)$$

podemos ver que la ecuación (2.49) es equivalente a

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (2.51)$$

A este tensor se le llama tensor de Einstein. Dado a que lo construimos a partir del tensor de Riemann, el tensor de Einstein también nos dará información acerca de la curvatura. Veremos más adelante la importancia que tiene en el estudio de la Física en espaciotiempos curvos.

2.7. La transición de la curvatura a la Física

El hecho de que podamos identificar conceptos matemáticos con ciertas cantidades físicas medibles es la esencia de cualquier teoría física. Esto es algo que debemos tomar muy en cuenta a la hora de buscar la relación entre conceptos geométricos con los efectos de la gravedad. Podemos empezar por considerar al espaciotiempo como un espacio de 4 dimensiones con una

métrica definida, esta métrica es medible con reglas y relojes y es de ella de donde obtendremos la información necesaria para hacer Física.

Habiendo escogido esta manera de describir al espaciotiempo, aún necesitamos dos cosas más para tener una teoría completa. Necesitamos saber como es que los objetos que estudiamos como partículas, campos y fluidos se comportan en presencia de la curvatura del espaciotiempo. Y también necesitamos decir como es que la curvatura es generada por la presencia de estos objetos.

Tomemos a la gravedad newtoniana como ejemplo de una teoría física. En esta teoría el espaciotiempo consiste en un espacio euclidiano de tres dimensiones que se repetía infinitamente en el tiempo. Ahi no hay una métrica en el espaciotiempo pero está la usual métrica del espacio euclidiano y el tiempo es medido por un reloj universal. Son válidos observadores con diferentes velocidades, es decir, existe la relatividad del movimiento propuesta por Galileo.

En la Mecánica Clásica no hay manera de concebir al tiempo y al espacio como una sola entidad, no podemos combinar las mediciones de estas cantidades, es decir, no existe una medida invariante de la longitud de una curva que cambia en el espacio y el tiempo como si fueran una sola cosa. Pero lo que la Relatividad aportó fue la invariancia de la velocidad de la luz, lo que nos permite unificar las mediciones del espacio y el tiempo. Con esto el espaciotiempo de la Relatividad Especial es una estructura más simple que el clásico.

En el contexto del espaciotiempo clásico tenemos una ley que nos dice como se comportan los objetos bajo la presencia de fuerzas gravitacionales: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde sabemos que $\mathbf{F} = -m\nabla\phi$ para un potencial gravitacional ϕ dado. También tenemos una expresión que determina como es que ϕ es generado: $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$. Estas son las dos leyes a las que les debemos encontrar análogos en la manera relativista de ver al espaciotiempo.

La aceleración de una partícula bajo la acción de un campo gravitacional no depende de su masa, por lo tanto podemos colocarnos en un sistema de referencia en caída libre lo suficientemente cerca de ella para decir que no tiene aceleración. A esto le llamamos un sistema de referencia inercial local. Dado que las partículas no tienen aceleración, seguirán un movimiento rectilíneo, al menos de manera local. Pero sabemos que una línea recta en un sistema de referencia inercial local es la definición de geodésica en un espacio curvo, que ya aprendimos a calcular anteriormente. De aquí tenemos entonces el primer postulado de como es que la métrica afecta a las partículas:

- **Principio de Equivalencia Débil:** Las partículas en caída libre se mueven a lo largo de

geodésicas en el espaciotiempo.

Por caída libre nos referimos a que la partícula no está bajo el efecto de otras fuerzas, como un campo eléctrico, que se diferencia de la gravedad por el hecho de que solo afecta a partículas eléctricamente cargadas. Es por ello que el Principio de Equivalencia es una afirmación bastante fuerte que puede ser medida experimentalmente, de tal manera que al comparar la caída de objetos de diferentes materiales llega a una diferencia en las aceleraciones de 10^{-13} [9]. Esto hace al Principio de Equivalencia Débil es uno de los principios de la Física medido con más precisión. Pero este principio solo es aplicado a partículas, necesitamos una generalización para saber como son, por ejemplo, los fluidos afectados por la métrica de un espaciotiempo que no es plano, entonces tenemos:

- **Principio de Equivalencia de Einstein:** Cualquier experimento físico local que no involucre a la gravedad que sea llevado a cabo en un sistema de referencia en caída libre tendrá el mismo resultado como si fuera hecho en el espaciotiempo plano de la relatividad especial.

Lo que nos dice el Principio de Equivalencia de Einstein tiene que ver con lo que hemos dicho anteriormente. Podemos definir un sistema de referencia inercial que sea local en un punto de un espaciotiempo curvo, podemos realizar toda la Relatividad Especial. Haciendo uso de que podemos definir alrededor de un punto un espacio plano, entonces existe un puente entre estos dos hechos. Una ley escrita en términos de la Relatividad especial, también se cumplirá en un sistema de referencia inercial local en un espaciotiempo curvo. Gracias al principio de equivalencia y a que G es una constante universal podemos definir unidades tales que $G = 1$, con esto, podemos medir en las mismas unidades a la masa, la longitud y el tiempo.

2.8. Aproximación de campo débil

La argumentación anterior nos permite afirmar que la trayectoria que sigue una partícula en un espaciotiempo curvo es la geodésica

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.52)$$

Si deseamos conocer como es que se mueve una partícula bajo la acción de un campo gravitacional como el del Sol debemos hacer la consideración de que los objetos se mueven a velocidades mucho

menores a la de la luz y el campo es débil, tal que pueda ser considerado como una perturbación en el espaciotiempo.

Como queremos que los objetos no se muevan a velocidades relativistas podemos despreciar las derivadas de las componentes espaciales respecto al tiempo y solamente sobreviven las derivadas de x^0 respecto a τ , entonces

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\alpha \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (2.53)$$

Calculemos ahora los símbolos de Christoffel Γ_{00}^α

$$\Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma 0,0} + g_{\sigma 0,0} - g_{00,\sigma}). \quad (2.54)$$

Como queremos describir un campo gravitacional como el del Sol, entonces no debe haber dependencia temporal, es decir, el campo es estático, entonces

$$\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} g_{00,\sigma}. \quad (2.55)$$

Consideremos ahora la aproximación de campo débil, la cual consiste en que siendo el campo muy pequeño, la métrica del espaciotiempo curvo puede ser aproximada por la métrica de la Relatividad Especial más una pequeña perturbación

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (2.56)$$

sustituyendo lo anterior en (2.55)

$$\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2} (\eta^{\alpha\sigma} + h^{\alpha\sigma}) (\eta_{00,\sigma} + h_{00,\sigma}). \quad (2.57)$$

A primer orden en h se sigue que

$$\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} h_{00,\sigma}, \quad (2.58)$$

sustituyendo en (2.53)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\sigma} h_{00,\sigma} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (2.59)$$

Tomando la componente temporal de esta ecuación llegamos a que $\frac{dt}{d\tau}$ es constante. Veamos ahora las componentes espaciales, es decir,

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \eta^{ij} h_{00,j} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (2.60)$$

Como solo tenemos componentes espaciales la métrica, esta corresponde a una matriz identidad por lo que no es necesario escribirla, así

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 h_{00,i}. \quad (2.61)$$

Multiplicando por $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ y haciendo uso de la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} h_{00,i}. \quad (2.62)$$

Comparando con la ley de gravitación de Newton obtenemos $h_{00} = -2\phi$, donde ϕ es el potencial gravitacional. Entonces tendremos que en la aproximación de campo débil, la magnitud de la perturbación es -2ϕ , por lo que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2\phi\delta_{\mu\nu}. \quad (2.63)$$

Con esto tendremos que

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1+2\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\phi \end{pmatrix}.$$

2.9. Ecuaciones de Campo de Einstein

En los capítulos anteriores hemos decidido la manera en la que vamos a describir a la gravedad y sus consecuencias sobre la materia, para ello consideramos al espaciotiempo como un espacio curvo con métrica definida. Ahora debemos complementar esto para tener una teoría más general que nos describa como es que las fuentes del campo gravitacional determinan la métrica y por lo tanto la Física del espaciotiempo. La analogía que debemos usar para describir la gravedad es la ecuación para el potencial gravitacional

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho, \quad (2.64)$$

donde ϕ es el potencial gravitacional y ρ la densidad de masa. La solución a esta ecuación para una partícula puntual de masa M situada en el origen y que produce un campo esféricamente simétrico es

$$\phi = -\frac{M}{r}. \quad (2.65)$$

La fuente del campo gravitacional en la mecánica de Newton es la densidad de masa. Sabemos que el concepto de masa en una teoría relativista no es el mismo que en una teoría clásica. En relatividad la energía total de un objeto incluye la masa.

Usando todo el tensor de energía-momento como la fuente del campo gravitacional, la generalización de la ecuación de Poisson en la descripción relativista deberá tener la forma

$$\mathbf{O}(\mathbf{g}) = \kappa\mathbf{T}, \quad (2.66)$$

donde \mathbf{O} es un operador diferencial que actúa sobre la métrica, que es la generalización de ϕ y κ una constante por determinar.

Por analogía con (2.64), \mathbf{O} deberá ser un operador de segundo orden y dado que \mathbf{T} es un tensor de tipo $\binom{2}{0}$, \mathbf{O} deberá producir un tensor de tipo $\binom{2}{0}$ para que cumpla con la igualdad. Es decir, $O^{\mu\nu}$ deberán ser las componentes de un tensor de tipo $\binom{2}{0}$ y deberán ser combinaciones de $g_{\mu\nu}$ con sus derivadas de primer y segundo orden. Afortunadamente ya hemos encontrado un tensor que cumple con las propiedades anteriores, el tensor de Ricci. Aunque en general cualquier tensor de la forma $O^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} + \alpha g^{\mu\nu} R$ las satisface, con α una constante por determinar.

De la conservación local del tensor de energía-momento tenemos

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (2.67)$$

Esta ecuación debe ser verdadera para cualquier métrica entonces

$$O^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (2.68)$$

Dado que $g^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = 0$ entonces

$$(R^{\mu\nu} + \alpha g^{\mu\nu} R)_{;\nu} = 0. \quad (2.69)$$

Comparando (2.69) con la expresión en las identidades de Bianchi vemos que $\alpha = -\frac{1}{2}$. Si la ecuación anterior es una identidad para una métrica arbitraria entonces llegamos a que

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}. \quad (2.70)$$

Estas pueden ser escritas también de la forma $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ debido a que al subir y bajar índices no afecta en nada la estructura de la ecuación. Aplicando $g^{\mu\nu}$ a la forma con índices abajo tenemos

$$g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad (2.71)$$

usando la traza de la matriz identidad y de traza de un tensor llegamos a que

$$R = -\kappa T, \quad (2.72)$$

donde R es el escalar de Ricci y T es el escalar del tensor de energía-momento $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$.

Usando esto podemos reescribir (2.70) como

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (2.73)$$

En el límite de campo débil y para partículas que se mueven a bajas velocidades, esta ecuación debe reducirse a la correspondiente ecuación de la gravedad newtoniana. En este límite tendremos

que la componente de $T_{\mu\nu}$ más importante es $T_{00} = \rho$. Por ellos solo nos enfocaremos en las componentes $\mu = 0$ y $\nu = 0$ de (2.73). Sabemos que en el límite de campo débil tenemos

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + h_{00} \\ g^{00} &= -1 + h^{00}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Usando (2.74) podemos ver que la traza \mathbb{T} en este límite puede ser escrita así

$$g^{00}T_{00} = (-1 + h^{00})T_{00} = -T_{00}, \quad (2.75)$$

del resultado en (2.75) vemos que hemos despreciado términos de orden superior, esta es una consideración que seguiremos utilizando para nuestra aproximación. Con esto (2.73) queda

$$R_{00} = \frac{1}{2}\kappa T_{00}. \quad (2.76)$$

Ya conocemos el lado derecho de (2.76) ya que $T_{00} = \rho$, ahora falta ver como es el tensor de Ricci en este límite. De la definición de este tensor tenemos que

$$R_{00} = R_{0\alpha 0}^{\alpha} = \Gamma_{00,\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{0\alpha,0}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha}\Gamma_{00}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma 0}^{\alpha}\Gamma_{0\alpha}^{\sigma}. \quad (2.77)$$

El segundo término en (2.77) contiene una derivada respecto al tiempo, dado que estamos considerando un campo estacionario, será cero. El tercer y cuarto términos contienen términos cuadráticos de la métrica por lo tanto los despreciamos en esta aproximación. Con esto (2.77) queda

$$R_{00} = R_{0\alpha 0}^{\alpha} = \Gamma_{00,\alpha}^{\alpha}. \quad (2.78)$$

Si desarrollamos la suma sobre α notamos que el primer término es cero, entonces tendremos solo la suma sobre índices espaciales. Usando la definición de los símbolos de Christoffel se sigue que

$$\begin{aligned} R_{00} = \Gamma_{00,i}^i &= \frac{1}{2} (g^{i\sigma} (g_{\sigma 0,0} + g_{\sigma 0,0} - g_{00,\sigma}))_{,i} \\ &= -\frac{1}{2} (g^{ij} g_{00,j})_{,i}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Usando (2.74) en (2.79), y considerando la expresión a primer orden

$$R_{00} = -\frac{1}{2} ((\eta^{ij} + h^{00}) h_{00,j})_{,i} \quad (2.80)$$

$$= -\frac{1}{2} \eta^{ij} h_{00,ij}. \quad (2.81)$$

Recordemos que $\eta^{ij} = \delta^{ij}$ y de la definición del operador laplaciano $\delta^{ij} h_{00,ij} = \nabla^2 h_{00}$, entonces

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}. \quad (2.82)$$

Entonces (2.76) queda

$$-\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} = \frac{1}{2}\kappa T_{00}, \quad (2.83)$$

recordando que $h_{00} = -2\phi$ y $T_{00} = \rho$ tenemos

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{2}\kappa \rho, \quad (2.84)$$

pero esto es exactamente (2.64) con $\kappa = 8\pi$ por lo tanto presentamos

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.85)$$

Estas son las llamadas **Ecuaciones de campo de Einstein**.

Capítulo 3

La métrica de Schwarzschild

Habiendo encontrado una manera más general de describir la gravedad como efecto de la curvatura del espaciotiempo, lo que sigue es buscar soluciones a las Ecuaciones de Einstein para saber como es el campo gravitacional generado por alguna distribución de masa y energía. Debido a la forma de estas ecuaciones existen pocas soluciones analíticas, sin embargo, existen sistemas con suficiente número de simetrías que simplifican nuestro problema, ya sea en el tensor de esfuerzo-energía o en el tensor de curvatura. En este trabajo estudiaremos la solución obtenida por Karl Schwarzschild.

3.1. Solución de Schwarzschild

En 1915, Karl Schwarzschild encontró lo que sería la primera solución publicada a las ecuaciones de Einstein. Esta solución describe como es el campo gravitacional en el exterior de un objeto esféricamente simétrico no rotante, por lo que es una muy buena aproximación para la descripción del movimiento de los planetas. Usando coordenadas esféricas

$$x^\mu = (t, r, \theta, \phi).$$

Como dijimos anteriormente la solución debe ser:

- **Esféricamente simétrica.** La solución no dependerá de θ y ϕ , sino solo de r , debido a que queremos describir el campo gravitacional como el del Sol, que solo depende de la distancia entre el objeto masivo y la partícula.
- **Estática.** La solución no debe depender explícitamente del tiempo, ya que el campo gravitacional de un objeto masivo no tiene dependencia temporal.
- **Solución en el vacío.** El tensor de esfuerzo-energía debe ser cero $T_{\mu\nu} = 0$ debido a que queremos representar el espaciotiempo en el exterior del objeto que genera el campo gravitacional y ahí no existe contenido material.

Dado que la métrica es la solución a las ecuaciones de campo, en ella se verán reflejadas las condiciones impuestas. Partimos de los elementos de la métrica escritos en coordenadas esféricas

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tr} & g_{t\theta} & g_{t\phi} \\ g_{rt} & g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\phi} \\ g_{\theta t} & g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi t} & g_{\phi r} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}.$$

Debido a la simetría espacial esférica del problema, todos los términos que involucren combinaciones de r , θ y ϕ se harán cero. Tendremos entonces

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tr} & g_{t\theta} & g_{t\phi} \\ g_{rt} & g_{rr} & 0 & 0 \\ g_{\theta t} & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ g_{\phi t} & 0 & 0 & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}.$$

De igual manera, dado que la solución deberá ser estática el hecho de movernos en una dirección en el tiempo o en otra no afecta la solución, los términos que tengan combinaciones del tiempo con las otras coordenadas también desaparecerán, entonces

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}.$$

La métrica nos ha quedado diagonal como en la Relatividad Especial, esto se debe gracias a la simetría que hemos impuesto en el problema. Lo siguiente que debemos obtener son los términos en la diagonal. Empecemos por comparar con la métrica en coordenadas esféricas de la Relatividad Especial

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix},$$

tendremos que $g_{\theta\theta} = \eta_{\theta\theta}$ y $g_{\phi\phi} = \eta_{\phi\phi}$ y debido que el campo gravitacional solo afectará la componente radial y temporal, de nuevo por la simetría del sistema bajo estudio, proponemos

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\Lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix},$$

y su inversa

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\Lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \text{sen}^{-2} \theta \end{pmatrix}.$$

Hemos propuesto la forma exponencial en g_{tt} y g_{rr} debido a que queremos recuperar el espaciotiempo plano cuando nos encontremos muy lejos del objeto que está generando el campo gravitacional. Esto es, que la métrica sea asintóticamente plana, por ello las funciones $\Phi = \Phi(r)$ y $\Lambda = \Lambda(r)$ deben cumplir con

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \Lambda(r) &= 0. \end{aligned}$$

Ahora nuestra misión es encontrar la forma que tienen Φ y Λ y así poder completar la propuesta. Tenemos que las ecuaciones de campo en el vacío son $G_{\mu\nu} = 0$, pero sabemos que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (3.1)$$

de aquí se sigue que

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (3.2)$$

si aplicamos $g^{\mu\nu}$ en ambos lados tendremos

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}g_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

El término del lado izquierdo de la ecuación es la definición del escalar de Ricci que dimos anteriormente y del lado derecho tenemos la traza de la matriz identidad debido a que tenemos una suma implícita, entonces la ecuación anterior implica que

$$R = 2R, \quad (3.4)$$

esta ecuación solo es válida si $R = 0$ por lo que la ecuación para el campo gravitacional se ha reducido a

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.5)$$

Lo que sigue es encontrar las derivadas de la métrica para construir el tensor de Ricci y de allí encontrar la solución. De la definición del tensor de Ricci como contracción del tensor de Riemann tenemos

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = R^0_{\mu 0\nu} + R^1_{\mu 1\nu} + R^2_{\mu 2\nu} + R^3_{\mu 3\nu}. \quad (3.6)$$

Podemos ver de la definición del tensor de Riemann que el tensor de Ricci depende de los símbolos de Christoffel y sus derivadas, que a su vez son derivadas de la métrica, entonces para poder obtener las componentes de este tensor debemos calcular estas cantidades. Notemos también que tendremos una suma sobre α . Recordemos la forma de los símbolos de Christoffel en (2.12)

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}), \quad (3.7)$$

haciendo $\mu = 0$ y $\nu = 0$ tenemos

$$\Gamma^{\alpha}_{00} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma 0,0} + g_{\sigma 0,0} - g_{00,\sigma}). \quad (3.8)$$

Dejando correr α y dado que la métrica es diagonal tendremos que

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}g^{00} (g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}) \\ \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}g^{11} (g_{10,0} + g_{10,0} - g_{00,1}) \\ \Gamma^2_{00} &= \frac{1}{2}g^{22} (g_{20,0} + g_{20,0} - g_{00,2}) \\ \Gamma^3_{00} &= \frac{1}{2}g^{33} (g_{30,0} + g_{30,0} - g_{00,3}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Analizando la métrica notamos que no hay dependencia de t y ϕ por lo que las derivadas con respecto a estas coordenadas serán cero, tendremos entonces que

$$\Gamma^0_{00} = 0 \quad (3.10)$$

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2}g^{11}g_{00,1} \quad (3.11)$$

$$\Gamma^2_{00} = 0 \quad (3.12)$$

$$\Gamma^3_{00} = 0, \quad (3.13)$$

calculando Γ^1_{00} tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{00} &= -\frac{1}{2}g^{11}g_{00,1} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2\Lambda} (-e^{2\Phi})_{,1} \\ &= \Phi' e^{2(\Phi-\Lambda)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde Φ' significa derivada respecto a r . De igual forma se calculan todos los símbolos de Christoffel para esta métrica. Muchos de ellos serán cero, debido a la forma de $g_{\mu\nu}$ y a la independencia en algunas coordenadas, también, por la simetría $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$ no será necesario calcular muchos de ellos. Tomando en cuenta lo anterior tenemos que los símbolos de Christoffel que sobreviven serán (ver Apéndice A)

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \Phi' & \Gamma_{22}^1 &= -re^{-2\Lambda} & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma_{00}^1 &= \Phi'e^{2(\Phi-\Lambda)} & \Gamma_{33}^1 &= -r\sin^2\theta e^{-2\Lambda} & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{11}^1 &= \Lambda' & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{23}^3 &= \cot\theta.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Habiendo obtenido los símbolos de Christoffel lo siguiente es calcular las componentes del tensor de Ricci. Gracias a que $R_{\mu\nu}$ es diagonal y simétrico no tendremos que calcular todos las componentes ya que algunos serán cero. Así las Ecuaciones de Einstein a resolver son

$$R_{00} = 0 \quad (3.16)$$

$$R_{11} = 0 \quad (3.17)$$

$$R_{22} = 0 \quad (3.18)$$

$$R_{33} = 0. \quad (3.19)$$

Las demás componentes $R_{\mu\nu}$ para $\mu \neq \nu$ son cero. Empecemos por la primera de estas, de (3.6) tenemos que R_{00} es

$$R_{00} = R_{0\alpha 0}^\alpha = R_{000}^0 + R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3, \quad (3.20)$$

calculando término por término y después sustituyendo en (3.20) tenemos

$$R_{000}^0 = \Gamma_{00,0}^0 - \Gamma_{00,0}^0 + \Gamma_{\sigma 0}^0 \Gamma_{00}^\sigma - \Gamma_{\sigma 0}^0 \Gamma_{00}^\sigma. \quad (3.21)$$

Podemos ver en (3.21) que tenemos derivadas respecto al tiempo y estas son de facto cero, además podemos ver como todos los términos se cancelan entre si al ser iguales, entonces $R_{000}^0 = 0$. El siguiente término

$$R_{010}^1 = \Gamma_{00,1}^1 - \Gamma_{01,0}^1 + \Gamma_{\sigma 1}^1 \Gamma_{00}^\sigma - \Gamma_{\sigma 0}^1 \Gamma_{01}^\sigma, \quad (3.22)$$

el segundo término es cero, una vez más, por ser derivada respecto al tiempo, tenemos entonces

$$R_{010}^1 = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{\sigma 1}^1 \Gamma_{00}^\sigma - \Gamma_{\sigma 0}^1 \Gamma_{01}^\sigma. \quad (3.23)$$

Utilizando las expresiones en (3.15), el primer término en (3.23) es

$$\Gamma_{00,1}^1 = \left(\Phi' e^{2(\Phi-\Lambda)} \right)_{,1} = \left[\Phi'' + 2\Phi' (\Phi' - \Lambda') \right] e^{2(\Phi-\Lambda)}. \quad (3.24)$$

De igual forma el segundo y tercer término

$$\begin{aligned}\Gamma_{\sigma 1}^1 \Gamma_{00}^\sigma &= \Gamma_{01}^1 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{00}^3 \\ &= \Phi' \Lambda' e^{2(\Phi-\Lambda)}\end{aligned}\quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\sigma 0}^1 \Gamma_{01}^\sigma &= \Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{20}^1 \Gamma_{01}^2 + \Gamma_{30}^1 \Gamma_{01}^3 \\ &= (\Phi')^2 e^{2(\Phi-\Lambda)}.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Entonces sustituyendo lo anterior en (3.23) tenemos

$$R_{010}^1 = \left[\Phi'' + (\Phi')^2 - \Phi' \Lambda' \right] e^{2(\Phi-\Lambda)}.\quad (3.27)$$

De manera similar podemos calcular R_{020}^2 y R_{030}^3

$$R_{020}^2 = \frac{1}{r} \Phi' e^{2(\Phi-\Lambda)},\quad (3.28)$$

$$R_{030}^3 = \frac{1}{r} \Phi' e^{2(\Phi-\Lambda)}.\quad (3.29)$$

Sumando (3.27), (3.28) y (3.29) y tendremos que (3.20) es

$$R_{00} = \left[\Phi'' + \Phi' \left(\Phi' - \Lambda' + \frac{2}{r} \right) \right] e^{2(\Phi-\Lambda)}.\quad (3.30)$$

El resto de las componentes del tensor de Ricci se calculan de igual manera por lo que podemos escribir

$$R_{00} = \left[\Phi'' + \Phi' \left(\Phi' - \Lambda' + \frac{2}{r} \right) \right] e^{2(\Phi-\Lambda)}\quad (3.31)$$

$$R_{11} = -\Phi'' + \Phi' \left(\Lambda' - \Phi' \right) + \frac{2}{r} \Lambda'\quad (3.32)$$

$$R_{22} = \left[r \left(\Lambda' - \Phi' \right) - 1 \right] e^{-2\Lambda} + 1\quad (3.33)$$

$$R_{33} = \left[\left[r \left(\Lambda' - \Phi' \right) - 1 \right] e^{-2\Lambda} + 1 \right] \text{sen}^2 \theta.\quad (3.34)$$

De tal manera que las Ecuaciones de Einstein a resolver son

$$\Phi'' + \Phi' \left(\Phi' - \Lambda' + \frac{2}{r} \right) = 0\quad (3.35)$$

$$-\Phi'' + \Phi' \left(\Lambda' - \Phi' \right) + \frac{2}{r} \Lambda' = 0\quad (3.36)$$

$$\left[r \left(\Lambda' - \Phi' \right) - 1 \right] e^{-2\Lambda} + 1 = 0\quad (3.37)$$

$$\left[\left[r \left(\Lambda' - \Phi' \right) - 1 \right] e^{-2\Lambda} + 1 \right] \text{sen}^2 \theta = 0.\quad (3.38)$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales para Φ y Λ como funciones de r , a partir del cual podemos encontrar los elementos necesarios para la métrica.

De (3.35) y (3.36) se sigue que

$$\Phi' = -\Lambda'. \quad (3.39)$$

Hemos encontrado una relación entre las derivadas de las funciones, ahora si sustituimos (3.39) en (3.37), tenemos como solución

$$e^{-2\Lambda} = 1 + \frac{\alpha}{r}, \quad (3.40)$$

con α una constante arbitraria. Ahora, como $\Phi + \Lambda = \omega$ entonces

$$e^{2(\Phi+\Lambda)} = \omega, \quad (3.41)$$

con ω constante, de aquí

$$e^{-2\Lambda} = \omega e^{2\Phi} \quad (3.42)$$

Para determinar ω debemos imponer la condición de que el espaciotiempo sea asintóticamente plano, entonces tendremos que $\omega = 1$. Con esto llegamos a la siguiente relación

$$e^{-2\Lambda} = e^{2\Phi}, \quad (3.43)$$

de aquí llegamos también a que

$$e^{2\Phi} = 1 + \frac{\alpha}{r}. \quad (3.44)$$

Acabamos de obtener las componentes g_{tt} y g_{rr} de la métrica. Es claro que estas funciones son asintóticamente planas. Entonces podemos escribir la métrica así

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 + \frac{\alpha}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \frac{\alpha}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Lo que nos falta por hacer es encontrar α e interpretarla en términos de cantidades físicas. Como esta métrica describe el espaciotiempo fuera de un objeto masivo esférico como una estrella o planeta, esperamos recuperar la métrica de campo débil cuando $r \rightarrow \infty$. Tomando este límite tendremos

$$\begin{aligned} g_{tt}(r \rightarrow \infty) &= -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) \\ g_{rr}(r \rightarrow \infty) &= \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right), \end{aligned} \quad (3.45)$$

La métrica de campo débil es por otro lado

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -(1 + 2\phi) \\ g_{rr} &= (1 - 2\phi), \end{aligned} \quad (3.46)$$

con $\phi = -\frac{M}{r}$, entonces (3.45) es igual (3.46) si $\alpha = -2M$ y obtenemos finalmente la **Métrica de Schwarzschild**

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2M}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2M}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

La cual podemos escribir como el intervalo de espaciotiempo

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.48)$$

Podemos identificar un valor especial en la coordenada radial para esta métrica. Cuando $r = 2M$ se define un horizonte que nos separa al espaciotiempo en dos regiones una interior y otra exterior. Para $r > 2M$ seguimos teniendo un comportamiento como lo conocemos pero para cuando $r < 2M$ la parte temporal de la métrica se anula y la parte radial se indefine por lo que no tendremos manera de inferir que es lo que está pasando dentro del horizonte [6].

Finalmente, con los resultados obtenidos podemos obtener los símbolos de Christoffel (3.15) para esta métrica

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & \Gamma_{22}^1 &= -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{11}^1 &= -\frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta. \end{aligned} \quad (3.49)$$

3.2. Cantidades conservadas en la Métrica de Schwarzschild

Dado que nuestro espaciotiempo en estudio es el de Schwarzschild (simetría esférica y estática) los valores de las cantidades conservadas pueden representar trayectorias de manera completa. La geodésica puede es escrita en términos de las componentes del cuadrivector con índices abajo de tal manera que [2]

$$p^\alpha p_{\beta,\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma p^\alpha p_\gamma = 0, \quad (3.50)$$

que puede ser escrita en términos del tiempo propio, entonces

$$m \frac{dp_\beta}{d\tau} = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma p^\alpha p_\gamma. \quad (3.51)$$

Desarrollando el término del lado derecho en (3.50) llegamos a que

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} p^{\alpha} p_{\gamma} &= \frac{1}{2} g^{\gamma\nu} (g_{\nu\beta,\alpha} + g_{\nu\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\nu}) p^{\alpha} p_{\gamma} \\ &= \frac{1}{2} (g_{\nu\beta,\alpha} + g_{\nu\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\nu}) p^{\nu} p^{\alpha}.\end{aligned}\quad (3.52)$$

El producto $p^{\nu} p^{\alpha}$ en (3.52) es simétrico en ν y α , mientras que el primer y tercer término dentro del paréntesis son, juntos, antisimétricos en ν y α . Por lo tanto se cancelan, dejando el término del centro

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} p^{\alpha} p_{\gamma} = \frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\beta} p^{\nu} p^{\alpha}, \quad (3.53)$$

sustituyendo (3.53) en (3.51) tenemos

$$m \frac{dp_{\beta}}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\beta} p^{\nu} p^{\alpha}. \quad (3.54)$$

Tenemos un resultado importante. Si las componentes de la métrica $g_{\alpha\nu}$ son independientes de x^{β} entonces, p_{β} es constante a lo largo de la trayectoria de la partícula.

Independencia temporal en la métrica significa que la componente $-p_0$, es decir la energía, es constante a lo largo del movimiento. Definimos la energía por unidad de masa

$$\tilde{E} \equiv -p_0/m. \quad (3.55)$$

Independencia en ϕ implica que el momento angular p_{ϕ} se conserva. Definimos de igual manera el momento angular por unidad de masa

$$\tilde{L} \equiv p_{\phi}/m. \quad (3.56)$$

Debido a la simetría esférica, sabemos que el movimiento estará siempre confinado en un plano de tal manera que elegimos el plano ecuatorial. Con esto tendremos que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y ya que este ángulo es constante no le asociaremos una conservación a este momento. Las otras componentes del momento son

$$\begin{aligned}p^0 &= g^{00} p_0 = m \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tilde{E} \\ p^r &= m \frac{dr}{d\tau} \\ p^{\phi} &= g^{\phi\phi} p_{\phi} = m \frac{1}{r^2} \tilde{L}.\end{aligned}\quad (3.57)$$

También sabemos que la norma de un vector en relatividad es invariante, en este caso tenemos que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -m^2$, por lo que tendremos que

$$-m^2 \tilde{E}^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + m^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + m^2 \frac{\tilde{L}^2}{r^2} = -m^2. \quad (3.58)$$

Si reacomodamos (3.58) podemos obtener la ecuación para la energía total de una partícula en presencia de un campo gravitacional generado por una masa M

$$\tilde{E}^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right). \quad (3.59)$$

3.3. Geodésicas en la Métrica de Schwarzschild

Conocida la métrica podemos describir el movimiento de los objetos bajo la acción del campo gravitacional generado por la concentración de energía en el espaciotiempo, como dijimos anteriormente estos siguen curvas de mínima longitud, es decir, siguen curvas geodésicas. Entonces de la ecuación para una geodésica tenemos que

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,$$

corriendo las sumas e identificando cuales símbolos de Christoffel sobreviven llegamos a tener que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{M}{r^2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \right] \\ - r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \text{sen}^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \right] &= 0 \\ \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\tau}\right) \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right) - \text{sen} \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\tau}\right) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) + 2 \cot \theta \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Las expresiones para las ecuaciones de movimiento en cada coordenada no nos dan la esperanza de poder encontrar una solución a simple vista a este sistema acoplado. Afortunadamente hemos obtenido, gracias a las simetrías que nos proporciona la métrica, constantes de movimiento, con lo cual el sistema formado por las cuatro ecuaciones anteriores se reduce a

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tilde{E} \quad (3.60)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2}. \quad (3.61)$$

Estas ecuaciones junto con (3.59) forman el sistema de ecuaciones que describen el movimiento

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tilde{E} \quad (3.62)$$

$$\tilde{E}^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \quad (3.63)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2}. \quad (3.64)$$

En este trabajo buscaremos las soluciones en un sistema de referencia que observa que los objetos orbitantes caen hacia un horizonte, bastará con las descripciones de r y ϕ en términos del tiempo propio τ . Si consideráramos el sistema completo, obtendríamos las soluciones vistas por un observador lejano cuyo tiempo es t y habrá dilatación tanto temporal como espacial.

3.4. Potencial efectivo en la métrica de Schwarzschild

En la Mecánica Clásica podemos construir un potencial efectivo, que nos permite analizar el tipo de movimiento de una partícula sujeta al efecto de la gravedad, en la Métrica de Schwarzschild podemos definir un potencial efectivo reescribiendo (3.63) como

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - {}^{\prime}\tilde{V}^{\prime 2}(r), \quad (3.65)$$

con

$${}^{\prime}\tilde{V}^{\prime 2}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right). \quad (3.66)$$

Como se hizo para el caso clásico identificamos ${}^{\prime}\tilde{V}^{\prime 2}(r)$ como el cuadrado del potencial efectivo, que es, el término que le restamos al cuadrado de la energía para tener la energía cinética. Existen dos características novedosas en la expresión para el potencial efectivo: Una de ellas es el hecho de que todos los términos estén al cuadrado, la otra es que para valores de r muy grandes el potencial tenderá a uno al contrario del potencial clásico que tiende a cero.

Estas dos situaciones son características de la Relatividad. Para la primera sabemos que en Relatividad no podemos distinguir entre diferentes formas de energía, la energía potencial, la energía cinética todas se convierten en una sola entidad en el término \tilde{E} . Es por ello que no podemos decir que ${}^{\prime}\tilde{V}^{\prime}(r)$ es de hecho la energía potencial, sino solo una herramienta para visualizar la componente radial de las trayectorias de las partículas. Para la segunda sabemos que al alejarnos de la fuente del campo gravitacional recuperamos la Relatividad Especial donde la energía en ese punto es la masa en reposo y dado que $\tilde{E} = \frac{E}{m}$ entonces $\tilde{E} = 1$.

El potencial efectivo tiene la característica de que para una M , m y r fijas, solo dependerá del momento angular de la partícula y no de su energía. En la Figura 3.1 hemos graficado el

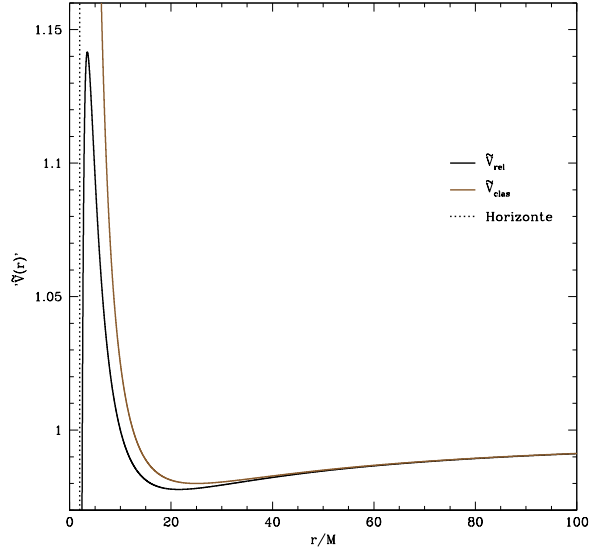


Figura 3.1: Potenciales efectivos clásico y relativista

potencial efectivo clásico más uno, esto lo hacemos para añadirle la energía del reposo y para poder compararlos para un valor dado de la energía. En el eje vertical tenemos el potencial efectivo por unidad de masa y en el eje horizontal tenemos la distancia normalizada con la masa del centro atractor. Hemos elegido el valor de $\tilde{L} = 5M$ ya que para este valor de momento angular podemos tener un análisis más rico de las posibles trayectorias.

Podemos ver en la gráfica que ' \tilde{V} ' tiene dos puntos críticos, un máximo y un mínimo al contrario del clásico que solo cuenta con un mínimo, esta es una de las características más notables para el caso relativista. Si analizamos (3.66) podemos notar que tenemos un término cúbico atractivo lo que hace que sea más fuerte a distancias más cortas que no estaban permitidas anteriormente. También tenemos más valores permitidos para la energía en el pozo del potencial lo que se traduce en más trayectorias.

Ahora calculemos los puntos críticos de ' \tilde{V} ' de la manera que conocemos, obtenemos entonces

$$r_c = \frac{\tilde{L}^2}{2M} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{L}^2}} \right]. \quad (3.67)$$

Aplicando el criterio de la segunda derivada para saber cual de los dos valores en (3.67) llegamos

a que

$$r_{min} = \frac{\tilde{L}^2}{2M} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{L}^2}} \right], \quad (3.68)$$

y

$$r_{max} = \frac{\tilde{L}^2}{2M} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{12M^2}{\tilde{L}^2}} \right], \quad (3.69)$$

donde r_{min} y r_{max} corresponden al mínimo y al máximo del potencial respectivamente. También hemos encontrado una cota al momento angular para que (3.67) sea consistente $\tilde{L} \geq \sqrt{12}M$. Si sustituimos ese valor en los puntos críticos llegamos a que $r_{min} = r_{max} = 6M$. Otra consecuencia de esta cota es que podemos garantizar la existencia de un máximo para valores de \tilde{L} muy grandes en donde el valor mínimo es $r_{max} = 3M$ que es mayor al horizonte. Como sabemos del análisis

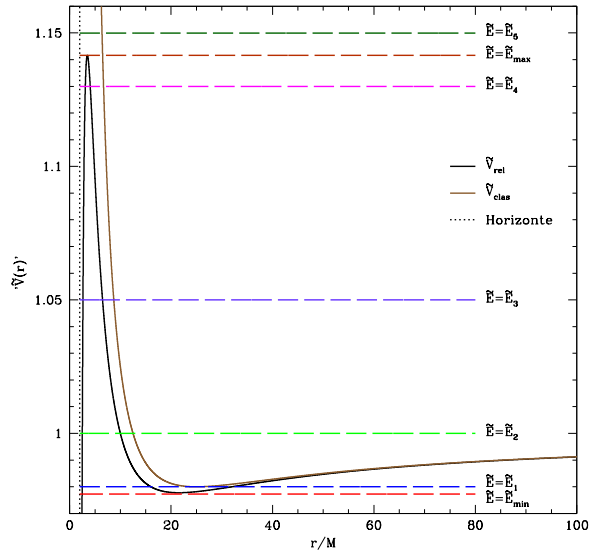


Figura 3.2: En esta figura podemos ver diferentes valores de energía permitidas en el potencial efectivo

del potencial efectivo en la Mecánica Clásica, para un valor fijo de la energía de una partícula tendremos diferentes tipos de trayectorias para un observador que se mueve con la partícula:

- Si la energía coincide con \tilde{E}_{min} , es decir, con la energía del mínimo del potencial, la partícula seguirá una órbita circular estable.
- Cuando la partícula tenga \tilde{E}_{max} , la energía del máximo, seguirá una órbita circular inestable, en contraste con el caso clásico en el cual no tenemos un máximo en el potencial.

- Para energías $\tilde{E}_{min} < \tilde{E} < \tilde{E}_2$, como \tilde{E}_1 , tendremos órbitas ligadas acotadas en dos puntos de retorno, que de manera clásica sería una órbita elíptica.
- En el caso que $\tilde{E} = \tilde{E}_2 = 1$ tendremos una órbita con un solo punto de retorno, es decir, una órbita abierta que por comparación con el caso clásico la denotamos como una órbita parabólica.
- Si la energía toma valores como \tilde{E}_3 y \tilde{E}_4 seguiremos teniendo órbitas abiertas, que serían hiperbólicas en el caso no relativista.
- Si la partícula tiene una energía mayor a \tilde{E}_{max} , como \tilde{E}_5 ya no habrá un punto de retorno y caerá al horizonte.

Capítulo 4

Estudio numérico de las órbitas

Ya hemos descrito cualitativamente las ecuaciones de movimiento de una partícula que se mueve sobre la curvatura provocada por un objeto masivo con la ayuda del potencial efectivo, el paso siguiente es conocer como serán las trayectorias. Al escribir la ecuación de la geodésica para cada coordenada obtuvimos un sistema de cuatro ecuaciones de segundo orden no lineales acopladas. Gracias a las simetrías del espaciotiempo de Schwarzschild pudimos reducir el problema a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

En este capítulo presentaremos las soluciones a las ecuaciones de movimiento para una partícula que se mueve bajo la influencia del campo gravitacional en la Métrica de Schwarzschild.

4.1. Solución numérica a las ecuaciones de movimiento

Del capítulo anterior tenemos que las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tilde{E} \quad (4.1)$$

$$\tilde{E}^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \quad (4.2)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2}. \quad (4.3)$$

Ahora tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, cuya forma implica que no pueden ser resueltas en términos de funciones ordinarias, esto se debe a que tenemos un término proporcional a $\frac{1}{r^3}$ que lleva a que la solución se exprese en términos de integrales elípticas. Pero este no es el final del camino gracias a que contamos con la ayuda del análisis numérico. Con él podemos obtener, con muy buena precisión, una solución al problema [10].

Existen distintos métodos para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales, para este caso utilizaremos el método de Runge-Kutta de cuarto orden (*RK4*) [8], este método consiste en aproximar la función solución en un intervalo partido en tres mediante una serie de Taylor, sin

recurrir al cálculo de derivadas superiores. Un factor muy importante en este método numérico es el tamaño de paso h el cual fija el tamaño de las particiones del intervalo en el cual estemos integrando la solución. La exactitud del *RK4* dependerá de que tan grande o pequeña sea h .

El análisis numérico va de la mano del uso de computadoras, es por ello que haremos uso de esta herramienta elaborando un programa en lenguaje Fortran 90 (ver Apéndice B) que nos ayudará a calcular de manera rápida la solución al problema. Esta solución se calculó en una maquina tipo Intel con procesador Core 2 Quad Q9550, 8Gb de memoria RAM DDRII y capacidad de disco duro combinada de 1Tb.

Debido que estamos usando una herramienta numérica debemos tener en cuenta que solamente podemos dar una aproximación a la solución por lo que entran en juego los errores. En este caso tendremos dos tipos: error de truncamiento o de redondeo que consiste en tomar cierto número de decimales de un número y el error por aproximación que se debe a la diferencia entre el valor real de la solución y el de la solución aproximada. Para el método de Runge-Kutta de orden arbitrario, n , podemos escribir el error total como la suma de ellos [8]

$$\epsilon \sim \frac{\xi}{h} + h^n \quad (4.4)$$

Donde ξ es un número que tiene que ver con la precisión de las variables que estemos usando (en nuestro caso $\xi = 1 \times 10^{-15}$), h es el tamaño de paso que mencionamos anteriormente y n el orden del método que utilizamos. El primer término de la ecuación anterior nos representa el error por aproximación mientras que el segundo el de truncamiento. Siempre debemos procurar que el error total sea el menor posible, una manera de hacerlo sería hacer el tamaño de paso muy pequeño pero esto haría que el error por aproximación crezca, por ello debemos encontrar la relación adecuada entre h y ϵ . Notemos que el error es función del tamaño de paso, por lo tanto podemos encontrar una h tal que ϵ sea mínimo. Con esto llegamos a que

$$h_0 \sim \xi^{\frac{1}{n+1}} \quad (4.5)$$

Entonces el error mínimo que tendremos será

$$\epsilon_0 \sim \xi^{\frac{n}{n+1}} \quad (4.6)$$

Sustituyendo el valor de ξ llegamos a que $\epsilon_0 \sim 1 \times 10^{-12}$ y $h_0 \sim 10^{-3}$.

Para conocer la solución a una ecuación diferencial de manera completa debemos saber como son sus condiciones iniciales ya que estas son las que definirán su forma particular. En este

problema tendremos cuatro condiciones iniciales debido al orden de las ecuaciones, al encontrar constantes de movimiento, solo quedan de manera explícita como condiciones iniciales las posiciones iniciales $r(0) = r_0$ y $\phi(0) = \phi_0$, las otras se verán reflejadas en el momento angular y energía total.

Como dijimos en el capítulo anterior, el momento angular define al potencial efectivo, así que para cada trayectoria bastará con definir la energía que tendrá la partícula. Hemos escogido $\tilde{L} = 5M$ para el momento angular de todas las trayectorias y $\phi_0 = \pi$ como el ángulo inicial, esto solo lo escogemos así para tener una buena visualización de las soluciones al momento de graficarlas.

En los puntos de retorno del potencial efectivo, la velocidad de la partícula se hace cero. Al salir de cada uno de ellos, deberá cambiar el signo que traía, por la naturaleza de las expresiones, esta es una condición que debemos imponer en el programa. Así, pedimos que con cierta tolerancia le cambie el signo a la velocidad, cuidando que dicha tolerancia ser menor al tamaño de paso escogido.

Las soluciones a las ecuaciones diferenciales que nos proporcionó el programa las obtuvimos en un promedio de unos cuantos segundos a máximo un minuto, esto gracias al tipo de maquina que mencionamos anteriormente.

En las secciones siguientes presentamos las soluciones para distintas condiciones iniciales de energía. Para cada caso, en las figuras presentamos dos gráficas: Una que nos representa el potencial efectivo, así como la energía correspondiente a la órbita; en su eje vertical se representa el potencial efectivo por unidad de masa y en su eje horizontal se representa la distancia normalizada con la masa del centro atractor. La otra gráfica nos representa el plano de la órbita, en su eje vertical tenemos la coordenada Y y en su eje horizontal la coordenada X , ambas normalizadas con la masa del centro atractor.

4.2. Órbita circular estable

Cuando la energía corresponde a E_{min} tendremos un órbita circular estable. Dado que utilizamos un método numérico para aproximar la solución es importante mencionar que los números en el programa tendrán una precisión dada por la maquina que usemos, por lo que debemos de tener cuidado a la hora de dar nuestras condiciones iniciales.

En la Figura 4.1 tenemos la órbita circular estable la cual tiene como condición inicial a una

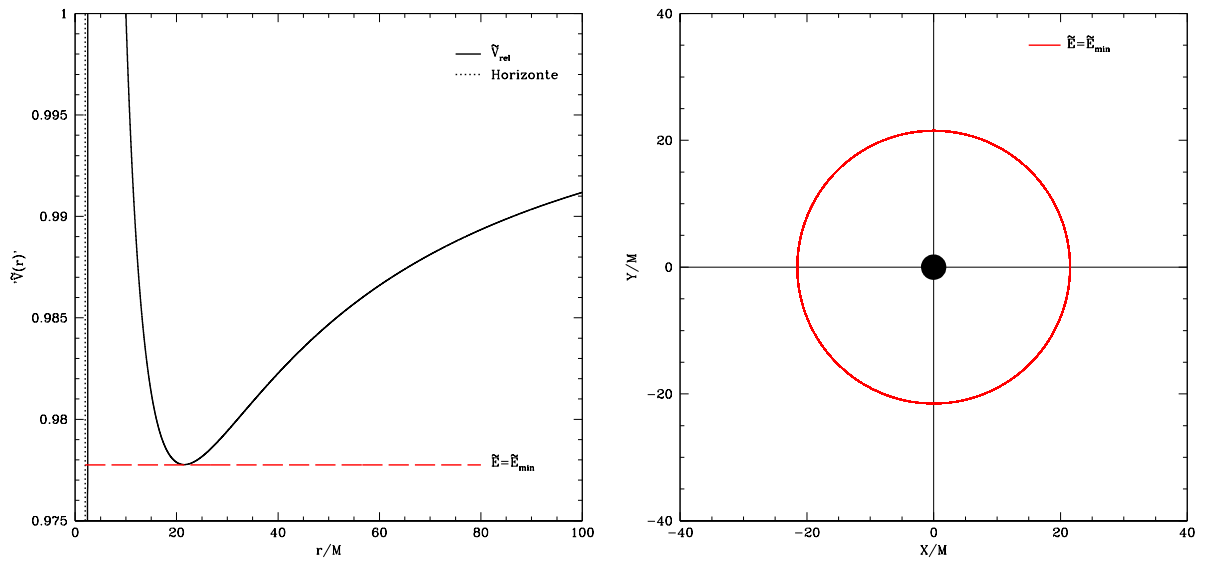


Figura 4.1: La gráfica de la izquierda nos muestra el potencial efectivo, así como la energía correspondiente a la órbita circular estable. En el eje vertical se representa el potencial efectivo por unidad de masa y en el eje horizontal se representa la distancia normalizada con la masa del centro atractor. La gráfica de la derecha nos representa el plano de la órbita, en el eje vertical tenemos la coordenada Y y en el eje horizontal la coordenada X , ambas normalizadas con la masa del centro atractor. El círculo negro central corresponde a la región limitada por el horizonte.

$r_0 = 21.51M$ que es cercana a r_{min} en el potencial efectivo y con una energía de $\tilde{E} = 0.9777$, esto se debe a que tenemos cierta precisión en los números por lo que es difícil fijar como condición inicial exactamente el mínimo del potencial.

4.3. Órbitas precesantes

Si la energía es superior a la del mínimo pero menor que uno tendremos dos puntos de retorno en el potencial efectivo, pero a diferencia del caso clásico corresponderán a órbitas que presentan precesión, es decir, al momento de completar un ciclo de 2π no regresará al mismo lugar en el que inició. Una manera de calcular esto es considerar órbitas casi circulares lo cual se refleja en despreciar términos y resolver la ecuación para la órbita.

En la Figura 4.2 hemos escogido $r_0 = 21M$ y la energía que corresponde a la del mínimo en el potencial clásico $\tilde{E} = 0.98$, para notar como es que se modifica el movimiento en el nuevo potencial. La órbita no regresa al mismo lugar después de una vuelta, esto se hace más evidente

conforme dejemos correr el tiempo en nuestro programa. Debido a que la energía que escogimos está aún muy cerca del mínimo, los efectos causados por el potencial efectivo relativista hacen que la órbita sea casi circular.

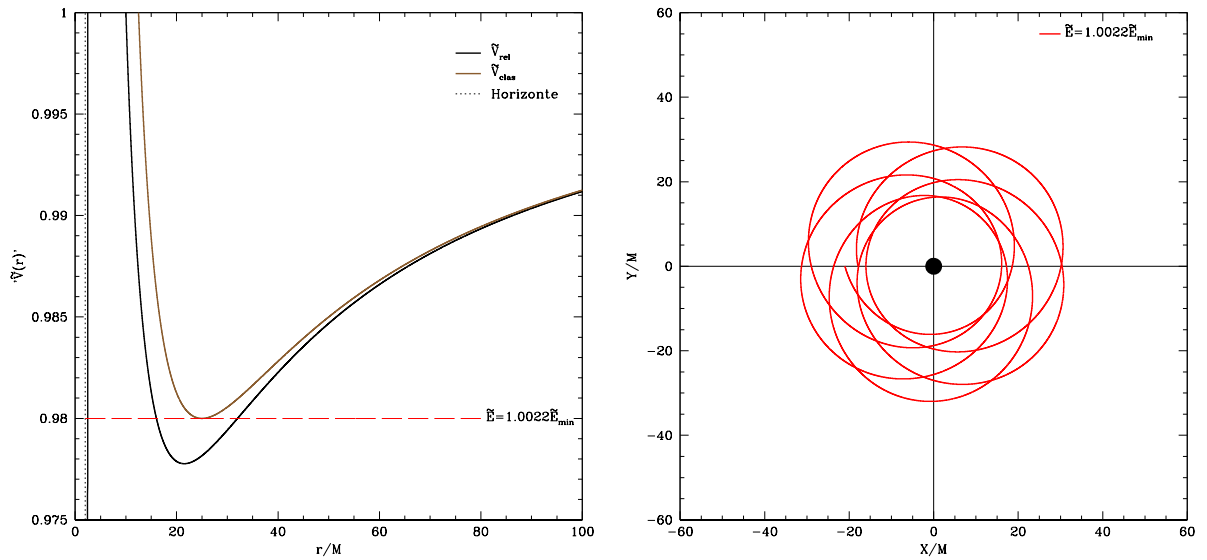


Figura 4.2: De igual manera que en la figura anterior tenemos en el lado izquierdo a los potenciales efectivos clásico y relativista, así como la energía correspondiente a una órbita casi circular precesante, esta energía coincide con el mínimo clásico. En el lado derecho tenemos la trayectoria en el plano del movimiento. El círculo negro central corresponde a la región limitada por el horizonte.

En la Figura 4.3 hemos escogido una energía tal que los puntos de retorno en el potencial para que la órbita sea más elíptica. Notemos que el análisis del potencial efectivo predice una elipse, pero uno de los focos de esta se mueve conforme el tiempo avanza, haciendo más evidente el efecto de precesión en la órbita. Como condiciones iniciales tenemos $r_0 = 21M$ y $\tilde{E} = 0.99$.

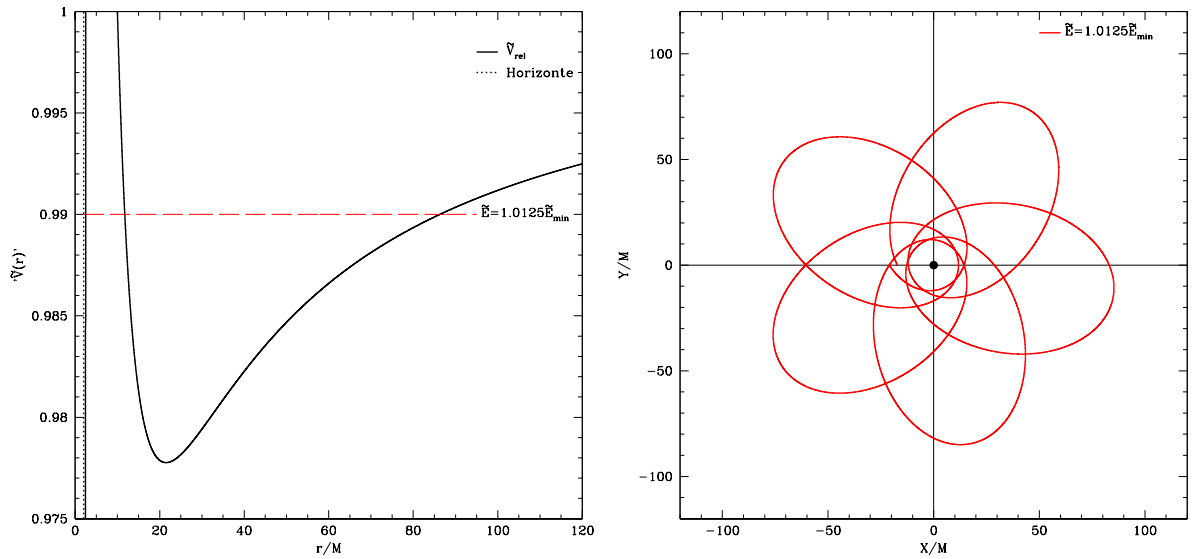


Figura 4.3: Similarmente a las figuras anteriores, en la gráfica del lado izquierdo tenemos el potencial efectivo, así como la energía correspondiente a una órbita elíptica precesante. Del lado derecho mostramos la trayectoria en el plano del movimiento. El círculo negro central corresponde a la región limitada por el horizonte.

4.4. Órbitas Abiertas

Si tenemos como condición inicial un valor de la energía de tal manera que corresponda a la de la energía del reposo de la partícula, $\tilde{E} = 1$, solo tendremos un punto de retorno y la órbita será abierta. A partir de este valor de energía o para valores superiores, pero inferiores al máximo del potencial efectivo, todas las trayectorias serán abiertas y con condición inicial $r_0 = 20M$.

En la Figura 4.4 hemos graficado órbitas con distintos valores para la energía, esto con la finalidad de mostrar como es que el nuevo potencial efectivo afecta las trayectorias de las partículas. Las órbitas que obtenemos ya no tienen un análogo con las clásicas como es el caso de las órbitas circulares y elípticas que preservan su forma pero precesan. Este tipo de órbitas se asemejan a las parábolas e hipérbolas en el sentido de tener un solo punto de retorno y ser abiertas pero ya no son simétricas respecto al centro atractor. Conforme aumentamos la energía y nos acercamos al máximo la órbita tiende a tomar una trayectoria más circular; incluso al grado de cerrarse en si misma, pero sin llegar a convertirse en una órbita circular.

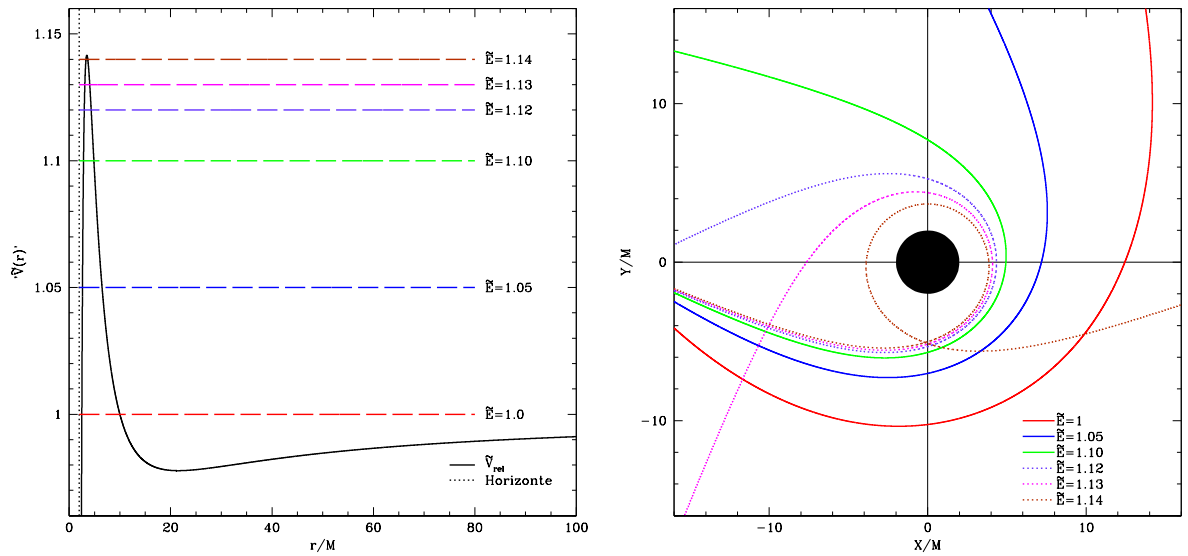


Figura 4.4: Al igual que las figuras anteriores la gráfica del lado izquierdo tenemos al potencial efectivo, así como las energías correspondientes a las órbitas abiertas. Del lado derecho mostramos las trayectorias en el plano del movimiento. El círculo negro central corresponde a la región limitada por el horizonte.

4.5. Órbita circular inestable

Ya hemos analizado el movimiento de una partícula cuando su energía corresponde a la del mínimo ahora toca estudiar como se comportan las órbitas cuando la energía es muy cercana a la del máximo del potencial ya sea por debajo o por encima de este. Como dijimos anteriormente el hecho de que un potencial cuente con un máximo nos da como resultado una órbita circular inestable, como condición inicial para las órbitas tenemos $r_0 = 20M$.

Debido a que hemos resuelto las ecuaciones de movimiento numéricamente, contamos con una cierta precisión debemos tener muy en cuenta a la hora de escoger los valores de la energía para este caso. En la Figura 4.5 hemos graficado órbitas que son abiertas o que caen al horizonte y difieren de la del máximo en 10^{-9} lo cual nos muestra cuan inestables son las trayectorias en esta región. También vemos que la partícula tiende a seguir una órbita circular por cierto tiempo cuyo radio corresponde al radio del máximo del potencial.

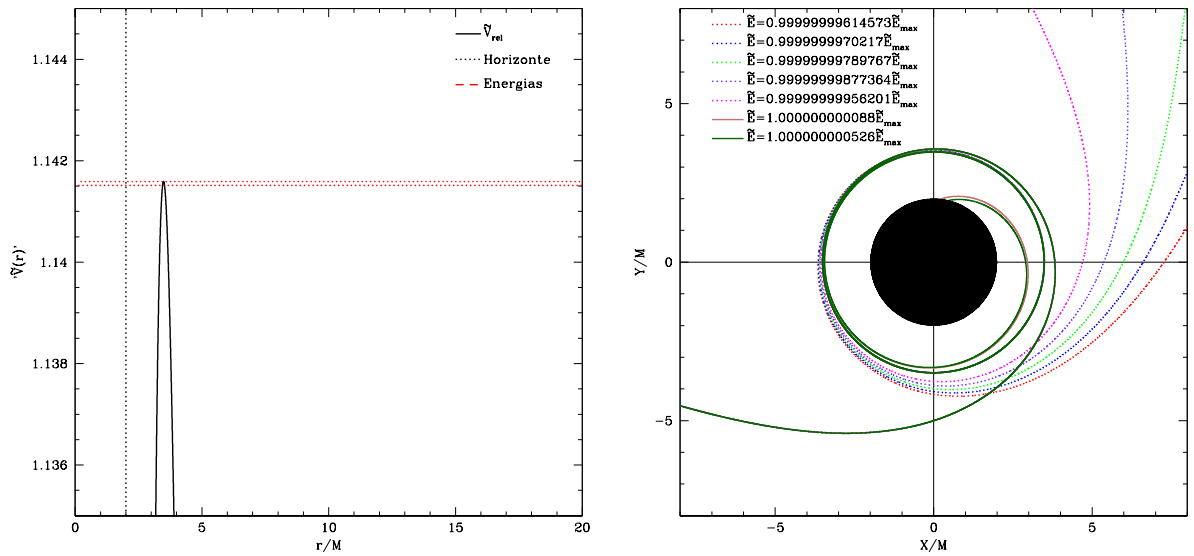


Figura 4.5: En la gráfica del lado izquierdo tenemos al potencia efectivo, así como las energías cercanas a la de la órbita circular inestable. Del lado derecho mostramos las trayectorias en el plano del movimiento. El círculo negro central corresponde a la región limitada por el horizonte.

4.6. Órbita que cae al horizonte

Cuando la energía de la partícula es lo suficientemente grande de tal manera que está por encima del máximo, su movimiento ya no tendrá un punto de retorno por lo que la partícula se dirigirá al horizonte. Entre más alta sea la energía de la partícula su órbita será más balística y tenderá menos a ocupar regiones alrededor del centro atractor.

En la Figura 4.6 podemos notar que las órbitas ya no cuentan con un punto de retorno debido a los valores de energía que escogimos. Como condición inicial para las órbitas tenemos que $r_0 = 20M$.

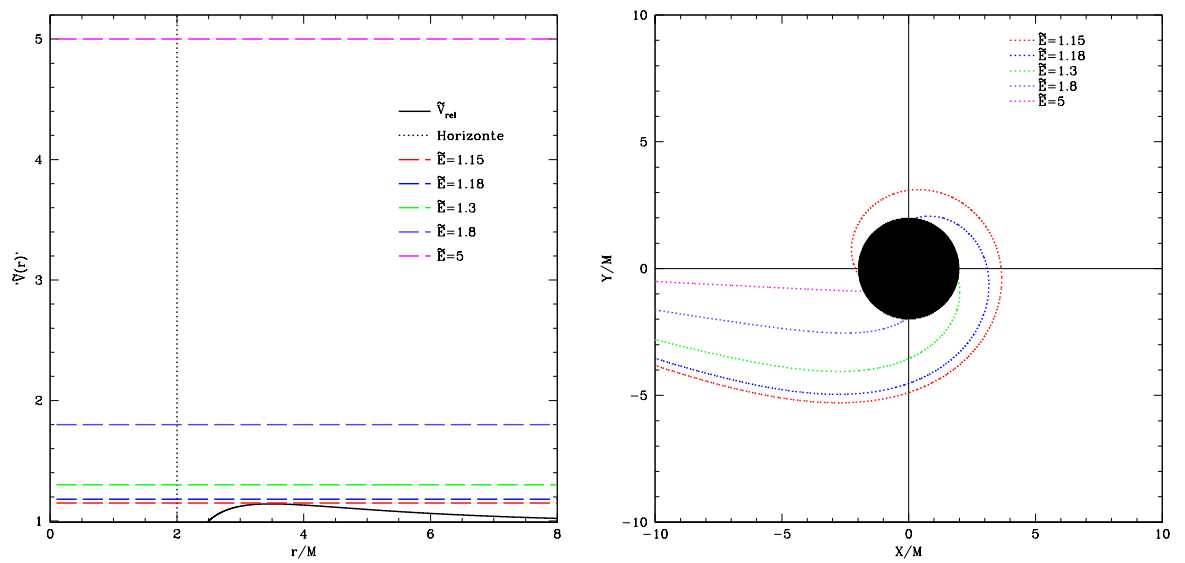


Figura 4.6: En la gráfica del lado izquierdo tenemos al potencial efectivo, así como las energías correspondientes a las de órbitas que caen al horizonte. Del lado derecho mostramos las trayectorias en el plano del movimiento. El círculo negro central corresponde a la región limitada por el horizonte.

Conclusiones

En este trabajo resolvimos numéricamente las ecuaciones de movimiento para una partícula que se mueve en el espaciotiempo de Schwarzschild.

Para ello primero analizamos el caso clásico mediante la formulación lagrangiana, encontrando dos cantidades que se conservan: el momento angular, L , y la energía mecánica total, E . En la solución al problema clásico pudimos obtener:

$$r(\phi) = \frac{r_0(1 + \epsilon)}{1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)}$$

con ϵ su excentricidad, cantidad que es función de la energía y nos permite tener distintos tipos de órbitas.

Después, estudiamos la Relatividad Especial y nos trajo como consecuencia la concepción del espacio y el tiempo como manifestaciones de un mismo objeto: el espaciotiempo. Debido a la constancia de la velocidad de la luz, definimos una nueva manera de medir las distancias mediante la métrica del espaciotiempo:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso encontramos que su forma es muy sencilla, en general su forma depende de las características del espaciotiempo. Para espaciotiempos arbitrarios, la métrica, \mathbf{g} , es un objeto que toma dos vectores y nos arroja el producto punto entre ellos, por lo que nos da información sobre la geometría.

Al definir vectores en el espaciotiempo pudimos replantear los conceptos de la Mecánica Clásica: velocidad, aceleración y momento. Introdujimos el concepto de tensor como un objeto que toma vectores y nos da como resultado un número real. Para describir de manera más general el contenido material de una región en el espaciotiempo introdujimos el tensor de energía-momento T y llegamos a que, al igual que en la Mecánica Clásica, existe una ley de conservación:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

El flujo de la energía y el momento a través de un elemento de volumen será constante. Esto y el hecho de que los tensores no dependen de las coordenadas nos ayudó a construir una teoría más general, que también describe a la interacción gravitacional.

Al estudiar espaciotiempos curvos notamos que la derivada de un vector ya no es la misma que conocíamos ya que en el espacio plano los vectores de la base son constantes, pero en general pueden cambiar tanto de magnitud, dirección y sentido, por lo que llegamos a la definición de derivada covariante:

$$V^\alpha{}_{;\beta} = V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha$$

Con la ayuda de esta definición y el concepto de transporte paralelo construimos la manera de medir la curvatura de un espaciotiempo plano, para obtener el tensor de Riemann R .

Más adelante, encontramos como se relacionan la curvatura del espaciotiempo y el contenido energético mediante las Ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Del lado izquierdo de la ecuación tenemos el tensor de Einstein, que se relaciona con el tensor de Riemann, que nos dice como es la curvatura y del lado derecho tenemos el tensor de energía-momento que nos describe el contenido energético, ambos para una región de espaciotiempo. La materia le dice al espaciotiempo como curvarse y el espaciotiempo a su vez le dice a la materia como acomodarse.

Existen distintas soluciones a las Ecuaciones de Einstein, pero en este trabajo nos concentramos en la solución que describe el espaciotiempo en el exterior de un objeto esférico que no rota ni tiene carga, y obtuvimos la llamada Métrica de Schwarzschild. En esta métrica el intervalo de espaciotiempo se escribe como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Una vez obtenida la métrica, el siguiente paso fue encontrar las ecuaciones de movimiento para un partícula que se mueve en este espaciotiempo:

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tilde{E}$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2}$$

El problema original consistía en un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, pero gracias a las simetrías en la métrica de Schwarzschild, encontramos constantes de movimiento que redujeron el problema a resolver el sistema anterior. En este trabajo buscamos soluciones en un sistema de referencia que observa que los objetos orbitantes caen hacia un horizonte, y bastó con describir a r y ϕ en términos del tiempo propio τ . A partir de la ecuación para r definimos el potencial efectivo:

$${}^{\prime}\tilde{V}^{\prime 2}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)$$

Que nos fue de mucha utilidad para visualizar que tipo de órbitas están permitidas.

Debido a la forma de las ecuaciones de movimiento tuvimos que resolver numéricamente mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden pero, para obtener una solución lo más exacta posible buscamos que relación hay entre el error total y el tamaño de paso, ésto lo hicimos minimizando ϵ en función de h y encontramos que:

$$h_0 \sim \xi^{\frac{1}{n+1}} \quad \epsilon_0 \sim \xi^{\frac{n}{n+1}}$$

así el mínimo error que podemos cometer es $\epsilon_0 \sim 1 \times 10^{-12}$ con un tamaño de paso $h_0 \sim 10^{-3}$.

Una vez encontrada la manera de hacer más preciso a nuestro método numérico, resolvimos para distintas condiciones iniciales de energía para obtener las órbitas:

- **Órbita circular estable e inestable.** Debido que resolvimos numéricamente las ecuaciones de movimiento, escoger la condición inicial para la energía para el mínimo y el máximo del potencial fue complicado. Para la órbita circular estable dimos $\tilde{E} = 0.9777$ y aseguramos que existiera una órbita con radio $r_0 = 21.51M$. En la región cercana al máximo del potencial notamos la inestabilidad de las órbitas al punto de que aun en diferencias de 10^{-9} en los valores de la energía hay una órbita abierta o una que cae al horizonte.
- **Órbitas precesantes.** Para energías mayores a la del mínimo del potencial obtuvimos órbitas que al transcurrir un periodo de revolución no regresaban al mismo lugar, es decir, precesaban. Esta característica es nueva y no se presentó en el caso clásico.
- **Órbitas abiertas.** Solo existe un punto de retorno y conforme aumentamos la energía la órbita trató más de seguir la órbita circular inestable hasta el punto de cerrarse en sí misma.

-
- **Órbita que cae al horizonte.** Ya no tenemos punto de retorno y la partícula se dirigió directamente al horizonte, conforme aumentamos la energía la partícula se dirigía más balísticamente hacia él.

Apéndice A

Cálculo de los símbolos de Christoffel no nulos

De la misma manera que calculamos el símbolo Γ_{00}^1 podemos calcular todos los símbolos de Christoffel para la Métrica de Schwarzschild.

Recordando las expresiones para la métrica y su inversa del capítulo tres tenemos

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\Lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}$$
$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\Lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \text{sen}^{-2} \theta \end{pmatrix}.$$

Y los símbolos de Christoffel en el capítulo dos

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (\text{A.1})$$

Con esto, calculamos todos los símbolos no nulos

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} g_{00,1} \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2\Phi} (-2\Phi' e^{2\Phi}) \\ &= \Phi'. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} g_{11,1} \\ &= \frac{1}{2} e^{-2\Lambda} (2\Lambda' e^{2\Lambda}) \\ &= \Lambda'. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2}g^{11}g_{22,1} \\
&= -\frac{1}{2}(2r)e^{-2\Lambda} \\
&= -re^{-2\Lambda}.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2}g^{11}g_{33,1} \\
&= -\frac{1}{2}(-e^{-2\Lambda})(2r\text{sen}^2\theta) \\
&= -r\text{sen}^2e^{-2\Lambda}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}g_{22,1} \\
&= \frac{1}{2}(r^2\text{sen}^2\theta)(2r\text{sen}^2\theta) \\
&= \frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2}g^{22}g_{33,2} \\
&= -\frac{1}{2}r^{-2}(2r^2\text{sen}\theta\cos\theta) \\
&= -\text{sen}\theta\cos\theta.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}g_{33,1} \\
&= \frac{1}{2}(r^2\text{sen}^2\theta)^{-1}(2r\text{sen}^2\theta) \\
&= \frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}g_{33,2} \\
&= \frac{1}{2}(r^2\text{sen}^2\theta)^{-2}(2r^2\text{sen}\theta\cos\theta) \\
&= \cot\theta.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Apéndice B

Código fuente del programa en Fortran 90

En este trabajo resolvimos numéricamente las ecuaciones de movimiento de una partícula que se mueve en la métrica de Schwarzschild. Para ello realizamos un programa en Fortran 90 que a continuación presentamos.

```
!  
! orrel.f90  
!  
! Programa que resuelve numéricamente las ecuaciones de movimiento para una  
! partícula en la Métrica de Schwarzschild, con el método de Runge-Kutta de  
! cuarto orden.  
!  
! Las variables de entrada son:  
! E : Energía de la partícula  
! L : Momento angular de la partícula  
! phi_0: Condición inicial en phi  
! r_0: Condición inicial en r  
! h: Tamaño de paso  
! m: Número de ciclos de 2 pi  
! nmax: Número máximo de pasos  
!  
! Las variables de salida son:  
! t: Tiempo  
! r: Solución en r  
! phi: Solución en phi  
! rdot(r,L,E): Velocidad en r  
! phidot(r,L): Velocidad en phi  
!  
! Elaborado por: Alan Aganza Torres (aaganza@correo.fisica.uson.mx)  
!  
!
```

```
PROGRAM orbita

IMPLICIT NONE

!Doble precision de las variables reales
INTEGER, PARAMETER :: dp=selected_real_kind(12,37)
INTEGER :: n=0

!Declaracion de variables y funciones externas
REAL(kind=dp) :: E,L,phi,r,r_0,h,t,phi_0,k1,k2,k3,k4,m,nmax
REAL(kind=dp), PARAMETER :: pi=4.0_dp*datan(1.0D0)
REAL(kind=dp), EXTERNAL :: phidot,rdot
INTEGER :: i

!Variables de caracter para los archivos de salida
CHARACTER(len=30) :: file1
CHARACTER(len=17) :: file2

!Lectura de parametros iniciales
PRINT *, "Parametros iniciales"
PRINT *, "Energia"
READ *,E
PRINT *, "Momento angular"
READ *, L
PRINT *, "r inicial"
READ *, r_0
PRINT *, "phi inicial"
READ *, phi_0
PRINT *, "Tamano del paso"
READ *, h
PRINT *, "No. de vueltas"
READ *, m
PRINT *, "No. maximo de pasos"
READ *, nmax

!Los primeros datos de salida
r=r_0
phi=phi_0
t=0.0_dp
```

```
!Formato al archivo de salida
28 FORMAT (A,F17.15,A)
WRITE(file1,28) "salida",E,".dat"
!Abrimos archivo de salida
OPEN(10,file=file1,status="unknown")

!Inicia el metodo de Runge-Kutta para resolver la ecuacion de la orbita
DO
n=n+1
t=t+h
!Solucion para r
k1=rdot(r,L,E)
k2=rdot(r+0.5_dp*h*k1,L,E)
k3=rdot(r+0.5_dp*h*k2,L,E)
k4=rdot(r+h*k3,L,E)
r = r + (h/6.0_dp)*(k1+2.0_dp*k2+2.0_dp*k3+k4)

!Solucion para phi
k1=phidot(r,L)
k2=phidot(r+0.5_dp*h*k1,L)
k3=phidot(r+0.5_dp*h*k2,L)
k4=phidot(r+h*k3,L)
phi = phi + (h/6.0_dp)*(k1+2.0_dp*k2+2.0_dp*k3+k4)

!Imprimimos en el archivo la solucion
WRITE(10,*) t,r,phi,rdot(r,L,E),phidot(r,L)

!Si en nuestro programa deseamos obtener orbitas cerradas, como la circular
!estable ponemos condicion que el programa se detenga en cierto valor de phi
IF(phi>16*pi)EXIT

!De no ser asi, pedimos que el programa se detenga en cierto numero de pasos
!que debemos especificar
!IF(n>nmax)EXIT
END DO

!Cerramos el archivo de salida
CLOSE (10)
```

```
END PROGRAM orbita

!
!           Funciones externas en el programa
!

!Ecuacion diferencial para r
FUNCTION rdot(r,L,E)
INTEGER, PARAMETER :: dp=selected_real_kind(12,37)
REAL(kind=dp) :: rdot,signo=1.0_dp
REAL(kind=dp) :: E,L,r
rdot= -dsqrt((E**2)-(1.0_dp-(2.0_dp/r))*(1.0_dp+(L**2/r**2)))

!Condicion sobre la velocidad, al acercarse con cierta tolerancia
!a los puntos de retorno, la particula debe cambiar su velocidad
IF(abs(rdot)<0.0001_dp)THEN
signo=-1.0_dp*signo
END IF
rdot=signo*rdot
END FUNCTION rdot

!Ecuacion diferencial para phi
FUNCTION phidot(r,L)
INTEGER, PARAMETER :: dp=selected_real_kind(12,37)
REAL(kind=dp) :: r,L,phidot
phidot=L/r**2
END FUNCTION phidot
```

Bibliografía

- [1] Goldstein, H. *Classical Mechanics*. Adisson Wesley; 3^a edición (2002). ISBN: 0-201-65702-3.
- [2] Schutz, B. *A First Course in General Relativity*. Cambridge; 2^a edición (2009). ISBN: 978-0-521-88705-2.
- [3] Carroll S. M. *Lecture Notes on General Relativity*. arXiv:gr-qc/9712019 (1997).
- [4] Pound, R. V., Snider, J. L. *Effect of Gravity on Gamma Radiation*. **Phys. Rev. B** **140**, 788(1965).
- [5] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company; 1^a edición (1973). ISBN: 0-7167-0344-0
- [6] Taylor E. F., Wheeler J. A. *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*. Adisson Wesley Longman; 1^a edición (2000). ISBN: 0-201-38423-X.
- [7] Taylor E. F., Wheeler J. A. *Spacetime Physics*. Freeman; 2^a edición (1992). ISBN: 0-7167-2327-1.
- [8] Carnahan, B., Luther H. A., Wilkes J. *Applied Numerical Methods*. Wiley; 1^a edición (1969). ISBN: 0-471-13507-0.
- [9] Will, C. M. *The confrontation between general relativity and experiment*. **Living Rev. Relativity** **9**, 3. (2006).
- [10] Wang, F. *Relativistic orbits with computer algebra*. **Am.J.Phys.** **72**, 1040(2004).