



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas



TESIS

***"Propuesta didáctica para promover el concepto de volumen
en estudiantes de secundaria"***

Para obtener el grado de:

**MAESTRA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA
EDUCATIVA**

Presenta:

Carolina Espinoza Fragozo

Directoras de Tesis:

Dra. María Mercedes Chacara Montes

Dra. María Antonieta Rodríguez Ibarra

Hermosillo, Sonora

Marzo 2023

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Hermosillo, Sonora. 17 de MARZO del 2023.

Asunto: Cesión de derechos

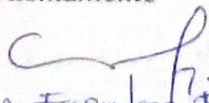
Universidad de Sonora
Presente


Por este conducto hago constar que soy autor y titular de la obra denominada "PROPUESTA DIDÁCTICA PARA PROMOVER EL CONCEPTO DE VOLUMEN EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA", en los sucesivo LA OBRA, realizada como trabajo terminal con el propósito de obtener el Grado de MAESTRA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, en virtud de lo cual autorizo a la Universidad de Sonora (UNISON) para que efectúe la divulgación, publicación, comunicación pública, distribución pública, distribución electrónica y reproducción, así como la digitalización de la misma, con fines académicos o propios de la institución y se integre a los repositorios de la universidad, estatales, regionales, nacionales e internacionales.

La UNISON se compromete a respetar en todo momento mi autoría y a otorgarme el crédito correspondiente en todas las actividades mencionadas anteriormente.

De la misma manera, manifiesto que el contenido académico, literario, la edición y en general cualquier parte de LA OBRA son de mi entera responsabilidad, por lo que deslindo a la UNISON por cualquier violación a los derechos de autor y/o propiedad intelectual y/o cualquier responsabilidad relacionada con la OBRA que cometa el suscrito frente a terceros.

Atentamente


Carolina Espinoza Fragoso
Nombre y firma del autor


LIC. GILBERTO LEÓN LEÓN
Abogado General
UNIVERSIDAD DE SONORA

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la oportunidad de financiar mis estudios de posgrado, permitiéndome continuar con mi preparación académica y cumplir una meta más en mi vida profesional.

A todos los profesores que me acompañaron en mi paso por el Posgrado en Matemática Educativa, por guiarme en este proceso. Especialmente, a mis directoras de tesis Dra. María Mercedes Chacara Montes y Dra. María Antonieta Rodríguez Ibarra, por su apoyo, motivación y amabilidad desde el primer día.

Al ser que está allá arriba, sea cuerpo o energía, por haberme puesto en el lugar y momento indicado.

Dedico este trabajo a mi mamá, por ser mi mejor amiga y mi mayor ejemplo de disciplina, superación, entrega y, sobre todo, fuerza. Todos mis éxitos son gracias a ti.

A mi papá, por siempre confiar en mis capacidades y haber sido el más grande admirador de mis logros. Sé que lo sigues siendo desde donde te encuentras. Ya falta menos.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
I. PROBLEMÁTICA Y JUSTIFICACIÓN.....	3
I.1. Panorama General de las Matemáticas en la Educación Secundaria	3
I.2. Ubicación curricular del concepto de volumen.....	5
I.3. El Concepto de Volumen en Pruebas Estandarizadas	7
I.3.1. PLANEA.....	8
I.4. Dificultades Relacionadas al Concepto de Volumen.....	11
I.5. El Concepto de Volumen en los Libros de Texto	14
II. ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DEL PROYECTO DE INTERVENCIÓN.....	21
II.1. Propuestas Relacionadas con el Concepto de Volumen	22
II.2. Estudios Relativos a la Visualización.....	24
II.3. Objetivos	27
II.3.1. Objetivo General.....	27
II.3.2. Objetivos Específicos	27
III. CONSIDERACIONES TEÓRICAS	27
III.1. Operaciones Figurales de Duval.....	28
III.2. Referentes Teóricos de la Metodología de Diseño de Alvarado	32
III.2.1. Etapa Preliminar	33
III.2.2. Etapa de Apertura.....	34
III.2.3. Etapa de Desarrollo	34
III.2.4. Etapa de Cierre.....	35
III.3. Características de la Propuesta Didáctica	37
IV. CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS	38

IV.1. Etapa de Revisión Documental	38
IV.2. Etapa de Diseño de Actividades	41
IV.2.1. Justificación Teórica y Metodológica de las Secuencias	42
Secuencia “Albercas”	43
Secuencia “Monolitos”	49
IV.3. Etapa de Implementación	53
IV.4. Etapa de Valoración	54
V. ANÁLISIS DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA	56
V.1. Secuencia Monolitos	56
V.2. Secuencia Albercas	76
VI. CONCLUSIONES	100
VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	109
ANEXOS	113

INTRODUCCIÓN

Considerando la importancia que representa el concepto de volumen en los planes y programas de estudio del nivel secundaria (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017a), el tratamiento limitado que se le brinda en los libros de texto, y las dificultades que han sido reportadas por diversos autores relacionadas a los procesos de aprendizaje y enseñanza del concepto; se presenta en este documento un proyecto de intervención que gira en torno al concepto de volumen en el nivel secundaria, realizado como parte del programa de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora.

Este consistió en el diseño, implementación y valoración de una propuesta didáctica que toma en cuenta las aportaciones de Díaz Barriga y Hitt retomadas en Alvarado (2019), al incorporar aspectos de la teoría de Operaciones Figurales de Duval (2017), así como el diseño de applets en GeoGebra, con el objetivo de promover el concepto de volumen a través de situaciones que no impliquen solamente la aplicación directa de las fórmulas. A continuación, se describe el contenido de cada uno de los capítulos que estructuran el documento.

En el Capítulo I se muestra un panorama general de las matemáticas en el nivel secundaria, la ubicación curricular del concepto de volumen, la presencia de problemas relacionados con este concepto en algunas pruebas estandarizadas tales como PISA y PLANEA, las dificultades reportadas por algunos autores en los procesos de aprendizaje y enseñanza del concepto, y el tratamiento propuesto en algunos libros de texto oficiales; lo anterior con la intención de reconocer el tema de este trabajo como una problemática dentro de la educación matemática y los elementos que justifican su selección.

En cuanto a la revisión bibliográfica acerca del concepto de volumen, en el Capítulo II se dan a conocer los criterios con los cuales se lleva a cabo la revisión y organización de los resultados obtenidos sobre las propuestas de ciertos autores referentes a dicho concepto para su presentación y análisis, así como el planteamiento de los objetivos general y específicos del proyecto de intervención.

Posteriormente, en el Capítulo III se abordan las consideraciones teóricas en las que se fundamenta la intervención didáctica y que incorporan las aportaciones de Díaz Barriga y Hitt retomadas en la metodología de diseño de Alvarado (2019), así como elementos de la teoría de Operaciones Figurales de Duval (2017). Las consideraciones metodológicas están descritas en el Capítulo IV e incluyen las características de la revisión documental, el diseño de las secuencias didácticas y la implementación y valoración de la propuesta didáctica.

Para finalizar, en el Capítulo V se presenta el análisis de la propuesta didáctica diseñada, el cual consiste en el análisis y valoración general de las dos secuencias que la conforman, para dar lugar al Capítulo VI en donde se abordan las conclusiones del proyecto de intervención mencionando el nivel de concreción de los objetivos general y específicos, las posibles modificaciones al proyecto y las líneas de trabajo a futuro.

I. PROBLEMÁTICA Y JUSTIFICACIÓN

I.1. Panorama General de las Matemáticas en la Educación Secundaria

En México, la educación secundaria corresponde al tercer y último nivel de la educación básica, en el cual se pretende que las niñas, niños y adolescentes de entre 11 y 15 años terminen por alcanzar el perfil de egreso marcado en el plan y programas de estudio de este nivel.

De acuerdo con el documento *Aprendizajes Clave para la Educación Integral* (SEP, 2017a) la atención debe ir dirigida al desarrollo de un conjunto de aprendizajes clave, como su título lo indica, que favorezcan al desarrollo integral del alumno y lo posibilite para continuar aprendiendo de manera constante aun cuando termine su educación básica. Estos aprendizajes se encuentran categorizados en los distintos campos formativos de la educación básica, siendo de interés en esta ocasión el campo formativo de *Pensamiento Matemático*.

Una de las características del campo formativo en cuestión, es que tiene como principal enfoque pedagógico la resolución de problemas abordados en una naturaleza dual, como meta de aprendizaje y como medio para desarrollar competencias matemáticas asociadas a las áreas de aritmética, álgebra, geometría, estadística y probabilidad. Por esta razón, este campo formativo se encuentra organizado en tres ejes centrales: Número, Álgebra y Variación; Forma, Espacio y Medida, y Análisis de Datos, siendo de particular interés para este proyecto de intervención el segundo de ellos.

Como se mencionaba con anterioridad, los planes y programas de estudio establecen un perfil de egreso para el nivel secundaria que, a su vez, representa el

término de la educación básica. En el caso de Matemáticas se establecen líneas de progreso, las cuales consideran una transición por parte de los alumnos:

- a. De resolver problemas con ayuda a resolver problemas de manera autónoma.
- b. De utilizar justificaciones pragmáticas al uso de propiedades.
- c. De la utilización de procedimientos informales a procedimientos formales. (SEP, 2017a)

De acuerdo con este perfil de egreso y haciendo referencia al eje de interés *Forma, Espacio y Medida*, la importancia del estudio de las figuras y los cuerpos geométricos recae en propiciar la formulación de conjeturas o hipótesis y su validación, lo que conlleva a iniciar a los alumnos en el razonamiento deductivo, el cual, en conjunto con la apropiación de un vocabulario geométrico, fungirán como herramientas para la resolución de problemas escolares y extraescolares relacionados con este eje.

Dentro de los propósitos planteados para este nivel educativo, se indica que el alumno debe razonar deductivamente al identificar y usar propiedades de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares y del círculo, así como generalizar procedimientos para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de distintas figuras y cuerpos geométricos.

Después de la revisión del plan y programa de estudios de matemáticas para la educación secundaria, específicamente del eje *Forma, Espacio y Medida*, y poniendo énfasis en los propósitos que se establecen para este nivel educativo, se aborda como tema central en el presente trabajo la resolución de situaciones que impliquen el concepto de volumen de distintos cuerpos geométricos.

I.2. Ubicación curricular del concepto de volumen

El concepto de volumen está presente en gran parte del currículo de la educación básica, en particular, en la escuela secundaria se estudia el cálculo del volumen de distintos cuerpos geométricos. Dentro de los aprendizajes esperados en 1^{er} grado, se aborda este concepto mediante el desarrollo y la aplicación de fórmulas para calcular el volumen de prismas rectos que tengan como base un triángulo o un cuadrilátero. De igual manera, esto se plantea para 2^o grado, pero incluyendo también el cálculo del volumen de cilindros rectos.

Según las orientaciones didácticas propuestas en el documento *Aprendizajes Clave para la Educación Integral* (SEP, 2017a), con el manejo de este concepto matemático, se espera que los alumnos realicen conjeturas acerca de la obtención del volumen a partir de la multiplicación del área de su base por la altura del prisma en cuestión, determinando de esta manera una fórmula para su cálculo y el de las distintas variables involucradas en ella. Así mismo, se pretende contribuir a la resolución de problemas que impliquen el conocimiento de otros contenidos matemáticos tales como su relación con la capacidad y sus distintas magnitudes.

Eje	Tema	Primaria		Secundaria		
		5°	6°	1°	2°	3°
Forma, Espacio y Medida	Magnitudes y Medidas	Aprendizajes Esperados				
		Estima, compara y ordena el volumen de prismas cuya base sea un cuadrilátero mediante el conteo de cubos.	Calcula el volumen de prismas rectos cuya base sea un triángulo o un cuadrilátero, desarrollando y aplicando fórmulas.	Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.		

Tabla 1: Concepto de Volumen en la Educación Básica. Fuente: Elaborada a partir de (SEP, 2017a, p.177)

Es importante señalar que de acuerdo con el programa de estudios anterior (SEP, 2011), el concepto de volumen era abordado en los 3 grados del nivel secundaria. Específicamente, en 3^{er} grado de secundaria se abordaba en el período correspondiente al bloque V, considerando la construcción de fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides; y la estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas. Sin embargo, al actualizarse los planes y programas de estudio en el año 2017, el documento de Aprendizajes Clave para la Educación Integral no considera al concepto de volumen para este grado escolar.

Dentro de los 31 libros de texto de matemáticas avalados actualmente por la Secretaría de Educación Pública para el 3^{er} grado de secundaria, es posible detectar que todos abordan el concepto de volumen en sus lecciones, identificándose una inconsistencia entre el plan de estudios vigente y los libros de texto que son utilizados en 3^{er} grado de secundaria, desconociendo si las rutas de aprendizaje y evaluación que están siendo tomadas por los docentes están apegadas al plan de estudios o a los libros de texto utilizados.

Por otra parte, revisando los programas del nivel básico y medio superior, es posible identificar que el concepto de volumen no es un contenido aislado, ya que antes del nivel secundaria, en 5^o y 6^o grado de primaria, se plantea la estimación, la comparación y el orden de volumen de prismas rectos con base cuadrangular por medio del conteo de cubos o paralelepípedos (Tabla 1).

Así mismo, después de la educación básica, en los planes y programas de estudio de la educación media superior, dentro de la asignatura de Geometría y Trigonometría

cursada en el 2° semestre de bachillerato, se declara como aprendizaje esperado que el alumno signifique las fórmulas de volumen de cuerpos sólidos (SEP, 2017b). Por tal motivo, es indispensable que exista una articulación entre los distintos niveles educativos con el fin de facilitar la trayectoria académica de las niñas, niños y adolescentes mexicanos (Tabla 2).

Eje	Componentes	Matemáticas II		
		Contenido Central	Contenido Específico	Aprendizaje Esperado
Del tratamiento del espacio, la forma y la medida, a los pensamientos, geométrico y trigonométrico.	Estructura y transformación: Elementos básicos de la Geometría.	El estudio de las figuras geométricas y sus propiedades.	Patrones y fórmulas de volúmenes de figuras geométricas.	Significa fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas con el uso de materiales concretos y digitales.

Tabla 2: Concepto de Volumen en la Educación Media Superior. Fuente: Elaborada a partir de (SEP, 2017b, p.105)

Debido a la presencia e importancia que tiene el concepto de volumen en los planes y programas de estudio en los distintos niveles educativos, especialmente en el del nivel secundaria, este trabajo toma como base la problemática que surge a partir de las distintas dificultades en el aprendizaje y enseñanza de este concepto, las cuales se abordarán en las siguientes secciones.

I.3. El Concepto de Volumen en Pruebas Estandarizadas

Como primer acercamiento a indicadores que muestren la existencia de una problemática alrededor de la educación matemática en los últimos años, se encuentran las pruebas estandarizadas. En México, existe la prueba PLANEA (Plan Nacional para

la Evaluación de los Aprendizajes) aplicada a los estudiantes de nivel secundaria, de la cual a continuación se hace una breve descripción y se presentan algunos resultados.

I.3.1. PLANEA

Con base en la prueba PLANEA aplicada a estudiantes de 3^{er} grado de secundaria, el nivel de dominio obtenido en el área de matemáticas por parte de los estudiantes se clasifica en cuatro niveles.

Los resultados obtenidos en el año 2017 muestran que el 64.5% de los estudiantes que realizaron la prueba obtuvieron un dominio correspondiente al Nivel I, 21.7% al Nivel II, 8.6% al Nivel III y 5.1% al Nivel IV. (INEE, 2018) Estos resultados, muestran que el 64.5% de los estudiantes se ubicaron en el nivel más bajo en el área de matemáticas.

Si bien, lo que se reporta aquí no es un análisis detallado respecto a la prueba mencionada, los resultados reportados brindan elementos para reconocer que existe una problemática alrededor de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel básico, que es susceptible de estudio y que es de interés en este trabajo.

- **Reactivos Liberados**

Haciendo una revisión de los reactivos aplicados en la prueba PLANEA 2015, se pudieron identificar algunos que hacen referencia al concepto de volumen, los cuales se diferencian por requerir el desarrollo de distintas habilidades para su solución.

A continuación, se muestran dos de los reactivos revisados en los cuales se puede observar dicha diferencia en su tratamiento:

a) Problema sobre el volumen de un prisma triangular

Calcule el volumen de la siguiente figura:

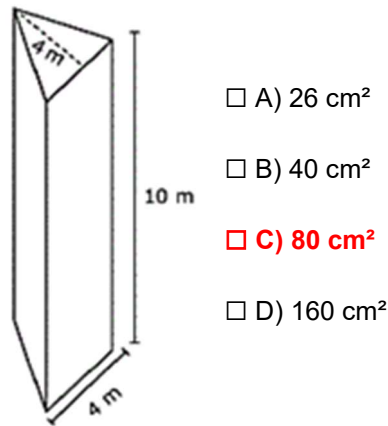


Figura 1: Reactivo Liberado (PLANEA, 2015)

Haciendo un análisis al reactivo, se puede apreciar el descuido en el diseño, pues si bien, el inciso C) (marcado en rojo) se declara la respuesta correcta, no es así. Las unidades parecieran no importar, pues en las cuatro opciones de respuesta se tienen cm², que no corresponden con lo solicitado. Además, las medidas del prisma triangular están dadas en metros. En este caso, los resultados de este reactivo no nos arrojarían información confiable respecto al estado que guarda el volumen en los estudiantes, aún más, pone de manifiesto la confiabilidad de la prueba.

Sin embargo, podemos reconocer que para contestar de manera correcta la pregunta del reactivo, las y los estudiantes tienen que aplicar de manera directa la fórmula del volumen del prisma triangular a partir de las dimensiones señaladas en la figura.

b) Problema paquetes de mensajería

Una mensajería transportará paquetes rectangulares en la caja de una camioneta con las dimensiones que se muestran en la figura. Los paquetes se acomodarán en la posición que muestra. ¿Cuántos paquetes como máximo se pueden cargar?

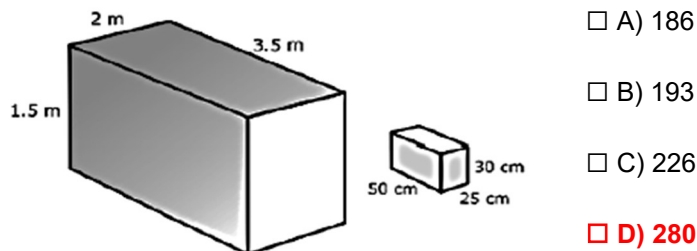


Figura 2: Reactivo Liberado (PLANEA, 2015)

En este reactivo también es posible identificar que hay descuidos en el uso del lenguaje. La situación menciona “paquetes rectangulares”, que si bien, podría entenderse a lo que se refiere sobre todo apoyándose de la figura, no es la manera adecuada.

Dejando de lado los errores señalados en el diseño de los ítems y haciendo una comparación entre lo que suponemos que es la intención con la que se diseñaron, es notoria la diferencia entre éstos. Pues para resolver el reactivo b), las y los estudiantes deben tener un mayor significado del concepto, que va más allá de la aplicación inmediata de una fórmula; la resolución les demanda la identificación de relaciones, cálculos todo esto dentro de un contexto extra matemático.

Para una resolución correcta de este reactivo, es posible que el alumno haya determinado la cantidad de paquetes que caben a lo largo, ancho y alto de la caja de la camioneta por medio de la relación de las medidas de ésta con las medidas del paquete,

para posteriormente poder aplicar la fórmula para la obtención del volumen multiplicando entre sí el número de paquetes que caben en cada una de las dimensiones antes mencionadas.

Como se puede observar, el reactivo b) implica un nivel mayor de dominio del concepto de volumen, pues lo que se requiere para resolverlo va más allá de conocer y aplicar directamente la fórmula de volumen.

El análisis de estos reactivos nos permite dar cuenta de que existen dificultades asociadas al diseño de los ítems, pero también, considerando los niveles alcanzados por las y los estudiantes nos permite cuestionarnos acerca del significado que se tiene del concepto volumen y nos invita a que desde la Matemática Educativa se puedan proponer acciones concretas para su mejora.

I.4. Dificultades Relacionadas al Concepto de Volumen

Profundizando en la problemática que existe en torno al concepto de volumen, diversos autores en sus investigaciones han reportado la existencia de dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de este concepto, las cuales están relacionadas con diferentes aspectos que se mencionarán en este apartado.

Una primera dificultad es la existencia de varios términos de nuestro lenguaje, tal como el término “capacidad”, que son utilizados frecuentemente como sinónimos para hacer referencia a la cualidad de volumen de los cuerpos. Sin embargo, al referirse a conceptos diferentes, la utilización errónea de estos términos tiende a crear confusiones por parte de los estudiantes al momento de enfrentarse a situaciones problema. Del Olmo, Moreno y Gil (1993) mencionan que el tratamiento dado a los términos “volumen”

y “capacidad” debe ser de manera conjunta debido a que no se cuenta con ningún modelo matemático para la capacidad por sí misma, por lo que es necesario recurrir a la idea de volumen para brindarle a este término un tratamiento matemático. En este trabajo entendemos “capacidad” como espacio vacío con posibilidad de ser llenado y “volumen” como espacio ocupado por un cuerpo.

De igual forma, Sandoval, Lupiáñez, y Moctezuma (2016) también abordan las dificultades que se presentan en el aprendizaje del volumen de cuerpos geométricos relacionadas con su estrecha relación con la capacidad, como, por ejemplo, la necesidad de utilizar medidas de volumen para medir capacidades o la dificultad para diferenciar los conceptos matemático y físico de volumen.

En conjunto con lo anterior, distintas investigaciones han apoyado la idea de que los estudiantes comúnmente presentan dificultades al momento de relacionar y diferenciar el volumen con otras magnitudes, específicamente con el área, confundiendo el volumen de un sólido con su superficie (Sanchis y Guillen, 2013). Esta confusión principalmente se manifiesta en el vocabulario utilizado por los estudiantes “en vez de utilizar la palabra “cubitos”, los denominan “cuadrados”” (Sanmiguel y Salinas, 2011).

Otra dificultad que se ha reportado por distintos autores es la aparición espontánea de la multiplicación de tres dimensiones lineales como método para determinar el volumen de algún cuerpo. Chamorro (2003) señala que la adquisición del concepto de volumen va más allá de la aplicación memorística de una fórmula y supone una serie de dificultades. En particular,

el cálculo de un volumen con relación a otro, usando el número de veces que es mayor cada dimensión el primero del segundo, resulta una tarea muy compleja para la mayoría de los alumnos entre 11 y 15 años, de forma que tan solo en torno a los 15 años es resuelta satisfactoriamente por algo más de la mitad de los alumnos. (p.270).

Como ejemplo de este tipo de situaciones, tenemos el caso del reactivo b) de la prueba PLANEA 2015 revisado en el apartado I.3.1. de este documento, en el cual se necesita poner en práctica el concepto de volumen y la comparación de dos cuerpos por medio de sus dimensiones lineales para conocer las veces que cabe un cuerpo en uno más grande.

Prosiguiendo con las dificultades que giran en torno al concepto de volumen, distintos autores como Sanmiguel y Salinas (2011) señalan que es común que los estudiantes de nivel secundaria prefieran emplear estrategias aritméticas como el recuento de cubos, mostrando de esta forma un bajo nivel de comprensión del volumen para este nivel educativo, ante otras estrategias como el concepto tridimensional del volumen y la estructura multiplicativa del volumen. Lo anterior provocando que entre más abstracto sea el cuerpo del cual se desea calcular su volumen, exista un mayor índice de fracaso por los estudiantes.

Particularmente referente al tema que se aborda en este trabajo, Del Olmo et al. (1993) mencionan que algunas de las dificultades que los niños encuentran en la medida del volumen pueden estar originadas por el hecho de que son forzados a “leer” y visualizar información sobre objetos sólidos a partir de gráficos, sin haber manipulado previamente dichos objetos. “No dominan la visualización espacial, es decir, carecen de

la habilidad de manipular mentalmente, rotar, doblar o invertir un objeto representado en forma gráfica” (p.120).

Por tal motivo, considerando la existencia de las distintas dificultades que surgen en el aprendizaje del concepto de volumen reportadas por los autores en las citas mencionadas en este apartado, se puede identificar un área de investigación para atender esta problemática, haciendo énfasis en la importancia del papel que juega la visualización.

I.5. El Concepto de Volumen en los Libros de Texto

Con la intención de conocer los distintos tratamientos que se da al concepto de volumen en los libros de texto de matemáticas utilizados en el nivel secundaria, se realizó una revisión de los libros de la serie Conecta Más de 1^{er} grado (Block, García & Balbuena, 2018), 2^o grado (Block, García & Balbuena, 2019) y 3^{er} grado (García, S., Mendoza, García, J. & Block, 2014) de la editorial Ediciones SM. Estos libros fueron seleccionados por encontrarse dentro de los autorizados por la Secretaría de Educación Pública para su uso en las escuelas a nivel nacional.

En el caso del libro de 1^{er} grado *Matemáticas 1. Conecta Más*, se identifican 7 lecciones dedicadas a abordar el concepto de volumen. Dentro de la primera lección, se plantean actividades de introducción al concepto de volumen en las cuales se pretende que las y los estudiantes comiencen comparando de manera empírica el volumen de objetos, planteando cuestionamientos relacionados a técnicas como la inmersión de sólidos y el conteo de cubos, sin embargo, estas técnicas son declaradas y no construidas por el estudiante.

Posteriormente, en una segunda lección, se plantean actividades que proponen la relación entre la cantidad de cubos que conforman un prisma recto y la suma del área total de sus caras para dar lugar al cálculo de volumen mediante la multiplicación del largo de la base por el ancho de la base por la altura del prisma, lo cual se aborda después como el resultado de la multiplicación del área de la base por la altura del prisma (Figura 3).

1. Expresa el volumen de cada cuerpo en centímetros cúbicos. Observa que en algunos casos las medidas se indican con cubitos (cm³).

Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Comenten en qué se fijaron para poder obtener el volumen de cada prisma. Después, discutan la información del recuadro.

Dado que al multiplicar largo por ancho de la base de un prisma rectangular se obtiene el área de la base, el volumen también se puede calcular de la siguiente manera:

volumen de un prisma rectangular = área de la base × altura del prisma.

Figura 23: Actividades estructura multiplicativa del volumen. *Matemáticas 1. Conecta Más. Editorial Ediciones SM. p.136*

En el ejercicio 1 se puede apreciar un aumento en el grado de complejidad de los primeros cuatro casos para pasar al último prisma, en donde se tienen que usar unidades de medidas no enteras, se termina la actividad enunciando la fórmula para calcular el volumen de un prisma rectangular. Consideramos que la actividad no es autosuficiente, es decir, se necesita de la guía del docente para que esta se pueda concretar.

A partir del planteamiento de la estructura multiplicativa del volumen, las siguientes 4 lecciones son dedicadas a que el estudiante resuelva problemas mediante

la aplicación de esta fórmula para el cálculo del volumen o de alguna de las variables participantes de prismas rectos que tengan como base un triángulo o un cuadrilátero.

Finalmente, en la última lección dedicada a este concepto, se plantean actividades relacionadas al cálculo de la capacidad con la utilización de unidades de volumen. No obstante, en ninguna de las 7 lecciones se identifican actividades que establezcan las diferencias entre los conceptos de volumen y capacidad, ni actividades que promuevan la visualización.

Para el caso del libro *Matemáticas 2. Conecta Más* para 2° grado, se identifican 5 lecciones en las cuales se aborda el concepto de volumen. Las primeras 2 lecciones parten de que el estudiante reconoce a la multiplicación del área de la base de un prisma por la altura de éste como fórmula para el cálculo de su volumen, por lo tanto, las actividades son encaminadas a la aplicación directa de esta fórmula abordada en el libro de 1er grado, pero incluyendo prismas rectos de base poligonal y cilindros rectos.

En las 2 lecciones siguientes, se proponen actividades enfocadas a que el estudiante reconozca el desarrollo plano de prismas y cilindros, y lo relacione con su volumen. En estas lecciones se identifica la construcción de manipulables como apoyo para las actividades planteadas, de las cuales es posible promover aspectos de la visualización (Figura 4).

Sin embargo, si analizamos con mayor cuidado la actividad propuesta en la Figura 4, aunque reconocemos como importante la idea de que se trabaje con materiales manipulables, podemos notar cómo el tamaño de las hojas (verdes y azules) son distintas, lo cual no debería de ser dada la situación planteada, además, considerando

las dimensiones reales de una hoja de papel tamaño carta (21.6 cm x 27.9 cm), no parece una medida conveniente para la actividad porque requiere que las y los estudiantes se involucren con medidas no enteras que podrían complicar la actividad haciendo que se perdiera el objetivo de la misma.

4. Consigan una hoja de papel tamaño carta. Con ella pueden hacer dos cilindros diferentes.

a) Sin hacer cálculos, ¿estiman que ambos cilindros tendrán el mismo volumen? Justifiquen su respuesta.

	Cilindro verde	Cilindro azul
Altura del cilindro (cm)		
Radio de la base (cm)		
Área de la base (cm ²)		
Volumen (cm ³)		

b) ¿Qué cilindro tiene mayor volumen? _____

Figura 4: Actividades con Desarrollos Planos. Matemáticas 2. Conecta Más. Editorial Ediciones SM. p.171

La 5^{ta} y última lección dedicada al concepto de volumen en este libro de texto, plantea actividades sobre su relación con la capacidad. En esta lección se abordan problemas de aplicación directa de la fórmula del volumen, y solo un problema que pudiera promover la visualización (Figura 5). En él, se requiere un mayor dominio del concepto de volumen por parte de los estudiantes, pues no basta con aplicar directamente la fórmula para conocer la solución del problema, sino que es necesario obtener el volumen que ocupan las 24 latas dentro de la caja de refrescos, para

posteriormente restarle ese resultado al volumen de la caja. Así mismo, se requiere la aplicación de estrategias de visualización por medio de las cuales se considere que la altura de las latas es mayor que la altura de la caja de refrescos, tomando en cuenta que el problema solicita únicamente el espacio vacío que se encuentra dentro de la caja.

Una vez más, analizando la actividad de la Figura 5, podemos apreciar que hay un cierto descuido en el planteamiento de las situaciones, en particular, la imagen de las latas y la caja que las contiene no es la más apropiada puesto que en las esquinas hay una especie de curvatura que pareciera no se considera en la actividad. Además, no se hace distinción entre capacidad y volumen, lo cual, puede generar ideas erróneas entre el estudiantado.

c) Una caja de refrescos mide 32.4 cm de largo, 21.6 cm de ancho y 8 cm de altura. Contiene 24 latas de igual tamaño; cada una mide 5.4 cm de diámetro y 12 cm de altura.

Como las latas son cilíndricas, quedan espacios vacíos entre ellas. ¿Cuánto mide en total el espacio vacío dentro de la caja?



Figura 5: Problema de Cajas de Refresco. *Matemáticas 2. Conecta Más. Editorial Ediciones SM. p.173*

Realizando la misma revisión en el libro de *Matemáticas 3. Conect@ Estrategias*, se identificaron 5 lecciones dedicadas al concepto de volumen, las cuales están enfocadas en la obtención del volumen de cilindros rectos y conos. En la primera lección, se parte de que el estudiante conoce que el volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de la base por la altura del prisma, para determinar que el volumen

del cilindro se obtiene de la misma manera. Posteriormente, se establecen las relaciones que mantiene el volumen del cilindro con su altura y el radio de su base.

En una segunda lección, se propone la construcción de un cilindro y un cono a partir de sus desarrollos planos para establecer la relación que existe entre un cilindro y un cono que tienen la misma base y altura. En esta actividad, se pretende que los estudiantes recurran a los manipulables contruidos para determinar la relación que existe entre el volumen de un cilindro y un cono que tienen la misma base y altura.

En la siguiente lección, se declara que el volumen del cono se calcula multiplicando el área de la base por la altura de éste, y dividiendo el resultado entre 3. A partir de esta fórmula, se plantean situaciones problema en las que los estudiantes deben aplicarla para poder determinar el volumen de distintos conos.

Posteriormente, se aborda la relación que mantiene el concepto de volumen con la capacidad, planteando situaciones problemas en las cuales se necesita calcular las capacidades de ciertos objetos utilizando unidades de medida de volumen, aplicando las fórmulas tanto del cono como del cilindro de manera directa. Sin embargo, en este grado tampoco se abordan las diferencias que existen entre los conceptos de volumen y capacidad.

Por último, en la 5^{ta} lección, se plantean actividades que involucran la visualización a partir del uso de manipulables en los que al girar una figura geométrica se generan diferentes cuerpos, de los cuales se solicita ser calculado su volumen y el área de su superficie (Figura 6).

2. Para efectuar esta actividad, necesitarás un rectángulo de 5 cm de ancho por 6 cm de largo. Gíralo tomando como eje de giro, primero, el lado de 5 cm y, después, el de 6 cm.

a) ¿En qué caso se genera el cilindro de mayor volumen? _____

b) Si hicieras con cartulina el molde de los cilindros que se crearon, ¿para cuál ocuparías más material? _____

c) ¿Cuál es el volumen del primer cilindro? _____

d) ¿Y el del segundo? _____

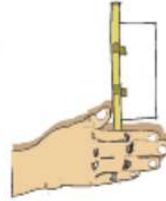


Figura 6: Actividades con Manipulables de Figuras Geométricas que giran sobre un eje. Matemáticas 3. Conect@ Estrategias. Editorial Ediciones SM. p.232

Una vez realizada la revisión de estos libros de texto, se puede concluir que, a pesar de que se le dan distintos tratamientos al concepto de volumen en los libros de texto, hace falta profundizar en aquellos que contribuyen a la construcción del concepto, tales como: actividades relacionadas con la justificación de situaciones físicas relacionadas con el concepto de volumen, como la inmersión de sólidos, en la que a través de sumergir un cuerpo en un recipiente con agua se puede observar que la cantidad de volumen de líquido desplazado equivale al volumen del sólido sumergido; actividades relacionadas con el conteo de cubos como introducción para la comprensión de la estructura multiplicativa del volumen y la relación que mantiene el área de la base con la altura en un prisma; y actividades relacionadas con la identificación de las diferencias entre los conceptos de capacidad y volumen, así como los aspectos que los relacionan.

De igual forma, se observa una necesidad de profundizar en la construcción de la fórmula del cálculo de volumen, para evitar que ésta aparezca de manera espontánea y que los estudiantes sean capaces de comprender el origen de la estructura multiplicativa del volumen y no solo sea aplicada de manera memorística.

Es importante destacar que se puede observar una inclinación notable hacia actividades dedicadas a la resolución de problemas en los que se requiere de una aplicación directa de la fórmula encontrando pocas situaciones en las que se promueve la visualización para su solución, así como también se manifiesta la ausencia total del uso de herramientas de tecnología digital.

Por tal motivo, a partir de la revisión realizada a algunos libros de texto de secundaria, y tomando en cuenta la revisión a los planes y programas de estudio vigentes, así como las dificultades reportadas por algunos autores en torno al aprendizaje y enseñanza del concepto de volumen, es posible considerar que la manera en cómo es abordado este concepto es un tanto limitada y descuidada, pues se reduce en muchos casos a la aplicación directa de una fórmula, lo cual deja pocas posibilidades a que los estudiantes desarrollen las habilidades necesarias para resolver problemas de volumen que involucren un uso de la visualización, estrategia importante que se rescata en apartados posteriores de este documento.

II. ANTECEDENTES Y OBJETIVOS DEL PROYECTO DE INTERVENCIÓN

Se consultaron diversas fuentes que mostraran un panorama general del concepto de volumen en la educación matemática actual, tales como los planes y programas de estudio de distintos niveles educativos (apartado I.1 y I.2), y resultados de pruebas estandarizadas como PLANEA (apartado I.3); fuentes que brindaran información específicamente del concepto de volumen, tales como las dificultades en el aprendizaje y enseñanza del concepto que habían sido reportadas por diversos autores (apartado I.4), y el tratamiento que se le brinda en los libros de texto (apartado I.5). A partir de lo anterior, se identificó la necesidad de realizar una revisión bibliográfica sobre las

propuestas ya existentes en donde se aborda el concepto de volumen y fuentes relacionadas a las ventajas del desarrollo de la visualización en los estudiantes. Todos estos elementos se han considerado como antecedentes del proyecto de intervención, puesto que se han planteado por un lado propuestas del cómo abordar al concepto volumen, y por otro, su relación con la visualización.

II.1. Propuestas Relacionadas con el Concepto de Volumen

Respecto a la revisión de estudios relativos al concepto de volumen, se presentan algunas propuestas que diversos autores han sugerido para el tratamiento de este concepto.

Considerando que la percepción del volumen de un cuerpo es una tarea compleja debido a que se deben de realizar representaciones mentales del objeto para poder percibirlo. Algunos autores han propuesto la realización de actividades que permitan a los estudiantes facilitar la percepción de los cuerpos.

El estudiante debe enfrentarse a experiencias que lo ayuden a delimitar el volumen como ente geométrico, por medio de: actividades táctiles como la comparación de cajas o recipientes de diferentes formas, tamaños y materiales, con la intención de que los estudiantes discutan sobre sus diferentes volúmenes y capacidades; actividades en las que se identifiquen objetos que pueden ser llenados con otros y se discuta con cuales se puede realizar el llenado de mejor manera; actividades de inmersión, con la finalidad de observar el comportamiento del volumen, sus propiedades y los hechos físicos que se involucran en la construcción de este concepto (Del Olmo et al.,1993).

Así mismo, a partir de la importancia de distinguir el volumen de su relación con la capacidad, el peso y el área de un cuerpo, es necesario reforzar procedimientos cualitativos para resolver situaciones problema, y no reducirlo a la aplicación de fórmulas (Sáiz, 2003). Para ello, se han propuesto actividades que involucren el llenado de recipientes que tengan el mismo volumen con diferentes sustancias para apreciar su peso, la apreciación de diferentes costos de un mismo producto en relación con la capacidad de los recipientes que los contienen, y la realización de desarrollos planos de cuerpos geométricos y su construcción (Del Olmo et al., 1993).

Por otra parte, se ha propuesto abordar la relación entre la medición directa y la estructura multiplicativa del volumen a través del relleno con cubos de un paralelepípedo rectángulo (Chamorro, 2003). Actividades de teselación del espacio con manipulables y en contextos relacionados al arte, la arquitectura, la naturaleza y el comercio, han sido propuestas para el tratamiento del concepto de volumen (Del Olmo et al., 1993), considerando a su vez que “realizar tareas de recubrimiento con unidades no estándar puede favorecer que la medición no se realice solo mediante algoritmos y que se precise la manera de expresar la medida de áreas y volúmenes de sólidos con las unidades adecuadas” (Sanchis y Guillen, 2013, p.519).

Otro tipo de situaciones que se han propuesto, son aquellas que involucran la proporcionalidad y van encaminadas a consolidar estrategias multiplicativas, planteando situaciones problema como el cálculo de cajas pequeñas que contiene una más grande, conociendo la relación entre las medidas de sus lados (Del Olmo et al., 1993). Así mismo, se resalta la importancia de que los estudiantes comprendan la dependencia lineal que existe entre los términos que conforman la fórmula de volumen, por medio de situaciones

que estén relacionadas con el uso de propiedades de dependencia lineal entre el volumen y la superficie de la base o la altura de algún prisma (Chamorro,2003).

Haciendo alusión a la visualización, y tomando en cuenta las dificultades relacionadas con el concepto de volumen en el apartado I.4. referentes a la falta de dominio de las habilidades relacionadas a ella, se han propuesto actividades que entrenen a los estudiantes en este aspecto. La representación de objetos de tres dimensiones en dibujos de dos y viceversa, así como la construcción de objetos tridimensionales con bloques a partir de su representación bidimensional, son algunas propuestas para su desarrollo (Del Olmo et al., 1993).

Aunado a las propuestas que se han mencionado en este apartado, es conveniente que algunos elementos de la resolución de problemas tales como la traducción del enunciado real al enunciado matemático, la identificación explícita de los datos del problema, y el uso de operaciones y algoritmos con un orden o dirección específica, sean trabajados para mejorar los procesos que los estudiantes emplean al momento de resolver alguna situación problema, evitando de esta manera que se resuelva a partir de la aplicación memorística de un algoritmo sin comprensión (Sanchis y Guillen,2013).

II.2. Estudios Relativos a la Visualización

Desde la década pasada, se ha incrementado la atención en la visualización, sin embargo, no existe una caracterización universal de ésta. Algunos de los términos propuestos por diversos autores son: visualización (Del Olmo et al.,1993), pensamiento espacial (Uttal, Miller y Newcombe, 2013), habilidad espacial (Wai, Lubinski y Benbow, 2009), razonamiento visoespacial (Owens y Highfield,2015), por mencionar algunos; no

obstante, “todos tienen en común la actividad de imaginar objetos de forma estática o dinámica, así como el interactuar con ellos (rotación, alargamiento, etc.)” (Sinclair et al., 2016, p.6). Para fines de este trabajo, se hará alusión al término “visualización”.

Owens (2020) define a este proceso como aquel que incorpora imágenes visuales y capacidades espaciales, asumiendo a su vez que, al momento en que los profesores promueven en sus alumnos reflexionar y argumentar sobre lo que observan y las estrategias que emplean para manipular objetos, se colabora a la resolución de problemas. A su vez, Uttal, Miller y Newcombe (2013), resaltan en este tipo de situaciones, la participación de procesos mentales de representación, análisis e inferencia de relaciones espaciales.

Reconociendo que existen diferentes acepciones sobre la visualización en la disciplina y a partir de la integración de ciertos elementos que conforman las definiciones propuestas por los distintos autores antes mencionados, para efectos de este trabajo, se hará referencia al término de visualización como la “*habilidad de manipular mentalmente, rotar, doblar o invertir un objeto representado en forma gráfica*” (Del Olmo et al., 1993, p.120).

Algunos autores han hecho énfasis en sus investigaciones en la importancia que juega la visualización en los procesos de aprendizaje y enseñanza. Sinclair et al. (2016) consideran que el desarrollo de formas dinámicas y hápticas de visualización tiene un impacto positivo en el aprendizaje. Específicamente Wai, Lubinski, y Benbow (2009) mencionan que las habilidades relacionadas a la visualización se han caracterizado por tener una particular relevancia en el aprendizaje de conceptos científicos y técnicos necesarios para el desarrollo de STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas),

haciendo que aquellos individuos que tengan dominio de ellas también sean capaces de desempeñarse apropiadamente en los campos de la ingeniería y las ciencias físicas.

Aunado al destacado papel que juega la visualización en las diversas áreas mencionadas anteriormente, tiene una importancia particular en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría (Sinclair et al., 2016), inclusive algunos autores (Anamova y Nartova, 2019) afirman que una visualización deficiente conduce a grandes dificultades para aprender geometría.

Es importante resaltar a su vez que la era digital ha proporcionado herramientas tecnológicas que contribuyen de manera considerable al mejoramiento de la visualización en los estudiantes al momento de aprender procesos y conceptos matemáticos (Owens y Highfield, 2015).

Dado que el volumen de un cuerpo requiere de manipulaciones mentales para poder percibirlo, es conveniente abordarlo desde propuestas que no solamente involucren el uso memorístico de una fórmula, sino que promuevan estrategias de visualización para su aprendizaje.

Aunque explícitamente en los planes y programas de estudios vigentes para la educación básica no se haga alusión a la importancia del desarrollo de la visualización, en este trabajo se considera que el desarrollo de habilidades asociadas a ella abona al logro de las competencias matemáticas planteadas para este nivel. Además, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra, el cual es un software de libre acceso que posibilita la creación de modelos en 3D, se contribuye a facilitar el desarrollo de ésta.

II.3. Objetivos

A partir de la problemática y justificación planteadas en este documento se establecen los siguientes objetivos para el proyecto de intervención:

II.3.1. Objetivo General

- Elaborar una propuesta didáctica para promover el concepto de volumen a través de actividades que involucren la visualización geométrica en estudiantes de secundaria con el uso de GeoGebra.

II.3.2. Objetivos Específicos

1. Determinar los elementos de la visualización geométrica que favorecen al aprendizaje del concepto de volumen.
2. Diseñar actividades didácticas que promuevan el concepto de volumen y la visualización geométrica.
3. Valorar la pertinencia de las actividades didácticas.

III. CONSIDERACIONES TEÓRICAS

En este apartado presentamos las consideraciones teóricas, en la cual se enmarca esta propuesta de intervención alrededor del concepto de volumen, distribuido de la siguiente manera: Primeramente, se describen los elementos teóricos de la visualización de Duval (2017) tales como la deconstrucción dimensional y la división mereológica, para continuar con la descripción de los fundamentos teóricos de la metodología de diseño propuesta por Alvarado (2019).

III.1. Operaciones Figurales de Duval

La comprensión de las figuras geométricas se relaciona con la coordinación de dos registros de representación semiótica: el discursivo (oral o escrito, en lenguaje natural o simbólico) y el no discursivo (dibujos, bocetos, gráficos, figuras y configuraciones geométricas) de acuerdo a lo señalado en Duval (2017).

Ver y visualizar en geometría, son acciones que ocurren en distintos niveles de profundidad y que los estudiantes pueden o no llevar a cabo durante el proceso de resolución de un problema de geométrico. Según Duval (2017), “ver” involucra al menos una de las siguientes tres operaciones: reconocer a primera vista las figuras, identificando si están separadas, yuxtapuestas o traslapadas; reconocer las figuras como representaciones esquemáticas de objetos reales con distintos grados de iconicidad; y ver una imagen o dibujo matemáticamente, lo cual requiere cambiar la forma de ver la representación visual, sin cambiar la representación dada.

Esta última forma de “ver” las figuras propiamente geométricas y sus propiedades será nuestro objeto a observar en el presente trabajo, siendo conscientes de que existen distintas formas de ver las figuras y que, dependiendo de la forma que seleccionemos, puede facilitar o no la identificación de ciertas de sus propiedades.

Ver geométricamente requiere de entrenamiento, ya que va en contra de la percepción automática del reconocimiento de las figuras, pues “es siempre la unidad figurativa de la dimensión superior la que se reconoce perceptualmente, bloqueando el reconocimiento de las unidades figurativas de dimensión inferior, ya que fusiona todas las unidades figurativas involucradas” (Duval, 2017, p.59).

Para Duval (2002), la visualización plantea tres problemas desde el punto de vista del aprendizaje:

1. Discriminación de las características visuales relevantes.
2. El procesamiento figural, cambios entre registros visuales (descomponer, recomponer una figura; reconfiguración); cambio de perspectiva, etc.
3. Coordinación con el registro discursivo y algebraico.

Al visualizar una figura se obtiene una imagen mental, la cual no necesariamente guarda las mismas proporciones y propiedades para las personas que lo observan, ya que depende, por ejemplo, del ángulo de visión.

Para el caso de las figuras geométricas (registro no discursivo), la visualización no icónica (es decir, cuando la figura con la que se trabaja y sobre la que se opera es resultado de una construcción de las partes que la conforman) (Duval, 2017) adquiere un papel relevante, ya que es necesario realizar una deconstrucción visual de las unidades figurales que se imponen a primera vista, a fin de obtener una reconfiguración. En este sentido, el trazado suplementario se presenta como uno de los principales problemas, pues el cómo dividir una figura no es algo obvio. Duval (2017) señala que existen dos maneras de descomponer una figura en unidades figurales: la división mereológica y la deconstrucción dimensional.

La división mereológica, la cual consiste en la “división de una configuración global en unidades figurativas de una misma dimensión” (Duval, 2017, p.61).

La división mereológica permite tratamientos como el de la reconfiguración a través de la aplicación de diferentes reconfiguraciones y sobre las comparaciones entre ellas, generando ideas que permiten explicar y justificar su resolución.

La reconfiguración es la operación de mayor potencia, complejidad e interés en el aprendizaje de la geometría, “es un tratamiento que consiste en la división de una figura en sub-figuras, en su comparación y en su reagrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente” (Duval, 1999, p.156). Aprovechar las potencialidades que brindan las figuras en la resolución de problemas geométricos implica que los alumnos logren realizar la o las operaciones de reconfiguración pertinentes a la resolución del problema, las cuales no logran identificar de manera espontánea.

La reconfiguración posibilita al estudiante un potencial discursivo en cuanto es capaz de enfrentarse a problemas de visualización en el que surge la necesidad del uso de propiedades o características matemáticas llevando esta necesidad a establecer la reconfiguración como aprehensión operativa (Torregroza & Quesada, 2007).

Por otra parte, la deconstrucción dimensional “permite analizar la transformación de una figura utilizando las unidades figurativas de un nivel inferior” (Duval, 2017, p.61). Para las figuras bidimensionales hay que ser capaz de reorganizar la percepción de las formas 2D, es decir una percepción centrada en los contornos cerrados, y en la percepción de un conjunto de unidades visuales 1D, pues las propiedades geométricas se refieren esencialmente a relaciones entre esas unidades 1D. Eso quiere decir que analizar una figura en función del conocimiento que se tiene de las propiedades geométricas supone la deconstrucción dimensional de las representaciones visuales que se quieren articular con las propiedades geométricas (Duval, 2005).

Duval propone que el estudiante sea capaz de distinguir y reconocer contornos abiertos y cerrados de una figura con relación a sus propiedades y que también pueda efectuar operaciones o construcciones que se relacionen con estas propiedades de la figura originando nuevas figuras o lo lleve a identificar la relación de diferentes figuras en la composición de otra figura.

Ejemplificando las operaciones figurales mencionadas anteriormente, la división mereológica se encuentra presente al dividir un prisma en otros prismas, pasando de un cuerpo en 3D a unidades figurativas también de 3D (Figura 7). En cuanto a la deconstrucción dimensional, ésta se encuentra presente al momento de analizar un prisma a través de su desarrollo plano, pues se realiza una transformación de un cuerpo de 3D a su representación en 2D siendo ésta una unidad figurativa de nivel inferior (Figura 8).

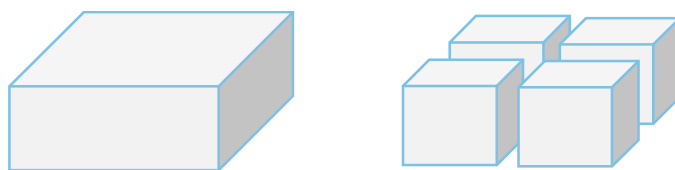


Figura 7: Ejemplificación de división mereológica. Elaboración Propia.

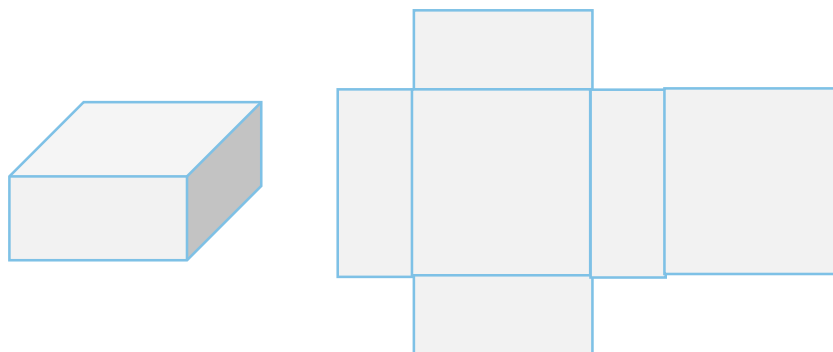


Figura 8: Ejemplificación de deconstrucción dimensional 3D/2D. Elaboración Propia.

- **Variables de visualización en la actividad geométrica**

Desde la teoría semiótica cognitiva, cuando se estudia un objeto geométrico a través de su representación figural, debe tenerse en cuenta la diferenciación entre los actos cognitivos de la visión y la visualización, donde el primero hace referencia a la percepción de los objetos físicos y la segunda, a la percepción de las representaciones (Marmolejo, 2014). En ambos casos, es a través de la visualización, y no de la visión, que se tiene acceso a las propiedades de las figuras, al reconocimiento de sus unidades figurales elementales que, posteriormente, permitirán desarrollar las operaciones pertinentes sobre la figura que permita la resolución del problema. Por lo que se hace necesario potenciar en las tareas, la actividad cognitiva de visualizar.

Por lo tanto, la diferencia entre “ver” y “visualizar” una figura radica no solo en las operaciones figurales mencionadas anteriormente, sino en la identificación de propiedades que no vemos a simple vista y solo pueden aprehenderse mediante conceptos o fijando hipótesis a través de indicaciones verbales (Duval, 2017). Por lo que es importante tomar en cuenta las variables de visualización.

III.2. Referentes Teóricos de la Metodología de Diseño de Alvarado

Para el diseño de las secuencias didácticas se utilizó la metodología de diseño propuesta por Alvarado (2019), en la cual se incorporan elementos de la metodología de Díaz Barriga y el Método de Enseñanza Aprendizaje en Colaboración, Debate Científico y Autorreflexión (ACODESA).

Esta metodología de diseño muestra el objetivo de cada una de las etapas de la estructura de las secuencias didácticas (Preliminar, Apertura, Desarrollo y Cierre), el

propósito de las actividades que se plantean, el tipo de preguntas a realizar, la organización de trabajo en el aula, el papel que juegan el estudiante y el profesor, así como algunas recomendaciones específicas para incorporar el uso de tecnología digital, en este caso, GeoGebra.

A continuación, se describen las principales características de las etapas que conforman la metodología de diseño de Alvarado (2019).

III.2.1. Etapa Preliminar

Esta etapa tiene como finalidad la selección del contenido matemático a través del cual se desarrollará la matemática, “el cual puede ser tomado del currículo o reformulado de éste, según las necesidades del grupo y tomando en cuenta las posibilidades de los estudiantes” (Alvarado, 2019, p. 37).

A partir de ello, es necesaria la selección del objeto matemático a abordar en las secuencias, tomando en cuenta las propiedades que se pretenden estudiar, la matemática a desarrollar, las posibles aplicaciones del objeto matemático y las representaciones que pueden surgir de él.

Por último, dentro de esta etapa se plantea la formulación de los objetivos de aprendizaje que permitan “construir un aprendizaje significativo en el estudiante y que, a su vez, le permita al docente obtener un panorama sobre lo que se espera alcanzar de determinado contenido para evaluar el logro de cada uno de los aspectos” (Alvarado, 2019, p.38).

III.2.2. Etapa de Apertura

La etapa de apertura implica el planteamiento de situaciones problema como punto de partida que estén contextualizadas a situaciones de la vida cotidiana en las que el estudiante se vea inmerso en la necesidad de buscar apoyo en las matemáticas para la resolución de la situación problema.

Las actividades comprendidas en esta etapa se centran en preguntas de exploración, predicción y estimación, así como trabajo de carácter cualitativo que le ayude al estudiante a “entender la situación y su contexto y no al establecimiento de relaciones entre cantidades o procedimientos” (Alvarado, 2019, p.40).

La organización del trabajo en el aula suele ser individual, con la intención de que cada estudiante establezca su propia versión de la situación para formular una estrategia de solución, mientras que el profesor funge como guía para el estudiante, orientándolo a activar su razonamiento matemático.

En cuanto al uso de herramientas tecnológicas, son utilizadas para apoyar la comprensión de la situación problema mediante la exploración cualitativa de los applets, los cuales son pequeños programas o aplicaciones que GeoGebra los integra dentro de una página web para dotarla de interactividad.

III.2.3. Etapa de Desarrollo

Las actividades que conforman esta etapa tienen como propósito orientar al estudiante a la resolución de la situación problema, poniendo en juego las habilidades, competencias y conocimientos que el estudiante ya posee para dar paso a la aparición de procedimientos y conceptos que engloban al objeto por medio de preguntas de

carácter cuantitativo y de reflexión sobre su actividad matemática, que guíen a la solución y posible generalización.

La organización del trabajo en el aula pasa de ser un trabajo individual a uno en colectivo donde “aparecen procesos de comunicación entre pares para interpretar en conjunto la solución a la situación; posteriormente se lleva a cabo la argumentación y discusión de las ideas construidas, para después culminar con la validación de las respuestas obtenidas” (Alvarado, 2019, p.42), refinando las ideas de la etapa de apertura y guiándolas hacia la resolución de la situación problema.

En esta etapa, el profesor “tiene el papel de organizar, guiar y mediar las interacciones entre los equipos de trabajo y entre la actividad matemática” (Alvarado, 2019, p.43), con la intención de detectar aquellos aspectos conductuales o cognitivos que necesitaran reforzarse.

Referente al uso de herramientas tecnológicas, serán utilizadas principalmente para la modelación de la situación problema, así como las generalizaciones que surjan en el proceso de su solución.

III.2.4. Etapa de Cierre

En esta última etapa de la metodología de diseño, las actividades que la conforman van encaminadas hacia la formalización de los conceptos matemáticos que se abordaron en las etapas anteriores del diseño, mientras que se aborda la validez de las estrategias de resolución y la justificación de los resultados, dando pie al proceso de institucionalización.

El trabajo en el aula comprende un momento de trabajo individual en la que se pretende que el estudiante reflexione sobre el quehacer matemático que realizó en la secuencia, percatándose de la importancia de la disciplina en su vida diaria; y un momento de trabajo grupal que tiene como finalidad discutir en plenaria la solución de la situación problema, así como las estrategias empleadas y sus distintas representaciones.

La participación del profesor durante esta etapa es “hacerle ver al alumno a través de la institucionalización aquellas relaciones entre las variables que se presentaron en la solución de la situación y aquellas propiedades del objeto matemático” (Alvarado, 2019, p.45).

Por último, el uso de herramientas tecnológicas va encaminado a la validación y formalización de resultados, a la generalización y justificación de la matemática abordada en el diseño, o para la construcción de modelos matemáticos nuevos que refuercen el conocimiento matemático.

La articulación de cada uno de los elementos correspondientes a las etapas mencionadas con anterioridad tiene como finalidad la estructuración de las secuencias didácticas para lograr la generación del conocimiento matemático, a partir de la organización, jerarquización y secuenciación de cada una de las actividades que la conforman.

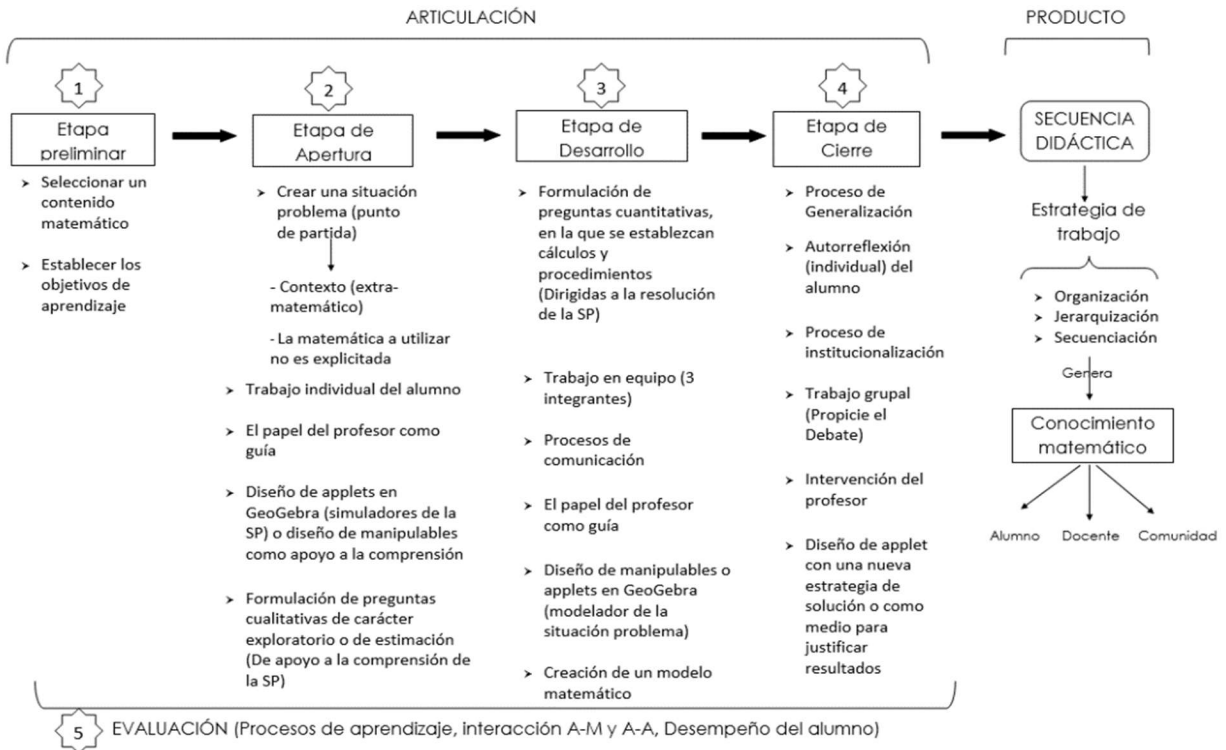


Figura 9: Esquema de la metodología de diseño propuesta (Alvarado, 2019, p.46)

III.3. Características de la Propuesta Didáctica

Considerando la importancia que representa el concepto de volumen dentro de los planes de estudio, las dificultades que han sido reportadas por diversos autores relacionadas a su enseñanza y aprendizaje, y la falta de actividades que involucren la visualización y herramientas tecnológicas en los libros de texto, se ha propuesto atender la problemática que gira en torno al concepto de volumen a través del diseño de una propuesta didáctica.

Las secuencias didácticas propuestas en el presente trabajo tienen como propósito promover el concepto de volumen a través de situaciones en las que no implique solamente la aplicación directa de la fórmula para su cálculo, sino que involucre el uso de estrategias de visualización para resolver dichas situaciones.

El diseño fue elaborado considerando la metodología de diseño propuesta por Alvarado (2019) e incorporando elementos teóricos de la visualización de Duval (2017) tales como la deconstrucción dimensional y la división mereológica.

Además, dada la importancia del uso de herramientas tecnológicas para el aprendizaje de conceptos matemáticos y para el desarrollo de estrategias de visualización, las actividades de la propuesta didáctica incluyen el uso de applets en GeoGebra 3D por las oportunidades que brinda para abordar situaciones que involucren la visualización y por tratarse de un software de libre acceso.

IV. CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

A partir de los objetivos general y específicos planteados para este trabajo en el apartado III.1., se enuncian a continuación las acciones metodológicas necesarias para su logro con fundamento en el marco teórico seleccionado.

Estas acciones metodológicas han sido categorizadas en cuatro etapas que se mencionan a continuación:

IV.1. Etapa de Revisión Documental

Esta etapa hace referencia a las acciones metodológicas necesarias para el logro del objetivo específico 1, donde se realizó una revisión documental que muestra un panorama de la problemática que atiende el proyecto de intervención y elementos que lo justifican.

- Revisión de los Planes y Programas de Estudio: Esta revisión es realizada con la finalidad de ubicar la presencia del concepto de volumen tanto en la educación básica como en el nivel medio superior, poniendo énfasis en su ubicación en nivel

de educación secundaria y en los aprendizajes esperados para el concepto de volumen en este nivel educativo.

- Revisión de Resultados de Pruebas Estandarizadas: Con la intención de conocer algunos indicadores que muestren la presencia de una problemática en torno a la educación matemática, se realiza una investigación de la prueba PLANEA, analizando también reactivos liberados de esta prueba que estén relacionados con el concepto de volumen y la visualización.
- Revisión de Libros de Texto: Se seleccionaron 3 libros de texto de matemáticas, uno de cada grado escolar del nivel secundaria, autorizados por la Secretaría de Educación Pública, para conocer el tratamiento que se le brinda al concepto de volumen en el aula. En esta revisión se identifican el número de lecciones que son dedicadas a este concepto, así como los elementos matemáticos que participan en el planteamiento de las distintas situaciones, las herramientas tecnológicas utilizadas y si existe o no la presencia de situaciones que involucren la visualización
- Revisión de Investigaciones sobre Dificultades en el Aprendizaje y Enseñanza del Volumen: Esta revisión tiene como propósito conocer las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de volumen reportadas en investigaciones realizadas por diversos autores. Por otra parte, esta revisión nos ayudó a caracterizar el concepto de volumen abordado.
- Revisión de Propuestas Relacionadas al Concepto de Volumen: Es realizada con la intención de conocer las propuestas que diversos autores han realizado previamente para atender ciertas dificultades en torno al concepto de volumen,

poniendo énfasis en la identificación de estrategias, situaciones y herramientas empleadas para el tratamiento de este concepto.

- Revisión de Propuestas Relacionadas a la Visualización: Esta revisión es realizada con el afán de identificar las principales características que definen a la visualización, así como la importancia que tiene en el aprendizaje de conceptos matemáticos, específicamente en el concepto de volumen.
- Revisión de Elementos Teóricos: Al ser seleccionadas las operaciones figurales de la deconstrucción dimensional y la división mereológica de Duval (2017) como marco teórico en este trabajo, esta revisión será necesaria para identificar aquellos elementos del marco que contribuirán al diseño y valoración de la propuesta didáctica.

Es importante señalar que las lecturas relacionadas a las acciones metodológicas de esta etapa fueron registradas en un diario de búsqueda para indicar la fecha y fuente en donde se obtuvieron cada una de ellas, para posteriormente proceder a registrarlas en una tabla priorizando su lectura en: lectura inmediata, eventual, posible o solo referencias; así como un apartado de lecturas eliminadas, contando de esta manera con un registro de aquellas lecturas que fueron quitadas de la lista con la intención de evitar la pérdida de información. Conforme se fueron realizando las lecturas de la lista priorizada, se llenaron fichas de datos que registraban el título del documento revisado, datos del autor, las ideas rescatadas del documento consultado y los números de página en los que se encontraba dicha información. Esto con objeto de tener una mejor organización de las revisiones realizadas y sintetizar la información de interés.

IV.2. Etapa de Diseño de Actividades

Una vez culminada la etapa de revisión documental, se abre paso a la etapa de diseño de la propuesta didáctica, en la cual se propone la determinación de los elementos teóricos tomados en cuenta en el diseño de las actividades didácticas. Lo anterior con la intención de dar lugar al logro del objetivo específico 3, correspondiente al diseño de las actividades didácticas que involucren el concepto de volumen y la visualización.

- Declaración de Objetivos de Aprendizaje: La etapa de diseño incluye la declaración de los objetivos de aprendizaje (V.2.1), tal como lo indica Alvarado (2019) en la etapa preliminar de su metodología de diseño, en la cual se establecen los objetivos generales y específicos de cada secuencia, así como los objetivos de cada actividad que la conforma, tomando como base los aprendizajes esperados planteados en los planes y programas de estudio (SEP, 2017a).
- Diseño y Estructuración de Actividades: Con base en la revisión documental realizada, se procede al diseño y estructuración de las actividades que conforman la propuesta didáctica (IV.2.1), definiendo las fases en las que son aplicadas y la relación entre ellas para en conjunto llegar al logro de los objetivos de aprendizaje según la metodología de diseño de Alvarado (2019).
- Determinación de los Tipos de Interacción, Momentos y Propósitos: Aunado a la determinación de la estructura de las actividades, dentro de esta etapa, se definieron los tipos de interacciones que se promueven en la propuesta didáctica, ya sea individual, en equipo o grupal, así como los momentos en que se dan este tipo de interacciones y su propósito.

- Determinación del Propósito y Características de los Applets: Al ser una propuesta que incluye el uso del Software GeoGebra 3D, es necesario definir el propósito y las características que tienen en la propuesta didáctica los applets diseñados, con la intención de que abonen al logro de los objetivos de aprendizaje.
- Adaptación de las Secuencias Didácticas en el Formato de Lecciones GeoGebra: Debido al confinamiento al que fueron sometidos los estudiantes, se tuvieron que adaptar individualmente al formato de Actividad GeoGebra cada una de las actividades diseñadas, en donde se consideró incluir apartados que permitieran a los estudiantes contestar preguntas, realizar dibujos, llenar tablas, utilizar hipervínculos que los direccionara a algún video o página, y por supuesto, manipular los applets diseñados. Una vez adaptadas cada una de las actividades se procedió a agruparlas bajo el formato de Lecciones GeoGebra para que el estudiante pudiera acceder a un listado de todas las actividades que conformaban cada una de las secuencias.

IV.2.1. Justificación Teórica y Metodológica de las Secuencias

A partir de los elementos teóricos y metodológicos presentados en los apartados anteriores, se realizó el diseño de dos secuencias didácticas, las cuales tienen como objetivo general de diseño:

- Promover el concepto de volumen a través de actividades que involucren la deconstrucción dimensional y la división mereológica de cuerpos geométricos.

A continuación, se presentan los objetivos específicos para cada una de las secuencias, la descripción de las actividades que las conforman, y los elementos teóricos y metodológicos que fueron incorporados para su diseño.

Es posible consultar los diseños completos de las secuencias a través de GeoGebra Classroom ingresando a los siguientes links de acceso, o bien, en el apartado de anexos de este documento se pueden encontrar las versiones imprimibles de ambas secuencias (Anexos 3 y 4).

Secuencia Didáctica	Link de Acceso
“Albercas”	https://www.geogebra.org/classroom/kdwhgvyz
“Monolitos”	https://www.geogebra.org/classroom/zwmsssmj

Tabla 3: Links de acceso a secuencias de la propuesta didáctica. Fuente: Elaboración propia.

Secuencia “Albercas”

Objetivos Específicos de la secuencia:

- Comparar el volumen de cuerpos que tienen la misma altura y área en su base.
- Relacionar el área de la base y las caras laterales de un prisma con su volumen.
- Promover la deconstrucción dimensional de cuerpos de 3D a través de sus desarrollos planos.
- Promover la división mereológica de cuerpos en 3D.

Etapas de Apertura

En esta etapa de la secuencia se comienza adentrando al estudiante en un contexto, en este caso, en el de un parque acuático, sobre el cual se abordan las situaciones problema planteando preguntas de exploración, predicción y estimación como parte del trabajo cualitativo para entender la situación y su contexto, tal como lo plantea la metodología de Alvarado (2019).

La intención de las actividades 1 y 2 comprendidas en esta etapa es poner a prueba el conocimiento informal del alumno para producir representaciones que se refinarán en etapas posteriores en un conocimiento formal.

La actividad 1 tiene como finalidad que el estudiante se adentre en un contexto extra matemático en el cual se desarrolla la secuencia. Por otro lado, en la actividad 2 se requiere que el estudiante explore, observe y manipule mediante un applet que genera observaciones de carácter cualitativo los conceptos de altura y área de la base de un prisma, lo cual apoya a la comprensión de las situaciones posteriores en la etapa de desarrollo.

Etapa de Desarrollo

Las actividades contenidas en esta etapa van encaminadas a la resolución de la situación problema, poniendo en juego las habilidades, competencias y conocimientos que el alumno posee. Estas actividades tienen carácter cuantitativo, incluyendo a su vez preguntas para que el alumno reflexione sobre su actividad, siguiendo lo planteado en la metodología de diseño de Alvarado (2019).

Así mismo, los applets en esta etapa tienen el propósito de modelar las situaciones surgidas durante la resolución de las actividades con el fin de poder ser interpretadas facilitando la visualización de los cuerpos estudiados.

En esta etapa se comienza planteando una situación problema en donde se le proporcionan al estudiante ciertas especificaciones en cuanto a las dimensiones de una alberca con forma de prisma de base rectangular, con la intención de que durante el

transcurso de las distintas actividades el estudiante pueda determinar el diseño que requiera menos material para su construcción.

En la actividad 3, se solicita al estudiante que seleccione las dimensiones faltantes de 3 posibles diseños para que cumplan con las especificaciones proporcionadas por el ingeniero, con la intención de que el estudiante encuentre pares de números que, multiplicados entre ellos, den como resultado el área de la base establecida en las especificaciones.

Al mantenerse la altura y el área de la base de la alberca siempre fijas, el propósito de esta actividad es que el estudiante concluya que todos los diseños que cumplen con estas especificaciones tendrán el mismo volumen, por lo tanto, no es posible tomar una decisión respecto al diseño más conveniente basándose en los m^3 de excavación requeridos. Esta actividad se incorporó con la finalidad de promover el objetivo específico de comparar el volumen de dos cuerpos que tienen la misma altura y área en su base.

Dado que no es posible tomar una decisión respecto al diseño más conveniente con base en los m^3 de excavación, en la actividad 4 se plantea la situación de calcular los m^2 de azulejo requeridos para recubrir la base y las caras laterales de la alberca.

En esta actividad se pretende que los estudiantes identifiquen a través del applet `albercaazulejo.ggb` la forma que tienen la base y las caras laterales de la alberca, con el propósito de promover una deconstrucción dimensional que permita el análisis de un cuerpo en 3D por medio de su descomposición en elementos de 2D.

Dado que los diseños seleccionados para su análisis no contemplan el diseño que menor área tiene en su base y caras laterales, en la actividad 5 se pretende guiar a los

estudiantes en una discusión sobre la variación entre el perímetro del borde de la alberca y el área de sus caras laterales.

Bajo el entendido que la altura de la alberca siempre será constante en los diseños, así como el área de su base, la intención de esta actividad es que se vea al perímetro del borde de la alberca como una componente que influye en la determinación del diseño que requiere menos azulejo para su construcción. A través de un applet que al igual que en la actividad anterior, tiene como base la deconstrucción dimensional, se pretende que el estudiante concluya que el diseño más conveniente será aquel que tenga un cuadrado como base.

Las actividades 4 y 5 pretenden promover el objetivo específico de relacionar el área de la base y las caras laterales de un prisma con su volumen, así como el de promover la deconstrucción dimensional de cuerpos de 3D en 2D a partir de sus desarrollos planos.

Dado que los procesos de comunicación son una parte fundamental en la metodología de diseño utilizada para esta secuencia, en la actividad 6 se espera que los estudiantes argumenten con ayuda de estrategias que hagan alusión a las operaciones figurales de la división mereológica y la deconstrucción dimensional propuestas por Duval (2017), las distintas respuestas a las actividades de la etapa de desarrollo para la toma de la decisión del diseño más conveniente.

Un caso más complejo

En esta etapa de la secuencia se pretende elevar el grado de dificultad, abordando una situación en la que se plantea la construcción de una alberca con desnivel.

Bajo el mismo contexto, en esta actividad también se espera que los estudiantes determinen la cantidad de m^3 de tierra que será necesario excavar para su construcción, y los m^2 de azulejo necesarios para recubrir su base y sus caras laterales.

En la actividad 7, se pretende que el estudiante visualice e identifique los prismas que le ayudarán a determinar el volumen de tierra para excavar en la construcción de la alberca. En esta identificación por parte de los estudiantes existe la posibilidad de obtener diferentes tipos de respuestas, pues dependerá de los prismas que ellos identifiquen como convenientes para la determinación del volumen. Esta actividad es incorporada con la finalidad de atender al objetivo específico de promover una división mereológica, dividiendo un elemento en partes de su misma dimensión.

Posteriormente, la actividad 8 tiene como finalidad que el estudiante determine los m^2 de azulejo necesarios para recubrir las caras laterales y la base de esta alberca con desnivel. A través de los incisos los estudiantes tendrán que identificar la forma y dimensiones de las caras laterales y la base que tiene la alberca para poder resolver la situación.

En esta actividad se abordan 3 de los objetivos específicos de la secuencia, pues pretende promover el objetivo específico de relacionar el área de las caras laterales y la base de un prisma con su volumen y promover la deconstrucción dimensional de un cuerpo de 3D en 2D por medio de su desarrollo plano, pero también, debido a que 2 de las caras laterales de la alberca tienen forma irregular, los estudiantes deberán poner en práctica la división mereológica para la obtención de su área.

Para cerrar con las actividades de desarrollo, las tareas del inciso d) tiene la finalidad de incorporar todas las estrategias empleadas en las actividades 7 y 8 en un escrito donde éstas sean argumentadas y justificadas con base en estrategias que hagan alusión a las operaciones figurales de división mereológica y deconstrucción dimensional propuestas por Duval (2017).

Cierre

Las actividades en la etapa de cierre según Alvarado (2019) tienen la finalidad de integrar y formalizar los conceptos matemáticos abordados durante las etapas anteriores de la secuencia, abordar la validez de las distintas estrategias propuestas, presentar justificaciones sobre los resultados obtenidos y dar paso a la institucionalización de los conceptos abordados.

Las actividades 9 y 10 tienen la finalidad de que el estudiante generalice a partir de los elementos de área de la base y altura, la fórmula del volumen para un prisma de base rectangular, así como la obtención de la suma del área de sus caras laterales y su base.

De igual manera, por medio de la actividad 11 se pretende que el estudiante concluya que mientras dos prismas tengan la misma altura y área en su base, su volumen siempre será el mismo.

Sin embargo, no sucederá lo mismo para el área de las caras laterales. En la actividad 12 se pretende que los estudiantes concluyan que a pesar de que 2 cuerpos tengan el mismo volumen, el área en sus caras laterales puede variar. Así mismo, por medio de la actividad 13 se pretende que los estudiantes lleguen a la conclusión, con

ayuda de la deconstrucción dimensional de que, para dos cuerpos con área de su base y altura fija, el perímetro de la base será determinante para el cálculo del área de sus caras laterales, teniendo al prisma con base cuadrada como el óptimo.

Por último, las actividades 14 y 15 tienen como finalidad que los estudiantes identifiquen como estrategia la división mereológica para la obtención del volumen de un cuerpo irregular por medio de la identificación de prismas conocidos que ayuden en el cálculo.

Secuencia “Monolitos”

Objetivos Específicos

- Reconocer la igualdad del volumen en cuerpos que tienen la misma altura y área en sus cortes transversales.
- Promover la deconstrucción dimensional de cuerpos de 3D a 2D a través de sus cortes transversales.

Etapas de Apertura

Esta etapa tiene como objetivo explorar de manera cualitativa los conceptos de altura, área de la base y corte transversal de un prisma rectangular, por medio de un contexto extra matemático, con la finalidad de adentrarse en la situación de cálculo de volumen.

Se comienza adentrando al estudiante al contexto de la construcción de monolitos, mostrando algunos existentes en distintas partes del mundo, y explorando sus ubicaciones para contestar preguntas de carácter cualitativo que le ayude a comprender la situación y su contexto.

Posteriormente, en la actividad 2 se inicia con el planteamiento de una situación problema en la que un escultor quiere construir un monolito con forma de prisma rectangular, buscando que el estudiante se vea inmerso en la necesidad de buscar apoyo en las matemáticas para la resolución de dicha situación.

Por medio del applet monolito.ggb, el estudiante deberá identificar los elementos de área de la base y altura del prisma rectangular, así como la forma geométrica que tendrán los cortes transversales. Lo anterior, con la intención de comenzar a promover la deconstrucción dimensional de cuerpos de 3D a 2D a través de sus cortes transversales.

Al finalizar la etapa de apertura, se pretende que el estudiante concluya que, al tratarse de un prisma recto con base rectangular, los cortes transversales que se realicen a la altura del prisma tendrán la misma forma y dimensiones que la base del prisma.

Etapas de Desarrollo

Dado que Alvarado (2019) establece que dentro de la etapa de desarrollo, las actividades que la conforman deben orientar al estudiante a la resolución de la situación problema guiándolos a la generalización, en esta etapa se tiene como objetivos la identificación de los cortes transversales de prismas rectangulares rectos, inclinados y con dos de sus caras onduladas, así como reconocer la conservación de volumen en prismas rectangular que sufren transformaciones como la inclinación y el giro, pero mantienen su altura y el área en cortes transversales.

Inicialmente, se plantea que el escultor ha decidido construir 3 ejemplares de monolitos de concreto que tienen dimensiones de largo, ancho y alto definidas, sin embargo, necesita conocer la cantidad de concreto que se requerirá para la construcción.

En la actividad 3 se inicia abordando la situación de la construcción del primer monolito, el cual tendrá forma de prisma rectangular recto de dimensiones previamente establecidas, y se procederá al cálculo de su volumen. En esta actividad es esencial que el estudiante argumente el procedimiento utilizado para el cálculo de su volumen.

Una vez conocida la cantidad de concreto necesaria para su construcción se plantea que el escultor ha decidido realizar el colado del monolito a cada metro de altura, solicitándole al estudiante que llene una tabla con las características que tendrá cada una de las fases de colado, tales como las dimensiones y área de las bases tanto inferior como superior del cuerpo formado en cada fase de colado, así como la obtención del volumen de cada una de ellas.

Para esta actividad, el estudiante podrá apoyarse en el applet `monolitorecto.ggb` el cuál será utilizado para la modelación de la situación problema, con la intención de visualizar las características geométricas que irá tomando el monolito en cada una de las fases de colado, promoviendo a su vez la deconstrucción dimensional para analizar un cuerpo de 3D en 2D a través de los cortes transversales que se irán generando por las fases de colado.

La estructura de la actividad 3 se repetirá para las actividades 5 y 6, en las que se abordará la construcción por parte del escultor de los otros dos monolitos, sin embargo, uno de ellos se encontrará inclinado y el otro tendrá dos de sus caras onduladas, y tendrán como apoyo los applets `monolitoinclinado.ggb` y `monolitogirado.ggb` respectivamente.

Al emplearse la misma estrategia de las fases de colado, los estudiantes podrán realizar el llenado de las tablas en donde se solicitan las dimensiones y el área de las bases generadas por los cortes transversales de cada fase de colado, así como la determinación del volumen de los cuerpos que se irán formando en cada una de esas fases.

Por medio de la identificación de las propiedades del monolito solicitadas en la tabla, se pretende promover la deconstrucción dimensional de cuerpos en 3D a 2D por medio de sus cortes transversales, con la intención de que el estudiante concluya que a pesar de que los tres monolitos de dimensiones iguales han sufrido transformaciones de inclinación y giro, al tener la misma altura y área en sus cortes transversales, tendrán el mismo volumen, por lo tanto, requerirán la misma cantidad de concreto para su construcción.

Para finalizar con esta etapa de desarrollo, se solicita a los estudiantes que escriban una carta al escultor argumentando las estrategias que se han empleado para conocer el volumen de cuerpos inclinados y girados, con la intención de promover los procesos de comunicación dentro de la secuencia.

Etapas de Cierre

Para finalizar con la secuencia, la etapa de cierre tiene como propósito que, a través de la autorreflexión, los estudiantes generalicen la igualdad del volumen de prismas que tienen la misma altura y área en sus cortes transversales, abordando la validez de las estrategias de resolución empleadas, la justificación de los resultados obtenidos y dando pie al proceso de institucionalización.

Las actividades 9, 10 y 11 correspondientes a esta etapa tienen como finalidad que a partir de la integración de las reflexiones generadas en la etapa de desarrollo con la promoción de la deconstrucción dimensional de cuerpos de 3D en 2D a través de sus cortes transversales, los estudiantes determinen que la característica que deben tener 2 cuerpos de alturas iguales para que tengan el mismo volumen es la de tener la misma área en sus cortes transversales, sin importar las transformaciones que haya tenido el cuerpo, tales como la inclinación y el giro.

IV.3. Etapa de Implementación

Esta etapa corresponde a la planificación y ejecución de la implementación de las actividades didácticas diseñadas a estudiantes de nivel secundaria, para lo cual se deberán tomar en consideración las acciones metodológicas mencionadas a continuación.

- Planificación de los Tiempos: Una vez realizado el diseño de la propuesta didáctica a implementar, fue necesario realizar una planificación de los tiempos en los que sería aplicada a los estudiantes, considerando también su duración. En este caso, las secuencias didácticas fueron aplicadas en cuatro sesiones de una hora y media cada una.
- Selección de Institución y Estudiantes: Para realizar la implementación de la propuesta didáctica, fue necesario seleccionar una institución de nivel secundaria y las características de los sujetos con quienes se implementará el diseño, tales como grado y edad. Por otra parte, se requirió que la institución autorizara la implementación de la propuesta didáctica. En este caso, las secuencias didácticas fueron implementadas a cuatro estudiantes de 3^{er} grado de secundaria.

- Verificación de Instrumentos de Apoyo: Se consideró pertinente la verificación de que los estudiantes seleccionados cuenten con los instrumentos de apoyo necesarios para la implementación de la propuesta didáctica. Debido a la pandemia causada por el virus SARS-CoV-2 la cual ocasionó que la mayoría de los estudiantes se encontraran en clase bajo la modalidad virtual o híbrida, se tomó la decisión de implementar las secuencias didácticas de manera virtual, seleccionando la plataforma de Google Meet para realizar las sesiones y la herramienta de Lecciones GeoGebra para que los estudiantes tuvieran acceso a las actividades. Se verificó que los estudiantes participantes contaran con un equipo de cómputo apto para la implementación, así como conexión a internet.
- Diseño de Instrumentos para la Recolección de Información: Esta etapa contempla el diseño de formatos de observación (Anexos 1 y 2), los cuales fueron llenados por observadores que participaron en la implementación de las secuencias. También es importante señalar que gracias a que se realizó una implementación virtual, las videollamadas pudieron ser videograbadas con la herramienta de Google Meet, y las respuestas de los estudiantes fueron registradas automáticamente gracias a la herramienta de Lecciones GeoGebra.

El conjunto de estos aspectos permitió realizar la implementación del diseño para su posterior análisis, el cual contribuiría posteriormente al logro del objetivo específico 4.

IV.4. Etapa de Valoración

Finalmente, las acciones metodológicas referentes a la etapa de valoración consistieron en aquellas que permiten el análisis de la información obtenida en la

implementación de la propuesta didáctica diseñada, contribuyendo al logro del objetivo específico 4.

- Organización de la Información: Una vez realizado el proceso de implementación, se procedió a organizar la información recopilada para realizar el análisis de ésta. Para ello, se elaboró una tabla de vaciado de datos en donde se registraron textualmente cada una de las respuestas proporcionadas por los estudiantes, así como imágenes de las respuestas en aquellos reactivos en los que se solicitaba algún trazo, dibujo, llenado de tabla o manipulación de applets. También se incluyeron aquellas participaciones que fueron registradas en la grabación de las videollamadas y los comentarios realizados en los formatos de observación.
- Análisis de la Información: Para la realización de este análisis, fue indispensable identificar los criterios del marco teórico en la valoración del diseño de las actividades planteadas en la propuesta didáctica, permitiendo de esta forma que se llevara a cabo su análisis. Se realizó una tabla clasificando el nivel de concreción de cada uno de los objetivos definidos para ambas secuencias, determinando si era un nivel bajo, medio o alto.
- Identificación de Posibles Mejoras al Diseño: Posterior al análisis de la información recopilada del proceso de implementación, se procede a identificar las posibles mejoras que pudieran hacerse al diseño, con lo cual es posible presentar los resultados de la valoración general de la pertinencia de la propuesta didáctica diseñada.

V. ANÁLISIS DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

En este capítulo se presenta el análisis y valoración de las dos secuencias que conforman la propuesta didáctica, clasificando las respuestas proporcionadas por los estudiantes a cada una de las distintas actividades de las etapas de inicio, desarrollo y cierre según los conocimientos movilizados y las estrategias utilizadas para su resolución. Así mismo, se presenta una tabla para cada una de las secuencias sobre el nivel de concreción de los objetivos específicos relacionados a las actividades de cada una de las etapas.

En este análisis se hará referencia a los estudiantes participantes como:

- E1: Estudiante 1
- E2: Estudiante 2
- E3: Estudiante 3
- E4: Estudiante 4

V.1. Secuencia Monolitos

Etapas de Apertura:

Iniciando con las actividades de la etapa de apertura, en la Actividad 1 de la secuencia se comenzó adentrando a los estudiantes en el contexto extra matemático de los monolitos, mostrando algunas imágenes, videos y ubicaciones de ejemplares que se encuentran alrededor del mundo. Con relación a la identificación de la forma que tenían los monolitos, sus bases y caras laterales, los estudiantes respondieron de la siguiente manera:

- E1: Identifica la forma de los monolitos proporcionando respuestas como “prisma rectangular” y “prisma cuadrangular”, al hacer alusión a las imágenes de los cuerpos en 3D. Así mismo, logra deconstruir dimensionalmente los monolitos en 3D identificando al cuadrado y al rectángulo como formas de las bases de los monolitos, y al rectángulo como forma de sus caras laterales.
- E2, E3 y E4: No lograron identificar la forma de los monolitos como cuerpos de 3D, si no como figuras 2D a partir de la frase “Rectangular” para hacer alusión a la forma del monolito. Sin embargo, sí lograron deconstruir dimensionalmente los monolitos en 3D identificando al cuadrado y al rectángulo como formas de las bases de los monolitos, y al rectángulo como forma de sus caras laterales.

Cabe destacar que ninguno de los estudiantes logró identificar al prisma triangular como forma de los monolitos mostrados en los archivos multimedia, y, por lo tanto, tampoco lograron deconstruir dimensionalmente esos monolitos para identificar al triángulo como su base.

Respecto a la exploración cualitativa de los conceptos de superficie de la base, altura y corte transversal de un prisma rectangular, al mover el punto rojo (superficie de la base) del applet de la Actividad 2, los estudiantes respondieron de la siguiente manera:

- E2 y E3: No logran deconstruir dimensionalmente el monolito 3D en figuras 2D para identificar el cambio en la superficie de la base del monolito, solo lograron la deconstrucción dimensional en figuras de 1D haciendo alusión al cambio en el largo y ancho de la base. Lo anterior se puede inferir a través de respuestas como la proporcionada por el E2 (Figura 10).

a) ¿Qué cambia en el monolito al arrastrar el punto rojo?

Respuesta

Lo largo y lo ancho.

Figura 10: Respuesta proporcionada por el E2 a la Actividad 2 inciso a).

- E1 y E4: No logran deconstruir dimensionalmente el monolito 3D en figuras 2D ni 1D para identificar cambios en la superficie del monolito. Únicamente logran identificar cambios en el tamaño sin relacionarlo con la superficie, proporcionando respuestas como las que se muestran a continuación (Figura 11 y 12):

a) ¿Qué cambia en el monolito al arrastrar el punto rojo?

Respuesta

el tamaño y forma de la base

Figura 11: Respuesta proporcionada por el E1 a la Actividad 2 inciso a).

a) ¿Qué cambia en el monolito al arrastrar el punto rojo?

Respuesta

Cambia su estructura rectangular gruesa por una delgada

Figura 12: Respuesta proporcionada por el E4 a la Actividad 2 inciso a).

En cuanto a la identificación de los cambios en la altura del monolito al manipular el punto azul del applet, los estudiantes mostraron las siguientes respuestas:

- E2: No logra deconstruir dimensionalmente el monolito 3D en figuras 1D para identificar el cambio en su altura. Únicamente identifica un cambio de tamaño sin especificar sobre la dimensión que se modificaba. Esto se infiere a partir de su respuesta proporcionada “Al arrastrar el punto azul cambia su tamaño”.

- E1, E3 y E4: Logran deconstruir dimensionalmente el monolito 3D en figuras 1D para identificar el cambio en la altura del monolito, infiriendo lo anterior a partir de respuestas como la del E4 en la que menciona *“Cambia su altura. Disminuye y aumenta”*.

En referencia a la identificación de la igualdad entre la forma de la base del monolito y la del corte transversal que se forma al manipular el punto verde del applet, los estudiantes respondieron de la siguiente manera:

- E3: Logra identificar la forma que tiene el corte transversal, pero no identifica la igualdad entre la forma de este corte y la base del monolito, mostrando indicios de dificultades en la deconstrucción dimensional de cuerpos de 3D a 2D, a partir de su respuesta proporcionada en la que indica *“La forma del corte transversal es cuadrangular”*.
- E1, E2 y E4: Logran deconstruir dimensionalmente el monolito de 3D en figuras de 2D identificando la igualdad entre la forma de la base del monolito y la del corte transversal generado por el plano del punto verde. Por ejemplo, el E4 respondió *“El corte transversal sería igual a la base del monolito, formándose dos cuerpos de pequeños cubitos”*.

Analizando el tipo de representaciones que realizan los estudiantes y como parte final de la Actividad 2, se les solicitó que dibujaran la forma de los cuerpos que se generarían a partir de realizar el corte transversal que pasa por el punto verde del applet en GeoGebra, a lo que los estudiantes mostraron los siguientes tipos de respuestas:

- E1: Representa correctamente la forma que genera el corte transversal en el monolito, mostrando indicios de una correcta deconstrucción dimensional de cuerpos de 3D a 2D, sin embargo, no muestra indicios de una correcta división mereológica para identificar los cuerpos generados por el corte (Figura 13).
- E2: Representa correctamente solo uno de los cuerpos generados a partir del corte transversal en el monolito, mostrando indicios de dificultades en la división mereológica de cuerpos en 3D (Figura 14).
- E3 y E4: Representa correctamente los dos cuerpos generados a partir del corte transversal en el monolito, mostrando indicios de una correcta división mereológica de cuerpos en 3D (Figura 15).



Figura 13: Representación en 2D de los cuerpos generados a partir del corte transversal en el monolito. Respuesta del E1 a la Actividad 2 inciso e).



Figura 14: Representación en 3D de los cuerpos generados a partir del corte transversal en el monolito. Respuesta del E2 a la Actividad 2 inciso e).

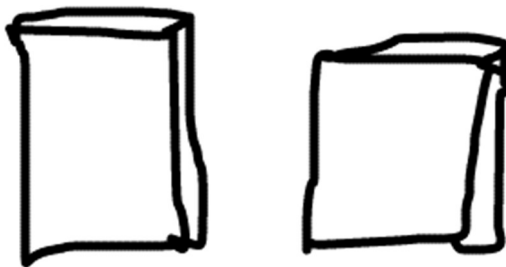


Figura 15: Representación en 3D de los cuerpos generados a partir del corte transversal en el monolito. Respuesta del E3 a la Actividad 2 inciso e).

A partir de las actividades de la etapa de apertura, se logró adentrar al estudiante en el contexto extra matemático de los monolitos mediante el reconocimiento de sus formas, así mismo, se exploró de manera cualitativa los conceptos de superficie de la base, altura de un prisma rectangular y corte transversal. Sin embargo, podría considerarse añadir cuestionamientos a las actividades sobre la identificación del nombre de figuras 2D y 3D, así como preguntar de manera directa si existe un cambio en la superficie del monolito o se mantiene.

Etapas de Desarrollo:

Continuando con las actividades correspondientes a la etapa de desarrollo, en la Actividad 3 los estudiantes lograron determinar el volumen de prismas rectangulares rectos, así como identificar la forma de los cortes transversales realizados al mismo. Como primera parte de la actividad, se plantea la situación en la que un escultor desea construir tres monolitos con dimensiones de largo, ancho y alto determinadas, comenzando con uno de forma de prisma rectangular recto y solicitando a los estudiantes lo representaran por medio de un dibujo expresando sus dimensiones, a lo cual los estudiantes respondieron de la siguiente manera:

- E1 y E2: Representan el monolito con forma de prisma rectangular recto por medio de un dibujo en 3D, pero no especifican sus dimensiones, poniendo en duda si existe una dificultad para la identificación de las dimensiones de largo, ancho y alto en el monolito (Figura 16).
- E3 y E4: Representan el monolito con forma de prisma rectangular recto por medio de un dibujo en 3D, especificando correctamente sus dimensiones de largo, ancho y alto (Figura 17).



Figura 16: Representación en 3D del monolito con forma de prisma rectangular recto. Respuesta del E1 a la Actividad 3 inciso a).

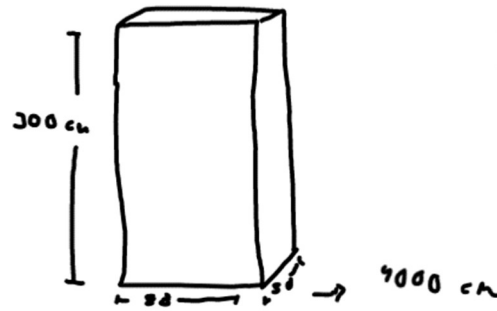


Figura 17: Representación en 3D del monolito con forma de prisma rectangular recto. Respuestas del E3 a la Actividad 3 inciso a).

A pesar de que algunos de los estudiantes no hicieron explícita la identificación de las dimensiones de largo, ancho y alto del monolito, todos lograron calcular correctamente la cantidad de concreto necesaria para la construcción del monolito, mostrando indicios de un conocimiento previo de la fórmula y de una correcta aplicación, a partir de respuesta como la del E3 en donde explica la cantidad de m^3 de concreto necesario: “1.2 metros cúbicos, primero sacamos el área de la base usando lado*lado que nos da 4000 cm^2 , multiplicándolos por la altura del prisma que es 300, nos da como resultado 1200000 centímetros cúbicos, que convertidos a metros son 1.2 metros cúbicos”. Cabe destacar que, durante la implementación, el hecho de que las medidas de largo y ancho fueran proporcionadas en centímetros, y la de alto en metros, causó

una confusión en los estudiantes al momento de querer realizar las conversiones para calcular los m^3 .

En cuanto a la identificación de la forma y dimensiones de las bases de los cuerpos generados por las fases de colado y el cálculo de su volumen, los estudiantes presentaron las siguientes respuestas:

- E2: Logra identificar la forma de las bases generadas por las fases de colado al dibujar correctamente las bases inferior y superior en los distintos momentos del colado del monolito, pero no indica sus dimensiones, y presenta dificultades para la determinación del volumen de cada fase de colado poniendo en duda la correcta deconstrucción dimensional (Figura 18).
- E1: Logra deconstruir dimensionalmente el monolito identificando de manera correcta la forma de las bases generadas por las fases de colado, así como sus dimensiones y el correcto cálculo de sus áreas, deconstruyendo dimensionalmente un cuerpo en 3D a unidades figurativas de 2D y 1D. Sin embargo, en la columna del cálculo del volumen coloca varios resultados, poniendo en duda el correcto conocimiento de la fórmula para su cálculo (Figura 19).
- E3 y E4: Logran deconstruir dimensionalmente el monolito identificando de manera correcta la forma de las bases generadas por las fases de colado, sus dimensiones y el cálculo de su área. Así mismo, calcula correctamente el volumen que va teniendo el monolito en cada fase de colado (Figura 20).

Altura	Base Inferior		Base Superior		Volumen de Concreto
	Dibujo con Dimensiones	Área	Dibujo con dimensiones	Área	
1m		0.4		0.4	0.8
2m		0.4		0.4	1.6
3m		0.4		0.4	

Figura 18: Identificación de las bases, áreas y volúmenes de las fases de colado del monolito recto. Respuesta del E2 a la Actividad 3 inciso d).

Altura	Base Inferior		Base Superior		Volumen de Concreto
	Dibujo con Dimensiones	Área	Dibujo con dimensiones	Área	
1m		0.4		0.4	0.4
2m		0.4		0.4	0.8
3m		0.4		0.4	1.2

Figura 19: Identificación de las bases, áreas y volúmenes de las fases de colado del monolito recto. Respuesta del E1 a la Actividad 3 inciso d).

Altura	Dimensiones		dimensiones		Volumen de Concreto
	Dibujo con Dimensiones	Área	Dibujo con dimensiones	Área	
1m		0.4		0.4	0.4 m ³
2m		0.4		0.4	0.8 m ³
3m		0.4		0.4	1.2 m ³

Figura 20: Identificación de las bases, áreas y volúmenes de las fases de colado del monolito recto. Respuesta del E4 a la Actividad 3 inciso d).

Respecto a la identificación de los cambios producidos en un prisma rectangular por la inclinación, en la Actividad 4, los estudiantes se enfrentaron a la manipulación de un applet en GeoGebra que representaba el segundo monolito a construir por el escultor el cual tendría la característica de estar inclinado, a partir de lo cual lo estudiantes pudieron observar lo siguiente:

- E2, E3 y E4: Deconstruyen correctamente el monolito inclinado reconociendo que su altura se mantiene a pesar de la inclinación, a partir de respuestas como:

a) ¿La altura del monolito cambia al ser inclinado el applet? ¿o se mantiene? Argumenta tu respuesta.

Respuesta

Al ser inclinado por el applet se mantiene la altura

Figura 21: Respuesta proporcionada por el E2 a la Actividad 4 inciso a).

a) ¿La altura del monolito cambia al ser inclinado el applet? ¿o se mantiene? Argumenta tu respuesta.

Respuesta

Sigue siendo la misma altura unicamente cambiando su inclinacion

Figura 22: Respuesta proporcionada por el E3 a la Actividad 4 inciso a).

- E1: No logra identificar que la altura del monolito se mantiene a pesar de la inclinación, mostrando indicios de una incorrecta deconstrucción dimensional, a partir de respuestas como:

a) ¿La altura del monolito cambia al ser inclinado el applet? ¿o se mantiene? Argumenta tu respuesta.

Respuesta

cambia, por qué conforme lo vas inclinado mas hacia un lado más altura va consiguiendo

Figura 23: Respuesta proporcionada por el E1 a la Actividad 4 inciso a).

En cuanto a la deconstrucción dimensional de las caras laterales de los monolitos, ninguno de los estudiantes logró identificar que la dimensión de su ancho se mantenía al momento de inclinar el monolito, sin embargo, todos identificaron el cambio en el largo de las caras laterales, utilizando expresiones como las del E2 (Figura 24) mostrando indicios de una correcta deconstrucción dimensional.

b) ¿Qué sucede con las dimensiones de largo y ancho de las caras laterales del monolito? ¿Cambian o se mantienen?

Respuesta

Cambian ya que necesitan ser mas largas para mantener la altura

Figura 24: Respuesta proporcionada por el E2 a la Actividad 4 inciso b).

Continuando con la identificación de la forma y dimensiones de las bases de los cuerpos generados por las fases de colado del monolito inclinado, y el cálculo de su volumen, los estudiantes proporcionaron las siguientes respuestas:

- E1, E3 y E4: Logran deconstruir dimensionalmente el monolito inclinado, identificando correctamente la forma de los cortes transversales generados por las distintas fases de colado, así como sus dimensiones y el cálculo de su área. Así mismo, calculan correctamente el volumen que va adquiriendo el monolito en cada una de las fases de colado (Figura 25).







Altura	Base Inferior		Base Superior		Volumen de Concreto
	Dibujo con Dimensiones	Área	Dibujo con dimensiones	Área	
1m		0.4		0.4	0.4 m ³
2m		0.4		0.4	0.8 m ³
3m		0.4		0.4	1.2 m ³

Figura 25: Identificación de las bases, áreas y volúmenes de las fases de colado del monolito inclinado. Respuesta del E4 a la Actividad 4 inciso d).

- E2: Logra identificar correctamente la forma de los cortes transversales generados por las distintas fases de colado y el cálculo de su área, sin embargo, no especifica las dimensiones de estos cortes, poniendo en duda la correcta deconstrucción dimensional. Del mismo modo, presenta dificultades para la determinación del volumen que va adquiriendo el monolito inclinado en cada una de las fases de colado (Figura 26).





Altura	Base Inferior		Base Superior		Volumen de Concreto
	Dibujo con Dimensiones	Área	Dibujo con dimensiones	Área	
1m		0.4		0.4	0.8
2m		0.4		0.4	1.6
3m		0.4		0.4	2.4

Figura 26: Identificación de las bases, áreas y volúmenes de las fases de colado del monolito inclinado. Respuesta del E2 a la Actividad 4 inciso d).

Prosiguiendo con la identificación de la forma y dimensiones de las bases de los cuerpos generados por las fases de colado del monolito que presenta dos de sus caras onduladas, y el cálculo de su volumen, los estudiantes proporcionaron las siguientes respuestas:

- E1, E3 y E4: Logran deconstruir dimensionalmente el monolito ondulado, identificando correctamente la forma de los cortes transversales generados por las distintas fases de colado, así como sus dimensiones y el cálculo de su área.

Así mismo, calculan correctamente el volumen que va adquiriendo el monolito en cada una de las fases de colado (Figura 27).

- E2: Logra identificar correctamente la forma de los cortes transversales generados por las distintas fases de colado y el cálculo de su área, sin embargo, no especifica las dimensiones de estos cortes, poniendo en duda la correcta deconstrucción dimensional. Del mismo modo, presenta dificultades para la determinación del volumen que va adquiriendo el monolito ondulado en cada una de las fases de colado (Figura 28).


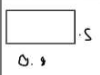

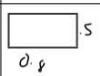

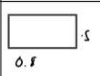
Altura	Base Inferior		Base Superior		Volumen de Concreto
	Dibujo con Dimensiones	Área	Dibujo con dimensiones	Área	
1m	 0.8	4000 cm^2	 0.8	4000 cm^2	.4 m^3
2m	 0.8	6000 cm^3	 0.8	4000 cm^2	.8 m^3
3m	 0.8	4000 cm^3	 0.8	4000 cm^2	1.2 m^3

Figura 27: Identificación de las bases, áreas y volúmenes de las fases de colado del monolito ondulado. Respuesta del E3 a la Actividad 5 inciso a).

Altura	Base Inferior		Base Superior		Volumen de Concreto
	Dibujo con Dimensiones	Área	Dibujo con dimensiones	Área	
1m		0.4		0.4	0.8
2m		0.4		0.4	1.6
3m		0.4		0.4	2.4

Figura 28: Identificación de las bases, áreas y volúmenes de las fases de colado del monolito ondulado. Respuesta del E2 a la Actividad 5 inciso a).

Para finalizar con las actividades de la etapa de desarrollo, y abordando el reconocimiento de la conservación de volumen en prismas rectangulares que sufren transformaciones como la inclinación y la ondulación, pero mantienen su altura y área en cortes transversales, todos los estudiantes lograron determinar que la cantidad de concreto necesario para la construcción de los monolitos es la misma sin importar su inclinación o la ondulación que sufre en dos de sus caras. Lo anterior se puede inferir a partir de las respuestas que los estudiantes proporcionaron como recomendaciones para la construcción de los monolitos:

E4: “Escultor: El volumen de ambos monolitos será igual al del primero. La altura y la base de los tres monolitos es la misma, por lo que no importa la ondulación o inclinación, siempre tendrán el mismo volumen”.

E1: “Querido escultor, le escribo esta carta para recomendarle que, si quiere saber el volumen de los tipos de monolitos, es nomas la multiplicación de la altura por el ancho y por el alto. Es fácil de saber si todas sus dimensiones son las mismas para cada monolito”.

Es importante destacar que ninguno de los estudiantes utilizó una escala para realizar las representaciones solicitadas en las distintas actividades de esta etapa, y que se presentaron dificultades al momento de realizar los cálculos de área y volumen por la necesidad de realizar conversiones a las especificaciones proporcionadas. También, es importante reconocer que, para lograr la correcta deconstrucción dimensional y la identificación de los cambios producidos en el monolito por la inclinación y ondulación, fue esencial el apoyo que brindaron los applets diseñados en GeoGebra, por la posibilidad de girar la vista para observar los monolitos desde diferentes ángulos. Por lo

tanto, se podría incluir en las instrucciones de los incisos en los que se solicita la manipulación de los applets de manera explícita la exploración de diferentes vistas.

Etapas de Cierre:

Respecto al reconocimiento de la igualdad en áreas de los cortes transversales como característica para que dos cuerpos que tienen la misma altura tengan el mismo volumen, todos los estudiantes reconocieron la igualdad de sus bases, a partir de respuestas como la del E4: *“Deben de tener las mismas bases”*. Sin embargo, fue importante resaltar que cuando se habla de igualdad en las bases realmente se hace alusión a la igualdad en el área de las secciones generadas por los cortes transversales, ya que solo el E1 expresó esta relación a partir de su respuesta *“Que tienen áreas iguales en sus secciones”*.

Por otra parte, en cuanto al reconocimiento de la igualdad de área de los cortes transversales y altura de un prisma como características para que cuerpos ondulados, inclinados y rectos tengan el mismo volumen, los estudiantes respondieron de la siguiente manera:

- E1: Reconoce que la igualdad en la altura de un prisma y el área de sus secciones transversales son características para que cuerpos rectos, inclinados y ondulados tengan el mismo volumen. Lo anterior se puede inferir a partir de su respuesta:
E1: “Misma altura y área en sus secciones”.
- E3 y E4: Reconocen que la igualdad en la altura de un prisma y sus bases son características para que cuerpos rectos, inclinados y ondulados tengan el mismo

volumen. Sin embargo, no lo relacionan con el área de los cortes transversales.

Lo anterior se puede inferir a partir de respuestas como:

E3: “Bases iguales y misma altura”.

- E2: Reconoce la igualdad de las bases como característica para que cuerpos rectos, inclinados y ondulados tengan el mismo volumen, sin embargo, no lo relaciona con el área de los cortes transversales y no reconoce a la altura como característica para que se de esta igualdad de volumen. Lo anterior se puede inferir a partir de su respuesta:

E2: “Tener la misma base”.

Las actividades comprendidas en esta etapa lograron generalizar la igualdad del volumen en prismas que tienen la misma altura y área en sus cortes transversales, a pesar de sufrir algún tipo de transformación como la inclinación u ondulación de dos de sus caras, recapitulando las estrategias abordadas en las actividades correspondientes a las etapas de apertura y desarrollo de la secuencia.

Valoración General:

Para la valoración general de la secuencia se elaboró una tabla en la que se muestra la concreción de los objetivos específicos que tuvo cada uno de los estudiantes en las distintas etapas de la secuencia (Tabla 4). A su vez se utilizó la siguiente clasificación por colores para representar el nivel de concreción que logró el estudiante, aclarando que éstos se declararon a nuestro juicio como valoración de la medida en la que se cumplieron los objetivos planteados para las secuencias.

- Nivel de Concreción Alto: Las respuestas proporcionadas por el estudiante cumplen en su totalidad con el objetivo específico planteado para las actividades relacionadas a él.
- Nivel de Concreción Medio: Las respuestas proporcionadas por el estudiante cumplen parcialmente con el objetivo específico planteado para las actividades relacionadas a él.
- Nivel de Concreción Bajo: Las respuestas proporcionadas por el estudiante no cumplen con el objetivo específico planteado para las actividades relacionadas a él.

Simbología	
Nivel de Concreción Alto	
Nivel de Concreción Medio	
Nivel de Concreción Bajo	

Estudiante	Etapa	Objetivos Específicos	
		Reconocer la igualdad de volumen en cuerpos que tienen la misma altura y área en sus cortes transversales.	Promover la deconstrucción dimensional de cuerpos de 3D a 2D a través de sus cortes transversales.
E1	Inicio	Identifica la forma de la base del monolito sin relacionarlo a su superficie y no logra deconstruir dimensionalmente el cuerpo de 3D en 1D para identificar su altura. Identifica la forma y dimensiones de los cortes transversales reconociendo la igualdad entre éstos y la base del monolito.	Hace alusión a la forma de los monolitos como una figura en 3D y lo deconstruye dimensionalmente identificando la forma de sus bases y caras laterales.
	Desarrollo	Logra calcular correctamente el área de las bases del monolito recto, inclinado y ondulado generadas por las distintas fases de colado Logra calcular correctamente el volumen únicamente de los monolitos inclinado y ondulados generados por las distintas fases de colado.	Representa el monolito recto como un cuerpo en 3D sin especificar sus dimensiones. Deconstruye dimensionalmente el monolito recto en 3D a 2D a partir de sus cortes transversales identificando su forma y sus dimensiones. Deconstruye dimensionalmente los monolitos inclinado y ondulado identificando la forma y dimensiones de los cortes transversales generados por las fases de colado, así como los cambios producidos por la

			ondulación. En el caso del monolito inclinado no logra identificar la conservación de la altura.
	Cierre	Reconoce que la igualdad en la altura de un prisma y el área de sus secciones transversales son características para que cuerpos rectos, inclinados y ondulados tengan el mismo volumen.	Logra deconstruir dimensionalmente los monolitos identificando la igualdad de las bases generadas por las fases de colado. Se tuvo que enfatizar en la igualdad de las bases en relación con la igualdad de sus áreas.
E2	Inicio	Identifica la forma de la base del monolito sin relacionarlo a su superficie y deconstruye dimensionalmente el cuerpo de 3D en 1D identificando su altura. Identifica la forma y dimensiones de los cortes transversales reconociendo la igualdad entre éstos y la base del monolito.	Hace alusión a la forma de los monolitos como una figura en 2D y lo deconstruye dimensionalmente identificando la forma de sus bases y caras laterales.
	Desarrollo	Presenta dificultades para el cálculo de las áreas de las bases del monolito recto y en el volumen de los monolitos recto, inclinado y ondulado determinados por las fases de colado.	Representa el monolito recto como un cuerpo en 3D sin especificar sus dimensiones. Deconstruye dimensionalmente el monolito en 3D a 2D a partir de sus cortes transversales identificando su forma, pero sin especificar sus dimensiones. Deconstruye dimensionalmente los monolitos inclinado y ondulado identificando la forma de los cortes trasversales generados por las fases de colado, pero sin especificar sus dimensiones.
	Cierre	Reconoce la igualdad de las bases como característica para que cuerpos rectos, inclinados y ondulados tengan el mismo volumen, sin embargo, no lo relaciona con el área de los cortes transversales y no reconoce a la altura como característica para que se de esta igualdad de volumen.	Logra deconstruir dimensionalmente los monolitos identificando la igualdad de las bases generadas por las fases de colado. Se tuvo que enfatizar en la igualdad de las bases en relación con la igualdad de sus áreas.
E3	Inicio	Identifica la forma de la base del monolito sin relacionarlo a su superficie y deconstruye dimensionalmente el cuerpo de 3D en 1D identificando su altura. Identifica la forma y dimensiones de los cortes transversales sin reconocer la igualdad entre éstos y la base del monolito.	Hace alusión a la forma de los monolitos como una figura en 2D y lo deconstruye dimensionalmente identificando la forma de sus bases y caras laterales.

	Desarrollo	Logra calcular correctamente el área de las bases del monolito recto, ondulado e inclinado generadas por las distintas fases de colado, así como su volumen.	Representa el monolito recto como un cuerpo en 3D especificando sus dimensiones. Deconstruye dimensionalmente el monolito recto en 3D a 2D a partir de sus cortes transversales identificando su forma y sus dimensiones. Deconstruye dimensionalmente los monolitos inclinado y ondulado identificando la forma y dimensiones de los cortes transversales generados por las fases de colado, así como los cambios producidos por la inclinación y ondulación.
	Cierre	Reconocen que la igualdad en la altura de un prisma y sus bases son características para que cuerpos rectos, inclinados y ondulados tengan el mismo volumen. Sin embargo, no lo relacionan con el área de los cortes transversales.	Logra deconstruir dimensionalmente los monolitos identificando la igualdad de las bases generadas por las fases de colado. Se tuvo que enfatizar en la igualdad de las bases en relación con la igualdad de sus áreas.
E4	Inicio	Identifica la forma de la base del monolito sin relacionarlo a su superficie y no logra deconstruir dimensionalmente el cuerpo de 3D en 1D para identificar su altura. Identifica la forma y dimensiones de los cortes transversales reconociendo la igualdad entre éstos y la base del monolito.	Hace alusión a la forma de los monolitos como una figura en 2D y lo deconstruye dimensionalmente identificando la forma de sus bases y caras laterales.
	Desarrollo	Logra calcular correctamente el área de las bases del monolito recto, inclinado y ondulado generadas por las distintas fases de colado, así como su volumen.	Representa el monolito recto como un cuerpo en 3D especificando sus dimensiones. Deconstruye dimensionalmente el monolito recto en 3D a 2D a partir de sus cortes transversales identificando su forma y sus dimensiones. Deconstruye dimensionalmente los monolitos inclinado y ondulado identificando la forma y dimensiones de los cortes transversales generados por las fases de colado, así como los cambios producidos por la inclinación y ondulación.
	Cierre	Reconocen que la igualdad en la altura de un prisma y sus bases son características para que cuerpos rectos, inclinados y ondulados tengan el mismo volumen. Sin embargo, no lo relacionan con el área de los cortes transversales.	Logra deconstruir dimensionalmente los monolitos identificando la igualdad de las bases generadas por las fases de colado. Se tuvo que enfatizar en la igualdad de las bases en relación con la igualdad de sus áreas.

Tabla 4: Nivel de concreción de los objetivos específicos por parte de los estudiantes en la Secuencia Monolitos.

Respecto al objetivo específico de reconocer la igualdad de volumen en cuerpos que tienen la misma altura y área en sus cortes transversales, se puede observar que, en la etapa de inicio, el 100% de los estudiantes identifican la forma de la base del

monolito recto sin relacionarlo a su superficie, ubicándose en un nivel de concreción medio por no lograr deconstruir dimensionalmente el cuerpo en 3D en 1D para identificar su altura, o por identificar la forma y dimensiones de los cortes transversales sin relacionar su igualdad con la base del monolito.

En la etapa de desarrollo, el 75% de los estudiantes lograron calcular correctamente el área de las bases del monolito recto, inclinado y ondulado generadas por las distintas fases de colado, así como el cálculo del volumen que iba adquiriendo el monolito en estas fases. El 25% restante se ubicó en un nivel de concreción bajo debido a presentar dificultades en el cálculo de estas áreas y volúmenes.

Finalizando con el análisis de este objetivo específico, en la etapa de cierre el 25% de los estudiantes reconocen que la igualdad en la altura de un prisma y el área de sus secciones transversales son características para que cuerpos rectos, inclinados y ondulados tengan el mismo volumen. El 50% se ubicó en un nivel de concreción medio por reconocer la igualdad en las bases de los monolitos como característica, pero sin relacionarla con el área de los cortes transversales, y el 25% restante se ubicó en un nivel bajo por además de lo anterior, no reconocer a la altura como característica para que se de esta igualdad de volumen.

En cuanto al objetivo específico de promover la deconstrucción dimensional de cuerpos en 3D a 2D a través de sus cortes transversales, el 25 % de los estudiantes hicieron alusión a la forma del monolito como una figura en 3D y lo deconstruyeron dimensionalmente de manera correcta identificando la forma de sus bases y caras laterales. El 75 % fueron considerados como un nivel de concreción medio debido que a pesar de deconstruir dimensionalmente de manera correcta identificando la forma de las

bases y caras laterales del monolito, hicieron alusión a la forma del monolito como una figura en 2D.

En la etapa de desarrollo, el 50% de los estudiantes realizaron una representación del monolito recto en 3D especificando sus dimensiones y deconstruyéndolo dimensionalmente de 3D a 2D a partir de la identificación de sus cortes transversales. Así mismo, lograron la deconstrucción dimensional de los monolitos inclinado y ondulado identificando su forma y dimensiones de los cortes transversales generados por las fases de colado, así como los cambios producidos en el monolito por la inclinación y ondulación. El 50% restante se ubicó en un nivel de concreción medio por no especificar las dimensiones en las distintas representaciones y deconstrucciones de los monolitos, así como por no identificar la conservación de la altura en el caso del monolito inclinado.

Por último, en las actividades de la etapa de cierre relacionadas a este objetivo específico, el 100% de los estudiantes lograron deconstruir dimensionalmente los monolitos identificando la igualdad de las bases generadas por las fases de colado. Es importante mencionar que fue necesario enfatizar que el hecho de que la característica fundamental en la igualdad de las bases era reconocer la igualdad en las áreas de estas.

V.2. Secuencia Albercas

Etapa de Apertura:

Iniciando con las actividades de la etapa de apertura, en la Actividad 1 de la secuencia los estudiantes mostraron interés por el contexto de las albercas, mencionando que conocían algunas de formas diferentes tales como: cuadradas, rectangulares, circulares e incluso algunas con forma irregular, donde ningún estudiante hizo referencia a un

cuerpo 3D, si no que mencionaron un prototipo de la alberca conocida en 2D. Lo anterior también se relaciona con lo obtenido en el inciso c) de la actividad, en donde los estudiantes respondieron de la siguiente manera:

- E3 y E4: Representaron una alberca conocida por medio de un dibujo en 3D (Figura 29).
- E2 y E1: Representaron una alberca conocida por medio de un dibujo en 2D (Figura 30).

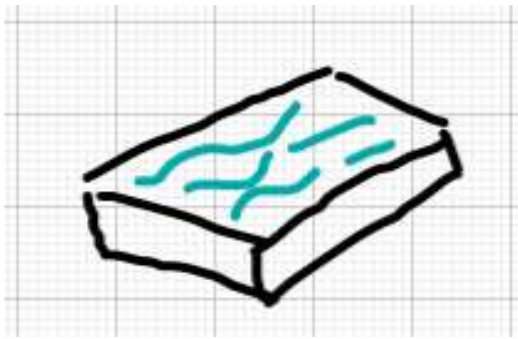


Figura 29: Representación de una alberca conocida realizada por el Estudiante 4. Resposta a la Actividad 2 inciso c).

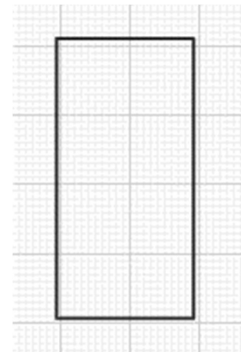


Figura 30: Representación de una alberca conocida realizada por el Estudiante 2. Resposta a la Actividad 2 inciso c).

Respecto a la exploración cualitativa de los conceptos de superficie de la base y altura de un prisma rectangular, al mover el punto rojo (superficie de la base) y azul (altura del prisma) del applet de la Actividad 2, los estudiantes respondieron de la siguiente manera:

- E1 y E3: Los estudiantes reconocieron la participación de largo y ancho en la base de la superficie, así como el cambio en la altura con frases como:

E1: "Al mover el punto rojo cambia el área de la base".

E3: "La altura de la alberca cambia al mover el punto azul".

A partir de estas respuestas se infiere que los estudiantes lograron una correcta deconstrucción dimensional identificando el cambio en una figura 2D (superficie de la base) y en una figura 1D (altura) a partir de un cuerpo 3D.

- E2 y E4: Identificaron el cambio en el ancho y largo de la base del prisma que conformaba la alberca, pero no lo relacionaron con un cambio en su superficie. En cuanto al cambio generado al mover el punto azul, si lograron identificar el cambio en su altura. Los estudiantes proporcionaron respuestas como:

E4: “Al arrastrar el punto rojo cambia el largo y ancho de la base de la alberca”.

E2: “Solo cambia el ancho y largo”

El hecho de que los estudiantes 2 y 4 no hayan logrado relacionar el cambio en el largo y ancho de la base con su superficie permite inferir que no aplicaron una deconstrucción dimensional en 2D para cuerpos de 3D, si no que únicamente pudieron deconstruirlo dimensionalmente a través de figuras 1D, lo cual implica dificultades en actividades posteriores relacionadas a identificar el área de la base y la altura como componentes básicos para el cálculo del volumen.

Tomando en cuenta las respuestas proporcionadas por los estudiantes a las actividades contenidas en esta etapa de la secuencia se muestra la presencia de dificultades previamente reconocidas, como el diferenciar el volumen de otras magnitudes como el área (Sanchis y Guillen, 2013), haciéndose presente la utilización de vocabulario de figuras en 2D para referirse a cuerpos de 3D (Sanmiguel y Salinas, 2011).

Mediante las actividades de la etapa de apertura, se logró adentrar al estudiante en el contexto extra matemático de las albercas a partir del reconocimiento de sus formas, así mismo, se exploró de manera cualitativa los conceptos de superficie de la base y altura de un prisma rectangular. Sin embargo, podría considerarse añadir cuestionamientos a las actividades sobre la identificación del nombre de figuras 2D y 3D, así como preguntar de manera directa si existe un cambio en la superficie de la base de la alberca o se mantiene.

Etapa de Desarrollo

Continuando con las actividades correspondientes a la etapa de desarrollo, en la Actividad 3 todos los estudiantes lograron determinar correctamente las dimensiones faltantes de los diseños de las albercas, así como determinar dimensiones para el largo, ancho y alto para un tercer diseño según las especificaciones proporcionadas. Sin embargo, al momento de deconstruir dimensionalmente los diseños de las albercas para la identificación de sus dimensiones, no todos los estudiantes contestaron de manera correcta; recordando que, tal como Duval (2017) menciona, la deconstrucción dimensional permite analizar la transformación de una figura utilizando las unidades figurativas de un nivel inferior, en este caso, utilizando unidades figurativas de 2D para el análisis de cuerpos de 3D.

- E1, E3 y E4: Identificaron correctamente las dimensiones de largo, ancho y alto para los tres diseños, mostrando indicios de una correcta deconstrucción dimensional.
- E2: Presentó dificultades para diferenciar el largo y ancho de los diseños B y C, el cual fue propuesto por el mismo estudiante (Figura 31).

	Largo	Ancho	Alto
Diseño A	16	9	1.5
Diseño B	10m	14.4m	1.5m
Diseño C	6m	24m	1.5m

Figura 31: Identificación de las dimensiones de largo, ancho y alto de los diseños realizada por el Estudiante 2. Respuesta a la Actividad 3 inciso b).

En cuanto al cálculo del volumen de tierra que era necesario excavar para la construcción de la alberca, todos los estudiantes respondieron mostrando indicios del conocimiento de la fórmula para la obtención del volumen de un prisma. No obstante, no todos los estudiantes reconocieron la igualdad de volumen para todos los diseños que cumplieran con las especificaciones proporcionadas, brindando las respuestas siguientes:

- E2, E3 y E4: Reconocieron que no existe un diseño con volumen diferente, ya que todos cuentan con la misma altura y área en su base, logrando generalizar estos elementos participantes para el cálculo del volumen de un prisma rectangular, reconociendo que su igualdad provocará una igualdad en el volumen también.
- E1: Exploró algunos diseños que cumplían con las especificaciones proporcionadas de largo, ancho y alto, reconociendo que todos tenían el mismo volumen, sin embargo, no se mostró convencido de que absolutamente todos los diseños posibles tuvieran el mismo volumen. De lo anterior, observamos que la exploración realizada por el estudiante no le fue suficiente para lograr la generalización.

Profesora: “¿Existe algún otro diseño que cumpla con las especificaciones proporcionadas por el ingeniero y tenga un volumen diferente?”.

E1: "Creo que sí pero no encontré ninguno".

E2: "No, ya que siempre será el mismo volumen".

E4: "No, porque deben tener la misma base y altura".

E3: "No, porque si la base son siempre 144 metros cuadrados de superficie nunca va a ser diferente el volumen a menos que la altura cambie".

Respecto a la deconstrucción dimensional de la base y las caras laterales de los diseños de las albercas a partir de sus desarrollos planos, a pesar de que todos lograron calcular correctamente la suma de las áreas para el cálculo de m² de azulejo necesarios para su construcción, solo dos de los estudiantes plasmaron en sus respuestas una correcta identificación de sus formas y dimensiones.

- E1 y E2: Identificaron la forma de la base y de las caras laterales, pero no especifican sus dimensiones, poniendo en duda la correcta deconstrucción dimensional a partir de su desarrollo plano (Figura 32).
- E3 y E4: Identificaron correctamente la forma y dimensiones de la base y de las caras laterales, mostrando indicios de una correcta deconstrucción dimensional (Figura 33).

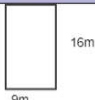
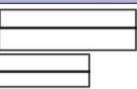

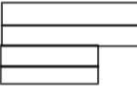
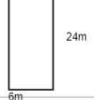

	Base	Caras Laterales
Diseño A		
Diseño B		
Diseño C		

Figura 32: Identificación de la forma y dimensiones de la base y las caras laterales de los diseños realizada por el Estudiante 2. Respuesta a la Actividad 4 inciso a).

	Base	Caras Laterales
Diseño A		
Diseño B		
Diseño C		

Figura 33: Identificación de la forma y dimensiones de la base y las caras laterales de los diseños realizada por el Estudiante 3. Respuesta a la Actividad 4 inciso a).

Es importante destacar que solo el E2 representó las cuatro caras laterales de los diseños de las albercas, mientras que los demás solo representaron dos de ellas, aunque consideraran las cuatro caras para el cálculo de la suma de sus áreas; así mismo, solo el E3 utilizó una escala y la herramienta de regla en GeoGebra para realizar las representaciones. Por otra parte, E1, E2 y E4 muestran indicios de la figura prototípica del rectángulo al representar las caras laterales de los diseños (Figura 34).

	Base	Caras Laterales
Diseño A		
Diseño B		
Diseño C		

Figura 34: Presencia de la figura prototípica del rectángulo en las respuestas proporcionadas por el Estudiante 4. Respuesta a la Actividad 4 inciso a).

Continuando con la deconstrucción dimensional, pero en esta ocasión para el reconocimiento del cuadrado como forma que debe tener la base de la alberca para requerir la menor área a recubrir con azulejos en su base y caras laterales, todos los

estudiantes lograron esta identificación en la Actividad 5 deconstruyendo dimensionalmente el desarrollo plano de la alberca y relacionando la longitud de la barra mostrada en el applet con el perímetro de la base de la alberca. Además, todos los estudiantes lograron reconocer las especificaciones del diseño que serían más convenientes por requerir menos material para su construcción.

Actividad 6: Escríbele al ingeniero una carta informándole sobre la recomendación que le harías para poder seleccionar el diseño más conveniente, es decir, el que requiera menos cantidad de material y cumpla con las especificaciones establecidas.

E2: Ingeniero, viendo los distintos tipos de diseño que podrían hacerse, el más conveniente sería uno de forma cuadrada con 12 m de largo, 12 m de ancho y 1.5 m de altura, ya que este diseño cumple con las especificaciones de 144 m² de base, 1.5 m de profundidad y además es el que menos material necesita.

En esta etapa de la secuencia didáctica se pudo reafirmar lo que plantea Duval (2017) sobre la necesidad de entrenamiento para ver geoméricamente las figuras, pues los estudiantes a primera instancia lograban identificar las unidades figurativas de dimensión superior, presentando una dificultad para reconocer las de dimensión inferior, sin embargo, el apoyo en los applets de GeoGebra diseñados, jugaron un papel fundamental para el logro de los objetivos planteados para las actividades de esta etapa, las cuales estaban relacionadas a la deconstrucción dimensional.

El análisis de la operación figural división mereológica de cuerpos “división de una configuración global en unidades figurativas de una misma dimensión” (Duval, 2017), se

aborda en las actividades de la sección “Un caso más complejo” de la secuencia didáctica. Específicamente en la Actividad 7, se solicita a los estudiantes que identifiquen prismas conocidos y sus dimensiones que les sirvan de apoyo para el cálculo del volumen de una alberca con desnivel, a lo que los estudiantes presentaron las siguientes sub-configuraciones:

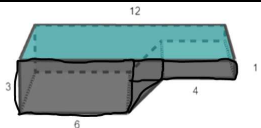
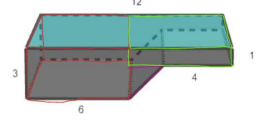
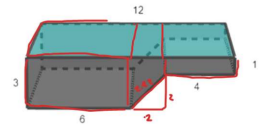
Sub-configuraciones	Estudiantes	Imagen	Descripción
A	E1, E2		Identificación de tres prismas con base rectangular y un prisma triangular localizado en la parte del desnivel.
B	E3		Identificación de dos prismas con base rectangular y un prisma triangular localizado en la parte del desnivel.
C	E4		Identificación de tres prismas con base rectangular, uno de ellos localizado en la parte del desnivel, al cual se le resta el volumen de un prisma triangular localizado fuera de la alberca.

Tabla 5: Sub-configuraciones realizadas por los estudiantes en la Actividad 7.

Respecto a la identificación de las dimensiones de cada uno de los prismas identificados a partir de la división mereológica, los estudiantes se clasificaron en los siguientes logros:

- E3 y E4: Dividieron mereológicamente la alberca con desnivel, identificando de manera correcta las dimensiones de la base y altura de cada uno de los prismas identificados (Figura 35).
- E1 y E2: No lograron identificar de manera correcta todas las dimensiones de la base y altura de cada uno de los prismas identificados, mostrando indicios de una incorrecta división mereológica.

	Dibujo con Dimensiones	Área de la Base	Altura del Prisma	Volumen
Prisma 1		72	3	216
Prisma 2		48	1	48
Prisma 3		24	3	72
Prisma 4		2	12	24

Figura 35: División mereológica de la alberca con desnivel y la identificación de las dimensiones de cada uno de los prismas proporcionadas por el Estudiante 4. Respuesta a la Actividad 7. inciso b).

Cabe mencionar que solo el E2 mostró indicios de la influencia de la figura prototípica del prisma rectangular, ya que no realizó los dibujos con dimensiones de cada uno de los prismas identificados, pero en su descripción consideró las bases de los prismas como una de las caras laterales de la alberca con desnivel (Figura 36). En esta actividad, ningún estudiante utilizó una escala para representar los prismas identificados.

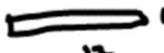


	Dibujo con Dimensiones	Área de la Base	Altura del Prisma	Volumen
Prisma 1	3m de ancho y 6m de largo	18m ²	3m	216m ³
Prisma 2	Ambos catetos son de 2m y la hipotenusa es la raíz de 8	2m ²	2m	24m ³
Prisma 3	Largo es 2m y el ancho es 1m	2m ²	1m	24m ³
Prisma 4	Largo es 4 m y el ancho es 1m	4m ²	1m	48m ³

Figura 36: Indicios de la influencia de la figura prototípica del prisma rectangular en la respuesta proporcionada por el Estudiante 2 a la Actividad 7 inciso b).

Retomando el análisis sobre la deconstrucción dimensional, en la Actividad 8 se pretendía que los estudiantes determinaran el total del área de las caras laterales y la

base de la alberca con desnivel a recubrir con azulejos para su construcción, para lo cual los estudiantes mostraron el siguiente desempeño:

- E2 y E4: Deconstruyeron dimensionalmente la alberca con desnivel identificando correctamente la forma y dimensiones de la base y las cuatro caras laterales de la alberca. Por ejemplo, el E4 identificó correctamente las caras 1 y 2, así como la base con forma rectangular, y para las caras 3 y 4 realizó una división mereológica identificando dos rectángulos y un trapecio para calcular sus áreas (Figura 37). Es importante destacar que solo el E4 logró calcular correctamente la suma del área a recubrir con azulejo en el diseño de la alberca.

	Dibujo con Dimensiones	Área
Cara 1		12
Cara 2		36
Cara 3		22
Cara 4		4
Base		153.94

} x2
52

Figura 37: Identificación de la forma y dimensiones de las caras laterales y la base de la alberca con desnivel, así como el cálculo de sus áreas. Respuesta proporcionada por el Estudiante 4 a la Actividad 8 inciso a).

- E1 y E3: No lograron deconstruir dimensionalmente la alberca con desnivel identificando de manera incorrecta las dimensiones de las caras laterales y la base de la alberca. Por ejemplo, el E3 no logra identificar correctamente las dimensiones que tiene la base, considerando un largo y un ancho de 12 metros, cuando realmente al formarse el desarrollo plano se forma una base de 12 metros

de ancho y 12.82 de largo debido a la hipotenusa generada por el desnivel. De igual manera, a pesar de que identifica correctamente las dimensiones para las caras laterales 2 y 3, no logra calcular correctamente su área, poniendo en duda el procedimiento que siguió para obtener el resultado proporcionado (Figura 38).


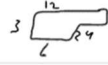
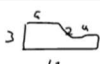


	Dibujo con Dimensiones	Área
Cara 1		36
Cara 2		26.82
Cara 3		26.82
Cara 4		12
Base		144

Figura 38: Identificación de la forma y dimensiones de las caras laterales y la base de la alberca con desnivel, así como el cálculo de sus áreas. Respuesta proporcionada por el Estudiante 3 a la Actividad 8 inciso a).

Para finalizar con las actividades de esta etapa, se les solicitó a los estudiantes que elaboraran una carta al ingeniero sobre el procedimiento que utilizaron para conocer los m^2 de azulejo y los m^3 de excavación necesarios para la construcción de la alberca, en donde todos los estudiantes reconocieron aspectos de la división mereológica para el cálculo del volumen de la alberca con desnivel, y de la deconstrucción dimensional como estrategia para el cálculo del área a recubrir por azulejos.

E4: Ingeniero, para saber la cantidad de m^3 que se necesitan excavar, dividí la alberca entre prismas, tres rectangulares y uno triangular. Para los m^2 realicé una suma de los m^2 de la base más los requeridos de las otras caras.

A partir de las respuestas proporcionadas por los estudiantes a las actividades comprendidas en esta etapa, se puede observar que fue indispensable poner en práctica

la manera de ver un dibujo o imagen matemáticamente, lo cual requiere cambiar la forma de ver la representación visual sin cambiar la representación dada (Duval, 2017), aplicando como estrategias las operaciones figurales de deconstrucción dimensional y división mereológica para la solución de las actividades.

Respecto a los objetivos planteados para esta etapa, la mayoría de los estudiantes lograron reconocer la igualdad de volumen necesario de tierra a excavar para la construcción de las albercas a partir de las especificaciones proporcionadas, aun cuando se presentaron dificultades para la diferenciación de largo y ancho de los diseños. Se podrían considerar modificaciones en las imágenes proporcionadas en la Actividad 3, utilizando escalas para los diseños, de tal manera que facilite la diferenciación del largo y ancho. También podrían añadirse un momento de discusión en el que los estudiantes siguieran explorando el volumen de más diseños que cumplieran con las especificaciones para lograr reforzar el reconocimiento de la igualdad en el volumen.

En cuanto a la deconstrucción dimensional, solo la mitad de los estudiantes la utilizaron correctamente para identificar la forma y dimensiones de las caras laterales de los diseños de las albercas a partir de su desarrollo plano. En esta actividad se observó que los estudiantes no especificaban las dimensiones de las caras o bases representadas, así como que no representaban los dos pares de caras laterales sino solamente uno. Para ello, podrían realizarse modificaciones a la tabla en donde se designe un espacio para cada una de las caras laterales, así como agregar cuestionamientos sobre las dimensiones de la base y caras laterales representadas.

Continuando con el análisis de la deconstrucción dimensional, pero con el objetivo de reconocer al cuadrado como forma que debe tener la base de una alberca para contar

con menor área a recubrir con azulejos, todos los estudiantes lograron realizar esta identificación, para lo cual fue fundamental el apoyo brindado por los applets diseñados en GeoGebra para que los estudiantes lograran relacionar la longitud de la barra del applet con el perímetro de la base de la alberca, e identificaran la forma que tiene la base cuando se tiene la menor área a recubrir con azulejos relacionando el área de la barra mostrada con el área de las caras laterales.

Así mismo, en el caso de la deconstrucción dimensional de la alberca con desnivel, para la identificación de la forma y dimensiones de las caras laterales a partir de su desarrollo plano, solo un estudiante logró realizar correctamente la deconstrucción dimensional y el cálculo de la suma de las áreas, donde incluso se implementó la división mereológica como estrategia para el cálculo.

Analizando la división mereológica de cuerpos en 3D que los estudiantes presentaron correctamente tres sub-configuraciones diferentes en sus respuestas, sin embargo, no todos lograron identificar sus dimensiones y calcular el volumen, lo que muestra indicios de una incorrecta deconstrucción dimensional. Es importante destacar que, para las actividades relacionadas con la alberca con desnivel, los applets en GeoGebra fungieron como un apoyo fundamental para que los estudiantes lograran visualizar las operaciones figurales de deconstrucción dimensional y división mereológica.

Etapas de Cierre:

Respecto a la generalización de la fórmula del volumen para un prisma con base rectangular, así como de la suma del área de su base y caras laterales, tres estudiantes

lograron reconocer el área de la base y la altura de un prisma como elementos para el cálculo del volumen de un prisma; solo el E4 reconoció como componente las medidas de su base sin asociarlo al área de esta. No obstante, todos determinaron las expresiones algebraicas correspondientes para el cálculo del volumen de una alberca y la suma del área de su base y caras laterales, brindando respuestas como:

Actividad 9: ¿Cuáles son los componentes básicos para el cálculo del volumen de un prisma?

E4: Las medidas de su base y de su altura.

E3: El área de la superficie y la altura.

Actividad 10, c): ¿Cuál es el volumen de una alberca con dimensiones a, b, c?

*E1: $a*b*c$*

E2: abc

Actividad 10, e): ¿Cuál es la suma del área de las caras laterales y la base de una alberca con dimensiones a, b, c?

E2: $ab+2ac+2bc$

E4: $ab+2bc+2ac$

El reconocimiento de la igualdad de volumen en prismas que tienen la misma altura y área en sus bases, la desigualdad en la suma de las áreas de la base y las caras

laterales de prismas que tienen el mismo volumen, y el reconocimiento del cuadrado como forma que debe de tener un prisma rectangular para tener la menor área en sus caras laterales, fue logrado por todos los estudiantes, brindando respuestas como:

Actividad 11: ¿Qué condiciones deben tener dos cuerpos con alturas iguales para que tengan el mismo volumen?

E4: Que su área de la base mida lo mismo.

Actividad 12: ¿La suma del área de las caras laterales es igual para dos cuerpos que tienen el mismo volumen?

E3: No, porque dependiendo de las caras que varían por la dimensión que tiene la base, puede ser un resultado mayor que otro.

Actividad 13: ¿Qué forma debe de tener la base de un prisma rectangular con altura fija para tener la menor área en sus caras laterales?

E2: Cuadrado, ya que las caras (que son iguales) nos dará una menor área.

Para finalizar, en cuanto a división mereológica para la obtención del volumen de un cuerpo irregular, todos lograron su identificación como estrategia por medio de respuestas como:

Actividad 14: ¿Cómo se puede calcular el volumen de un cuerpo irregular?

E3: Dividí en figuras de prismas y en cada una de ellas saqué su volumen. Al final lo sumé todo.

Las actividades comprendidas en esta etapa de cierre lograron que los alumnos generalizaran la fórmula de volumen para un prisma con base rectangular, así como la

obtención de la suma del área de su base y sus caras laterales; reconocer la igualdad de volumen en prismas que tienen la misma altura y área en sus bases, y la desigualdad en la suma de las áreas de la base y caras laterales, así como reconocer al cuadrado como forma que debe de tener la base de un prisma rectangular para tener la menor área en sus caras laterales; e identificar como estrategia la división mereológica para la obtención del volumen de un cuerpo irregular.

Valoración General:

Para la valoración general de la secuencia se elaboró una tabla en la que se muestra la concreción de los objetivos específicos que tuvo cada uno de los estudiantes en las distintas etapas de la secuencia (Tabla 5). A su vez, se utilizó la siguiente clasificación por colores para representar el nivel de concreción que logró el estudiante, aclarando que éstos se declararon a nuestro juicio como valoración de la medida en la que se cumplieron los objetivos planteados para las secuencias.

- Nivel de Concreción Alto: Se considera que el estudiante ha alcanzado este nivel si sus respuestas proporcionadas cumplen en su totalidad con el objetivo específico planteado para las actividades relacionadas a él.
- Nivel de Concreción Medio: Se considera que el estudiante ha alcanzado este nivel si sus respuestas proporcionadas cumplen parcialmente con el objetivo específico planteado para las actividades relacionadas a él.
- Nivel de Concreción Bajo: Se considera que el estudiante ha alcanzado este nivel si sus respuestas proporcionadas no cumplen con el objetivo específico planteado para las actividades relacionadas a él.

Simbología	
Nivel de Concreción Alto	
Nivel de Concreción Medio	
Nivel de Concreción Bajo	

Estudiante	Etapa	Objetivos Específicos			
		Comparar el volumen de cuerpos que tienen la misma altura y área en su base.	Relacionar el área de la base y las caras laterales de un prisma con su volumen.	Promover la deconstrucción dimensional de cuerpos de 3D a través de sus desarrollos planos.	Promover la división mereológica de cuerpos en 3D.
E1	Inicio	Identificación de cambios en el área de la base de un prisma y su altura.	-	Representación de una alberca conocida por medio de un dibujo en 2D. Deconstruye dimensionalmente el prisma 3D en figuras 2D y 1D.	-
	Desarrollo	La exploración realizada no le fue suficiente para lograr la generalización de la igualdad de volumen en prismas que tienen la misma altura y área en su base.	Reconoce al cuadrado, como forma que debe tener la base de la alberca para requerir la menor cantidad de azulejos al cubrir su base y caras laterales. No logra realizar correctamente el cálculo de la suma del área a recubrir con azulejo de la alberca con desnivel.	Deconstruye dimensionalmente las dimensiones de largo, ancho y alto de los diseños, así como la forma de la base y de las caras laterales a partir de sus desarrollos planos, pero sin dimensiones. Solo representa un par de caras laterales para sus diseños y muestra indicios de la influencia de la figura prototípica del rectángulo. No logra deconstruir dimensionalmente la alberca con desnivel, identificando las dimensiones de las caras laterales y la base de la alberca.	Reconoce una sub-configuración a partir de la división mereológica del tipo A, sin identificar correctamente las dimensiones de la base y altura de cada uno de los prismas identificados.
	Cierre	Reconoce el área de la base y la altura como componentes básicos para el cálculo del volumen de un	Reconoce la desigualdad en la suma de las áreas de la base y las caras laterales de prismas que tienen el mismo volumen	Generaliza la fórmula para el cálculo de la suma del área de las caras laterales y la base de un prisma rectangular.	Identifica como estrategia la división mereológica de cuerpos en 3D para el cálculo del volumen de un cuerpo irregular.

		<p>prisma. Generaliza la fórmula de volumen y reconocen su igualdad en prismas que tienen la misma altura y área en sus bases.</p>	<p>y el cuadrado como forma de la base de un prisma rectangular para la obtención de la menor área.</p>		
E2	Inicio	<p>Identificación de cambios en la altura de un prisma, así como en su largo y ancho sin relacionarlo a la superficie de la base.</p>	-	<p>Representación de una alberca conocida por medio de un dibujo en 2D. Deconstruye dimensionalmente el prisma 3D en figuras 1D.</p>	-
	Desarrollo	<p>Generaliza que no existe un diseño con volumen diferente por contar con la misma altura y área en su base.</p>	<p>Reconoce al cuadrado, como forma que debe tener la base de la alberca para requerir la menor cantidad de azulejos al cubrir su base y caras laterales. No logra realizar correctamente el cálculo de la suma del área a recubrir con azulejo de la alberca con desnivel.</p>	<p>Presenta dificultades en la deconstrucción dimensional para diferenciar el largo, ancho y alto de los diseños. Deconstruye dimensionalmente identificando la forma de la base y caras laterales, pero sin dimensiones. Representa los dos pares de caras laterales de los diseños, aplicando una correcta deconstrucción dimensional y muestra indicios de la influencia de la figura prototípica del rectángulo. Logra deconstruir dimensionalmente la alberca con desnivel, identificando las dimensiones de las caras laterales y la base de la alberca.</p>	<p>Reconoce una sub-configuración a partir de la división mereológica del tipo A, sin identificar correctamente las dimensiones de la base y altura de cada uno de los prismas identificados. Muestra indicios de la influencia de la figura prototípica del prisma rectangular.</p>
	Cierre	<p>Reconoce el área de la base y la altura como componentes básicos para el cálculo del volumen de un</p>	<p>Reconoce la desigualdad en la suma de las áreas de la base y las caras laterales de prismas que tienen el mismo volumen</p>	<p>Generaliza la fórmula para el cálculo de la suma del área de las caras laterales y la base de un prisma rectangular.</p>	<p>Identifica como estrategia la división mereológica de cuerpos en 3D para el cálculo del volumen de un cuerpo irregular.</p>

		<p>prisma. Generaliza la fórmula de volumen y reconocen su igualdad en prismas que tienen la misma altura y área en sus bases.</p>	<p>y el cuadrado como forma de la base de un prisma rectangular para la obtención de la menor área.</p>		
E3	Inicio	<p>Identificación de cambios en el área de la base de un prisma y su altura.</p>	-	<p>Representación de una alberca conocida por medio de un dibujo en 3D. Deconstruye el prisma en figuras 2D y 1D.</p>	-
	Desarrollo	<p>Generaliza que no existe un diseño con volumen diferente por contar con la misma altura y área en su base.</p>	<p>Reconoce al cuadrado, como forma que debe tener la base de la alberca para requerir la menor cantidad de azulejos al cubrir su base y caras laterales. No logra realizar correctamente el cálculo de la suma del área a recubrir con azulejo de la alberca con desnivel.</p>	<p>Deconstruye dimensionalmente las dimensiones de largo, ancho y alto de los diseños, así como la forma y dimensiones de la base y las caras laterales a partir de sus desarrollos planos. Solo representa un par de caras laterales para sus diseños. No logra deconstruir dimensionalmente la alberca con desnivel, identificando las dimensiones de las caras laterales y la base de la alberca.</p>	<p>Reconoce una sub-configuración a partir de la división mereológica del tipo B, identificando de manera correcta las dimensiones de la base y altura de cada prisma.</p>
	Cierre	<p>Reconoce el área de la base y la altura como componentes básicos para el cálculo del volumen de un prisma. Generaliza la fórmula de volumen y reconocen su igualdad en prismas que tienen la misma altura y área en sus bases.</p>	<p>Reconoce la desigualdad en la suma de las áreas de la base y las caras laterales de prismas que tienen el mismo volumen y el cuadrado como forma de la base de un prisma rectangular para la obtención de la menor área.</p>	<p>Generaliza la fórmula para el cálculo de la suma del área de las caras laterales y la base de un prisma rectangular.</p>	<p>Identifica como estrategia la división mereológica de cuerpos en 3D para el cálculo del volumen de un cuerpo irregular.</p>

E4	Inicio	Identificación de cambios en la altura de un prisma, así como en su largo y ancho sin relacionarlo a la superficie de la base.	-	Representación de una alberca conocida por medio de un dibujo en 3D. Deconstruye dimensionalmente el prisma 3D en figuras 1D.	-
	Desarrollo	Generaliza que no existe un diseño con volumen diferente por contar con la misma altura y área en su base.	Reconoce al cuadrado, como forma que debe tener la base de la alberca para requerir la menor cantidad de azulejos al cubrir su base y caras laterales. Logra realizar el cálculo de la suma del área a recubrir con azulejo de la alberca con desnivel.	Deconstruye dimensionalmente las dimensiones de largo, ancho y alto de los diseños, así como la forma y dimensiones de la base y las caras laterales a partir de sus desarrollos planos. Solo representa un par de caras laterales para sus diseños y muestra indicios de la influencia de la figura prototípica del rectángulo. Logra deconstruir dimensionalmente la alberca con desnivel, identificando las dimensiones de las caras laterales y la base de la alberca.	Reconoce una sub-configuración a partir de la división mereológica del tipo C, identificando de manera correcta las dimensiones de la base y altura de cada prisma. Realiza una división mereológica para el cálculo del área de las caras de la alberca con desnivel.
	Cierre	Reconoce la altura como componente básico para el cálculo del volumen de un prisma, pero no el área de la base, únicamente su largo y ancho. Generaliza la fórmula de volumen y reconocen su igualdad en prismas que tienen la misma altura y área en sus bases.	Reconoce la desigualdad en la suma de las áreas de la base y las caras laterales de prismas que tienen el mismo volumen y el cuadrado como forma de la base de un prisma rectangular para la obtención de la menor área.	Generaliza la fórmula para el cálculo de la suma del área de las caras laterales y la base de un prisma rectangular.	Identifica como estrategia la división mereológica de cuerpos en 3D para el cálculo del volumen de un cuerpo irregular.

Tabla 6: Nivel de concreción de los objetivos específicos por parte de los estudiantes en la Secuencia Albercas.

Respecto al objetivo específico de comparar el volumen de cuerpos que tienen la misma altura y área en su base, se puede observar que en la etapa de inicio, el 50% de los estudiantes lograron la identificación de cambios en el área de la base de un prisma y su altura, dando lugar a que en la etapa de desarrollo un 75% reconociera que no existe un diseño con volumen diferente por contar con la misma altura y área en su base; para finalizar en la etapa de cierre con un 75% que logró reconocer el área de la base y la altura como componentes básicos para el cálculo del volumen de un prisma, generalizar su fórmula y reconocer su igualdad en prismas que tienen la misma altura y área en sus bases.

Como mejoras a la secuencia relacionadas a este objetivo específico, se podrían incluir cuestionamientos, específicamente en la Actividad 2 de la etapa de inicio, que enfatizan la reflexión en los estudiantes sobre los cambios en la superficie de un prisma al modificar su ancho y largo. Así mismo, en la Actividad 3 de la etapa de desarrollo podrían promoverse discusiones grupales en las que los estudiantes exploren y calculen el volumen de un mayor número de diseños con la intención de reforzar que ninguno que cumpla con las especificaciones proporcionadas tendrá diferente volumen por contar con la misma altura y área en su base.

En cuanto al objetivo específico de relacionar el área de la base y las caras laterales de un prisma con su volumen, se puede observar que en la etapa de desarrollo un 75% de los estudiantes lograron un desempeño medio, por no lograr realizar el cálculo de la suma del área a recubrir con azulejo de la alberca con desnivel. Sin embargo, en la etapa de cierre el 100% de los estudiantes se ubicaron en el nivel de desempeño alto

reconociendo la desigualdad en la suma de las áreas de la base y las caras laterales de prismas que tienen el mismo volumen, y el cuadrado como forma de la base de un prisma rectangular para la obtención de la menor área.

Para el caso de la Actividad 8 sería conveniente incluir a partir de la tabla que se solicita llenar, incisos en donde los estudiantes expliquen el procedimiento que llevaron a cabo para calcular la suma de cada una de las áreas de las caras laterales y la base de la alberca con desnivel y no solo se proceda al llenado de la tabla.

Haciendo alusión al objetivo específico de promover la deconstrucción dimensional de cuerpos de 3D a través de sus desarrollos planos, en la etapa de inicio solo el 25% de los estudiantes se ubicaron en un nivel de desempeño alto elaborando representaciones en 3D y deconstruyendo un prisma en figuras 2D y 1D, mientras que el 50% se ubicó en un nivel de desempeño medio por elaborar únicamente representaciones en 2D o por no deconstruir un prisma en figuras 2D; y el 25% restante por no cumplir con ninguno de los aspectos anteriores.

Continuando con el análisis del desempeño de los estudiantes relacionado a este objetivo específico, en la etapa de desarrollo, el 25% de los estudiantes logró deconstruir dimensionalmente las dimensiones de largo, ancho y alto de los diseños, así como la forma y dimensiones de la base y las caras laterales a partir de sus desarrollos planos, representando un solo par de caras laterales para sus diseños y mostrando indicios de la influencia de la figura prototípica del rectángulo para ubicarse en un nivel de desempeño alto. El 50% se ubicó en un nivel de desempeño medio debido a la presencia de dificultades en la deconstrucción dimensional para diferenciar el largo, ancho y alto de los diseños y el otro 25% en un nivel de desempeño bajo por no lograr deconstruir

dimensionalmente la alberca con desnivel identificando las dimensiones de las caras laterales y la base. No obstante, en la etapa de cierre, el 100% de los estudiantes lograron generalizar la fórmula para el cálculo de la suma del área de las caras laterales y la base de un prisma rectangular.

En cuanto a posibles mejoras a las actividades relacionadas con este objetivo específico, se pudiera considerar en la Actividad 3 la utilización de escalas en los diseños presentados para la determinación de las dimensiones faltantes que ayuden a la diferenciación de largo y ancho en los diseños. También debiera considerarse resaltar en aquellas actividades que estén apoyadas en applets, la importancia de explorar las distintas vistas que permitan responder a los cuestionamientos planteados en la secuencia.

En las actividades de la etapa de desarrollo relacionadas al objetivo específico de promover la división mereológica de cuerpos en 3D, el 50% de los estudiantes se ubicaron en un nivel de desempeño alto, caracterizándose por reconocer las sub-configuraciones B y C (Tabla 5), identificar de manera correcta las dimensiones de la base y altura de cada prisma, e incluso realizar una división mereológica para el cálculo del área de las caras de la alberca con desnivel. El otro 50% se ubicó en un nivel de desempeño medio caracterizándose por reconocer la sub-configuración del tipo A (Tabla 5) sin identificar correctamente las dimensiones de la base y altura de cada uno de los prismas identificados en la alberca con desnivel.

A pesar de ello, en la etapa de cierre el 100% de los estudiantes lograron identificar como estrategia para el cálculo del volumen de un cuerpo irregular. Respecto a los applets utilizados, se presentaron situaciones durante la implementación en las que

los estudiantes perdieron la vista general de los diseños representados a partir de la manipulación en GeoGebra, motivo por el cual se considera necesario incluir en los applets de toda la secuencia activar el botón de “Restaurar Applet” para que los estudiantes puedan volver a la vista original del Applet las veces que sean necesarias.

VI. CONCLUSIONES

En el siguiente capítulo se presentan las conclusiones del trabajo, las cuales centran la atención en cinco aspectos principales:

- **Del Objetivo General:** Es posible afirmar el cumplimiento del objetivo general planteado para este proyecto de intervención, dado que se elaboró una propuesta didáctica conformada por dos secuencias, considerando para su diseño los aspectos teóricos de Díaz Barriga y Hitt retomados en Alvarado (2019) e incorporando actividades que involucraran la visualización geométrica, específicamente las Operaciones Figurales de Duval (2017).

Esta propuesta fue implementada en estudiantes de 3^{er} grado de secundaria de manera virtual dada la pandemia causada por el virus SARS-CoV-2, incluyendo la herramienta tecnológica GeoGebra para la construcción de applets que favorecieran la visualización en el diseño de las secuencias y para su puesta en escena con el uso de GeoGebra Classroom.

- **De los referentes teóricos y la metodología de diseño:** El diseño de las secuencias didácticas, sustentado en la teoría de Operaciones Figurales de Duval (2017) y la metodología de Alvarado (2019), permitió incorporar los elementos del

volumen y la visualización identificados en la problemática y justificación planteadas en este documento.

La metodología de diseño seleccionada contribuyó a la estructuración de las secuencias didácticas en sus distintas etapas, el propósito de las actividades planteadas, el tipo de preguntas a realizar, la organización de trabajo en el aula, el papel que juegan estudiante y profesor, así como recomendaciones específicas para incorporar el uso de tecnología digital, en este caso, los applets en GeoGebra.

Por otra parte, a través de este proyecto, es posible enfatizar que la visualización de cuerpos geométricos no es una tarea sencilla para los estudiantes y que requiere la práctica de las operaciones figurales: deconstrucción dimensional y división mereológica propuestas por Duval (2017), como estrategias para abordar situaciones que involucren el concepto de volumen, por la necesidad de analizar geoméricamente cuerpos de 3D que en el ámbito escolar generalmente son representados en 2D. De igual manera, se hace énfasis en la importancia de abordar el concepto de volumen en situaciones donde no implique solamente una aplicación directa de fórmulas para su solución, sino que permita al estudiante emplear estrategias de visualización para lograr enriquecer el significado del concepto.

- **Del uso de la tecnología:** Es importante destacar el impacto que tuvo la tecnología, específicamente GeoGebra en este proyecto de intervención, encontrándose presente tanto en el diseño de las secuencias didácticas como en la implementación y análisis.

La posibilidad de utilizar applets en GeoGebra como parte del diseño de las secuencias didácticas contribuyó a promover las Operaciones Figurales de Duval (2017): deconstrucción dimensional y división mereológica, por su capacidad de visualizar cuerpos a través de vistas en 3D y no en 2D como generalmente se aborda en la educación actual, contribuyendo a su vez a los procesos de aprendizaje y enseñanza del concepto de volumen.

También, el papel de GeoGebra durante la implementación de las secuencias fue fundamental, ya que dada la pandemia causada por el virus SARS-CoV-2, nos vimos en la necesidad de realizar una implementación virtual, para lo cual la herramienta de GeoGebra Classroom contribuyó a desarrollar la dinámica de la puesta en práctica lo más parecido posible a un aula de clases, dadas las condiciones en las que nos encontrábamos.

- **De las modificaciones a la Propuesta de Didáctica:** Considerando los resultados del análisis y valoración de la Secuencia “Monolitos”, es posible proponer como modificación a la Actividad 2 (Figura 39), la cual está relacionada al objetivo específico de reconocer la igualdad de volumen en cuerpos que tienen la misma altura y área en sus cortes transversales, incluir cuestionamientos que promuevan reflexiones en los estudiantes sobre la relación de los cambios en el largo y ancho de la base del monolito con su área, para posteriormente poderlo relacionar con el área de los cortes transversales generados por las distintas fases de colado, promoviendo a su vez una deconstrucción dimensional de cuerpos de 3D a 2D.

- a) ¿Qué cambia en el monolito al arrastrar el punto rojo?
-
- b) ¿Qué cambia en el monolito al arrastrar el punto azul?
-
- c) Arrastra el punto verde, gira la vista e identifica el corte que se realiza en el monolito. ¿Qué forma tendría este corte?
-
- d) ¿Cómo son entre sí la forma de la base del monolito y la forma del corte horizontal generado al arrastrar el punto verde?
-
- e) ¿Qué forma tendrían los cuerpos que se forman a partir del corte? Dibújalos en el siguiente apartado.

Figura 39: Apartado a modificar de la Actividad 2. Secuencia “Monolitos”.

También, para las Actividades 3, 4 y 5 sería conveniente acompañar las tablas (Figura 40) con cuestionamientos que lleven a los estudiantes a describir detalladamente el procedimiento que utilizaron para calcular las áreas de las bases generadas por las fases de colado y el volumen que va adquiriendo en cada una de ellas, para de esta forma comprender de una manera más clara los procedimientos y estrategias utilizados por los estudiantes al deconstruir dimensionalmente los monolitos en sus distintas fases de colado.

d) El escultor decide emplear la misma estrategia de fases para el colado del monolito inclinado. En el applet mueve el deslizador de tal manera que se aprecie la forma que irá tomando el monolito inclinado en cada fase de colado y llena la siguiente tabla.

Altura	Base Inferior		Base Superior		Volumen de Concreto
	Dibujo con Dimensiones	Área	Dibujo con dimensiones	Área	
1m					
2m					
3m					

Figura 40: Apartado a modificar de la Actividad 4. Secuencia “Monolitos”.

Abordando el mismo objetivo específico, se identifica como modificación a la secuencia didáctica la consideración de trabajar con manipulables que permitan

realizar una transición más suave en la conclusión de la conservación del volumen de cuerpos que presentan inclinaciones u ondulaciones manteniendo su altura y área en cortes transversales. Dadas las características de implementación de la propuesta didáctica, éste trabajo con manipulables pudiera ser incorporado a través de videos.

Haciendo alusión a las actividades mencionadas anteriormente, pero esta vez con la intención de abonar al objetivo específico de promover la deconstrucción dimensional de cuerpos 3D a 2D a través de sus cortes transversales, convendría enfatizar la importancia de que los estudiantes coloquen las dimensiones de las distintas representaciones realizadas, con la intención de tener más elementos que nos muestren indicios de una correcta o incorrecta deconstrucción dimensional de los monolitos.

En cuanto a la etapa de cierre de esta secuencia didáctica, se propone añadir actividades que guíen al estudiante a una generalización cuantitativa de la conservación del volumen de cuerpos que tienen la misma altura y área en sus cortes transversales, con la intención de abonar a la institucionalización del conocimiento abordado en las actividades de la apertura y desarrollo de la secuencia.

Considerando también el análisis y valoración realizado a la Secuencia “Albercas”, se proponen modificaciones que abonen al objetivo específico de comparar el volumen de cuerpos que tienen la misma altura y área en su base, incluyendo cuestionamientos, específicamente en la Actividad 2 (Figura 41) de la etapa de inicio, que enfatizen la reflexión en los estudiantes sobre los cambios en

la superficie de un prisma al modificar su ancho y largo. Así mismo, en la Actividad 3 de la etapa de desarrollo podrían promoverse discusiones grupales en las que los estudiantes exploren y calculen el volumen de un mayor número de diseños con la intención de reforzar que ninguno que cumpla con las especificaciones proporcionadas tendrá diferente volumen por contar con la misma altura y área en su base.

a) ¿Qué cambia en el diseño de la alberca al arrastrar el punto rojo?

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

b) ¿Qué cambia en el diseño de la alberca al arrastrar el punto azul?

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

c) Si los dueños tuvieran que elegir el diseño más conveniente ¿Qué aspectos crees que se deberían tomar en cuenta?

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

d) ¿Qué diseño te parece más apropiado?

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

e) ¿Por qué?

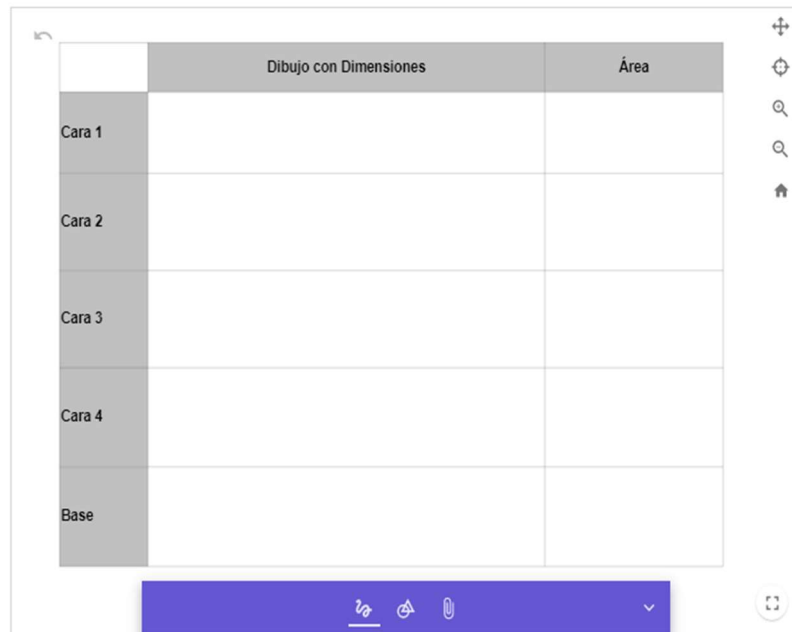
Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

Figura 41: Apartado a modificar de la Actividad 2. Secuencia “Albercas”.

Para el caso de la actividad 8 sería conveniente incluir a partir de la tabla que se solicita llenar, incisos en donde los estudiantes expliquen el procedimiento que llevaron a cabo para calcular la suma de cada una de las áreas de las caras laterales y la base de la alberca con desnivel y no solo se proceda al llenado de la tabla (Figura 42), para de esta manera abonar al objetivo específico de relacionar el área de la base y las caras laterales de un prisma con su volumen y comprender de una manera más clara los procedimientos que utilizan los

estudiantes al momento de emplear estrategias como la deconstrucción dimensional.

a) Identifica las formas de las caras laterales y la base de la alberca que te ayudarán en el cálculo de los m^2 de azulejo y llena la tabla con sus datos.



	Dibujo con Dimensiones	Área
Cara 1		
Cara 2		
Cara 3		
Cara 4		
Base		

Figura 42: Apartado a modificar de la Actividad 8. Secuencia “Albercas”.

También para esta actividad, se propone una modificación en el applet de la albercadesnivel.ggb (Figura 43) para lograr visualizar en la gráfica el comportamiento del despliegue que se genera en las caras de diseño de la alberca conforme avanza el deslizador para la obtención de su desarrollo plano.

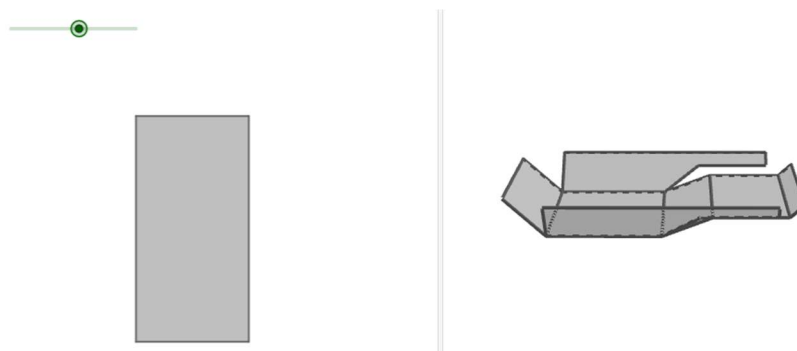


Figura 43: Applet a mejorar de la Actividad 8. Secuencia “Albercas”.

Haciendo alusión al objetivo específico de promover la deconstrucción dimensional de cuerpos de 3D a través de sus desarrollos planos, se pudiera considerar en la Actividad 3 (Figura 44) la utilización de escalas en los diseños presentados para la determinación de las dimensiones faltantes que ayuden a la diferenciación de largo y ancho en los diseños. También debiera considerarse resaltar en aquellas actividades que estén apoyadas en applets, la importancia de explorar las distintas vistas que permitan responder a los cuestionamientos planteados en la secuencia.

a) Escribe las dimensiones faltantes de los 3 posibles diseños para que cumplan con las especificaciones proporcionadas por el ingeniero.

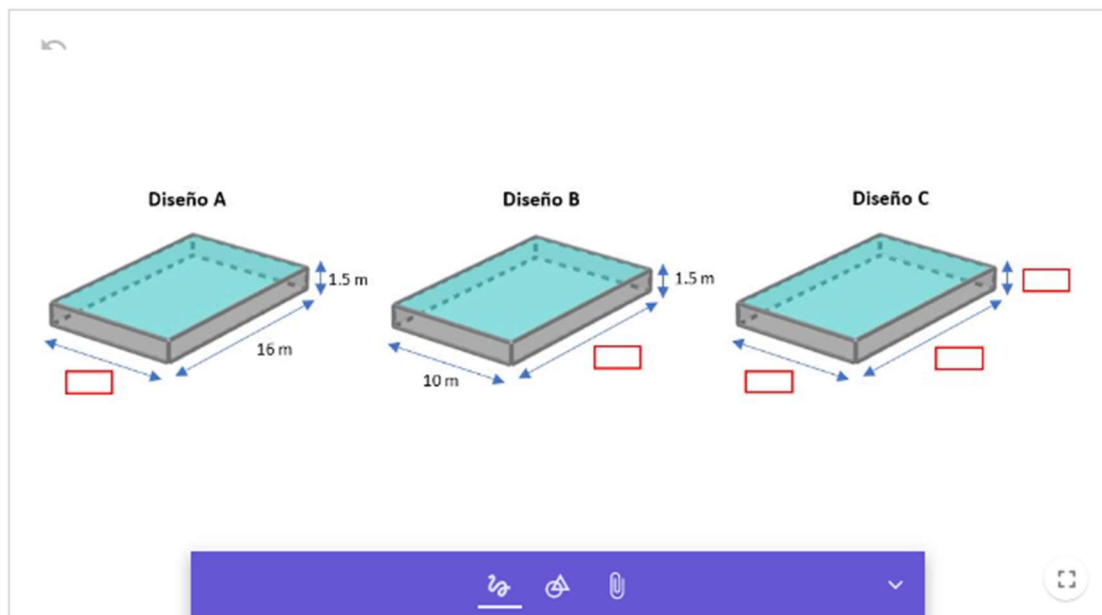


Figura 44: Apartado a mejorar de la Actividad 3. Secuencia “Albercas”.

De manera general, haciendo alusión a los applets utilizados en las dos secuencias que conforman la propuesta didáctica y tomando en cuenta la implementación en la que los estudiantes perdieron la vista general de los diseños representados a partir de la manipulación en GeoGebra, se considera necesario en los applets de toda la propuesta activar el botón de “Restaurar Applet” para

que los estudiantes puedan volver a su vista original las veces que sean necesarias. También se propone abordar situaciones de la vida cotidiana sobre las distintas vistas de un cuerpo para una mejor comprensión de las vistas que se generan en los applets.

- **De posibles trabajos a futuro:** De acuerdo con los resultados del análisis y valoración de la secuencia “monolitos” se propone como un posible trabajo a futuro un refinamiento de las actividades de la etapa de cierre, incluyendo tareas que guíen a los estudiantes hacia una autorreflexión sobre la conservación del volumen en cuerpos que sufren transformaciones como la ondulación o inclinación, pero que tienen la misma altura y área en sus cortes transversales.

También se pone a consideración la elaboración de orientaciones didácticas para ambas secuencias que sirvan como apoyo para docentes que deseen implementarlas como parte de su planeación en el aula de clase.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarado, J. (2019) Propuesta metodológica para el diseño de secuencias didácticas para la matemática del nivel secundaria en un contexto tecnológico utilizando GeoGebra (Maestría). Universidad de Sonora.

Anamova, R. y Nartova, L. (2019). Geometric spatial ability as an element of cognitive learning process. Tche Quimica, 16(32), 542-550.

Block, D., García, S., y Balbuena, H., (2018). Matemáticas 1. Secundaria. Conecta Más. 1ra Edición 2018, 2da reimpresión 2020. Editorial Ediciones SM.

Block, D., García, S., y Balbuena, H., (2019). Matemáticas 2. Secundaria. Conecta Más. 1ra Edición 2019, 2da reimpresión 2020. Editorial Ediciones SM.

Chamorro, M. (2003). Didáctica de las Matemáticas para Primaria. Madrid: Pearson Educación

Del Olmo, M., Moreno, M., y Gil, F. (1993). Superficie y Volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Madrid: Sintesis S.A.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Trad. Myriam Vega Restrepo (1ª ed.). Colombia. Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (2002) Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. basic issues for learning. en F. Hitt, (ed.), Representations and Mathematics Visualization, (pp. 311-335).

Duval, R. (2005). Los cambios de mirada necesarios sobre las figuras. Grand, 7 - 27.

Duval, R. (2017). Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations. (p. 57-72) Francia: Springer.

García, S., Mendoza, T., García, J. y Block, D. (2014). Matemáticas 3. Secundaria. Conect@ Estrategias. 1ra Edición 2014, 1ra Edición revisada 2017, 3ra reimpresión revisas, 2020.

Instituto Nacional para la Evaluación Educativa. (2017). México en PISA 2015 (INEE Ed.). México.

Instituto Nacional para la Evaluación Educativa. (2018). PLANEA Resultados Nacionales 2017. Ciudad de México.

Marmolejo, G., y González, M. (2015). Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18(3):301-328.

Owens, K. (2020). Noticing and visuospatial reasoning. Australian Primary Mathematics Classroom, 25(1), 11-14.

Owens, K., & Highfield, K. (2015). Chapter 9 Visuospatial reasoning in context with digital technology. In.

Sáiz, M. (2003) Algunos objetos mentales relacionados con el concepto volumen de maestros de primaria. Revista Mexicana de Investigación Educativa. Vol.8, num 18 (p. 447-478)

Sanchis, S. y Guillen, G. (2013). El volumen. Observación de procesos de aprendizaje contenidos de la enseñanza secundaria. En A.Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 511-522). Bilbao: SEIEM.

Sandoval, I., Lupiáñez, J. y Moctezuma, M. (2016). Conocimiento Matemático Para La Enseñanza Del Volumen De Prismas en Primaria= Mathematics Knowledge for Teaching the Volume of Prisms in Elementary School. Trabajo presentado en la 38th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Tucson, Az. Resumen recuperado de <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED583715.pdf>

Sanmiguel, M. y Salinas, M. (2011). Dificultades en el razonamiento del alumnado de 2° de ESO relacionadas con el concepto de volumen y su medida. Investigación en Educación Matemática 15, 543-554. ISBN: 978-84-694-5590-6.

Secretaría de Educación Pública. (2011). Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Cuauhtémoc, México, D.F.

Secretaría de Educación Pública. (2017a). Aprendizajes Claves para la Educación Integral. In. Ciudad de México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2017b). Planes de estudio de referencia del marco curricular común de la educación media superior. Ciudad de México: SEP

Sinclair, N., Bartolini, M., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. ZDM, 48(5), 691-719. doi:10.1007/s11858-016-0796-6

Torregroza, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 276 - 300.

Uttal, H., Miller, D. y Newcombe, N. (2013) Exploring and Enhancing Spatial Thinking Links to Achievement in Science, Technology, Engineering and Mathematics?. *Current Directions in Psychological Science* 22(5) 367-373.

Wai, J., Lubinski, D., y Benbow, C. (2009). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of Educational Psychology*, 101(4), 817-835. doi:10.1037/a0016127

ANEXOS

Anexo 1

Formato de observación para la implementación de la Secuencia “Monolitos”

FORMATO DE OBSERVACIÓN PARA IMPLEMENTACIÓN			
SECUENCIA MONOLITOS			
APERTURA			Duración: _____
Aspectos	Registro	Observaciones	
Los estudiantes...			
Se muestran interesados con el contexto en el cual se desarrolla la actividad.	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Identifican la forma geométrica que tienen los monolitos presentados en las imágenes. (Act.1 - a)	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Identifican la forma geométrica que tienen las caras laterales y las bases de los monolitos presentados en las imágenes. (Act.1 - b,c)	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Identifican los conceptos de área de la base y altura del prisma por medio de la manipulación del applet. (Act.2 - a,b)	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Identifican la figura que se forma al realizar un corte horizontal al monolito y lo relacionan con la base del prisma. (Act2. - c,d,e)	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
DESARROLLO			Duración: _____
Aspectos	Registro	Observaciones	
Los estudiantes...			
Identifican que la altura del monolito se mantiene a pesar de su inclinación. (Act.4 - a)	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Identifican que el ancho de las caras laterales del monolito se mantiene a pesar de su inclinación. (Act.4 - b)	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Identifican que el largo de las caras laterales del monolito cambian al momento de su inclinación. (Act.4 - b)	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Reconocen la igualdad entre los cortes generados por las fases de colado y la base original del monolito inclinado. (Act.4 - e)	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Reconocen la igualdad entre los cortes generados por las fases de colado y la base original del monolito ondulado. (Act.5 - a)	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Reconocen la igualdad de volumen entre los monolitos recto, inclinado y ondulado. (Act.6 a)	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Argumentan las estrategias empleadas para la obtención del volumen de un cuerpo inclinado o ondulado. (Act.6 - b)	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
CIERRE			Duración: _____
Aspectos	Registro	Observaciones	
Los estudiantes...			
Reconocen a la igualdad del área de los cortes transversales de dos cuerpos con la misma altura, como característica para que cuenten con el mismo volumen. (Act.7)	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Reconocen a la igualdad en altura y área de los cortes transversales como característica para que dos cuerpos tengan el mismo volumen a pesar de su inclinación. (Act.8)	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Reconocen a la igualdad en altura y área de los cortes transversales como característica para que dos cuerpos tengan el mismo volumen a pesar de su ondulación. (Act.9)	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Describen cuales son los conocimientos nuevos adquiridos. (Act.10)	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
ASPECTOS GENERALES			
Los estudiantes...			
Se muestran participativos	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Argumentan	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Respetan las participaciones de otros	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		
Presentan dificultades en la manipulación de los applets	<input type="checkbox"/> SI <input type="checkbox"/> NO		

Anexo 2

Formato de observación para la implementación de la Secuencia “Albercas”

FORMATO DE OBSERVACIÓN PARA IMPLEMENTACIÓN			
SECUENCIA ALBERCAS			
APERTURA			Duración:
Aspectos	Registro		Observaciones
Los estudiantes...			
Se muestran familiarizados con el contexto en el cual se desarrolla la actividad.	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Identifican los conceptos de área de la base y altura de un prisma por medio de la manipulación del applet. (Act.2 - a,b)	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
DESARROLLO			Duración:
Aspectos	Registro		Observaciones
Los estudiantes...			
Identifican la igualdad de volumen de dos cuerpos que tienen la misma altura y área en su base. (Act.3 - f)	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Reconocen la falta de elementos para elegir el diseño más conveniente. (Act.3 - g)	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Logran identificar la diferencia de la suma del área de la base y caras laterales de prismas que tienen el mismo volumen. (Act.4 - b,c,d)	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Reconocen que el área de la base se mantiene al manipular el applet. (Act.5 - a)	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Identifican la longitud de la barra mostrada en el applet como el perímetro de la base del diseño. (Act.5 - b)	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Relacionan el área de las caras laterales del diseño con la longitud de la barra. (Act.5 - c)	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Determinan las características del diseño que cumple con la menor área en su base y caras laterales. (Act. 5 - e,f)	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Identifican la forma y dimensiones de los prismas que contribuyen al cálculo del volumen de la alberca con desnivel. (Act.7 - a)	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
CIERRE			Duración:
Aspectos	Registro		Observaciones
Los estudiantes...			
Reconocen los elementos necesarios para el cálculo del volumen de un prisma. (Act.9)	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Reconocen las condiciones que deben tener dos cuerpos con alturas iguales para que tengan el mismo volumen. (Act.11)	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Reconocen que la suma del área de las caras laterales y la base de dos prismas de volumen igual, es distinta. (Act.12)	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Reconocen el cuadrado como forma de la base de un prisma rectangular para obtener la menor suma del área de sus caras laterales. (Act.13)	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Reconocen la descomposición de un cuerpo irregular en prismas conocidos para la obtención de su volumen. (Act.14)	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Describen cuales son los conocimientos nuevos adquiridos (Act. 15)	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
ASPECTOS GENERALES			
Los estudiantes...			
Se muestran participativos	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Argumentan	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Respetan las participaciones de otros	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	
Presentan dificultades en la manipulación de los applets	<input type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO	

Anexo 3

Versión imprimible del diseño de la Secuencia “Monolitos”

SECUENCIA – MONOLITOS

Apertura:

En diversas partes del mundo existen monumentos llamados “monolitos” caracterizados por ser piezas de gran tamaño y de un mismo material, creados por el hombre como esculturas que regularmente son temporales.

Actividad 1

A continuación, se muestran algunos monolitos que han sido colocados en el mundo. Explora los hipervínculos de cada uno de los monolitos para que conozcas más de ellos y puedas visualizarlos desde diferentes ángulos.



Monolitos de Concreto – Jalisco, México
<http://bit.ly/3JkWG01>



Monolito de Metal – Utah, Estados Unidos
<http://bit.ly/3ZU6y69>



Monolitos de Concreto – Diyarbakir, Turquía
<http://bit.ly/3JomQgr>



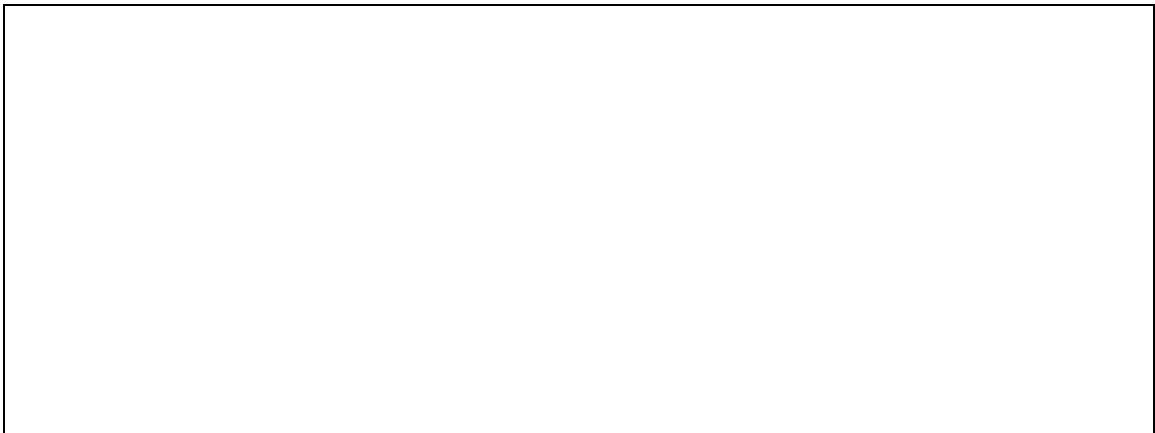
Monolito de Metal – Piatra Neamt, Rumania
<http://bit.ly/3FwmsLX>

- ¿Qué forma geométrica tienen los monolitos presentados en las fotografías anteriores?
- ¿Qué forma geométrica tienen sus caras laterales?
- ¿Qué forma geométrica tienen sus bases?

Actividad 2

Un escultor desea construir monolitos de concreto con forma de prisma rectangular para colocarlos en su ciudad natal. Explora el applet monolito.ggb y contesta.

- a) ¿Qué cambia en el monolito al arrastrar el punto rojo?
- b) ¿Qué cambia en el monolito al arrastrar el punto azul?
- c) Arrastra el punto verde, gira la vista e identifica el corte que se realiza en el monolito ¿Qué forma tendría este corte?
- d) ¿Cómo son entre sí la forma de la base del monolito y la forma del corte horizontal generado al arrastrar el punto verde?
- e) ¿Qué forma tendrían los cuerpos que se forman a partir del corte? Dibújalos en el siguiente recuadro.



Desarrollo

Para la construcción de los monolitos, el escultor decidió elaborar 3 ejemplares que tuvieran las mismas dimensiones de largo, ancho y alto que se muestran a continuación. Sin embargo, necesitará calcular la cantidad de concreto necesaria para su construcción.

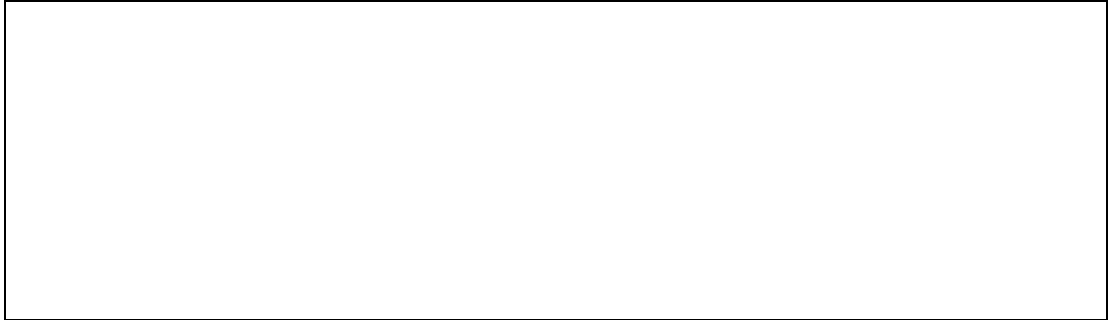
Dimensiones:

- Largo: 50 cm
- Ancho: 80 cm
- Alto: 3 m

Actividad 3

El primer monolito que planea construir el escultor tiene forma de prisma rectangular recto y cumple con las dimensiones proporcionadas anteriormente.

- a) Dibuja en el siguiente recuadro el primer monolito a construir por el escultor indicando sus dimensiones.



- b) ¿Qué forma tienen las bases del monolito propuesto por el escultor?
- c) ¿Cuántos m^3 concreto necesitará el escultor para construirlo? Describe el procedimiento que utilizaste para conocer el resultado.
- d) Al darse cuenta de la cantidad de concreto necesaria para su construcción, el escultor decide colar el monolito en 3 fases iguales, es decir, construirlo a cada metro de altura. Explora el applet monolitorecto.ggb moviendo el deslizador de tal manera que se aprecie la forma que irá tomando el monolito en cada fase de colado y llena la siguiente tabla.

Altura	Base Inferior		Base Superior		Volumen de Concreto
	Dibujo con Dimensiones	Área	Dibujo con Dimensiones	Área	
1m					
2m					
3m					

Actividad 4

El segundo monolito que planea construir el escultor cuenta con las mismas dimensiones que el monolito anterior, solo que éste se encontrará inclinado. Explora el applet [monolitoinclinado.ggb](#) e inclina el monolito según creas conveniente.

- ¿La altura del monolito cambia al ser inclinado en el applet? ¿o se mantiene? Argumenta tu respuesta.
- ¿Qué sucede con las dimensiones de largo y ancho de las caras laterales del monolito ¿Cambian o se mantienen?
- Si en el inciso b) contestaste que las dimensiones de largo y ancho de las caras laterales cambian, especifica si aumentan o disminuyen al inclinar el monolito.
- El escultor decide emplear la misma estrategia de fases para el colado del monolito inclinado. En el applet [monolitoinclinado.ggb](#) mueve el deslizador de tal manera que se aprecie la forma que irá tomando el monolito en cada fase de colado y llena la siguiente tabla.

Altura	Base Inferior		Base Superior		Volumen de Concreto
	Dibujo con Dimensiones	Área	Dibujo con dimensiones	Área	
1m					
2m					
3m					

- ¿Qué forma tienen las bases del monolito inclinado?
- ¿Cuántos m³ de concreto necesitará el escultor para construirlo?

Actividad 5

El tercer monolito que planea construir el escultor tiene las mismas dimensiones de los monolitos anteriores, solo que dos de sus caras se encontrarán onduladas. Explora el applet monolitoondulado.ggb y ondula las caras del monolito según creas conveniente.

El escultor decide emplear la misma estrategia de fases para el colado del monolito ondulado. Mueve el deslizador del applet monolitoondulado.ggb de tal manera que se aprecie la forma que irá tomando el monolito en cada fase de colado y llena la siguiente tabla.

Altura	Base Inferior		Base Superior		Volumen de Concreto
	Dibujo con Dimensiones	Área	Dibujo con Dimensiones	Área	
1m					
2m					
3m					

- ¿Qué forma tienen las bases del monolito ondulado?
- ¿Cuántos m^3 de concreto necesitará el escultor para construirlo? Incluye el procedimiento que utilizaste.

Actividad 6

- ¿Cuál de los tres monolitos propuestos por el escultor requiere de más concreto para su construcción?

- b) Escríbele al escultor una carta mencionando las estrategias que se pueden utilizar para conocer el volumen de los monolitos inclinado y ondulado.

Cierre

Actividad 7

- a) ¿Qué características deben tener 2 cuerpos de alturas iguales para que tengan el mismo volumen?

Actividad 8

- a) ¿Qué características deben de un prisma recto y un prisma inclinado para tener el mismo volumen?

Actividad 9

- a) ¿Qué características deben de tener un prisma recto y un prisma con dos de sus caras onduladas para tener el mismo volumen?

Actividad 10

- a) A partir de lo que trabajaste en estas actividades, describe cuáles son los conocimientos nuevos que te llevas.

Anexo 4

Versión imprimible del diseño de la Secuencia “Albercas”

SECUENCIA – ALBERCAS

Apertura

Actividad 1

En ciudades tan calurosas como por ejemplo Hermosillo, las personas suelen recurrir a actividades acuáticas con fines deportivos o de recreación.



Alberca "Héroes de Caborca" en el C.U.M. de Hermosillo, Sonora.



Alberca Recreativa "Santa Clara" en Hermosillo, Sonora.

- ¿Has visitado algún parque acuático? ¿Cuál?
- ¿Qué forma tienen las albercas que conoces?
- En el siguiente recuadro dibuja alguna alberca que hayas visitado.

Actividad 2

Los dueños de un parque acuático quieren construir una alberca nueva para sus visitantes, y contrataron a un ingeniero para que realizara su diseño. El ingeniero está considerando algunos diseños con forma de prisma de base rectangular. Explora el applet alberca.ggb y arrastra los puntos rojo y azul para ver las distintas formas que podría tener la alberca.

- ¿Qué cambia en el diseño de la alberca al arrastrar el punto rojo?

- b) ¿Qué cambia en el diseño de la alberca al arrastrar el punto azul?
- c) Si los dueños tuvieran que elegir el diseño más conveniente ¿Qué aspectos crees que se deberían tomar en cuenta?
- d) ¿Qué diseño te parece más apropiado?
- e) ¿Por qué?

Desarrollo

Actividad 3

Los dueños del parque acuático han decidido que el diseño que más les conviene es aquel en donde se utilice menos material para su construcción, por lo que le solicitan al ingeniero que calcule la cantidad de material necesario para los diseños.

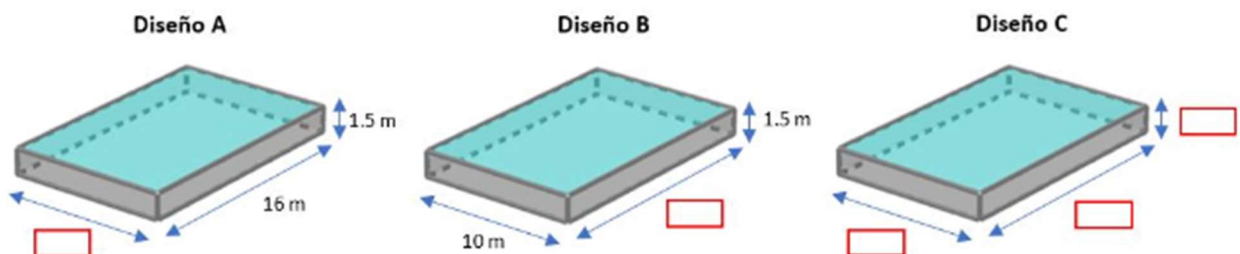
Después de revisar los lineamientos necesarios para el diseño de albercas y de visitar el terreno destinado para su construcción, el ingeniero determina las siguientes especificaciones para el diseño.

Especificaciones:

- La alberca tendrá una profundidad de 1.50 m.
- La alberca requerirá una superficie de 144 m^2 en su base.

Para determinar la cantidad de material necesario para el diseño, el ingeniero decide calcular los m^3 de tierra que será necesario excavar para la construcción de la alberca.

- a) Escribe las dimensiones faltantes de los 3 posibles diseños para que cumplan con las especificaciones proporcionadas por el ingeniero.



b) Llena la tabla con los datos de cada uno de los diseños y contesta lo que se te pide.

	Largo	Ancho	Alto
Diseño A			
Diseño B			
Diseño C			

c) ¿Cuántos m^3 de excavación requiere el diseño A?

d) ¿Cuántos m^3 de excavación requiere el diseño B?

e) ¿Cuántos m^3 de excavación requiere el diseño C?

f) ¿Existe algún otro diseño que cumpla con las especificaciones proporcionadas por el ingeniero y tenga un volumen diferente? Justifica tu respuesta.

g) Considerando los resultados de los incisos anteriores ¿Es posible tomar una decisión respecto al diseño que es más conveniente que se construya? Justifica tu respuesta.

Actividad 4

Con la intención de tener más elementos que permitan elegir el diseño más conveniente, el ingeniero decide calcular los m^2 de azulejo que se requieren para recubrir las caras laterales y la base de la alberca. Explora el applet albercaazulejo.ggb y contesta lo que se indica.

a) Considerando los diseños propuestos en la actividad 3, dibuja la forma e indica las medidas que tienen las cuatro caras laterales y la base de cada uno de los diseños en la columna correspondiente.

	BASE	CARAS LATERALES
DISEÑO A		

DISEÑO B		
Diseño C		

- b) Considerando la base y todas las caras laterales de cada uno de los diseños. ¿Cuántos m² de azulejo se necesitan para el diseño A?
- c) ¿Cuántos para el diseño B?
- d) ¿Cuántos para el diseño C?

Actividad 5

Explora el applet [albercazulejo2.ggb](#) , observa los cambios en la barra que representa la unión de las caras laterales de la alberca y contesta.

- a) ¿Qué sucede con el área de la base al arrastrar el punto rojo?
- b) ¿Qué elemento de diseño representa la longitud total de la barra?
- c) ¿Cómo es el área de las caras laterales cuando la longitud de la barra es muy corta? ¿Cómo es cuando la longitud de la barra es muy larga?
- d) ¿Cuál es la menor área de todas?
- e) ¿Qué forma adquiere la base de la alberca cuando se tiene la menor área a recubrir con azulejos?
- f) ¿Cuáles son las dimensiones del diseño que requiere menos m² de azulejo para recubrir sus caras laterales y su base?

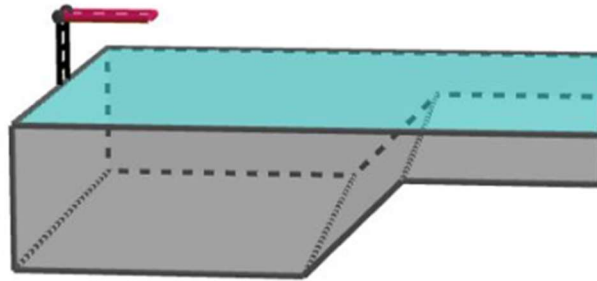
Actividad 6

Escríbele al ingeniero una carta informándole sobre la recomendación que le harías para poder seleccionar el diseño más conveniente, es decir, el que requiera menos cantidad de material y cumpla con las especificaciones establecidas.

Un caso más complejo

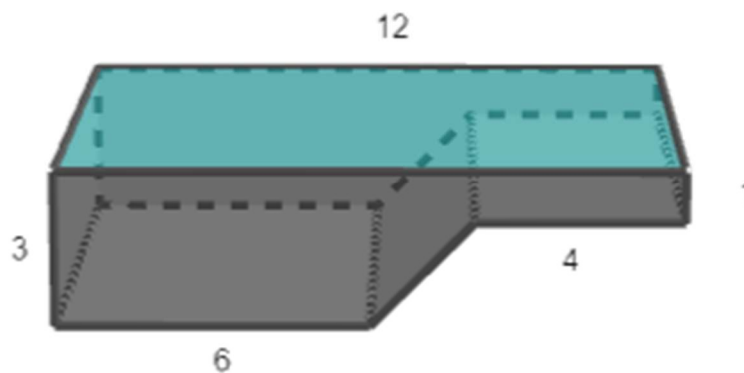
Actividad 7

Una vez determinado el diseño más conveniente, los dueños del parque acuático le piden al ingeniero construir otra alberca con las mismas dimensiones, pero con un desnivel que permita una profundidad de 3 m para que los visitantes del parque acuático puedan tirarse clavados.



Para determinar la cantidad de material necesario para el diseño, el ingeniero decide calcular los m^3 de tierra que será necesario excavar para la construcción de la alberca con desnivel. Explora el applet albercadesnivel.ggb y contesta.

- a) Identifica y traza en el siguiente dibujo los prismas que te ayudarán en el cálculo de los m^3 de excavación.



- b) Llena la tabla con los datos de los prismas que lograste identificar. Puedes agregar o quitarle filas a la tabla si lo consideras necesario.

	Dibujo con Dimensiones	Área de la Base	Altura del Prisma	Volumen
Prisma 1				
Prisma 2				
Prisma 3				

- c) Considerando los resultados de la tabla anterior ¿Cuántos m^3 de tierra se necesitan excavar para su construcción?

Actividad 8

Posteriormente, el ingeniero decide calcular los m^2 de azulejo que se requieren para recubrir las paredes y la base de la alberca. Explora el applet albercadesnivel.ggb moviendo el deslizador y contesta lo que se indica.

- a) Identifica las formas de las caras y la base de la alberca que te ayudarán en el cálculo de los m^2 de azulejo y llena la tabla con sus datos.

	Dibujo con Dimensiones	Área
Cara 1		
Cara 2		
Cara 3		

Cara 4		
Base		

- b) Considerando los resultados de la tabla anterior ¿Cuántos m^2 de azulejo requiere para cubrir sus caras y su base?
- c) Escríbele al ingeniero una carta informándole sobre el procedimiento que utilizaste para conocer los m^2 de azulejo y los m^3 de excavación necesarios para la construcción de la alberca con desnivel.

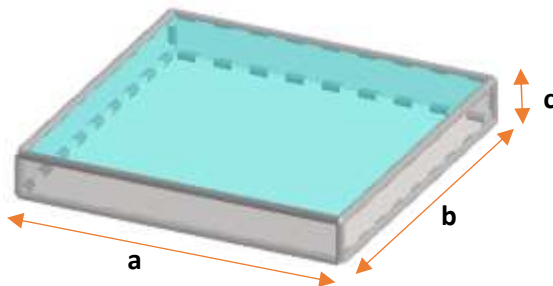
Cierre

Actividad 9

- a) ¿Cuáles son los componentes básicos para el cálculo del volumen de un prisma?

Actividad 10

Considera una alberca de las siguientes dimensiones y contesta.



- a) ¿Cuánto mide el área de la base de la alberca?
- b) ¿Cuánto mide su altura?
- c) Si se quisiera saber la cantidad de tierra que es necesario excavar para su construcción ¿Cuál sería su volumen?
- d) Si se quisiera saber la cantidad de azulejos para recubrirla ¿Cuál sería la suma del área de sus caras laterales y su base?

Actividad 11

- a) ¿Qué condiciones deben tener dos cuerpos con alturas iguales para que tengan el mismo volumen?

Actividad 12

- a) ¿La suma del área de las caras es igual para dos cuerpos que tienen el mismo volumen?

Actividad 13

- a) ¿Qué forma debe de tener la base de un prisma rectangular con altura fija para tener la menor área en sus caras laterales?

Actividad 14




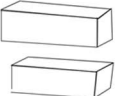


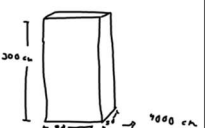
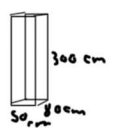
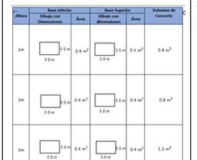

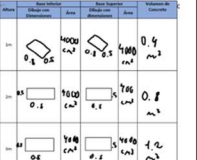
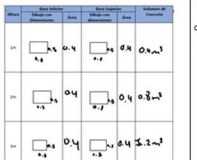
- a) ¿Cómo se puede calcular el volumen de un cuerpo irregular? Apóyate en el procedimiento utilizado en la Actividad 7.

Actividad 15

- a) A partir de lo que trabajaste en estas actividades, describe cuales son los conocimientos nuevos que te llevas.

Anexo 5

Análisis de datos de la Secuencia "Monolitos"

FORMATO DE ANÁLISIS DE DATOS SECUENCIA MONOLITOS						
OBJETIVOS ESPECÍFICOS: <ul style="list-style-type: none"> * Reconocer la igualdad del volumen en cuerpos que tienen la misma altura y área en sus cortes transversales. * Promover la deconstrucción dimensional de cuerpos de 3D a 2D a través de sus cortes transversales. 						
ETAPA DE APERTURA ACTIVIDAD 1: Adentrar al estudiante en el contexto extramatemático de los monolitos, identificando las formas de sus caras laterales y sus bases.						
No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares
Act 1 - a)	Identifican el prisma rectangular y triangular como formas de los monolitos presentados.	R=Prisma rectangular y prisma cuadrangular - Identifica al prisma rectangular como forma de los monolitos presentados pero no identifica al prisma triangular.	R=Rectangulares - No logra identificar la forma de los monolitos como prismas. Hace referencia a su forma por medio de una figura en 2D. No se identifica el prisma triangular.	R=Rectangular - No logra identificar la forma de los monolitos como prismas. Hace referencia a su forma por medio de una figura en 2D. No se identifica al prisma triangular.	R=Tienen forma rectangular - No logra identificar la forma de los monolitos como prismas. Hace referencia a su forma por medio de una figura en 2D. No se identifica al prisma triangular.	Tres de los estudiantes hacen referencia a la forma de los monolitos por medio de una figura en 2D. Solo un estudiante hizo referencia a la forma de prismas. Ningún estudiante identificó el prismatriangular como forma de los monolitos presentados.
Act 1 - b)	Identifican el rectángulo como forma que tienen las caras laterales de los monolitos presentados.	R=Rectangulares - Identifica al rectángulo como forma de las caras laterales del monolito.	R=Rectangular - Identifica al rectángulo como forma de las caras laterales del monolito.	R=Rectangular - Identifica al rectángulo como forma de las caras laterales del monolito.	R=Tienen forma rectangular - Identifica al rectángulo como forma de las caras laterales del monolito.	Todos los estudiantes lograron deconstruir dimensionalmente los prismas identificando la forma rectangular de las caras laterales de los monolitos.
Act 1 - c)	Identifican el rectángulo y el triángulo como forma de la base de los monolitos presentados.	R=Cuadradas y Rectangulares - Identifica el rectángulo como forma de la base de los monolitos, pero no al triángulo. Hace mención a la base de forma cuadrada.	R=Cuadradas - Hace mención del cuadrado como forma de la base de los monolitos presentados. No se identifica el rectángulo ni el triángulo.	R=Cuadrangular - Hace mención del cuadrado como forma de la base de los monolitos presentados. No se identifica el rectángulo ni el triángulo.	R=Cuadradas - Hace mención del cuadrado como forma de la base de los monolitos presentados. No identifica el rectángulo ni el triángulo.	Todos los estudiantes deconstruyen dimensionalmente los prismas identificando la forma de sus bases haciendo referencia al cuadrado como forma de la base de los monolitos presentados, lo cual queda a discusión por no conocer las medidas de cada monolito. Solo un estudiante hace referencia al rectángulo. Ningún estudiante hace referencia al triángulo, dado que no identificaron al prisma triangular como forma del monolito en el inciso a) de la Actividad 1.
ACTIVIDAD 2: Explorar de manera cualitativa los conceptos de altura, área de la base, y corte transversal de un prisma rectangular, por medio de un contexto extramatemático, con la finalidad de adentrarse en la situación de cálculo de volumen.						
No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares
Act 2 - a)	Identifican el cambio en la superficie de la base del monolito al manipular el punto rojo del applet.	R=El tamaño y forma de la base - Identifica el cambio de tamaño y forma de la base más no hace referencia a él como su superficie.	R=Lo largo y lo ancho - Identifica el cambio en el largo y ancho de la base pero no lo relaciona con la superficie de la misma.	R=El ancho - Hace referencia al cambio en el ancho del monolito, más no en el largo. No hace mención al cambio en la superficie de la base.	R=Cambia su estructura rectangular gruesa por una delgada - Identifica el cambio en la forma de la base, pero no lo relaciona con la superficie de la misma.	Los estudiantes logran identificar cambios en el tamaño y la forma de la base, más no lo relacionan con su superficie. Quidés sería como entender añadir un inciso en donde se le pregunte directamente al estudiante si los cambios que sufre el monolito al arrastrar el punto rojo afectan la superficie de su base.
Act 2 - b)	Identifican el cambio en la altura del monolito al manipular el punto azul del applet.	R=Cambia la altura - Identifica el cambio de altura del monolito.	R=El tamaño - Identifica un cambio de tamaño en el monolito pero no hace referencia a él como un cambio en la altura.	R=La altura - Identifica el cambio de altura del monolito.	R=El monolito cambia su altura disminuye y aumenta - Identifica el cambio de altura del monolito.	Tres de los estudiantes logran identificar el cambio en la altura del monolito. Un estudiante hace referencia a éste como un cambio de tamaño y no especifica sobre la dimensión que se modificó.
Act 2 - d)	Identifican la igualdad entre la forma de la base del monolito y la del corte que se forma al manipular el punto verde del applet.	R=Iguales - Identifica la igualdad entre la forma de la base del monolito y la del corte transversal.	R=Iguales - Identifica la igualdad entre la forma de la base del monolito y la del corte transversal.	R=Cuadrangular - Identifica la forma que genera el corte transversal, pero no lo relaciona con la base del monolito.	R=Iguales, se harían dos cuerpos de pequeños cubitos rectangulos - Identifica la igualdad entre la forma de la base del monolito y la del corte transversal. Identifica la forma de los cuerpos generados a partir del corte.	Tres de los estudiantes logran deconstruir dimensionalmente el prisma identificand la igualdad en la forma de la base del monolito y del corte transversal. Un estudiante identifica la forma del corte pero no logra identificar la igualdad con la base del monolito. Un estudiante identifica la forma de los cuerpos que se generan al realizar el corte logrando una división mereológica.
Act 2 - e)	Identifican y dibujan la forma de prisma rectangular que adquieren las partes del monolito generados por el corte transversal.	Identifica correctamente la forma que genera el corte transversal en el monolito, sin embargo, no identifica la forma de los cuerpos generados en 3D. 	Identifica correctamente la forma que tienen los cuerpos generados a partir del corte transversal, sin embargo solo dibuja un solo cuerpo. 	Identifica correctamente la forma que tienen los cuerpos generados a partir del corte transversal. 	Identifica correctamente la forma que tienen los cuerpos generados a partir del corte transversal. 	Dos de los estudiantes realizan correctamente una división mereológica del monolito, identificando la forma que tienen los cuerpos generados a partir del corte transversal realizado. En la manipulación del applet uno de los estudiantes presentó dificultades ya que al momento de la manipulación el punto rojo desapareció. Se incluirá opción de restaurar applet al original para futuras implementaciones.
ETAPA DE DESARROLLO ACTIVIDAD 3: Determinar el volumen de prismas rectangulares rectos, así como identificar la forma de los cortes transversales realizados al mismo.						
No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares
Act 3 - a)	Dibujan el monolito a construir como un prisma rectangular e indican sus dimensiones.					Todos los estudiantes dibujan el monolito como un prisma rectangular. Sin embargo, solo dos de ellos indican sus dimensiones en el dibujo, realizando una conversión de metros a centímetros de la medida proporcionada para la altura.
Act 3 - c)	Calcula correctamente la cantidad de concreto necesaria para la construcción del monolito (12 m ³).	R= 1.2m ³ , saque el volumen del prisma (pasando las medidas de cm a m): 0.8(30)(4.2m) - Calcula correctamente la cantidad de concreto necesaria para la construcción del monolito y hace explícito el procedimiento que utilizó.	R=12000 cm ³ - Calcula correctamente la cantidad de concreto necesaria para la construcción del monolito pero no hace explícito el procedimiento que utilizó. No se presenta el resultado en las unidades solicitadas en el enunciado (m ³)	R= 1.2 metros cúbicos, primero sacamos el área de la base usando lado*lado que nos da 4000 cm cúbicos, multiplicados por la altura del prisma que es 300, nos da como resultado 120000 centímetros cúbicos, que convertidos a metros son 1.2 metros. - Calcula correctamente la cantidad de concreto necesaria para la construcción del monolito y hace explícito el procedimiento que utilizó.	R= 1.2m ³ converti los cm en m para poder calcular el volumen del monolito. - Calcula correctamente la cantidad de concreto necesaria para la construcción del monolito pero no hace explícito el procedimiento que utilizó.	Todos los estudiantes logran calcular correctamente la cantidad de concreto necesaria para la construcción del monolito, sin embargo, presentaron dificultades al momento de realizar las conversiones pertinentes de las medidas del monolito para obtener el resultado en m ³ , tal y como lo menciona el enunciado.
Act 3 - d)	Identifican la forma y dimensiones de las bases de los cuerpos generados por las fases de colado del monolito recto y calculan su volumen.	Identifica correctamente la forma de las bases generadas por las fases de colado, así como sus dimensiones y el cálculo de su área. Sin embargo, cotoca varios resultados en la columna del cálculo del volumen poniendo en duda el procedimiento seguido. 	Identifica correctamente la forma de las bases generadas por las fases de colado, pero no indica sus dimensiones. Sin embargo, presenta dificultades para calcular el área de las mismas, afectando también a la determinación del volumen de cada fase de colado. Muestra resultados de las áreas en cm ² y de los volúmenes en m ³ . 	Identifica correctamente la forma de las bases generadas por las fases de colado, así como sus dimensiones y el cálculo de su área. Así mismo, calcula correctamente el volumen que va teniendo el monolito en cada fase de colado. Muestra resultados de las áreas en cm ² y de los volúmenes en m ³ . 	Identifica correctamente la forma de las bases generadas por las fases de colado, así como sus dimensiones y el cálculo de su área. Así mismo, calcula correctamente el volumen que va teniendo el monolito en cada fase de colado. 	Tres de los estudiantes logran deconstruir dimensionalmente los prismas para identificar la forma de las bases generadas por las fases de colado, así como sus dimensiones y el cálculo de su área. También logran calcular correctamente el volumen del monolito generado por las fases de colado. Sin embargo, se presentan dificultades por parte de los estudiantes al momento de realizar las conversiones de las unidades en las dimensiones proporcionadas.

ACTIVIDAD 4: Determinar el volumen de prismas rectangulares inclinados, así como identificar la forma de los cortes transversales realizados al mismo y los cambios en sus dimensiones producidos por la inclinación.						
No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares
Act 4 - a)	Identifican que la altura de los monolitos se mantiene a pesar de la inclinación.	R= Cambia, por que conforme te vas inclinando más hacia un lado más altura va consiguiendo // no cambia - No logra identificar que la altura del monolito se mantiene a pesar de la inclinación hasta después de la reflexión grupal.	R= Al ser inclinado por el applet se mantiene la altura - Identifica que la altura del monolito se mantiene a pesar de la inclinación.	R= Sigue siendo la misma altura, únicamente cambiando su inclinación. - Identifica que la altura del monolito se mantiene a pesar de la inclinación.	R= se mantiene, lo que cambia son los medidas de los lados. - Identifica que la altura del monolito se mantiene a pesar de la inclinación.	Tres de los estudiantes logran identificar que la altura del monolito se mantiene a pesar de la inclinación. La posibilidad de girar la vista en los applets de GeOebra para observar el monolito desde diferentes ángulos colaboró a la identificación de la igualdad en la altura.
Act 4 - b), c)	Identifican que la dimensión del ancho de las caras laterales del monolito se mantiene, pero el largo aumenta a partir de la inclinación.	R= Cambian / aumenta su largo con forme se incline - Identifica que la medida del largo de las caras laterales aumentan, pero no logra identificar que la medida del ancho se mantiene.	R= Cambian ya que necesitan ser mas largas para mantener la altura / Estas aumentan al inclinar el monolito - Identifica que la medida del largo de las caras laterales aumentan, pero no logra identificar que la medida del ancho se mantiene.	R= Aumenta el largo dependiendo de que tanto se inclina el monolito / aumentan - Identifica que la medida del largo de las caras laterales aumentan, pero no logra identificar que la medida del ancho se mantiene.	R= cambian / aumentan - No especifica si largo y ancho aumentan o solo uno de ellos.	Tres de los estudiantes logran identificar que la medida del largo de las caras laterales aumenta al inclinar el monolito, sin embargo, todos los estudiantes presentan dificultades para identificar que la medida del ancho se mantiene. La posibilidad de girar la vista en los applets de GeOebra para observar el monolito desde diferentes ángulos colaboró a la identificación de la igualdad en el ancho.
Act 4 - d)	Identifican la forma y dimensiones de las bases de los cuerpos generados por las fases de colado de un monolito inclinado y calculan su volumen.	Identifica correctamente la forma de las bases generadas por las fases de colado, así como sus dimensiones y el cálculo de su área. Así mismo, calcula correctamente el volumen que va teniendo el monolito en cada fase de colado.	Identifica correctamente la forma de las bases generadas por las fases de colado, pero no indica sus dimensiones. Calcula de manera correcta el área de las bases, sin embargo, presenta dificultades para determinar el volumen de cada fase de colado.	Identifica correctamente la forma de las bases generadas por las fases de colado, así como sus dimensiones y el cálculo de su área. Así mismo, calcula correctamente el volumen que va teniendo el monolito en cada fase de colado. Muestra resultados de las áreas en cm^2 y de los volúmenes en m^3 .	Identifica correctamente la forma de las bases generadas por las fases de colado, así como sus dimensiones y el cálculo de su área. Así mismo, calcula correctamente el volumen que va teniendo el monolito en cada fase de colado.	Tres de los estudiantes logran deconstruir dimensionalmente los prismas para identificar la forma de las bases generadas por las fases de colado, así como sus dimensiones y el cálculo de su área. También logran calcular correctamente el volumen del monolito generado por las fases de colado.

ACTIVIDAD 5: Determinar el volumen de prismas rectangulares con dos de sus caras onduladas, así como identificar la forma de los cortes transversales realizados al mismo.						
No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares
Act 5 - a)	Identifican la forma y dimensiones de las bases de los cuerpos generados por las fases de colado de un monolito ondulado y calculan su volumen.	Identifica correctamente la forma de las bases generadas por las fases de colado, así como sus dimensiones y el cálculo de su área. Así mismo, calcula correctamente el volumen que va teniendo el monolito en cada fase de colado.	Identifica correctamente la forma de las bases generadas por las fases de colado, pero no indica sus dimensiones. Calcula de manera correcta el área de las bases, sin embargo, presenta dificultades para determinar el volumen de cada fase de colado.	Identifica correctamente la forma de las bases generadas por las fases de colado, así como sus dimensiones y el cálculo de su área. Así mismo, calcula correctamente el volumen que va teniendo el monolito en cada fase de colado. Muestra resultados de las áreas en cm^2 y de los volúmenes en m^3 .	Identifica correctamente la forma de las bases generadas por las fases de colado, así como sus dimensiones y el cálculo de su área. Así mismo, calcula correctamente el volumen que va teniendo el monolito en cada fase de colado.	Tres de los estudiantes logran deconstruir dimensionalmente los prismas para identificar la forma de las bases generadas por las fases de colado, así como sus dimensiones y el cálculo de su área. También logran calcular correctamente el volumen del monolito generado por las fases de colado.

ACTIVIDAD 6: Reconocer la conservación de volumen en prismas rectangulares que sufren transformaciones como la inclinación y la ondulación, pero mantienen su altura y área en cortes transversales.						
No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares
Act 6 - a)	Determinan que la cantidad de concreto necesario para la construcción de los monolitos es la misma sin importar su inclinación u ondulación.	R= ninguno	R= Los tres requieren la misma cantidad.	R= Todos usan el mismo concreto.	R= Los tres eran iguales.	Después de la discusión grupal y del intercambio de estrategias para la obtención de los volúmenes de los monolitos recto, inclinado u ondulado, todos los estudiantes determinan que los tres que requieren la misma cantidad de concreto para su construcción.
Act 6 - b)	Escriben como estrategia para el escultor que se puede calcular el volumen de un monolito inclinado u ondulado como se calcula el volumen de un monolito recto, siempre y cuando tengan la misma altura y área en sus cortes transversales.	R= Qué rido escultor, le escribo esta carta para recomendarle que si quiere saber el volumen de los tipos de monolitos, es nomas la multiplicación de la altura por el ancho y por el alto. Y es más fácil de saber si todas sus dimensiones son las mismas para cada monolito, ya que no importa su forma, lo único que va a cambiar va ser la altura que le ponga.	R= Escultor podría utilizar el mismo procedimiento que uso para el monolito normal ya que sería lo mismo por que el ancho y el largo del monolito no cambia.	R= Para conocer el volumen de los monolitos podemos calcular el área de la base inferior y superior de estos para después multiplicar ese valor por la altura del monolito, dando como resultado el volumen, y mientras la base y altura sean las mismas, la cantidad de concreto no necesaria para construirlos será la misma.	R= Escultor: El volumen de ambos monolitos será igual al del primero. La altura y la base de los tres monolitos es la misma, por lo que no importa la ondulación o inclinación, siempre tendrán el mismo volumen.	Todos los estudiantes reconocieron como estrategia realizar el cálculo del volumen de un monolito inclinado u ondulado al igual que el cálculo de un monolito recto, siempre y cuando tuvieran la misma altura y área en sus bases. Sin embargo, fue importante resaltar que cuando se habla de la igualdad en las bases generadas por las fases de colado, realmente es una representación de la igualdad en el área de las secciones generadas por los cortes transversales, ya que solo un estudiante expresó esta relación.

TAPA DE CIERRE

ACTIVIDAD 7, 8 y 9: Generalizar la igualdad del volumen en prismas que tienen la misma altura y área en sus cortes transversales.						
No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares
Act 7	Reconocen a la misma área de los cortes transversales como característica para que dos cuerpos que tienen la misma altura tengan el mismo volumen.	R= Que tienen áreas iguales en sus secciones.	R= Que el largo y ancho de los cuerpos sea el mismo.	R= Bases iguales	R= Deben de tener la mismas bases.	Todos los estudiantes reconocieron la igualdad de las bases como característica para que dos cuerpos que tienen la misma altura tengan el mismo volumen. Sin embargo, fue importante resaltar que cuando se habla de la igualdad en las bases realmente es una representación de la igualdad en el área de las secciones generadas por los cortes transversales, ya que solo un estudiante expresó esta relación.
Act 8	Reconocen a la igualdad de área de los cortes transversales y la altura como características para que un cuerpo inclinado y uno recto tengan el mismo volumen.	R= Misma altura y área en sus secciones - Reconoce la igualdad del área de los cortes transversales y la altura como característica para que un cuerpo inclinado y uno recto tengan el mismo volumen.	R= Tener la misma base - Reconoce la igualdad de las bases como característica para que un cuerpo inclinado y uno recto tengan el mismo volumen, pero no lo relaciona con el área de los cortes transversales. No reconoce a la altura como característica para la igualdad de volumen.	R= Bases con iguales dimensiones y misma altura - Reconoce la igualdad de la altura como característica para que un cuerpo inclinado y uno recto tengan el mismo volumen. Hace mención de la igualdad de las bases pero no lo relaciona con el área de los cortes transversales.	R= Las mismas bases y la misma altura - Reconoce la igualdad de la altura como característica para que un cuerpo inclinado y uno recto tengan el mismo volumen. Hace mención de la igualdad de las bases pero no lo relaciona con el área de los cortes transversales.	Tres de los estudiantes reconocen la igualdad de altura y de las bases como característica para que un cuerpo inclinado y uno recto tengan el mismo volumen. Sin embargo, solo uno de ellos hace referencia a esa igualdad de las bases como la igualdad en el área de sus secciones transversales.
Act 9	Reconocen a la igualdad de área de los cortes transversales y la altura como características para que un cuerpo ondulado y uno recto tengan el mismo volumen.	R= Misma altura y área en sus secciones - Reconoce la igualdad del área de los cortes transversales y la altura como característica para que un cuerpo ondulado y uno recto tengan el mismo volumen.	R= Tener la misma base - Reconoce la igualdad de las bases como característica para que un cuerpo ondulado y uno recto tengan el mismo volumen, pero no lo relaciona con el área de los cortes transversales. No reconoce a la altura como característica para la igualdad de volumen.	R= Bases iguales y misma altura - Reconoce la igualdad de la altura como característica para que un cuerpo ondulado y uno recto tengan el mismo volumen. Hace mención de la igualdad de las bases pero no lo relaciona con el área de los cortes transversales.	R= Las mismas bases y la misma altura - Reconoce la igualdad de la altura como característica para que un cuerpo ondulado y uno recto tengan el mismo volumen. Hace mención de la igualdad de las bases pero no lo relaciona con el área de los cortes transversales.	Tres de los estudiantes reconocen la igualdad de altura y de las bases como característica para que un cuerpo ondulado y uno recto tengan el mismo volumen. Sin embargo, solo uno de ellos hace referencia a esa igualdad de las bases como la igualdad en el área de sus secciones transversales.

Anexo 6

Análisis de datos de la Secuencia "Albercas"

							SIMBOLOGÍA	
							ABC	Respuesta textual del estudiante.
							ABC	Observaciones generales.
FORMATO DE ANÁLISIS DE DATOS SECUENCIA ALBERCAS								
OBJETIVOS ESPECÍFICOS:								
<ul style="list-style-type: none"> * Comparar el volumen de cuerpos que tienen la misma altura y área en su base. * Relacionar el área de la base y las caras laterales de un prisma con su volumen. * Promover la construcción dimensional de cuerpos de 3D a 2D a través de sus desarrollos planos. * Promover la división mereológica de cuerpos en 3D. 								
ETAPA DE APERTURA								
ACTIVIDAD 1: Adentrar al estudiante en el contexto extramatemático de las albercas reconociendo su forma.								
No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1 - AP	Estudiante 2 - J	Estudiante 3 - D	Estudiante 4 - ML	Conclusiones Preliminares		
Act 1 - c)	Dibujan una de las albercas conocidas como cuerpo de 3D.					Dos estudiantes logran representar una de las albercas conocidas por medio de un dibujo en 3D, los otros dos alumnos realizan un dibujo en 2D.		
ACTIVIDAD 2: Explorar de manera cualitativa los conceptos de altura y superficie de la base de un prisma rectangular.								
No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1 - AP	Estudiante 2 - J	Estudiante 3 - D	Estudiante 4 - ML	Conclusiones Preliminares		
Act 2 - a)	Identifican el cambio en la superficie de la base de la alberca al mover el punto rojo del applet.	R= ancho // el área de la base - Identifica el cambio en la superficie de la base de la alberca, pero solo hace mención al cambio en el ancho de su base.	R= El ancho y el largo - Identifican el cambio en el ancho y largo de la base pero no lo relacionan con la superficie de la misma.	R= Superficie de la base - Identifica el cambio en la superficie de la base de la alberca.	R= El largo y ancho de la base de la alberca - Identifica el cambio en el ancho y largo de la base pero no lo relacionan con el cambio en la superficie.	Dos de los estudiantes logran deconstruir dimensionalmente la alberca identificando el cambio en la superficie al momento de mover el punto rojo del applet, mientras que los otros dos estudiantes identifican el cambio en el ancho y largo de la base de la alberca pero no lo relacionan con el cambio en la superficie.		
Act 2 - b)	Identifican el cambio en la altura de la alberca al mover el punto azul del applet.	R= Alto - Identifica el cambio en la altura de la alberca.	R= La altura - Identifica el cambio en la altura de la alberca.	R= Altura de la alberca - Identifica el cambio en la altura de la alberca.	R= La altura de la alberca - Identifica el cambio en la altura de la alberca.	Todos los estudiantes logran identificar el cambio en la altura de la alberca al mover el punto azul del applet.		
ETAPA DE DESARROLLO								
ACTIVIDAD 3: Reconocer la igualdad del volumen necesario de tierra a excavar para la construcción de albercas que poseen la misma altura y área en su base.								
No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares		
Act 3 - a)	Determinan las dimensiones faltantes de los 3 diseños proporcionalizados para que cumplan las especificaciones proporcionadas por el ingeniero. (Diseño A= 9m, Diseño B= 14.4m, Diseño C= Selección del estudiante)	Determina correctamente las dimensiones faltantes de los diseños A y B, y selecciona un conjunto de dimensiones para el diseño C que cumplan con las especificaciones proporcionadas.	Determina correctamente las dimensiones faltantes de los diseños A y B, y selecciona un conjunto de dimensiones para el diseño C que cumplan con las especificaciones proporcionadas.	Determina correctamente las dimensiones faltantes de los diseños A y B, y selecciona un conjunto de dimensiones para el diseño C que cumplan con las especificaciones proporcionadas.	Determina correctamente las dimensiones faltantes de los diseños A y B, y selecciona un conjunto de dimensiones para el diseño C que cumplan con las especificaciones proporcionadas.	Todos los estudiantes logran determinar correctamente las dimensiones faltantes de los diseños A y B para cumplir con las especificaciones proporcionadas. Así mismo, seleccionan dimensiones de ancho, largo y alto para un diseño C que también cumpla con las especificaciones.		
Act 3 - b)	Deconstruyen dimensionalmente los diseños de las albercas proporcionalizados en la Act 3 - a) identificando las dimensiones de largo, ancho y altura de cada uno de ellos.	Identifica correctamente las dimensiones de largo, ancho y alto de cada uno de los diseños.	Identifica correctamente las dimensiones de largo, ancho y alto para los diseños A y B, sin embargo, no logra identificar correctamente el largo y ancho del Diseño C el cual fue propuesto por el mismo estudiante.	Identifica correctamente las dimensiones de largo, ancho y alto de cada uno de los diseños.	Identifica correctamente las dimensiones de largo, ancho y alto de cada uno de los diseños.	Tres de los estudiantes logran identificar correctamente las dimensiones de largo, ancho y alto para los diseños A, B y C mostrando indicio de una correcta deconstrucción dimensional. Un estudiante presenta dificultades para diferenciar el largo y ancho del diseño C. Posible confusión por parte de los estudiantes ocasionada por utilizar el mismo dibujo para todos los diseños.		
Act 3 - c), d), e)	Calculan correctamente el volumen de los diseños de las albercas (216 m ³).	R= 216 m ³ - Calcula correctamente el volumen de tierra que será necesario excavar para la construcción de los diferentes diseños de albercas.	R= 216 m ³ - Calcula correctamente el volumen de tierra que será necesario excavar para la construcción de los diferentes diseños de albercas.	R= 216 - Calcula correctamente el volumen de tierra que será necesario excavar para la construcción de los diferentes diseños de albercas.	R= 216 m ³ - Calcula correctamente el volumen de tierra que será necesario excavar para la construcción de los diferentes diseños de albercas.	Todos los estudiantes logran calcular correctamente el volumen de los diseños de las albercas mostrando indicio de una correcta aplicación de la fórmula para la obtención del volumen de un prisma.		
Act 3 - f)	Reconocen que no existe un diseño con volumen diferente, ya que todos cuentan con la misma área en su base y altura.	R= Creo que si pero no encontré ninguno - El estudiante explora algunos diseños que cumplan con las especificaciones proporcionadas de ancho, largo y alto, reconociendo que todos tienen el mismo volumen, sin embargo, no está convencido de que absolutamente todos los diseños posibles tengan el mismo volumen.	R= No ya que siempre será el mismo volumen - Reconoce que no existe un diseño con volumen diferente pero no argumenta su respuesta.	R= No por que si la base son siempre 16m cuadrados de superficie plana a ser diferente el volumen a menos que la altura cambie - Reconoce que no existe un diseño con volumen diferente, ya que todos cuentan con la misma área en su base y altura.	R= No por que deben tener la misma base y misma altura - Reconoce que no existe un diseño con volumen diferente, ya que todos cuentan con la misma área en su base y altura.	Tres de los estudiantes reconocen que no existen diseños que tengan diferente volumen. Dos de ellos argumentan que esto se debe a que cumplen con las especificaciones proporcionadas de área de la base y altura de la alberca, mientras que el otro no justifica su respuesta. Un estudiante no reconoce la igualdad de volumen en los diseños a pesar de que todos los diseños explorados hayan tenido el mismo volumen.		
ACTIVIDAD 4: Deconstruir dimensionalmente la base y las caras laterales de los diseños de las albercas, a partir de su desarrollo plano, para el cálculo de la cantidad necesaria de azulejos para su construcción.								
No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares		
Act 4 - a)	Identifican la forma y dimensiones de la base y las caras laterales de cada diseño. (Deconstrucción Dimensional)	Identifica la forma de la base y solamente dos de las caras laterales de los diseños A y B, sin embargo, no especifica sus dimensiones poniendo en duda la correcta deconstrucción dimensional. No utiliza una escala para el dibujo. Muestra indicios de la influencia de la figura prototípica del rectángulo en la representación de las caras laterales del diseño C.	Identifica correctamente la forma de la base y las cuatro caras laterales de los diseños A, B y C, sin embargo, en el caso de las caras laterales no especifica sus dimensiones poniendo en duda la correcta deconstrucción dimensional. No utiliza una escala para el dibujo. Muestra indicios de la influencia de la figura prototípica del rectángulo en la representación de las caras laterales de todos los diseños.	Identifica correctamente la forma y dimensiones de la base y solamente dos de las caras laterales de los diseños A, B y C, mostrando indicios de una correcta deconstrucción dimensional. No utiliza una escala para el dibujo. Muestra indicios de la influencia de la figura prototípica del rectángulo en la representación de las caras laterales de todos los diseños.	Identifica correctamente la forma y dimensiones de la base y solamente dos de las caras laterales de los diseños A, B y C, mostrando indicios de una correcta deconstrucción dimensional. No utiliza una escala para el dibujo. Muestra indicios de la influencia de la figura prototípica del rectángulo en la representación de las caras laterales de todos los diseños.	Dos de los estudiantes logran identificar correctamente la forma y dimensiones de la base y dos de las caras laterales de los diseños A, B y C, mostrando indicios de una correcta deconstrucción dimensional. Los otros dos estudiantes identifican la forma de la base y de las caras laterales pero no especifican las medidas de estas. Último, poniendo en duda la correcta deconstrucción dimensional. Solamente un estudiante representa las 4 caras laterales de cada uno de los diseños en la columna correspondiente. Tres de los estudiantes muestran indicios de la influencia de la figura prototípica del rectángulo al representar las caras laterales de los diseños. Solamente un estudiante utiliza una escala y la herramienta de regla en GeoGebra para representar la base y caras laterales de los diseños.		
Act 4 - b), c), d)	Calculan correctamente la suma de las áreas de la base y las caras laterales de los diseños. (Diseño A= 219 m ² , Diseño B= 217.2 m ² , Diseño C= Elección del estudiante)	R= 219, 217.2, 219 - Calcula correctamente la suma de las áreas de la base y las caras laterales de los diseños A y B para determinar la cantidad de m ² de azulejo necesarios para la construcción de la alberca.	R= 219, 217.2, 234 - Calcula correctamente la suma de las áreas de la base y las caras laterales de los diseños para determinar la cantidad de m ² de azulejo necesarios para la construcción de la alberca.	R= 219, 217.2, 222 - Calcula correctamente la suma de las áreas de la base y las caras laterales de los diseños para determinar la cantidad de m ² de azulejo necesarios para la construcción de la alberca.	R= 219 m ² , 217.2 m ² , 234 m ² - Calcula correctamente la suma de las áreas de la base y las caras laterales de los diseños para determinar la cantidad de m ² de azulejo necesarios para la construcción de la alberca.	Tres de los estudiantes logran calcular correctamente la suma de las áreas de la base y las caras laterales de los diseños.		
ACTIVIDADES 5 y 6: Reconocer al cuadrado, a partir de la deconstrucción dimensional, como forma que debe tener la base de la alberca para requerir la menor cantidad de azulejos al cubrir su base y caras laterales.								
No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares		
Act 5 - b)	Relacionan la longitud de la barra del applet con el perímetro de la base de la alberca. (Deconstrucción Dimensional)	R= El perímetro de la base - Deconstruyen dimensionalmente el desarrollo plano de la alberca relacionando la longitud de la barra mostrada en el applet con el perímetro de la base de la alberca.	R= El perímetro de la base - Deconstruyen dimensionalmente el desarrollo plano de la alberca relacionando la longitud de la barra mostrada en el applet con el perímetro de la base de la alberca.	R= Perímetro de la base - Deconstruyen dimensionalmente el desarrollo plano de la alberca relacionando la longitud de la barra mostrada en el applet con el perímetro de la base de la alberca.	R= Perímetro de la alberca - Deconstruyen dimensionalmente el desarrollo plano de la alberca relacionando la longitud de la barra mostrada en el applet con el perímetro de la base de la alberca.	Todos los estudiantes logran deconstruir dimensionalmente el desarrollo plano de la alberca relacionando la longitud de la barra mostrada en el applet con el perímetro de la base de la alberca.		
Act 5 - e)	Identifican que la forma que adquiere la base de la alberca cuando se tiene la menor área a cubrir con azulejos es el cuadrado.	R= Cuadrado - Identifican al cuadrado como la forma que adquiere la base cuando se tiene la menor área a cubrir con azulejos.	R= Cuadrado - Identifican al cuadrado como la forma que adquiere la base cuando se tiene la menor área a cubrir con azulejos.	R= Cuadrado - Identifican al cuadrado como la forma que adquiere la base cuando se tiene la menor área a cubrir con azulejos.	R= Un cuadrado - Identifican al cuadrado como la forma que adquiere la base cuando se tiene la menor área a cubrir con azulejos.	Todos los estudiantes logran identificar que la forma que adquiere la base cuando se tiene la menor área a cubrir con azulejos es el cuadrado. Para lograr esta identificación fue fundamental el apoyo en el applet de GeoGebra.		

No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares
Act 6	Escriben como recomendación para el ingeniero que el diseño con base cuadrada es el que requiere de menos material para su construcción.	¶ Cuando ingeniero, ¿a qué tipo de diseño se puede hacer, si lo que conviene es una de forma cuadrada con 12 m de largo y 1.5 m de altura, ya que este diseño cumple con las especificaciones de 144 m ² de base y 1.5 m de altura y con 1.5 m de profundidad además se requiere menos material. - Reconoce que el diseño que cumple con las especificaciones proporcionadas y tenga base cuadrada, será el más conveniente por requerir menos material para su construcción.	¶ Cuando ingeniero, ¿a qué tipo de diseño se puede hacer, si lo que conviene es una de forma cuadrada con 12 m de largo y 1.5 m de altura, ya que este diseño cumple con las especificaciones de 144 m ² de base y 1.5 m de altura y con 1.5 m de profundidad además se requiere menos material. - Reconoce que el diseño que cumple con las especificaciones proporcionadas y tenga base cuadrada, será el más conveniente por requerir menos material para su construcción.	¶ Si haces la alberca de forma cuadrada las caras laterales serán más caras y necesitarás menos azulejos que con diseño rectangular. - Reconoce que el diseño que cumple con las especificaciones proporcionadas y tenga base cuadrada, será el más conveniente por requerir menos material para su construcción.	¶ Sábulo, para construir una alberca de 144 m ² de superficie, con una profundidad de 1.5 m, le recomendamos que las medidas a utilizar sean de 12 m de ancho, 12 m de alto y 1.5 m de profundidad, ya que con estas medidas se utilizan en total 213 m ² de azulejo, manteniendo las medidas solicitadas y utilizando menos material que con otras longitudes. - Reconoce que el diseño que cumple con las especificaciones proporcionadas y tenga base cuadrada, será el más conveniente por requerir menos material para su construcción.	¶ Todos los estudiantes reconocen que el diseño que cumple con las especificaciones proporcionadas y tenga base cuadrada será el más conveniente por requerir menos material para su construcción.

UN CASO MAS COMPLEJO

ACTIVIDAD 7: Dividir meriológicamente la alberca con desnivel para el cálculo del volumen de tierra que se necesita excavar para su construcción.

No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares
Act 7 - a), b)	Identifican prismas conocidos y sus dimensiones para el cálculo del volumen de la alberca con desnivel (División meriológica).	Divide meriológicamente la alberca con desnivel identificando tres prismas rectangulares y un prisma triangular. Las dimensiones de dos de los prismas rectangulares se identifican de manera correcta, sin embargo, no identifica las dimensiones correctas para el prisma triangular y prisma triangular que se encuentran en la sección del desnivel, confundiendo el valor de la hipotenusa del triángulo formado por el desnivel, con su cateto horizontal, por lo tanto el cálculo del área de la base y volumen de estos prismas es incorrecta. Muestra indicios de apoyo en un prisma triangular extra trazado fuera de la alberca con desnivel. No utiliza una escala para realizar el dibujo, ni se muestran indicios de la influencia de figuras prototípicas.	Divide meriológicamente la alberca con desnivel identificando tres prismas rectangulares y un prisma triangular. Las dimensiones de la base de los prismas son identificadas de manera correcta para todos los prismas, sin embargo, confunde la altura del prisma con la altura de las bases de los prismas como el de su volumen son correctos. No realiza dibujos de los prismas identificados de manera individual en la tabla, aunque describe las dimensiones de su base. Se muestran indicios de la influencia de la figura prototípica del prisma rectangular, ya que considera como a base de los prismas una de las caras laterales.	Divide meriológicamente la alberca con desnivel identificando dos prismas rectangulares y un prisma triangular. Las dimensiones de la base de los prismas son identificadas de manera correcta para todos los prismas, al igual que las alturas. Tanto el cálculo de las áreas de las bases de los prismas como el de su volumen son correctos. No utiliza una escala para realizar el dibujo, ni se muestran indicios de la influencia de la figura prototípica.	Divide meriológicamente la alberca con desnivel identificando tres prismas rectangulares y un prisma triangular situado fuera de la alberca. Las dimensiones de la base de los prismas son identificadas de manera correcta para todos los prismas, al igual que las alturas. Tanto el cálculo de las áreas de las bases de los prismas como el de su volumen son correctos. No utiliza una escala para realizar el dibujo, ni se muestran indicios de la influencia de la figura prototípica.	Se presentan subconfiguraciones diferentes en la solución de la actividad, considerando tres prismas rectangulares y uno triangular dentro de la alberca con desnivel, considerando dos prismas rectangulares y uno triangular dentro de la alberca con desnivel, y una tercera subconfiguración considerando dos prismas rectangulares dentro de la alberca con desnivel, un prisma rectangular que se encuentra parcialmente dentro de la alberca y un prisma triangular situado fuera de la alberca. Dos de los estudiantes logran identificar correctamente en su totalidad las dimensiones de la base y altura de los prismas. Tres de los estudiantes logran realizar el cálculo correspondiente de las áreas de las bases de los prismas y volumen. Solo un estudiante muestra indicios de la influencia de la figura prototípica del prisma rectangular. Ningún estudiante utiliza una escala para realizar el dibujo de los prismas identificados.
Act 7 - c)	Calculan correctamente la cantidad de tierra que se necesita excavar para la construcción de la alberca con desnivel. (323 m ³).	¶= 351.99 - Calcula de manera incorrecta el volumen total de tierra que se necesita excavar para la construcción de la alberca con desnivel debido a la identificación incorrecta de las dimensiones de uno de los prismas rectangulares y el prisma triangular considerado en la Act 7 a), b).	¶= 312 - Calcula correctamente la cantidad de tierra que se necesita excavar para la construcción de la alberca con desnivel.	¶= 312 - Calcula correctamente la cantidad de tierra que se necesita excavar para la construcción de la alberca con desnivel.	¶= 303 m ³ - Calcula de manera incorrecta el volumen total de tierra que se necesita excavar para la construcción de la alberca con desnivel debido a que suma el volumen de todos los prismas considerados olvidando estar el volumen del prisma triangular identificado fuera de la alberca con desnivel.	Dos de los estudiantes calculan correctamente la cantidad de tierra que se necesita excavar para la construcción de la alberca con desnivel. Un estudiante logra realizar correctamente el cálculo debido a dificultades presentadas en la división meriológica de la alberca con desnivel.

ACTIVIDAD 8: Reconstruir dimensionalmente la base y las caras laterales de la alberca con desnivel, a partir de su desarrollo plano, para el cálculo de la cantidad necesaria de azulejos para su construcción.

No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares
Act 8 - a)	Identifican la forma y dimensiones de la base y las caras laterales del diseño de la alberca con desnivel. (Deconstrucción Dimensional)	Deconstruye dimensionalmente la alberca con desnivel identificando correctamente la forma y dimensiones de la base y las cuatro caras laterales. Los cálculos del área para las caras laterales 2 y 3 son incorrectos, sin mostrar indicios de procedimiento que se siguió. No utiliza una escala para realizar los dibujos.	Deconstruye dimensionalmente la alberca con desnivel identificando la forma de la base y las cuatro caras laterales, sin embargo, no especifica sus dimensiones poniendo en duda la correcta deconstrucción dimensional. Los cálculos del área para las caras laterales son correctos, pero el de la base no, sin mostrar indicios de procedimiento que se siguió. No utiliza una escala para realizar los dibujos.	Deconstruye dimensionalmente la alberca con desnivel identificando la forma de la base y las cuatro caras laterales, sin embargo, no logra identificar correctamente las dimensiones de la base de la alberca. Los cálculos del área para las caras laterales son correctos, pero el de la base no, debido a la incorrecta deconstrucción dimensional realizada. No utiliza una escala para realizar los dibujos.	Deconstruye dimensionalmente la alberca con desnivel identificando correctamente la forma y dimensiones de la base y las cuatro caras laterales de la alberca. Muestra indicios de una división meriológica para las caras laterales irregulares, mostrando una subconfiguración de dos rectángulos y un triángulo para la obtención de su área. Los cálculos del área para las caras laterales y la base de la alberca son correctos. No utiliza una escala para realizar los dibujos.	Dos estudiantes logran deconstruir dimensionalmente la alberca con desnivel de manera correcta en su totalidad. Identificando la forma y dimensiones de la base y las cuatro caras laterales de la alberca. Solo uno de ellos logra calcular de manera correcta el área de sus caras laterales y su base, incluso utiliza como estrategia la división meriológica para su cálculo. Ningún estudiante utiliza una escala para realizar los dibujos.
Act 8 - b)	Escriben como recomendación para el ingeniero estrategias relacionadas a la deconstrucción dimensional y la división meriológica para la obtención de la cantidad de tierra a excavar y los azulejos para recubrir la base y caras laterales de la alberca con desnivel.	¶ Cuando ingeniero, si quieres conocer la cantidad de tierra a excavar de la alberca con desnivel tendrías que dividirla en prismas conocidos. Si quieres conocer la cantidad de azulejos tendrías que dividir las caras en figuras y sumar todas al final. - Reconoce la división meriológica y la deconstrucción dimensional como estrategias para calcular el volumen y la suma del área de las caras laterales y la base de la alberca respectivamente.	¶ Ingeniero, dividi en figuras prismas de cada una perspectiva para calcular el volumen y las áreas de la alberca en base a las medidas dadas. - Reconoce la división meriológica como a estrategia para calcular el volumen de la alberca con desnivel. No muestra claro si logra identificar la deconstrucción dimensional como estrategia para el cálculo de la suma del área de las caras laterales y la base de la alberca.	¶ Puedo de componer las caras laterales con el desnivel en diferentes figuras para así poder calcular su área y su volumen. - Reconoce la división meriológica y la deconstrucción dimensional como estrategias para calcular el volumen y la suma del área de las caras laterales y la base de la alberca respectivamente.	¶ Para saber la cantidad de m ³ que se necesitan excavar, dividí la alberca entre prismas, tres rectangulares y uno triangular. Para lo m ³ realizo una suma de los m ² de la base más los requisitos de las otras caras. En total se necesitarían 390 m ³ de excavación 203 m ² de azulejo. - Reconoce la división meriológica y la deconstrucción dimensional como estrategias para calcular el volumen y la suma del área de las caras laterales y la base de la alberca respectivamente.	¶ Todos los estudiantes reconocen a la división meriológica como estrategia para el cálculo del volumen de la alberca con desnivel. Tres de los estudiantes logran identificar a la deconstrucción dimensional como estrategia para el cálculo de la suma del área de las caras laterales y la base de la alberca. Un estudiante no muestra indicios claros de la identificación de la deconstrucción dimensional como estrategia.

ETAPA DE CIERRE

ACTIVIDAD 9 y 10: Generalizar la fórmula del volumen para un prisma de base rectangular, así como la obtención de la suma del área de su base y sus caras laterales.

No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares
Act 9	Reconocen el área de la base y la altura de un prisma como elementos para el cálculo del volumen de un prisma.	¶= Área y altura - Reconoce el área de la base y la altura de un prisma como elementos para el cálculo de su volumen.	¶= Área y altura - Reconoce el área de la base y la altura de un prisma como elementos para el cálculo de su volumen.	¶= El área de la superficie y la altura - Reconoce el área de la base y la altura de un prisma como elementos para el cálculo de su volumen.	¶= Las medidas de su base y de su altura - Reconoce a la altura de un prisma como elemento para el cálculo de su volumen, así mismo reconoce la medida de su base sin relacionarlos con su área.	Tres de los estudiantes logran reconocer el área de la base y la altura de un prisma como elementos para el cálculo de su volumen. Un estudiante reconoce las medidas de la base y las medidas de su base, más no los relaciona con su área.
Act 10 - c)	Determinan la expresión que represente el cálculo del volumen de la alberca (abc).	¶= a*b*c - Generaliza la fórmula para la obtención del volumen de un prisma rectangular determinando su expresión algebraica.	¶= abc - Generaliza la fórmula para la obtención del volumen de un prisma rectangular determinando su expresión algebraica.	¶= abc - Generaliza la fórmula para la obtención del volumen de un prisma rectangular determinando su expresión algebraica.	¶= abc - Generaliza la fórmula para la obtención del volumen de un prisma rectangular determinando su expresión algebraica.	Todos los estudiantes logran generalizar la fórmula para la obtención del volumen de un prisma rectangular determinando su expresión algebraica.
Act 10 - d)	Determinan la expresión que represente el cálculo de la suma del área de la base y las caras laterales de la alberca. (2a ² +2bc)	¶= 2a ² +2bc - Generaliza la fórmula para la obtención de la suma del área de la base y las caras laterales de un prisma rectangular determinando su expresión algebraica.	¶= 2a ² +2bc - Generaliza la fórmula para la obtención de la suma del área de la base y las caras laterales de un prisma rectangular determinando su expresión algebraica.	¶= 2a ² +2bc - Generaliza la fórmula para la obtención de la suma del área de la base y las caras laterales de un prisma rectangular determinando su expresión algebraica.	¶= 2a ² +2bc - Generaliza la fórmula para la obtención de la suma del área de la base y las caras laterales de un prisma rectangular determinando su expresión algebraica.	Todos los estudiantes logran generalizar la fórmula para la obtención de la suma del área de la base y las caras laterales de un prisma rectangular determinando su expresión algebraica.
ACTIVIDAD 11: Reconocer la igualdad de volumen en prismas que tienen la misma altura y área en sus bases.		¶= Misma área los dos - Reconoce a la igualdad de área de las bases de dos prismas con alturas iguales como condición para que tengan el mismo volumen.	¶= La misma área de la base - Reconoce a la igualdad de área de las bases de dos prismas con alturas iguales como condición para que tengan el mismo volumen.	¶= Requieren la misma área de la base - Reconoce a la igualdad de área de las bases de dos prismas con alturas iguales como condición para que tengan el mismo volumen.	¶= Que su área mido lo mismo - Reconoce a la igualdad de área de dos prismas con alturas iguales como condición para que tengan el mismo volumen, sin embargo, no especifica de qué elementos es el área a la cual hace referencia.	Tres de los estudiantes logran reconocer a la igualdad de área de las bases de dos prismas con alturas iguales como condición para que tengan el mismo volumen. Un estudiante hace referencia a la igualdad de área pero no especifica de qué elementos del prisma.

ACTIVIDAD 12: Reconocer la desigualdad en la suma de las áreas de la base y caras laterales de prismas que tienen el mismo volumen.

No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares
Act 12	Reconocen que la suma del área de la base y las caras laterales no es igual para cuerpos que tienen el mismo volumen.	¶ No por que sus medidas varían. - Reconoce que la suma del área de la base y las caras laterales no es igual para cuerpos que tienen el mismo volumen.	¶ No por que tienen diferentes medidas - Reconoce que la suma del área de la base y las caras laterales no es igual para cuerpos que tienen el mismo volumen.	¶= No por que dependen de las caras que van por la dimensión que tiene la base puede ser un resultado mayor que otro. - Reconoce que la suma del área de la base y las caras laterales no es igual para cuerpos que tienen el mismo volumen.	¶= No - Reconoce que la suma del área de la base y las caras laterales no es igual para cuerpos que tienen el mismo volumen, pero no justifica su respuesta.	Todos los estudiantes logran reconocer que la suma del área de la base y las caras laterales no es igual para cuerpos que tienen el mismo volumen.

ACTIVIDAD 13: Reconocer al cuadrado como forma que debe tener la base de un prisma rectangular para tener la menor área en sus caras laterales.

No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares
Act 13	Reconocen al cuadrado como forma que debe tener la base de un prisma rectangular para tener la menor área en sus caras laterales.	¶= Un cuadrado ya que las caras (que son iguales) no da una mayor área - Reconoce que la forma que debe tener la base de un prisma rectangular para tener la menor área en sus caras laterales es un cuadrado.	¶= Cuadrado, las caras laterales son las mismas. - Reconoce que la forma que debe tener la base de un prisma rectangular para tener la menor área en sus caras laterales es un cuadrado.	¶= Forma de cuadrado - Reconoce que la forma que debe tener la base de un prisma rectangular para tener la menor área en sus caras laterales es un cuadrado.	¶= Un cuadrado - Reconoce que la forma que debe tener la base de un prisma rectangular para tener la menor área en sus caras laterales es un cuadrado.	Todos los estudiantes logran reconocer que la forma que debe tener la base de un prisma rectangular para tener la menor área en sus caras laterales es un cuadrado.

ACTIVIDAD 14: Identificar como estrategia la división meriológica para la obtención del volumen de un cuerpo irregular.

No. Actividad	Respuestas Esperadas	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Conclusiones Preliminares
Act 14	Reconocen la identificación de prismas previamente conocidos como estrategia para el cálculo de volúmenes de cuerpos irregulares (División Meriológica)	¶= Dividiendo la figura en prismas conocidos y calcular el volumen para cada uno de ellos que se tenemos fórmula. - Reconoce a la división meriológica como estrategia para el cálculo del volumen de un cuerpo irregular.	¶= Haciendo el volumen de cada prisma. - Reconoce a la división meriológica como estrategia para el cálculo del volumen de un cuerpo irregular.	¶= Dividi en figuras de prismas y en cada una de ellas hago su volumen y al final lo sume todo. - Reconoce a la división meriológica como estrategia para el cálculo del volumen de un cuerpo irregular.	¶= Intentar buscar como se forma una figura regular. - Reconoce a la división meriológica como estrategia para el cálculo del volumen de un cuerpo irregular.	Todos los estudiantes logran reconocer a la división meriológica como estrategia para el cálculo del volumen de un cuerpo irregular.