

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES DEPARTAMENTO
DE FÍSICA

Ondas elásticas guiadas en un sistema de barras cilíndricas
paralelas en contacto superficial

Tesis

Que para obtener el título de:

Maestro en Ciencias

Presenta:

TADEO PEÑA MORENO

Hermosillo, Sonora

Agosto 2019

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Contenido

Contenido.....	II
Agradecimientos.....	III
Resumen.....	IV
Abstract.....	V
Lista de Figuras.....	VI
Abreviaturas y Acrónimos.....	VIII
Introducción	1
Antecedentes	5
Metodología	7
1. Teoría de Elasticidad	9
2. Ondas Elásticas en Barras	26
3. Modelo de Transmisión de Energía en Barras Paralelas	39
4. Configuración y Métodos Experimentales	49
5. Análisis de Resultados	56
Conclusiones	71
Referencias	73
Anexos	75

Agradecimientos:

Quiero agradecer primeramente a mis padres y familia por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de mi vida, más en esta gran etapa de cambio. También a la Universidad de Sonora por la preparación que me ha brindado y a mis maestros de quien he aprendido bastante tanto en el ámbito profesional como en el personal, más aún quiero agradecer a la profesora Betsabé Manzanares Martínez y al profesor Arturo Baltazar por permitirme trabajar en conjunto con ellos y adiestrándome en lo que es presentar un trabajo profesional como lo es éste.

Agradezco a los demás miembros del comité de tesis,

Finalmente quiero agradecer al programa de CONACYT por el apoyo que se me brindó al realizar mis estudios de maestría.

Resumen

Se propone el estudio de las vibraciones mecánicas en un sistema compuesto por dos barras cilíndricas en contacto, donde se considera a una de ellas como la barra *activa*. Esta barra es sometida a una excitación armónica, se busca observar la propagación de las ondas a través de la barra activa y cómo afecta el contacto con la barra pasiva. La transmisión en una sola barra se estudia mediante el modelo de Pochhammer-Chree, la cual es una la formulación exacta para sistemas de barras sólidas, isotrópicas y de sección transversal circular. Para estudiar el acoplamiento entre dos barras se propone un modelo basado en resortes y amortiguadores. La verificación experimental se realiza en barras de aluminio cuyo radio se tiene en el orden de $\sim 0.01\text{m}$ sometidas a ondas ultrasónicas en el rango de los kHz.

Descriptores: Ondas elásticas; acoplamiento de ondas; materiales isotrópicos; ultrasonido.

Abstract

The study of mechanical vibrations is proposed in a system composed by two cylindrical bars in contact, where one of them is considered as the *active* bar. This bar is subjected to a harmonic excitation. The propagation of the waves through the active bar and how it affects the contact with the passive bar is analyzed. Single-bar elastic wave transmission is studied using the Pochhammer-Chree model, which is an exact formulation for solid, isotropic and circular cross-section bar systems. For studying the coupling between two bars a model based on springs and shock absorbers is proposed. Experimental verification is performed on aluminum bars whose radius is in the order of $\sim 0.01\text{m}$ subjected to ultrasonic waves in the range of kHz.

Keywords: Elastic waves; wave coupling; isotropic materials; ultrasound.

Lista de Figuras

Fig. a, Diagrama de flujo de los pasos llevados a cabo para la presentación de este trabajo. Página 8.

Fig. 1.1, (a) Incremento de longitud de un material en dirección X, (b) Incremento de longitud de un material en dirección Y. Página 10.

Fig. 1.2, Ejemplo de deformación de corte. Página 11.

Fig. 1.3, Desplazamiento y rotación rígida en el plano X-Y. Página 13.

Fig. 1.4, Desplazamiento relativo de Q a P. Página 15.

Fig. 1.5, Fuerza superficial Δf aplicada en la superficie ΔS . Página 17.

Fig. 1.6, Componentes de esfuerzo. Página 18.

Fig. 2.1, Representación de una sección de nuestro sistema estudiado. Página 26.

Fig. 2.2, Modos torsionales en una barra sólida. Página 34.

Fig. 2.3, Modos longitudinales de una barra cilíndrica sólida. Página 36.

Fig. 2.4, Modos flexurales en una barra. Página 37.

Fig. 3.1, Sistema conformado por dos barras en contacto. Donde la barra uno representa a la barra activa por la cual se hace incidir una señal y la barra número dos es la barra pasiva la cual inicialmente está en reposo y está en contacto con la barra uno. Página 45.

Fig. 4.1, Barras de aluminio aleación T6061. Página 49.

Fig. 4.2, Señal típica del método pulso eco. Página 51.

Fig. 4.3, Diagrama del arreglo experimental usado para la emisión, detección y análisis de señales a través del sistema. Página 52.

Fig. 4.4, Fotografía del arreglo experimental usado, el cual consistía de dos barras. Página 53.

Fig. 4.5, Diferentes pasos que toma el marco de la ventana en la señal que se encuentra en la parte de abajo. Página 54.

Fig. 4.6, Transformada de Fourier de una señal tipo Chirp. Página 55.

Fig. 5.1, Modos de dispersión torsionales en una barra cilíndrica. Página 56.

Fig. 5.2, Modos longitudinales en una barra cilíndrica. Página 58.

Fig. 5.4, Modos flexurales. Página 60.

Fig. 5.5, Modos Flexurales de orden superior. Página 62.

Fig. 5.6, Configuración experimental. Página 62.

Fig. 5.7, Pulso de 1MHz de frecuencia central. Página 63.

Fig. 5.8, Pulso ultrasónico longitudinal de 1Mhz de frecuencia central. Página 64.

Fig. 5.9, STFT de un pulso longitudinal de 1Mhz de frecuencia central, con modos longitudinales calculados (color negro). Página 65.

Fig. 5.10 Segmento dz que muestra la Interacción entre ambas barras, donde, la barra (activa) uno es la barra por donde se transmite la señal y la barra (pasiva) dos la que recibe energía mecánica de la barra número 1. Página 66.

Fig. 5.11, Cambio de energía en ambas barras a lo largo del cilindro. Página 67.

Fig. 5.12, Arreglo experimental usado para medir la interacción entre dos barras, a) primer caso donde solamente hay transmisión y recepción en una misma barra. b) segundo caso donde hay transmisión entre la misma barra, pero esta está acoplada a la barra pasiva. Página 68.

Fig. 5.13, Diferencia de amplitud entre los casos a) y b). Página 69.

Fig. 5.14, Diferencia de amplitud entre los casos a) y b). Página 70.

Introducción

Hoy en día existen diversos estudios de vibraciones mecánicas en sólidos de distintos tipos de geometrías [1-3]. Uno de éstos casos es el de vibraciones en barras cilíndricas, del cual parte es presentado en éste trabajo. Antes de empezar a presentar e indagar en el tema que se desarrollará en esta tesis es necesario tener en cuenta algunos temas básicos de física.

Uno de estos temas es **la Mecánica** clásica que trata el movimiento y el equilibrio de los cuerpos, para ello se parte de diferentes postulados como lo son las tres leyes de Newton, o la formulación de Lagrange. Usando estas herramientas uno puede formular ecuaciones para predecir el comportamiento de un fenómeno, tales como hallar la velocidad de un automóvil en movimiento, la trayectoria que seguirá un misil, hallar la órbita de los planetas, el movimiento de un fluido o la deformación de los materiales. Posteriormente la veracidad de dichas ecuaciones y por tanto del modelo puede ser puesto a prueba experimentalmente [4].

Dentro de la mecánica se encuentran varias “ramas” de estudio para lo que son diferentes sistemas. A una de estas ramas se le conoce como **Mecánica del Medio Continuo**, la cual trata de manera macroscópica con sistemas compuestos de un conjunto infinito de partículas como por ejemplo lo es un sólido o un fluido. Donde se establecen ecuaciones de movimiento para cada partícula de la configuración en cada instante preciso de tiempo [5], para lo cual se utilizan coordenadas que describan cualquier punto del cuerpo y su evolución temporal en cuanto a posición.

Una de las razones por las que en una configuración inicial pudiese haber un movimiento es debido a fuerzas externas a ésta, provocando así una deformación en la posición inicial de las partículas. La elasticidad estudia la relación entre las fuerzas aplicadas a los cuerpos y las correspondientes deformaciones, sobre todo en materiales que se consideran “elásticos” esto quiere decir que al dejar de aplicar la fuerza que deforma el material, las partículas regresan a su posición inicial.

Se toman en cuenta dos tipos de fuerzas que podrían deformar a un cuerpo, las fuerzas de masa que actúan sobre todo el cuerpo, así como lo es la gravedad o fuerzas magnéticas. Y las fuerzas superficiales, que actúan cuando dos cuerpos están en contacto, un ejemplo de éstas

es la fuerza normal que ejerce el suelo debido al peso de uno. Estos dos tipos de fuerzas causan así una respuesta en el cuerpo el cual trata de mantener el equilibrio, con lo que se provocan varias tensiones o esfuerzos internos en el material. Este tipo de fenómenos son estudiados mediante una parte de la mecánica del medio continuo conocida como **Elasticidad**. Varios autores nombran a la Elasticidad como la acústica de sólidos [5], debido a que a comparación de la acústica donde el sistema es un fluido, en la elasticidad resulta ser los sólidos el sistema estudiado.

Originalmente la **Acústica** era el estudio de pequeñas ondas de presión en el aire detectables para el oído humano [6]. Actualmente el campo de la acústica ha sido extendido a más altas y bajas frecuencias detectables para una persona (ultrasonido e infrasonido). La propagación de ondas en este sentido es una propagación de energía mecánica, causada por la respuesta a fuerzas externas al medio por donde se propagan, por lo que la generación de éstas ondas se considera un problema de condiciones de frontera. El sonido generado por una bocina o cualquier movimiento inestable en la frontera de un sólido son ejemplos de la generación de este tipo de fenómeno.

Como se mencionó antes en este trabajo se estudia la vibración de ondas mecánicas en dos barras sólidas de material elástico que se encuentran en contacto superficial. El análisis de la propagación de ondas mecánicas en dos barras interconectadas puede describirse por medio de un modelo de resorte/amortiguador. Tanto los modos de vibración como los efectos de la interacción de dos barras que resulta de los modelos propuestos pueden ser verificados experimentalmente por medio del estudio de la propagación de ondas ultrasónicas generadas y detectadas con transductores de tipo piezoeléctrico.

Las Pruebas No Destructivas (PND) son ampliamente utilizadas para la inspección de estructuras en Ingeniería Civil, Aeroespacial y en Ingeniería Mecánica [1]. Estas evaluaciones sirven para estimar la vida útil de estructuras, el control de calidad en soldadura, también para la medición de espesores, la detección de fallas tales como laminaciones, burbujas, etc. En el caso de los cables trenzados que se utilizan en la propagación de energía eléctrica aérea, estos pueden estar sujetos a vientos, cambios de temperatura, corrosión [7]. En general en el uso de cable trenzado las fallas comienzan con las fracturas de los alambres individuales. En este tipo de sistemas el desarrollo de métodos de inspección no invasivos

En el análisis de la transmisión/reflexión de ondas mecánicas en estos sistemas hay muchos factores a estudiarse desde el punto de vista de la Física. Por ejemplo, cada alambre del cable funciona como guía de onda que tiene sus propios modos de vibración, es importante estudiar cuales de estos modos son aptos para el diseño de pruebas no destructivas, los modos que puedan propagar ondas a más largas distancia podrían ser mejores en el diseño de una PND. Cuando el alambre que encuentra discontinuidades como fracturas, corrosión o burbujas podría ocurrir conversión de modos. En este caso sería importante el estudio del mecanismo en que esta conversión ocurre, de qué forma podría ser detectada y estudiada. La implementación de los métodos de análisis numéricos adecuados para el análisis de señales es también un tema de interés, se puede por ejemplo estudiar la Transformada de Fourier, la Transformada de Fourier de Tiempo Corto, la Transformada Wavelet, etc. Por otra parte en la mayor parte de los cables existe un “trenzamiento” helicoidal en los alambres que la conforman, el estudio de cómo es que esta transmisión influye en los modos de oscilación del sistema, la interacción entre alambre y alambre, tanto del punto de vista teórico y experimental es un problema bajo estudio. Así como hemos mencionado los anteriores puntos hay otros más que tienen que ser investigados para poder desarrollar una PND ultrasónica adecuada para este tipo de sistemas. En este sentido en esta propuesta se propone el análisis de los modos de propagación e interacción mecánica entre dos barras sólidas, que desde el punto de vista físico es análogo a lo que ocurriría entre dos alambres en este tipo de cables. Esta es la motivación para desarrollar el presente proyecto.

Basados en vibraciones mecánicas es de interés práctico. El objetivo es diseñar una PND ultrasónica donde el cable funcione como una guía de onda elástica, colocando en un lugar de la estructura un generador de ondas y en otro (o incluso en el mismo) un sensor, el análisis de la señal detectada brindaría una herramienta para el análisis estructural del sistema.

Así para resolver el problema se cuenta como objetivo general estudiar de forma tanto teórica y experimental la propagación de ondas ultrasónicas entre dos barras cilíndricas paralelas en contacto superficial.

1. Estudiar los modos de oscilación elástica en una barra sólida de material isotrópico.

2. Estudiar la forma en que interaccionan mecánicamente dos barras cilíndricas paralelas que se encuentran en contacto superficial.
3. Desarrollar programas para resolver numéricamente el modelo de Pochhammer-Chree para la propagación de ondas elásticas en una barra sólida de sección transversal circular.
4. Desarrollar programas para el modelo de interacción elástica dos barras cilíndricas paralelas que se encuentran en contacto superficial presentado por T. Haag et al [4].
5. Diseñar un arreglo experimental que represente bien el fenómeno de la transmisión en barras sobre una barra elástica y sobre dos barras paralelas.
6. Seleccionar el material de las barras sólidas, tomando en cuenta las especificaciones y asegunes que se hacen teóricamente.
7. Realizar experimentos necesarios sobre el sistema que se escogió, para ambos casos que se desea estudiar.
8. Analizar resultados con ayuda del software adecuado para el procesamiento de señales.
9. Comparar los datos experimentales con los programas que se realizaron para resolver las ecuaciones de los modelos utilizados
10. Escribir los resultados obtenidos y presentarlos en un trabajo escrito al igual que presentarlos como tema de tesis.

Los desplazamientos de las partículas en estos sistemas cilíndricos son descritos mediante la ecuación de onda [2,3]. Uno de los modelos teóricos de la elasticidad que se ha realizado en este ámbito es el de Pochhammer-Chree [2], en el cual se basa la descripción del sistema de una sola barra presentada en este trabajo. Para lo que primero se hará una introducción a conceptos básicos de Mecánica del Medio Continuo (MMC) y Teoría de Elasticidad en el Capítulo 1, con los cuales se trabajará para describir la propagación de ondas dispersivas en una sola barra en el Capítulo 2.

Tras repasar los temas necesarios se indagará en cómo es que la energía de la perturbación mecánica se propaga de la barra excitada a una barra que este en contacto con

esta, por lo cual se revisará un modelo basado en resortes y amortiguadores en el capítulo 3 [4,5]. La motivación de este trabajo es la de apoyar con evidencia, la hipótesis de la transferencia de energía entre una barra activa a una barra pasiva vía los modos de Pochhammer-Chree.

Se propone un arreglo experimental descrito en el Capítulo 4, el cual consiste en una barra de aluminio, con el cual se trabajó para presentar evidencia de la hipótesis ya mencionada. Por lo cual se revisará la caracterización de éste y técnicas, tal como lo es la transformada de Fourier de tiempo corto que es una herramienta que se utiliza mucho en el procesamiento de señales acústicas [11]. Con estas herramientas realizamos la descripción experimental del fenómeno de la transmisión de energía entre dos barras en contacto. Por último, presentamos los resultados obtenidos y algunas conclusiones respecto en la hipótesis hecha en el Capítulo 5.

Antecedentes

El análisis de las vibraciones en barras es ampliamente utilizado en ingeniería, especialmente en la civil, aeroespacial y mecánica [10, 12]. Por ejemplo, los cables de alambres múltiples que se utilizan en estructuras de grúas, puentes o elevadores, donde juegan un papel muy importante a la hora de cargar con pesos demasiado grandes. Escoger el cable indicado lleva a la consideración el aguante del cable; resistencia a la fatiga por torsión; y resistencia a aplastamiento, corrosión, etc. Muchos defectos pueden desarrollarse en un cable debido a, por ejemplo, sobrecargas o ambientes difíciles. Varias técnicas pueden ser usadas para inspeccionar cables de alambres múltiples. En ocasiones, este tipo de cables son examinados usando flujos magnéticos o técnicas de emisión acústica.

Los sistemas de una sola barra han sido estudiados bajo diferentes condiciones de frontera y distintos tipos de excitación debido a su relativa simplicidad [2]. La teoría de Pochhammer-Chree es la formulación exacta para la propagación de ondas elásticas en sistemas de barras sólidas isotrópicas de sección transversal circular, sin embargo, existen otras teorías aproximadas como la de Timoshenko [2] y Euler-Bernoulli [12] que son matemáticamente más sencillas.

El interés en el análisis de la propagación de ondas mecánicas en dos o más barras interconectadas es un problema abierto de amplio interés práctico. Existen varias formas de abordar este sistema, uno de los primeros ha sido modelar la interacción mecánica por medio de resortes [17], este análisis aún sigue vigente, como se demuestra su aplicación en el estudio del comportamiento dinámico de arneses. Otra forma de tratar estos sistemas es considerar que las barras están unidas por una capa de material elástico o viscoelástico [13]. Una aproximación a esta situación física es simular la interacción mecánica mediante resortes en paralelo con amortiguadores (modelo de Kelvin Voigt) [17].

Un aspecto importante a mencionar es que en su mayor parte las formulaciones para el acoplamiento de vibraciones entre barras se basan en teorías aproximadas tal como Euler-Bernoulli para ondas de tipo flexural o transversal. En 2009 Haag Thomas et al [4] propusieron un modelo basado en energía con una interacción resorte-amortiguador, encontrando así una expresión para el intercambio de energía entre barras paralelas, aplicable para la solución exacta de modos de Pochhammer-Chree. Posteriormente realizaron pruebas en un sistema de dos barras de aluminio acopladas entre sí, comprobando sus resultados son útiles para el análisis de daño en cables trenzados [14].

Si bien este tipo de problemas han sido mayormente estudiados en ingeniería mecánica, estos sistemas son también interesantes desde el punto de la Física. Hemos mostrado anteriormente como los métodos utilizados en Fotónica y Fonónica pueden ser utilizados en este tipo de estructuras finitas [7]. Se demostró como el Método de Expansión en Ondas Planas puede ser utilizado para estudiar las vibraciones mecánicas, obteniendo resultados tan exactos como los que se obtienen con la teoría de Pochhammer-Chree.

Por otra parte, como antecedente de preparación previa, recientemente el estudiante Tadeo Peña Moreno defendió la tesis intitulada “Estudio Teórico-Experimental de la Dependencia Angular de los Modos Longitudinales Pochhammer-Chree en Barras de Aluminio” [15]. Este trabajo teórico-experimental proporciona al estudiante conocimiento para poder dar continuidad a su investigación en las metas de este proyecto.

Metodología

Como bien se dijo anteriormente el presente estudio se enmarca dentro de la teoría de elasticidad, donde se revisa parte de la bibliografía necesaria [1,12] para atacar el problema de forma teórica. Con esto se hizo una exploración de temas de mecánica del medio continuo para después estudiar el problema de la dispersión de ondas mecánicas en sistemas cilíndricos, con la Teoría de Pochhammer-Chree [2,3]. Posteriormente se continuó la revisión bibliográfica haciendo el desarrollo de la energía del sistema compuesto por dos barras cilíndricas, con lo que más tarde se obtiene unas expresiones a solucionar y así encontrar el cambio de energía mecánica entre una barra activa y otra pasiva [4]. Se utilizaron diversos softwares como Mathematica, MatLab [18] y programas hechos en fortran para la solución tanto de las ecuaciones de dispersión para los modos Pochhammer-Chree, como también en la solución de las ecuaciones de intercambio de energía entre ambas barras.

Las pruebas experimentales realizadas en el trabajo presente se realizan sobre barras de aluminio de aleación 6061, con transductores piezoeléctricos de 1Mhz de frecuencia central, adheridos ambos extremos para el caso de los modos Pochhammer-Chree, en una sola barra. Se hace transmitir paquetes de ondas en la barra mediante un generador de funciones. Para el sistema compuesto de dos barras en contacto se utilizan c-clamps para mantenerlas presionadas entre sí [5], de igual manera con transductores piezoeléctricos se hizo transmitir señales a través de la que sería la barra activa [4]. Posteriormente todas las señales recibidas fueron capturadas con un osciloscopio para después procesarlas con una transformada de Fourier de tiempo corto [9, 10].

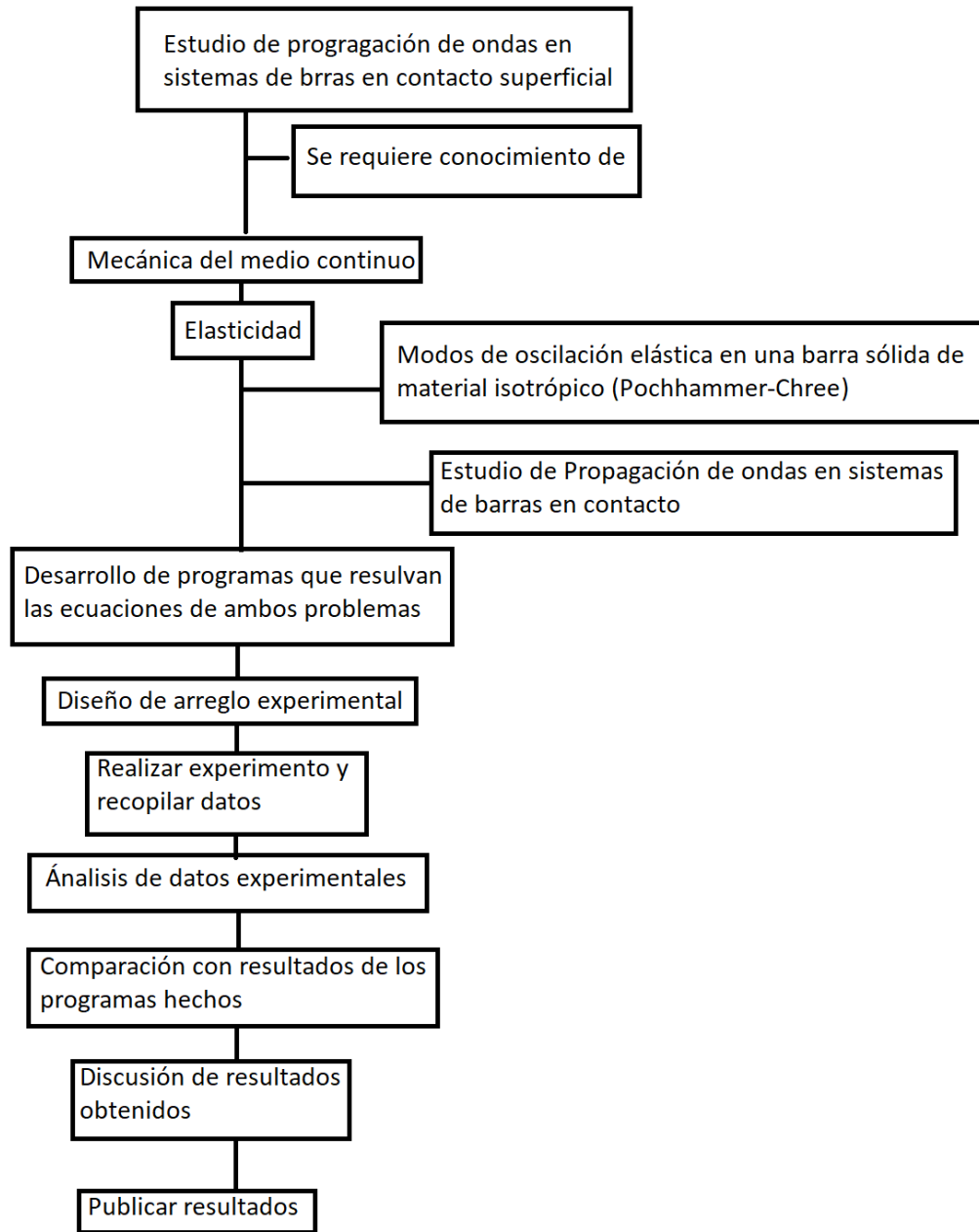


Fig. a Diagrama de flujo de los pasos llevados a cabo para la presentación de este trabajo.

Capítulo 1

Teoría de elasticidad

En este capítulo se revisarán varios conceptos de la MMC, ya que servirán de base para presentar más adelante ecuaciones que describen el fenómeno de la transmisión de ondas ultrasónicas en barras cilíndricas. Algunos de estos conceptos son los tensores de desplazamiento y de esfuerzos, son estos dos los que serán más relevantes a lo largo del trabajo. Nótese que en este trabajo se considerará al sistema estudiado como un material isotrópico, homogéneo y sometido a pequeñas perturbaciones, esto permite hacer varias aproximaciones a la hora de trabajar con algunos de estos temas.

1.1 Tensor de deformaciones

Una de la característica de los cuerpos elásticos estudiados por la Mecánica del Medio Continuo, es la de volver a su estado de origen después de haber sufrido una fuerza; al cambio de distribución en la configuración de los elementos que componen al cuerpo se le conoce como deformación. Para comprender mejor este concepto, se considera un cuerpo de dos dimensiones como el que es mostrado en la Fig. 1.1. [16].

Ahora se presentan dos casos en los que se somete el cuerpo a una fuerza paralela al eje x [Fig. 1.1 (a)] y otro donde se aplica la fuerza en dirección y [Fig. 1.1 (b)], al aplicar dicha fuerza se nota un desplazamiento de las partículas del material (Δu_x y Δu_y , respectivamente) en ambos casos de la forma que se muestra en la Fig. 1.1. Así, definimos la deformación tomando los cocientes del cambio de longitud debido a estas fuerzas, sobre la longitud original en cada caso (siendo dichos cocientes los siguientes, $\Delta u_x / \Delta X$, $\Delta u_y / \Delta Y$).

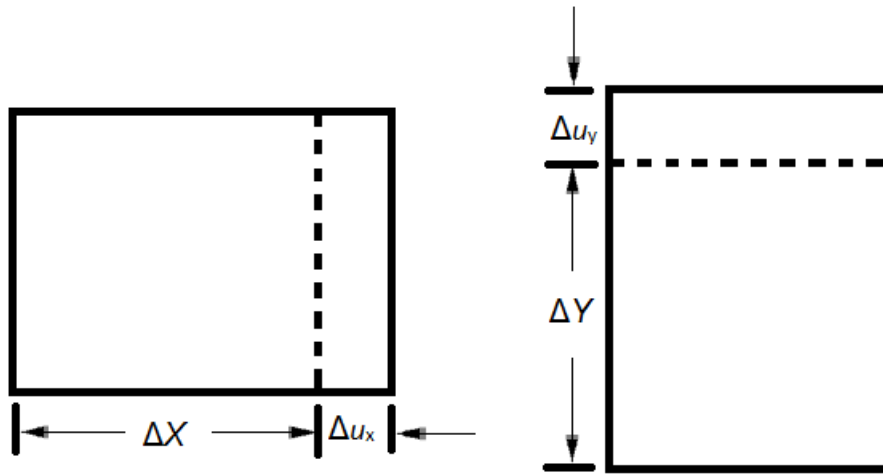


Fig. 1.1, (a) Incremento de longitud de un material en dirección X, (b) Incremento de longitud de un material en dirección Y.

$$e_x = \frac{\Delta u_x}{\Delta X} \quad e_y = \frac{\Delta u_y}{\Delta Y} \quad (1.1)$$

Siguiendo el mismo ejemplo, se presenta ahora un caso donde tengamos una fuerza aplicada con componentes en el eje x y el eje y sobre el mismo cuerpo. Teniendo así un escenario parecido al de la Fig. 1.2.

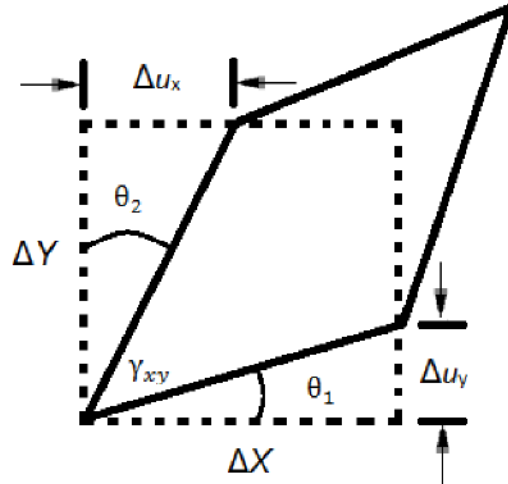


Fig. 1.2, Ejemplo de deformación de corte.

A una deformación de este tipo se le conoce como deformación de corte, que se define como el cambio de dos vectores que anteriormente eran ortogonales entre sí; en este caso siendo dichos vectores los lados del elemento que en su estado original yacen en los ejes x y y . Para expresar este cambio de configuración del elemento nos apoyaremos en los ángulos θ_1 y θ_2 .

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - (\theta_1 + \theta_2). \quad (1.2)$$

Ahora, tomando la aproximación a ángulos pequeños se reescribe con la definición de tangente estos mismos

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\Delta u_x}{\Delta Y} + \frac{\Delta u_y}{\Delta X} \right). \quad (1.3)$$

Por último, se define la deformación de corte como un medio de la suma de dichos ángulos.

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_x}{\Delta Y} + \frac{\Delta u_y}{\Delta X} \right). \quad (1.4)$$

Al ver esta última expresión uno puede darse cuenta que en el caso anterior a este puede ser tratado con la misma expresión si repetimos el subíndice. Así, tomando las tres expresiones obtenidas se escribe de forma general, tomando el límite cuando ΔY y ΔX tienden a cero.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right). \quad (1.5)$$

Donde a e_{ij} se le conoce como tensor de deformación, el cual contiene información cuantitativa del desplazamiento relativo entre partes vecinas del mismo material. Al correr todos los índices y organizarlos en una forma matricial se obtiene.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_x}{\partial X} + \frac{\partial u_x}{\partial X} \right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} \right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial Z} + \frac{\partial u_z}{\partial X} \right) \\ \left(\frac{\partial u_y}{\partial X} + \frac{\partial u_x}{\partial Y} \right) & \left(\frac{\partial u_y}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial Y} \right) & \left(\frac{\partial u_y}{\partial Z} + \frac{\partial u_z}{\partial Y} \right) \\ \left(\frac{\partial u_z}{\partial X} + \frac{\partial u_x}{\partial Z} \right) & \left(\frac{\partial u_z}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial Z} \right) & \left(\frac{\partial u_z}{\partial Z} + \frac{\partial u_z}{\partial Z} \right) \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Como se puede ver el tensor tiene la propiedad de ser simétrico con lo se escribe.

$$e_{ij} = e_{ji}. \quad (1.7)$$

1.2 Tensor de rotación

Ya se revisó la idea como una fuerza aplicada en un sólido puede deformarlo, cuando pasa esto entran en juego cierto tipo de fuerzas internas (esfuerzos) para llevar al cuerpo a su estado inicial, pero no todas las veces ocurre esto; podría ser que el cuerpo presentara un movimiento rígido como respuesta a dicha fuerza, así la parte rotacional del movimiento causaría también un desplazamiento de la configuración inicial de las componentes del sólido.

Se presenta de nuevo el sistema cuadrado de dos dimensiones, el cual presenta una rotación como la que se muestra en la Fig. 1.3 [16].

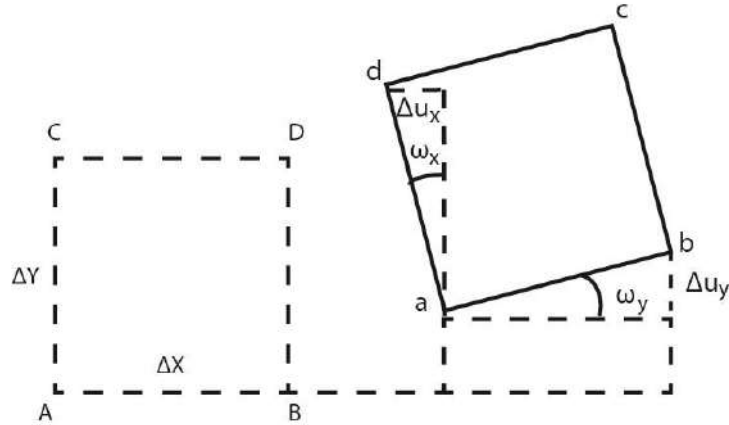


Fig. 1.3, Desplazamiento y rotación rígida en el plano X-Y.

Haciendo un paralelismo con el caso anterior para deformaciones, se puede escribir el movimiento del cuerpo ayudándose con el ángulo que éste se movió para terminar en su estado final. Utilizando la misma notación que en la sección anterior, se escribe.

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} \right). \quad (1.8)$$

Suponemos que en este caso $\theta_1 = -\theta_2$.

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} (\theta_1 - \theta_1) = 0. \quad (1.9)$$

Y esto concuerda ya que el cuerpo no sufre una deformación si no se trata del caso en el que toda la figura rota en el mismo sentido. Así, se propone la siguiente expresión para un caso donde se presenta sólo rotación.

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} - \frac{\partial u_y}{\partial X} \right). \quad (1.10)$$

Donde a ω_{xy} se le conoce como el tensor de rotación, de igual manera corriendo los índices y al acomodarlos en una matriz de tres por tres obtendremos la siguiente expresión.

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} - \frac{\partial u_y}{\partial X}\right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial Z} - \frac{\partial u_z}{\partial X}\right) \\ \left(\frac{\partial u_y}{\partial X} - \frac{\partial u_x}{\partial Y}\right) & 0 & \left(\frac{\partial u_y}{\partial Z} - \frac{\partial u_z}{\partial X}\right) \\ \left(\frac{\partial u_z}{\partial X} - \frac{\partial u_x}{\partial Z}\right) & \left(\frac{\partial u_z}{\partial Y} - \frac{\partial u_y}{\partial Z}\right) & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

De esta manera se observa una de las características de este tensor, al contrario del tensor de deformaciones en este se puede ver que tiene la propiedad de ser asimétrico, teniendo así la siguiente propiedad.

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}. \quad (1.12)$$

1.3 Tensor de desplazamiento

Como se observó en las últimas dos secciones, la deformación y la rotación de un cuerpo dependen de cuánto se han desplazado sus componentes con respecto a su configuración inicial; por lo que se puede decir que el desplazamiento está en función de la rotación y la deformación del cuerpo. Para ver más a fondo este concepto, veremos en un sistema donde tenemos los puntos P y Q como se muestra en la Fig 1.4. Más tarde estos mismos son sometidos a un desplazamiento terminando en los puntos p y q [16].

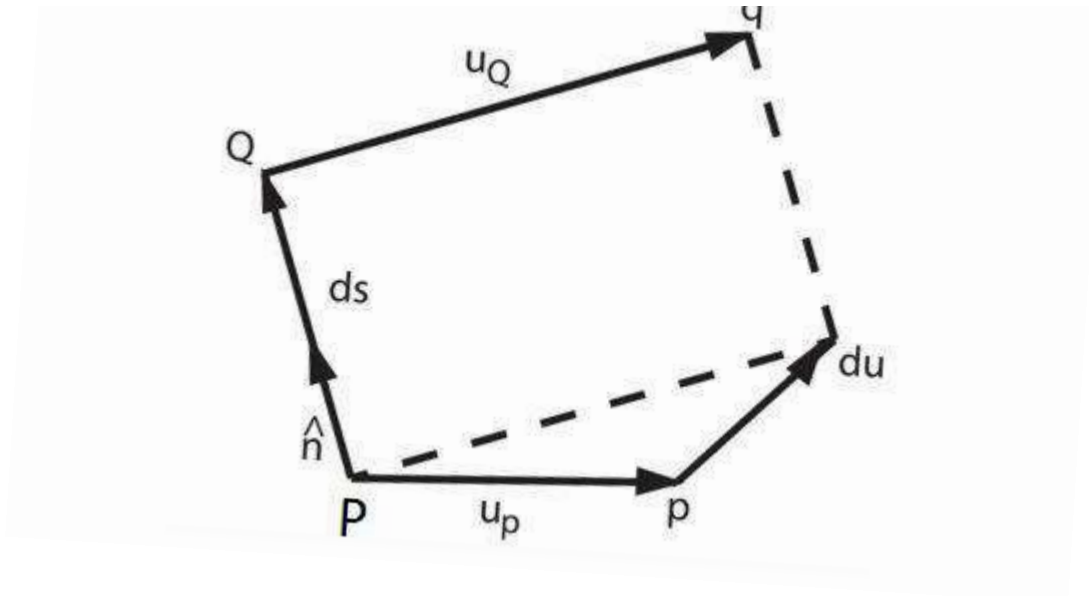


Fig. 1.4, Desplazamiento relativo du de Q a P.

Donde el desplazamiento relativo de Q con respecto a P es

$$du = du_Q - du_P. \quad (1.13)$$

El desplazamiento unitario sería entonces du/ds , donde la magnitud ds es el largo de PQ, las componentes rectangulares del desplazamiento unitario relativo serían (en el límite donde ds tiende a cero).

$$\frac{du_x}{ds} = \frac{\partial u_x}{\partial X} \frac{dX}{ds} + \frac{\partial u_x}{\partial Y} \frac{dY}{ds}, \quad \frac{du_y}{ds} = \frac{\partial u_y}{\partial X} \frac{dX}{ds} + \frac{\partial u_y}{\partial Y} \frac{dY}{ds}. \quad (1.14)$$

Donde las derivadas parciales son evaluadas en el punto P y donde no depende de las componentes $(dX/ds, dY/ds)$ del vector unitario \hat{n} en la dirección de PQ. Así, escribiendo las componentes en forma matricial tenemos.

$$\begin{pmatrix} \frac{du_x}{ds} \\ \frac{du_y}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial X} & \frac{\partial u_x}{\partial Y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial X} & \frac{\partial u_y}{\partial Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dX}{ds} \\ \frac{dY}{ds} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

$$\frac{du}{dS} = J_u n. \quad (1.16)$$

Siendo así la primera columna las componentes del desplazamiento de Q relativo a P, la matriz columna n siendo las componentes de dirección del vector \hat{n} y por último tenemos el tensor de desplazamiento en su representación matricial de dos dimensiones. Ahora, sabemos que una de las propiedades de una matriz, es que podemos escribir a ésta como la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica. Con esto y la idea que habíamos dicho antes de describir el desplazamiento en función de la rotación y deformación del cuerpo, escribimos.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial X} & \frac{\partial u_y}{\partial Y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial X} & \frac{\partial u_y}{\partial Y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial X} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} \right) \\ \left(\frac{\partial u_y}{\partial X} + \frac{\partial u_x}{\partial Y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial Y} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial u_x}{\partial Y} - \frac{\partial u_y}{\partial X} \right) \\ \left(\frac{\partial u_y}{\partial X} - \frac{\partial u_x}{\partial Y} \right) & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Siendo así el tensor de rotación una suma del tensor de deformación y el de rotación.

$$u_{i,j} = e_{ji} + \omega_{ji}. \quad (1.18)$$

1.4 Tensor de esfuerzos

Cualquier sólido elástico sometido a fuerzas que lo deforman reaccionará a éstas y presentará fuerzas opuestas que tratarán de regresarlo a su estado original, estas son llamadas esfuerzos internos. Estas se consideran fuerzas de superficie ya que son fuerzas causadas por el contacto directo con otro cuerpo. Para describir este tipo de reacción se usa el concepto de vector de tracción, imaginemos un corte en un elemento de volumen arbitrario el cual está sometido a una deformación.

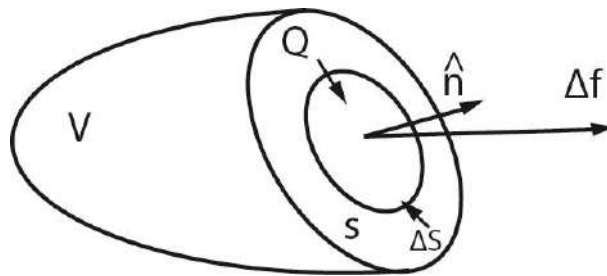


Fig. 1.5, Fuerza superficial Δf aplicada en la superficie ΔS .

Como se muestra en la Fig. 1.5 Δf es el vector suma de la distribución de fuerza ejercida en la superficie ΔS , así el vector tracción queda definido por [19].

$$\vec{T} \hat{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta S}. \quad (1.19)$$

Claro que el vector \vec{T} queda expresado en términos del vector \hat{n} normal a la superficie

$$\vec{T} = T^1 \hat{n}^1 + T^2 \hat{n}^2 + T^3 \hat{n}^3. \quad (1.20)$$

Siendo la primera componente la tracción normal a la superficie y las otras dos son esfuerzos paralelos a ella. Para ayudar a ver mejor la representación matricial de este tensor, es mejor tomar un ejemplo más sencillo donde el volumen estudiado sea un cubo sometido a deformaciones perpendiculares a cada una de las caras de este.

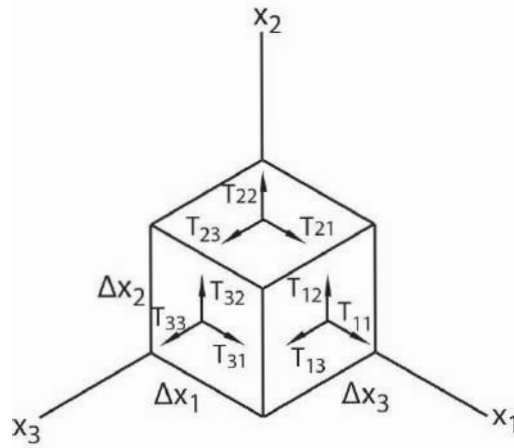


Fig. 1.6, Componentes de esfuerzo.

Dadas las componentes que se muestran aplicadas sobre el elemento de volumen en la figura 1.6, se escribe el tensor en su forma matricial [19].

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Siendo los elementos de la diagonal los esfuerzos normales y los que están fuera de ella representan los esfuerzos de corte.

$$\vec{T}_{ij}^{\hat{n}} = T_{ij} e_{ij}. \quad (1.22)$$

$$\vec{T}_{ij}^{\hat{n}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

1.5 Ley de Hooke

Una de los principios más importantes de la mecánica es la ley de Hooke y aquí en el ámbito de los sólidos elásticos también se tiene dicha relación. Ésta consiste en tratar a las deformaciones como función lineal de los esfuerzos y viceversa, con lo que la ecuación incluye los dos puntos vistos hasta ahora, el tensor de deformación y el tensor de esfuerzos.

Ley de Hooke como se ve en un curso de mecánica

$$F = -kx. \quad (1.24)$$

Esta es la forma más común de representar a la ley de Hooke, donde la relacionan una fuerza F ejercida por el resorte con la elongación o deformación de este mismo denotado por la letra x , donde k es la constante del resorte.

Ley de Hooke en la Mecánica del Medio Continuo.

$$T_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}. \quad (1.25)$$

Donde T es el tensor de esfuerzos, e es el tensor de deformación y C_{ijkl} es un tensor de constantes elásticas el cual consta de ochenta y un componentes, una matriz bastante larga de escribir. Sin embargo, gracias a que los tensores de esfuerzos y e deformaciones son simétricos, se reduce a una matriz de treinta y seis componentes independientes. Se toma en cuenta que en este caso se estudia el comportamiento de un material homogéneo e isotrópico como lo es el aluminio, en estos casos el tensor de elasticidad del medio es invariante a las rotaciones, con lo que se obtiene.

$$C_{ijkl} = R_{im}R_{jn}R_{kp}R_{lq}C_{mnpq}. \quad (1.26)$$

Donde R_{ij} es una matriz de rotación, esta última expresión se puede escribir de la siguiente forma, la cual es una de las representaciones generales para un tensor de rango cuatro.

$$C_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}. \quad (1.27)$$

Donde los coeficientes α, β, γ son constantes. Al sustituir, esta expresión en la ecuación (1.25) se obtiene.

$$T_{ij} = (\alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk})e_{kl}. \quad (1.28)$$

$$T_{ij} = \alpha e_{ll}\delta_{ij} + \beta e_{ij} + \gamma e_{ji}. \quad (1.29)$$

Además, con la propiedad de que el tensor de deformación es simétrico, también se define $\lambda = \alpha$ y $2\mu = \beta + \gamma$, resulta.

$$T_{ij} = \lambda e_{ll}\delta_{ij} + 2\mu e_{ji}. \quad (1.30)$$

Donde los coeficientes λ y μ son los coeficientes de Lamé, una de las representaciones más comunes del tensor es la siguiente.

$$T_{ij} = K e_{ll}\delta_{ij} + 2\mu (e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ll}\delta_{ij}). \quad (1.31)$$

Donde $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$. Para llegar a ella se usa la siguiente identidad del tensor de deformación en la ecuación (1.30).

$$e_{ij} = \frac{1}{3}e_{ll}\delta_{ij} + (e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ll}\delta_{ij}). \quad (1.32)$$

Donde se puede observar que el primer término de la identidad es una deformación de corte puro, puesto que sólo contiene las componentes de la diagonal del tensor de desplazamiento

y la segunda es una compresión hidrostática, puesto que la suma de las componentes es cero. Así, la ecuación (1.30) es conocida como ley de Hooke para sólidos elásticos isotrópicos [19], donde solo se necesitan dos coeficientes independientes de los ochenta y uno con los que comenzamos.

1.6 Ondas elásticas

Para describir el movimiento de un material elástico es necesario empezar generalmente por la forma de la segunda ley de Newton para el medio continuo. Así, con la condición de equilibrio de un sólido elástico y aplicando la segunda ley de Newton se obtiene.

$$f_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1.33)$$

$$f_i = \frac{dE_i}{dV} = \frac{dm\ddot{u}_i}{dV} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (1.35)$$

Siendo esta la expresión de la segunda ley en el contexto de la Mecánica del Medio Continuo. Ahora, aplicando la ley de Hooke (1.30) para un material sólido, homogéneo e isotrópico.

$$T_{ij} = \lambda e_{ll} \delta_{ij} + 2 \mu e_{ji}. \quad (1.36)$$

Sustituyendo y desarrollando.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda e_{ll} \delta_{ij} \right]. \quad (1.37)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \lambda \frac{\partial e_{ll}}{\partial x_j} \delta_{ij}. \quad (1.38)$$

Se observa que el último término también puede ser escrito.

$$e_{ii} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \quad (1.39)$$

Usamos esto en el desarrollo.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.40)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.41)$$

Desarrollando los términos de esta última expresión se puede ver las siguientes igualdades.

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \nabla^2 u_i. \quad (1.42)$$

Y también.

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \nabla(\nabla \cdot u_i). \quad (1.43)$$

Así, se sustituyen estas dos últimas expresiones en el desarrollo.

$$\rho \ddot{\vec{u}}_i = \mu \nabla^2 \vec{u}_i + (\mu + \lambda) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}_i). \quad (1.44)$$

Usando la siguiente identidad se reescribe.

$$\nabla^2 \vec{u}_i = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}_i) - \nabla x \nabla x \vec{u}_i. \quad (1.45)$$

$$\rho \ddot{\vec{u}}_i = \mu \nabla(\nabla \cdot \vec{u}_i) - \mu \nabla x \nabla x \vec{u}_i + (\mu + \lambda) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}_i). \quad (1.46)$$

$$\rho \ddot{\vec{u}}_i = (2\mu + \lambda) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}_i) - \mu \nabla x \nabla x \vec{u}_i. \quad (1.47)$$

Esta ecuación de movimiento puede ser separada en dos partes, una dilatacional donde $\nabla x \vec{u}_i = 0$ y $\nabla \cdot \vec{u}_i$ es una cantidad finita, al igual que una de corte para la cual $\nabla x \vec{u}_i$ es una cantidad finita y $\nabla \cdot \vec{u}_i = 0$ [19].

$$\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_c. \quad (1.48)$$

Donde

$$\nabla x \vec{u}_l = 0. \quad (1.49)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_c = 0. \quad (1.50)$$

Con esto la ecuación (1.47) es separada en las siguientes dos expresiones.

$$\ddot{\vec{u}}_c = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{u}_c. \quad (1.51)$$

$$\ddot{\vec{u}}_l = \frac{\lambda+2\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{u}_l. \quad (1.52)$$

Donde se define $\frac{\mu}{\rho}$ como el cuadrado de la velocidad transversal C_t y $\frac{\lambda+2\mu}{\rho}$ como el cuadrado de la velocidad longitudinal C_l . Para una onda monocromática la solución a la ecuación (1.47) es la siguiente [19].

$$u(x, t) = u_l(x)e^{-i\omega t} + u_t(x)e^{-i\omega t}. \quad (1.53)$$

Siento $\omega = 2\pi f$, con f como la frecuencia en hercios, también tomando en cuenta que cada componente de la solución satisface la ecuación de Helmholtz.

$$\nabla^2 u_l + k_l^2 u_l = 0, \quad (1.54)$$

y

$$\nabla^2 u_t + k_t^2 u_t = 0.$$

Con $k_l = \omega / c_l$ y $k_t = \omega / c_t$, siendo los vectores de onda de las componentes longitudinal y transversal, respectivamente. Así con la solución de estas expresiones se cambia la ecuación (1.53) por la siguiente.

$$u(x, t) = u_l e^{i(k_l x - \omega t)} + u_t e^{i(k_t x - \omega t)}. \quad (1.55)$$

Como se pudo observar en esta sección y se anteriormente las interacciones de un medio con fuerzas externas crean deformaciones, estas deformaciones son las que viajan a través del medio como ondas mecánicas. Es precisamente en esta última sección que se ha encontrado las expresiones matemáticas de cómo es que las deformaciones y desplazamientos de las partículas en el medio se desplazan a través del medio como ondas.

Capítulo 2

Ondas elásticas en barras

En esta sección se profundizará más en cómo éstas se comportan en el sistema a estudiar, un cilindro de material sólido y homogéneo, de sección transversal circular, radio a y longitud infinita, siendo la imagen de la Fig 2.1 una sección de éste. También haciendo la suposición de que nuestras ondas son de longitud de onda “grande” con respecto al radio de la barra. Para esto se trabajará la teoría de Poisson, con la cual se describirá los diferentes tipos de ondas en el cilindro.

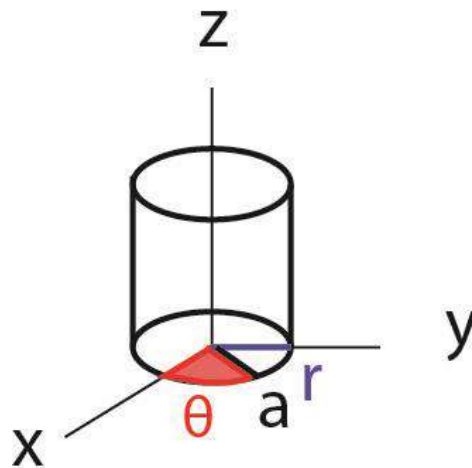


Fig. 2.1, Representación de una sección de nuestro sistema estudiado.

2. 1 Ondas en una barra infinita

En esta sección se desarrollará un poco lo visto en el capítulo anterior, pero desde un punto de vista más enfocado al sistema en cuestión, se reescribe el tensor de esfuerzos en coordenadas cilíndricas, el cual cumple con la ecuación de onda, así se trabaja con de este tipo de herramientas para conocer así la amplitud de oscilación del sistema estudiado.

En general en un medio sólido pueden existir tanto ondas longitudinales como transversales, la ecuación de onda puede ser escrita en función de estas dos componentes. Una forma alterna de escribir la amplitud de oscilación para este tipo de sistemas es en función de los dos potenciales elásticos Φ y H [2].

$$\vec{u} = \nabla\Phi + \nabla\times H. \quad (2.1)$$

Tal que

$$\nabla\Phi = \vec{u}_l, \quad (2.2)$$

$$\nabla xH = \vec{u}_t.$$

Donde el potencial H cumple con la ecuación de onda vectorial y el potencial Φ con la ecuación de onda escalar.

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}. \quad (2.3)$$

$$\nabla^2H = \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2H}{\partial t^2}. \quad (2.4)$$

Así con estos dos potenciales y haciendo uso de coordenadas cilíndricas acorde a la simetría del sistema, las componentes del vector de desplazamiento son las siguientes.

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + \frac{\partial H_\theta}{\partial z}. \quad (2.5)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial \theta} + \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}. \quad (2.6)$$

$$u_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta}. \quad (2.7)$$

Una de las condiciones en la frontera de la barra a considerar es la siguiente.

$$T_{rr} = T_{r\theta} = T_{rz} = 0, \quad r = a. \quad (2.8)$$

Donde $T_{ij} = \lambda e_{ll} \delta_{ij} + 2 \mu e_{ij}$. Esto debe cumplirse debido a que, en la frontera entre dos medios la fuerza ejercida por elemento de volumen sobre sus alrededores debe ser igual a la fuerza que ejercen éstos sobre dicho volumen, pero en dirección opuesta.

$$\tau_i^{\hat{n}_1} + \tau_i^{\hat{n}_2} = 0. \quad (2.9)$$

Siendo

$$\tau_i^{\hat{n}} = T_{ij} \hat{n}_j. \quad (2.10)$$

Sustituyendo la relación $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$, obtenemos:

$$(T_{ij}^1 - T_{ij}^2) n_j = 0. \quad (2.11)$$

Evaluando en la frontera $r = a$, Las condiciones de frontera para el tensor de esfuerzos serían.

$$T_{rr}^1|_{r=a} = T_{rr}^2|_{r=a}.$$

$$T_{r\theta}^1|_{r=a} = T_{r\theta}^2|_{r=a}. \quad (2.12)$$

$$T_{rz}^1|_{r=a} = T_{rz}^2|_{r=a}.$$

Siendo los tres términos del lado derecho iguales a cero. Así para una onda armónica que viaja en el cilindro se propone la siguiente solución general para los potenciales.

$$\Phi = f(r) \theta_\Phi(\theta) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (2.13)$$

$$H = h_r(r) \theta_r(\theta) e^{i(kz-\omega t)}, h_\theta(r) \theta_\theta(\theta) e^{i(kz-\omega t)}, h_z(r) \theta_z(\theta) e^{i(kz-\omega t)}. \quad (2.14)$$

Haciendo sustitución de dichas soluciones en las respectivas ecuaciones de onda, se encuentra una solución compuesta de senos y cosenos para la parte con dependencia en θ . Así si sustituyendo (2.13) en (2.2) se obtiene.

$$f'' \theta_\phi + \frac{1}{r} f' \theta_\phi + \frac{1}{r} f \theta''_\phi - k^2 f \theta_\phi = -\frac{\omega^2}{c_l^2} f \theta_\phi, \quad (2.15)$$

Usando el método de separación de variables resulta.

$$r^2 \frac{f''}{f} + r \frac{f'}{f} - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2} \right) r = -\frac{\theta''_\phi}{\theta_\phi} = n^2. \quad (2.16)$$

Por lo que.

$$\theta_\phi = A \sin n\theta + B \cos n\theta. \quad (2.17)$$

Donde n es un número entero, al hacer la sustitución de la solución para H , resultados similares se obtienen para θ_θ , θ_z , θ_r . Diversos requerimientos en las diferentes dependencias de θ de las partes longitudinal, torsional y flexural, hacen que se descarte uno de los dos términos de la solución dependiendo del modo estudiado, dejando las siguientes expresiones.

$$\Phi = f(r) \cos n\theta e^{i(kz-\omega t)}.$$

$$H_r = h_r(r) \sin n\theta e^{i(kz-\omega t)}.$$

(2.18)

$$H_\theta = h_\theta(r) \cos n\theta e^{i(kz-\omega t)},$$

$$H_z = h_z(r) \sin n\theta e^{i(kz-\omega t)}.$$

Siguiendo con la determinación de la dependencia de r de las cuatro funciones, comenzando por Φ de la expresión (2.16).

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) f = 0. \quad (2.19)$$

Donde $\alpha^2 = \omega^2/c_t^2 - k_z^2$, es de notar que esta ecuación diferencial de segundo orden es la función Bessel de orden n , teniendo la solución.

$$f(r) = A J_n(\alpha r). \quad (2.20)$$

Donde la segunda parte de la solución de la ecuación Bessel Y_n es descartada debido a su comportamiento en el origen. De manera similar sustituyendo para la parte de h_z se tiene la misma ecuación diferencial con excepción de que se tendría $\beta^2 = \omega^2/c_t^2 - k_z^2$, así la solución sería en este caso.

$$h_z(r) = B J_n(\beta r). \quad (2.21)$$

Para las dos últimas soluciones de la parte radial, resultan las siguientes ecuaciones diferenciales, haciendo el desarrollo desde la expresión (2.2).

$$\frac{d^2 h_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh_r}{dr} + \frac{1}{r^2} (-n^2 h_r + 2nh_\theta - h_r) - k_z^2 h_r + \frac{\omega^2}{c_t^2} h_r = 0. \quad (2.22)$$

$$\frac{d^2 h_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh_\theta}{dr} + \frac{1}{r^2} (-n^2 h_\theta + 2n h_r - h_\theta) - k_z^2 h_\theta + \frac{\omega^2}{c_t^2} h_\theta = 0. \quad (2.23)$$

Son dos ecuaciones y dos incógnitas, así se resta la primera de la segunda para obtener.

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \beta^2 - \frac{(n+1)^2}{r^2} \right\} (h_r - h_\theta) = 0. \quad (2.24)$$

De nuevo una ecuación diferencial Bessel, para la cual la solución resulta ser la siguiente.

$$h_r - h_\theta = 2B_2 J_{n+1}(\beta r). \quad (2.25)$$

Sí se suman las dos expresiones (2.22) y (2.23), se obtiene una ecuación parecida.

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \beta^2 - \frac{(n-1)^2}{r^2} \right\} (h_r + h_\theta) = 0. \quad (2.26)$$

Con solución.

$$h_r + h_\theta = 2B_1 J_{n-1}(\beta r). \quad (2.27)$$

De las cuales podemos obtener la solución para h_r y h_θ , las cuales serían las siguientes dos.

$$h_r = B_1 J_{n-1}(\beta r) + B_2 J_{n+1}(\beta r). \quad (2.28)$$

$$h_\theta = B_1 J_{n-1}(\beta r) - B_2 J_{n+1}(\beta r). \quad (2.29)$$

Así se tiene cuatro soluciones de la parte radial, con las cuatro constantes A, B, B_1 y B_2 por determinar con condiciones de frontera. De hecho por la propiedad de invariancia de “gauge”, una de las constantes sin perder generalidad, haciendo $B_1 = 0$, lo cual resultaría en el caso $h_r = -h_\theta$. Así, se sustituyen las soluciones encontradas las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.7), las expresiones de los desplazamientos y algunos de las tensiones quedarían de la siguiente forma.

$$u_r = \left[f' + \left(\frac{n}{r} \right) h_z + k_z h_r \right] \cos n\theta e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

$$u_{\theta} = \left[-\left(\frac{n}{r}\right) f + k_z h_r - h'_z \right] \sin n\theta e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

$$u_z = \left[-k_z f - h'_r - \frac{(n+1)h_r}{r} \right] \cos n\theta e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

(2.30)

$$T_{rr} = \left[-\lambda(\alpha^2 + k_z^2) f + 2\mu \left\{ f'' + \frac{n}{r} \left(h'_z - \frac{h_z}{r} \right) + k_z h'_z \right\} \right] \cos n\theta e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

$$T_{r\theta} = \mu \left[-\frac{2n}{r} \left(f' - \frac{f}{r} \right) - (2h''_z - \beta^2 h_z) - k_z \left(\frac{n+1}{r} h_r - h'_r \right) \right] \sin n\theta e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

$$T_{rz} = \mu \left[-2k_z f' - \frac{n}{r} \left\{ h'_r + \left(\frac{n+1}{r} - \beta^2 + k_z^2 \right) h_r \right\} - \frac{nk_z}{r} h_z \right] \cos n\theta e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

Donde las tres tensiones vienen siendo dadas por la ley de Hooke en coordenadas cilíndricas, será que con los resultados obtenidos en este apartado que adelante se analizará los tres casos de modos presentes en un cilindro. Así, el procedimiento para encontrar la ecuación de frecuencia resulta de sustituir las expresiones para f , h_r , h_{θ} , h_z en las condiciones de frontera para el tensor de esfuerzos (2.30), evaluados en $r = a$. Lo cual nos arroja los coeficientes del siguiente determinante:

$$|a_{ij}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.31)$$

2.2 Modos torsionales

El caso de las ondas torsionales resulta cuando las componentes u_z y u_r no existen (ver Fig. 2.2); de la ecuación de la onda que satisface u_θ se sigue que es independiente de θ . Por esto mismo la componente H_z es la única que es diferente de cero del potencial vectorial H . Con esto, las expresiones de estas dos componentes son.

$$u_\theta = -\beta B_3 J_1(\beta r) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (2.32)$$

$$H_z = B_3 J_0(\beta r) e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

También, es de notar que en las condiciones de frontera de (2.30), $T_{r\theta}$ es la única que se toma en cuenta. Haciendo ésta igual a cero se obtiene la ecuación de frecuencia de los modos torsionales, lo cual resulta de la condición.

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = 0, \quad (2.33)$$

$$r = a, \quad \text{y} \quad n = 0.$$

Aplicando estas condiciones y sustituyendo las ecuaciones de (2.32) en $T_{r\theta}$, obtenemos la siguiente relación.

$$\beta a J_0(\beta a) = 2J_1(\beta a). \quad (2.34)$$

Esta igualdad se cumple cuando βa toma el valor de alguna raíz de la función Bessel, alguna de estas son las siguientes.

$$\beta_1 a = 5.136, \quad \beta_2 a = 8.417, \quad \beta_3 a = 11.62, \dots \quad (2.35)$$

Lo cual lleva a la siguiente relación entre el número de onda y la frecuencia.

$$(\beta_v a)^2 = (\omega a / c_2)^2 - (k_z a)^2. \quad (2.36)$$

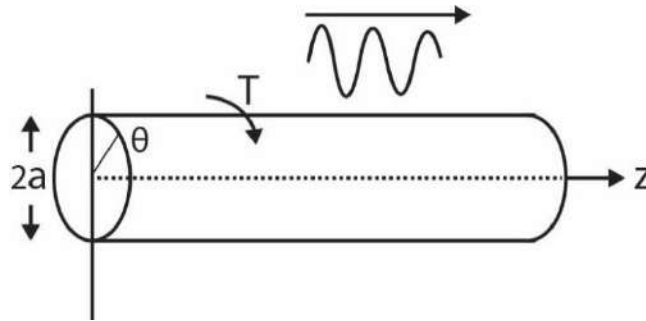


Fig. 2.2, Modos torsionales en una barra sólida.

2.3 Modos longitudinales

Para el caso de los modos longitudinales se considera que el desplazamiento u_θ es igual a cero, lo que obtenemos si $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ y $n = 0$, por lo cual nos quedaremos solo con las siguientes expresiones.

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta). \quad (2.37)$$

Lo que lleva al comportamiento de las ondas descrito en la Fig 2.3 [3]. Así sustituyendo las soluciones de H_θ y Φ , deberían ser suficientes para describir este tipo de movimiento de las ondas en este caso, considerando de nuevo el caso $n = 0$ las expresiones mencionadas quedarían de la forma.

$$\Phi = AJ_0(\alpha r)e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (2.38)$$

$$H_\theta = -B_2 J_1(\beta r)e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en las condiciones de frontera de (2.30) para $T_{rz} = T_{rr} = 0$ y $r = a$ obtenemos la relación que cumplen los modos longitudinales en la barra cilíndrica, la cual tiene la siguiente forma.

$$\frac{2\alpha}{a}(\beta^2 + k_z^2)J_1(\alpha a)J_1(\beta a) - (\beta^2 - k_z^2)^2 J_0(\alpha a)J_1(\beta a) - 4k_z^2 \alpha \beta J_1(\alpha a)J_0(\beta a) = 0. \quad (2.39)$$

A la cual se le conoce como la ecuación de frecuencias de Pochhammer para los modos longitudinales, donde.

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2} - k_z^2, \quad (2.40)$$

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2} - k_z^2.$$

La cual es una ecuación trascendental a resolver para encontrar los modos longitudinales permitidos en la barra, una forma de resolver dicha expresión es creando un algoritmo numérico que encuentre el valor de las frecuencias y los vectores de onda tales que la ecuación Pochhammer para los modos longitudinales sea mínima.

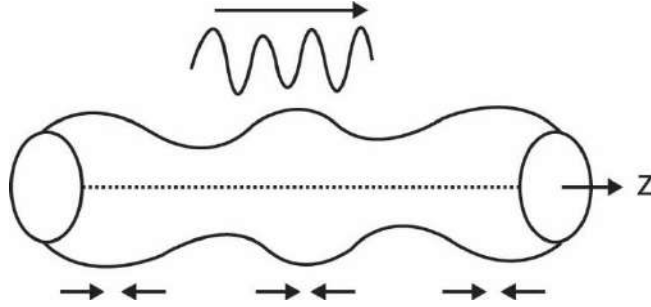


Fig. 2.3, Modos longitudinales de una barra cilíndrica sólida.

2.4 Modos flexurales

Hasta ahora se ha visto que las dos componentes de desplazamiento se obtuvieron del caso $n = 0$. Así, en orden de que las primeras familias de modos flexurales aparezcan, elegimos $n = 1$. En este caso los desplazamientos de las tres componentes existen (véase Fig 2.4), lo que hace que la ecuación de Pochhammer para la frecuencia se la más complicada hasta ahora. La cual resulta de las tres ecuaciones diferenciales para las componentes de los tres desplazamientos que dependen de la coordenada r y condición de frontera de (2.30). Lo que resulta en la siguiente ecuación para la frecuencia.

$$J_1(\bar{\alpha})J_1^2(\bar{\beta})(f_1F_\beta^2 + f_2F_\alpha F_\beta + f_3F_\beta + f_4F_\alpha + f_5) = 0, \quad (2.41)$$

Donde

$$f_1 = 2(\bar{\beta}^2 - \bar{k}_z^2)^2,$$

$$f_2 = 2\bar{\beta}^2(5\bar{\beta}^2 - \bar{k}_z^2),$$

$$f_3 = \bar{\beta}^6 - 10\bar{\beta}^4 - 2\bar{\beta}^4\bar{k}_z^2 + 2\bar{\beta}^2\bar{k}_z^2 + \bar{\beta}^2\bar{k}_z^4 - 4\bar{k}_z^2,$$

$$f_4 = 2\bar{\beta}^2(\bar{\beta}^2\bar{k}_z^2 - \bar{\beta}^2 - 9\bar{k}_z^2),$$

$$f_5 = \bar{\beta}^2(-\bar{\beta}^4 + 8\bar{\beta}^2 - 2\bar{\beta}^2\bar{k}_z^2 + 8\bar{k}_z^2 - \bar{k}_z^4),$$

$$\bar{\alpha} = a \cdot \alpha, \quad \bar{\beta} = a \cdot \beta,$$

$$F_x = xJ_0(x)/J_1(x).$$

Una vez más para encontrar las raíces para la ecuación de las frecuencias se realiza un programa tal que nos arroje los valores de K_z y ω , tal que minimicen esta ecuación.

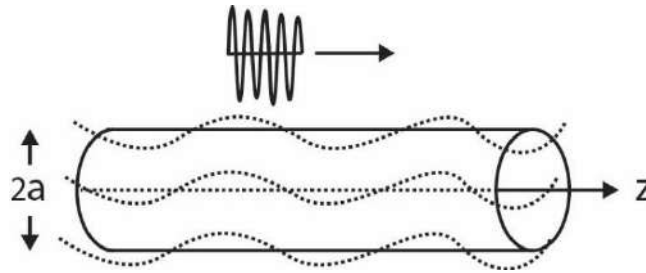


Fig. 2.4, Modos flexurales en una barra.

2.5 Modos flexurales de orden superior

Hasta ahora se han revisado los casos para los cuales $n = 0$, para los cuales se obtienen las expresiones de los modos torsionales y modos longitudinales, el caso cuando $n = 1$, donde aparece la primer familia de modos flexurales. Ahora, para el caso cuando $n > 1$ obtenemos las familias de flexurales de orden superior. Para este mismo caso, ninguno de los coeficientes del determinante (2.31) es igual a cero, por lo que para obtener la solución de la ecuación de frecuencia basta con igualar el determinante a cero y resolver para α y β .

Como se observó en estas secciones, retomamos lo visto en la última sección del Capítulo 1 donde se describió matemáticamente que los desplazamientos de las partículas de un medio continuo debido a perturbaciones exteriores, son descritos por la función de onda y que está es posible separarla en dos partes, transversal y longitudinal. Así tomando en cuenta este hecho se procedió a describir el problema de ¿qué pasaría si el medio continuo se tratase de un cilindro? Después de esto se procedió a reescribir las ecuaciones de onda en dos potenciales, para así describir el tipo de movimiento que las partículas del medio continuo toman.

Capítulo 3

Intercambio de energía entre dos barras

En este capítulo se revisarán algunos de los aspectos principalmente enfocándose en cómo es la energía en el sistema estudiado. Así como en una revisión para obtener una expresión de la transferencia de energía en un sistema de dos barras cilíndricas acopladas. Para lo cual primero se hará un desarrollo para encontrar una expresión para la energía o potencia promedio en el sistema. Paso siguiente, se indagará en el caso ya comentado de dos barras en contacto y se dará una expresión para la pérdida de energía en el sistema, debido a la interacción, así como la misma atenuación que el material causa.

3. 1 Energía en el medio

Como ya se ha mencionado parte de la resolución del fenómeno es encontrar información de éste a través de expresiones matemáticas que nos ofrece la física. Una de estas expresiones utilizada con mucha frecuencia en diferentes sistemas es el Hamiltoniano [9]. Bajo ciertas condiciones este se identifica con la energía del sistema, por lo que trabajaremos con éste para conocer más acerca de la energía. Como sabemos la expresión del Hamiltoniano es la siguiente.

$$H = T + V. \quad (3.1)$$

Dónde T , representa la energía cinética del sistema y V es la energía potencial del mismo. Ahora, dado que se busca conocer cómo es la energía en cualquier instante de tiempo para el sistema, así se conoce de [4], que para el caso de propagación de ondas de tipo longitudinal en un sólido elástico perfecto, la energía en cualquier instante de tiempo en un volumen V está dada por la siguiente integral.

$$E = \int_V v_i v_i \rho dv_i, \quad i = 1,2. \quad (3.2)$$

La energía cinética

$$T = \frac{1}{2} \rho \dot{v}_i^2. \quad (3.3)$$

Densidad de energía elástica

$$V = \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{ij}. \quad (3.4)$$

Si se toma en cuenta que el sistema en cuestión es un medio isotrópico

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{ll} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}. \quad (3.5)$$

Reescribimos en términos de las velocidades de sonido, c_t y c_l

$$\rho c_l^2 = \lambda + 2\mu, \quad \rho c_t^2 = \mu, \quad (3.6)$$

$$\sigma_{ij} = \rho c_l^2 u_{ll} \delta_{ij} - 2u_{ll} \delta_{ij} \rho c_t^2 + 2\rho c_t^2 u_{ij}, \quad (3.7)$$

$$\sigma_{ij} = \rho c_l^2 u_{ll} \delta_{ij} + 2\rho c_t^2 (u_{ij} - u_{ll} \delta_{ij}). \quad (3.8)$$

Ahora, para una onda monocromática longitudinal, se escribe el tensor de desplazamiento de la siguiente forma [19].

$$\vec{u}_l = \text{Re}(\vec{A}_l \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]). \quad (3.9)$$

Que cumple con las siguientes identidades.

$$\vec{u}_l \times \vec{k} = 0, \quad \nabla \times \vec{u}_l = 0. \quad (3.10)$$

$$V = \frac{1}{2} \rho c_l^2 u_{ii} u_{ll} + \rho c_t^2 (u_{ij} u_{ij} - u_{ll} u_{ii}). \quad (3.11)$$

La cual tiene también la propiedad [19].

$$\theta = u_{ij}u_{ij} - u_{ii}u_{ll}. \quad (3.12)$$

Para comprobar esto se considera una onda longitudinal monocromática, la cual se escribe de la siguiente forma.

$$\vec{u}_l = Re(\vec{A}_l \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]) = \vec{u}_l = Re\left(\frac{A}{k} \vec{k} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]\right). \quad (3.13)$$

$$u_j = Re\left(\frac{A}{k} k_j \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]\right). \quad (3.14)$$

Donde se toma en cuenta las identidades de (3.10) [19].

$$(\nabla \times \vec{u}_l)_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j = 0. \quad (3.15)$$

Lo cual quiere decir que $\partial_i u_j = \partial_j u_i$, así $\theta = u_{ij}u_{ij} - u_{ii}u_{ll} = \partial_i u_j \partial_i u_j - \partial_l u_i \partial_l u_i$.

$$\partial_i u_j \partial_i u_j = Re\left[\frac{iA}{k} k_j k_i \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]\right] \times Re\left[\frac{iA}{k} k_j k_i \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]\right]. \quad (3.16)$$

$$\partial_l u_i \partial_l u_i = Re\left[\frac{iA}{k} k_i k_l \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]\right] \times Re\left[\frac{iA}{k} k_i k_l \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]\right]. \quad (3.17)$$

De aquí que $\theta = u_{ij}u_{ij} - u_{ii}u_{ll} = 0$, así para una onda longitudinal la expresión (3.11) es la siguiente.

$$V = \frac{1}{2} \rho c_l^2 u_{ii} u_{ll}. \quad (3.18)$$

Y la expresión densidad de energía.

$$H = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \frac{1}{2} \rho c_l^2 u_{ii} u_{jj}. \quad (3.19)$$

Se toma el promedio de ésta

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \rho \langle \dot{u}_i \dot{u}_i \rangle + \frac{1}{2} \rho c_l^2 \langle u_{ii} u_{jj} \rangle. \quad (3.20)$$

Para lo cual se necesita obtener el promedio de T y V . Así, dada una onda longitudinal armónica la energía cinética es.

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \rho \langle \dot{u}_i \dot{u}_i \rangle = -\frac{1}{2} \omega^2 \rho \langle u_i u_i \rangle = -\omega^2 \frac{1}{2} \rho \frac{1}{\tau} \int_{\tau}^0 \text{Re}(u_i) \text{Re}(u_i) dt. \quad (3.21)$$

Siendo τ el periodo

$$\langle T \rangle = -\omega^2 \frac{1}{2} \rho \frac{1}{\tau} \int_{\tau}^0 \frac{1}{2} (u_i u_i^*) \frac{1}{2} (u_i u_i^*) dt. \quad (3.22)$$

De la expresión (3.14) se reescribe el producto $u_i u_i^*$

$$\begin{aligned} \langle T \rangle = & -\omega^2 \frac{1}{2} \rho \frac{1}{\tau} \int_{\tau}^0 \frac{1}{4} \left(\left(\frac{A}{k} k_j \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{A^*}{k} k_j \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \right) \right) \\ & \times \left(\left(\frac{A}{k} k_j \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \right) - \left(\frac{A^*}{k} k_j \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \right) \right) dt. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Al realizar la multiplicación e integración se obtiene

$$\langle T \rangle = -\omega^2 \frac{1}{4} \rho \frac{|A|^2}{k} k_i k_i = \omega^2 \frac{1}{4} |A|^2 k. \quad (3.24)$$

Ahora, se obtiene el promedio de la energía potencial, con un proceso similar

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} \rho c_l^2 \langle u_{ii} u_{jj} \rangle = \frac{1}{2} \rho c_l^2 k_i k_j \langle u_i u_j \rangle. \quad (3.25)$$

$$\langle V \rangle = -\frac{1}{2} \rho c_l^2 k_i k_j \frac{1}{\tau} \int_{\tau}^0 \frac{1}{2} (u_i - u_i^*) \frac{1}{2} (u_i - u_i^*) dt. \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
\langle V \rangle = & -\frac{1}{2} \rho c_l^2 k_j k_i \frac{1}{\tau} \int_{\tau}^0 \frac{1}{4} \left(\left(\frac{A}{k} k_j \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{A^*}{k} k_j \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \right) \right) \\
& \times \left(\left(\frac{A}{k} k_j \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \right) - \left(\frac{A^*}{k} k_j \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \right) \right) dt.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4} \rho c_l^2 k_i k_j \frac{|A|^2}{k} k_i k_j = \frac{1}{4} \rho c_l^2 |A|^2 k^2. \tag{3.28}$$

Reescribimos $k = \frac{\omega}{c_l}$.

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4} \rho \omega^2 |A|^2. \tag{3.29}$$

Al ver ambos resultados es de notarse que $\langle V \rangle = \langle T \rangle$. Así, para una onda longitudinal monocromática

$$\langle H \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle = 2 \langle V \rangle = \rho \langle \dot{u}_i \dot{u}_i \rangle. \tag{3.30}$$

Con estos resultados se vuelve a la integral de la energía

$$E = \int_v v_i v_i \rho dV, \quad i = 1, 2. \tag{3.31}$$

Se realiza un cambio de coordenadas a cilíndricas debido a la naturaleza del problema a estudiar

$$dV = r dr d\varphi dz. \tag{3.32}$$

Donde, el vector de velocidad está dado por

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \dot{z} \hat{z}. \tag{3.33}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v_i v_i = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2. \quad (3.34)$$

Reescribiendo la integral de la energía

$$E = \iiint_{r\varphi z} \rho(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) r dr d\varphi dz. \quad (3.35)$$

Se integra en r y φ , con α como el resultado

$$E = \alpha \int_{z_0}^{z_1} |v_s(z)|^2 dz. \quad (3.36)$$

Teniendo en cuenta que $dz = c_g dt$, $c_g = (z_1 - z_0 / t_1 - t_0) = dz/dt$, se sustituye en la integral para transformarla en una integral en el tiempo

$$E = \alpha c_g \int_{t_0}^{t_1} |v_s(t)|^2 dt. \quad (3.37)$$

De la definición de potencia tenemos,

$$P = \frac{E}{(t_1 - t_0)} = \alpha c_g \int_{t_0}^{t_1} |v_s(t)|^2 dt / (t_1 - t_0) = \alpha c_g \langle v_s^2 \rangle. \quad (3.38)$$

Con

$$v_s = \text{Re}[\hat{v}_s e^{i(kz - \omega t)}] = \text{Re}[\hat{v}_s e^{i(kz - \omega t)} e^{-kz}]. \quad (3.39)$$

$$P(z) = \alpha c_g \frac{\hat{v}_s^2}{2} e^{-2kz}. \quad (3.40)$$

Acorde con esta expresión obtenida, se nota que la potencia mecánica promedio asociada a la propagación de ondas elásticas, longitudinales y armónicas en el medio, es proporcional a la amplitud de la velocidad superficial en éste mismo [4].

3. 2 Descenso de la energía

Ahora estudiaremos el descenso de la energía entre dos barras paralelas del mismo material como se muestra en la siguiente figura, para esto se considera la pérdida de energía debido a la interacción entre las barras y la pérdida que causa el mismo material.

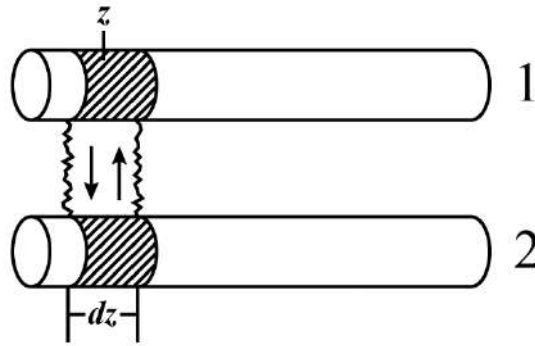


Fig. 3.1, Sistema conformado por dos barras en contacto. Donde la barra uno representa a la barra activa por la cual se hace incidir una señal y la barra número dos es la barra pasiva la cual inicialmente está en reposo y está en contacto con la barra uno.

Consideremos la pérdida de energía en un segmento de longitud dz a lo largo de la barra.

$$dP = P(z) - P(z + dz) = P(z) - P(z) - \frac{\partial P}{\partial z} dz. \quad (3.41)$$

$$dP = - \frac{\partial P}{\partial z} dz = -2\kappa P(z) dz = -c_m P(z) dz. \quad (3.42)$$

Donde $c_m = 2\kappa$, es el coeficiente de absorción del material, esto debido a la energía disipada por la resistencia del material a ser perturbado. Ahora, se plantea un sistema compuesto de dos barras como se ve en la Fig 3.1 para el cual se tienen las siguientes expresiones

$$dP_1^m = -c_m P_1(z) dz.$$

(3.43)

$$dP_2^m = -c_m P_2(z) dz.$$

Donde

$d\tilde{P}_1^c$: Es la energía transmitida por unidad de tiempo en el segmento dz del cilindro uno al cilindro dos debido al acoplamiento.

$d\tilde{P}_2^c$: Energía transferida por unidad de tiempo del cilindro dos al cilindro uno en el segmento dz debido al acoplamiento

Ahora, se considera que el trabajo que realiza la barra uno sobre la barra dos

$$W = F dr. \quad (3.44)$$

$$\frac{dW}{dt} = F \frac{dr}{dt} = F v_1. \quad (3.45)$$

Con v_1 igual a la velocidad radial en la superficie del cilindro número uno

$$d\tilde{P}_1^c = F \frac{dr}{dt}. \quad (3.46)$$

Se considera la interacción entre ambas tiene un comportamiento parecido al de un resorte. Conociendo que en un resorte $F = -k$, modelamos dos fuerzas de interacción, la que ejerce el cilindro uno al dos y viceversa. Con esto el análisis de fuerzas del sistema es

$$F = kds_1 - kds_2 = kv_1 dt - kv_2 dt. \quad (3.47)$$

Sustituyendo en (3.46)

$$d\tilde{P}_1^c = k (v_1 - v_2) v_1 dt, \quad (3.48)$$

$$d\tilde{P}_2^c = -k (v_1 - v_2)v_2 dt.$$

Se obtiene el promedio temporal de la transferencia de energía en ambos cilindros

$$\begin{aligned} \langle d\tilde{P}_1^c \rangle &= \frac{k}{2} (\hat{v}_1 - \hat{v}_2)\hat{v}_1 dt, \\ \langle d\tilde{P}_2^c \rangle &= -\frac{k}{2} (\hat{v}_1 - \hat{v}_2)\hat{v}_2 dt. \end{aligned} \quad (3.49)$$

De (3.40) se sustituye y despeja \hat{v}

$$\hat{v}_1 = \sqrt{2c_g \alpha P_1} = \sqrt{2c_g \alpha} \sqrt{P_1}, \quad (3.50)$$

$$\hat{v}_2 = \sqrt{2c_g \alpha P_2} = \sqrt{2c_g \alpha} \sqrt{P_2}.$$

Con estas nuevas expresiones para las velocidades se reescribe (3.49)

$$\begin{aligned} \langle d\tilde{P}_1^c \rangle &= \frac{k}{2} c_c (\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}) \sqrt{P_1} dt, \\ \langle d\tilde{P}_2^c \rangle &= -\frac{k}{2} c_c (\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}) \sqrt{P_2} dt. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Con $c_c = kc_g \alpha$. Si se considera el cambio de energía total en ambos cilindros como la suma de dos partes, aquella que es debido al material (3.43) y aquella entre la interacción entre ellos (3.51), se obtiene

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = \frac{\partial P_1^m}{\partial z} - \frac{\partial P_1^c}{\partial z}, \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial z} = \frac{\partial P_2^m}{\partial z} - \frac{\partial P_2^c}{\partial z}.$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = -c_m P_1 + c_c (\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}) \sqrt{P_1},$$

(3.53)

$$\frac{\partial P_2}{\partial z} = -c_m P_2 + c_c (\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}) \sqrt{P_2}.$$

Al resolver estas dos ecuaciones diferenciales se obtiene cómo es el cambio en la potencia de la perturbación mecánica, debido a la interacción entre las dos barras y el efecto de atenuación del mismo material.

Capítulo 4

Arreglo experimental

En esta sección se hablará de cómo se realizó el trabajo de laboratorio para la caracterización del material utilizado, midiendo los parámetros necesarios para el cálculo que se desean realizar, comparando dichos resultados con aquellos reportados en la literatura. DE igual manera describe el arreglo experimental que se utilizó en la obtención de las señales que se obtuvo. Por último, se presenta la herramienta matemática utilizada en el análisis de dichas señales obtenidas.

4.1 Material utilizado

El primero de los puntos a tocar en esta sección consiste en especificar al lector el material con el que se trabajó durante esta tesis. Este consistió de barras de aluminio de aleación T 6061, la cual es una de las aleaciones más comunes en el uso industrial. Esta contiene una alta proporción aluminio, con alrededor de 96%. Otros de los elementos presentes en esta aleación suelen ser el magnesio y silicio.

Como se mencionó, se utilizaron barras de este material para el estudio de transmisión de ondas ultrasónicas en este medio. A continuación, se muestran las caracterizaciones hechas al material.

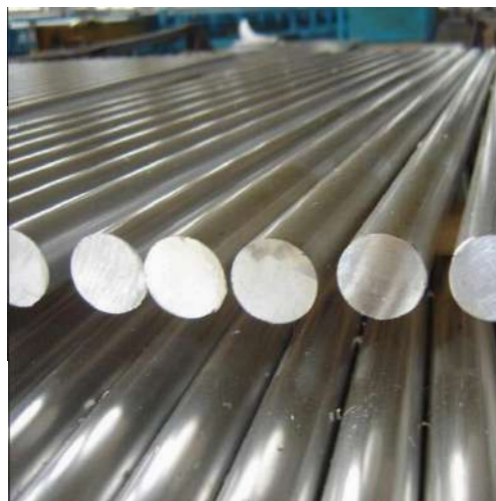


Fig. 4.1, Barras de aluminio aleación T6061.

4.2 Velocidad de Sonido

Otra de las propiedades del material a determinar fueron sus velocidades de sonido, transversal y la longitudinal respectivamente mediante el uso de transductores, es necesario calibrar, para su correcto funcionamiento. Para esto se realiza una medición de la velocidad de sonido con el método eco-pulso a un objeto con una velocidad ya conocida, comprobando que la velocidad que se mida esté en un rango de tolerancia. Si el valor obtenido se encuentra en este rango podemos continuar con las corridas del experimento.

Las corridas se realizaron utilizando la misma técnica eco-pulso, la cual consiste en la detección de ecos producidos por una discontinuidad en una pieza del material. En Figura 4.2 podemos ver un ejemplo de las señales típicas que resultan al usar esta técnica, con la cual se obtiene el tiempo de vuelo de la onda. Así con la profundidad de la pieza del material, el tipo de transductor utilizado (longitudinal o transversal) y el tiempo de recorrido son suficientes para determinar la velocidad de sonido en el material con el que se trabaja. Las velocidades transversal y longitudinal de la barra de aluminio fueron de:

$$c_l = 6367.985 \text{ m/s}$$

Para la velocidad de sonido longitudinal y

$$c_t = 3798.185 \text{ m/s}$$

para la velocidad de sonido transversal.

Estos dos valores se encuentran en el rango de tolerancia para el aluminio, con lo que podemos decir que las podemos utilizar como las velocidades características de nuestro sistema.

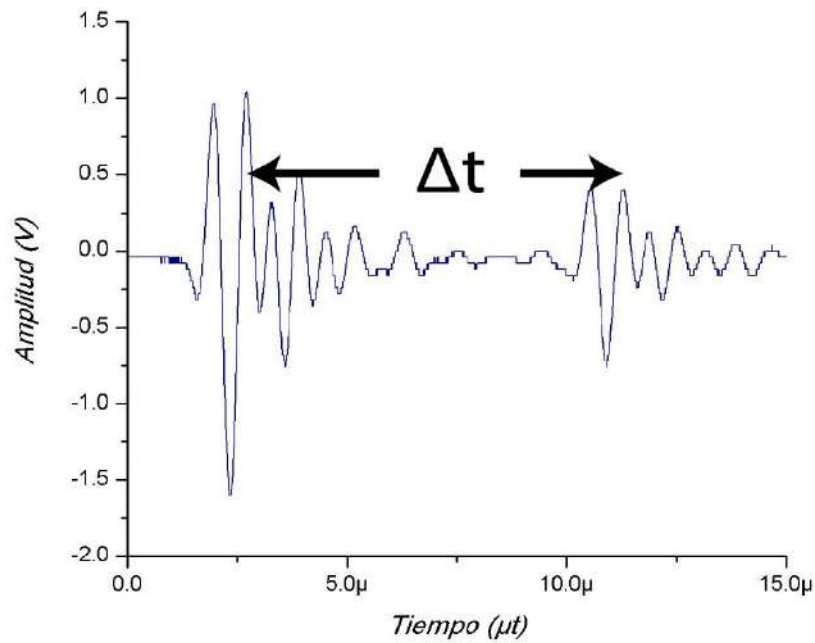


Fig. 4.2, Señal típica del método pulso eco.

4.3 Arreglo experimental

Para la parte experimental se acordó utilizar la configuración mostrada en la figura 4.3, en la cual se utiliza la técnica de “transmisión a través de”. Donde se usarán piezoeléctricos para la emisión y la recepción de las ondas ultrasónicas que viajarán en una barra de aluminio, siendo la emisión controlada con un generador de pulsos y la recepción se capturará con un osciloscopio, el cual captura la señal, mandando los datos a una computadora para su análisis con la transformada de Fourier de tiempo corto, de la cual hablaremos más adelante.

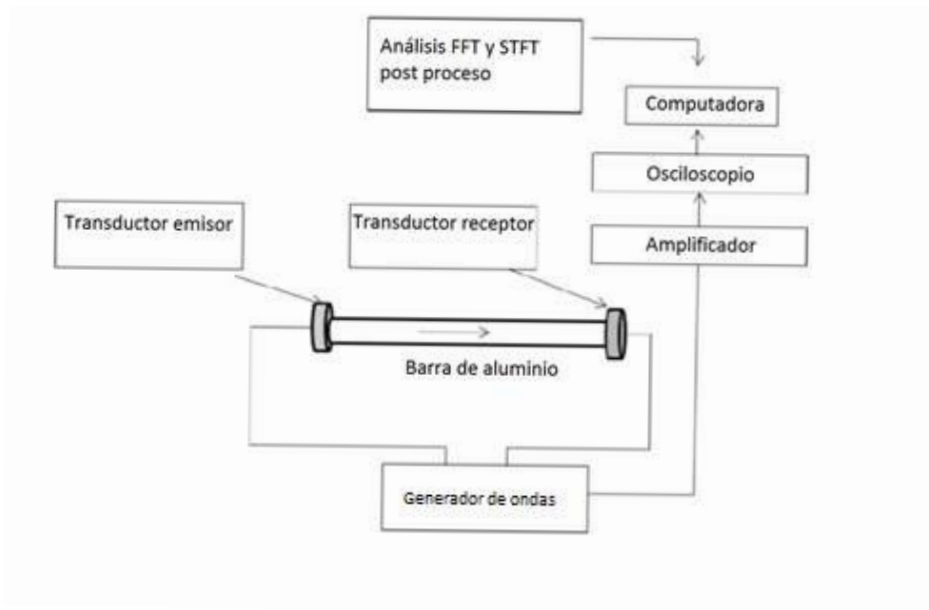


Fig. 4.3, Diagrama del arreglo experimental usado para la emisión, detección y análisis de señales a través del sistema.

Para la transmisión de energía entre dos barras del mismo material se pensó en un arreglo similar, con la única diferencia que la transmisión sería entre la unión de dos barras iguales. Esta se llevó a cabo con “C-clamps” en puntos a lo largo de ambas barras, como se muestra en la figura.



Fig. 4.4, Fotografía del arreglo experimental usado, el cual consistía de dos barras.

En este caso una de las barras activa y la otra es la pasiva, como se discutió en el capítulo 3. La señal elegida para este caso fue un pulso de $n = 5$ ciclos, la cual fue transmitida en la barra activa y detectada en esta misma.

4.4 Transformada de Fourier de tiempo corto (STFT)

Como sabemos, varias de las señales en la naturaleza cambian de espectro en el tiempo, una de las herramientas de análisis es este cambio en el espectro es la transformada de Fourier de tiempo corto, cuya expresión en la siguiente [9].

$$X_l[k] = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w[n]x[n + lH]e^{-j2\pi kn/N}, \quad l = 0, 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

w : ventana de analisis

l : numero de cuadro

H : tamaño de salto

Una de las diferencias que podemos notar rápido en cuanto a esta transformada es que la función a transformar es el producto de la señal que se quiere estudiar $x[n + lH]$, la cual tiene un numero de cuadro y un tamaño de salto entre cada cuadro y $w[n]$ la cual es la ventana de análisis. Esta ventana de análisis es una función real y simétrica que recubre a la señal entre cada marco que itera la sumatoria de la transformada, resultando así a la salida de la función una secuencia de espectros, todos del mismo tamaño en magnitud y fase. A continuación, mostramos un ejemplo de cómo se da la secuencia de espectros en una señal.

$$xw_l[n] = w[n]x[n + lH] \quad l = 0, 1, \dots,$$

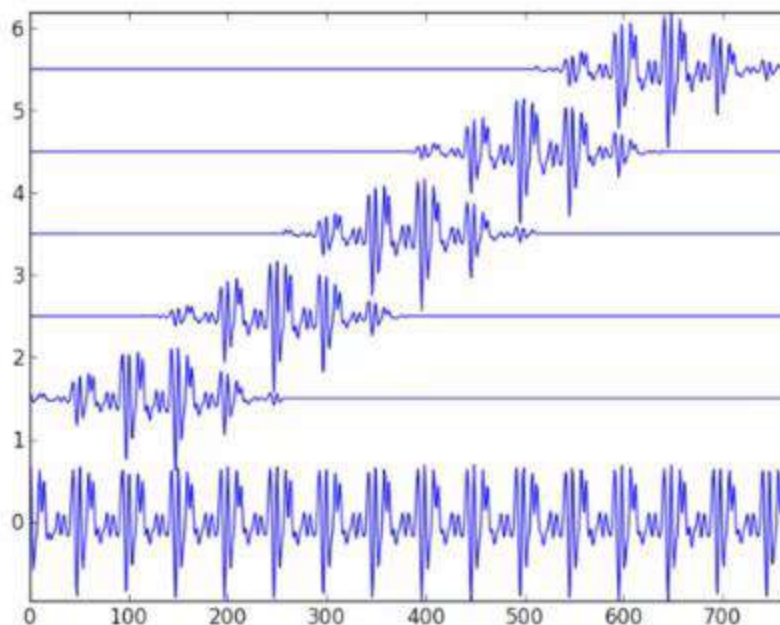


Fig. 4.5, Diferentes pasos que toma el marco de la ventana en la señal que se encuentra en la parte de abajo.

Como podemos ver en la figura 4.5, la transformada de Fourier da varios pasos dictados por el contador l y marcados por el tamaño de ventana que nos da H . A todos estos marcos de ventana son los que se les aplica la transformada de Fourier. Haciendo una analogía, digamos

que cada ventana es una fotografía en cierto tiempo de la señal y el conjunto de todos estos espectros nos deja ver un vídeo de cómo se comporta el espectro en el tiempo.

A continuación, se tiene como ejemplo la transformada de Fourier de tiempo corto a una señal “chirp” la cual es una señal que aumenta su frecuencia con respecto al tiempo.

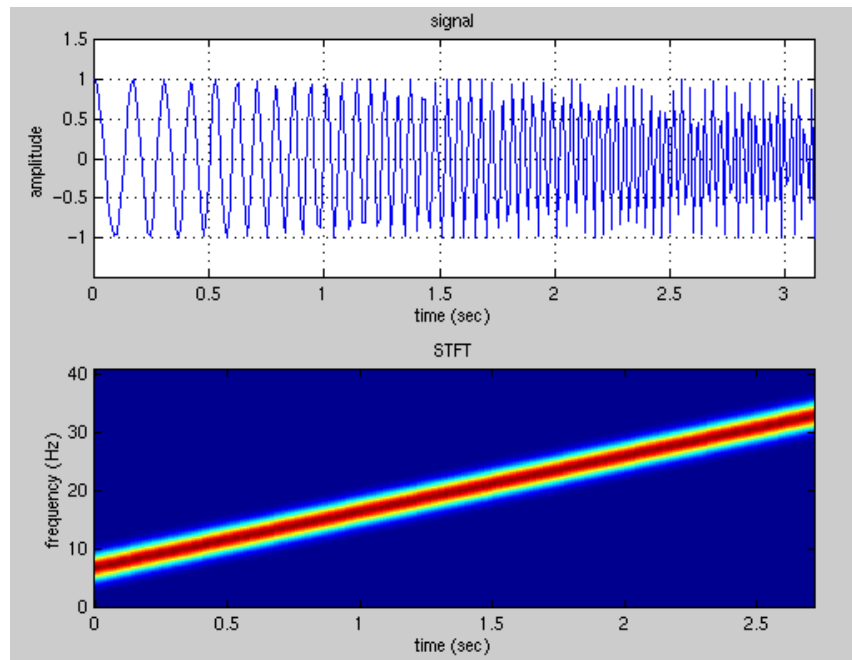


Fig. 4.6, Transformada de Fourier de una señal tipo Chirp.

Como se puede observar en la primera parte de la Fig. 4.6 la frecuencia de la señal incrementa respecto al tiempo, lo cual se ve reflejado en la segunda parte, que consiste en su transformada de Fourier de tiempo corto. En esta se puede observar como aumentan proporcionalmente la frecuencia contra el tiempo. Una característica que hay que tomar en cuenta respecto a las variables que son transformables de Fourier es que siempre presentan una relación de incertidumbre entre ellas. En este caso el tiempo y frecuencia de la señal se ven comprometidas por esta característica. Así, esto se ve reflejado al momento de elegir una ventana más amplia tendremos mejor resolución en la frecuencia y viceversa.

Capítulo 5

Análisis de resultados

En este último capítulo se revisarán los resultados de los trabajos experimentales que se llevaron a cabo a lo largo del proyecto. Se hizo pasar un pulso ultrasónico ultracorto a través de una barra de aluminio de 60 cm de longitud y una pulgada de diámetro. La onda mecánica viaja a través de la barra hasta el otro extremo de la misma. Transmitiéndose a través del medio en contacto con una barra la cual genera un decaimiento en la amplitud de la señal conforme avanza. En esta sección veremos cómo se relaciona la caída en la amplitud de la señal con la interacción que se lleva en el medio al estar una barra aislada y ambas barras en contacto.

5.1 Modos de dispersión en una barra

En el capítulo dos se obtuvieron las ecuaciones de frecuencia para los diferentes modos que existen en la barra. Estas ecuaciones describen cómo son los modos de vibración de una barra de geometría cilíndrica. Modos vibratorios se refiere al tipo de movimientos que llegan a existir en la barra cuando ésta es perturbada mecánicamente. Para resolver las ecuaciones de frecuencia obtenidas en el Capítulo 2 se realizaron varios programas. A continuación, presentamos los resultados de los programas.

Dada la ecuación (2.20), se realizó un programa para encontrar las raíces de ésta, esto se logra hallando los valores de ω y k_z tal que la ecuación es mínima, estos valores son graficados en la Fig. Cada línea representa un modo vibracional diferente, cada uno dado por la naturaleza de la ecuación (2.20). Esto debido al comportamiento de la función Bessel que contiene dicha ecuación, esta función como sabemos cuenta con más de una raíz, por lo tanto, existirán tantos modos como raíces tiene la función Bessel. También, haciendo una analogía en el efecto que un prisma tiene sobre la luz que pasa en él, de igual manera la señal se dispersa, separando la señal en diferentes frecuencias de modos vibratorios. Cada línea en la gráfica representa uno de ellos.

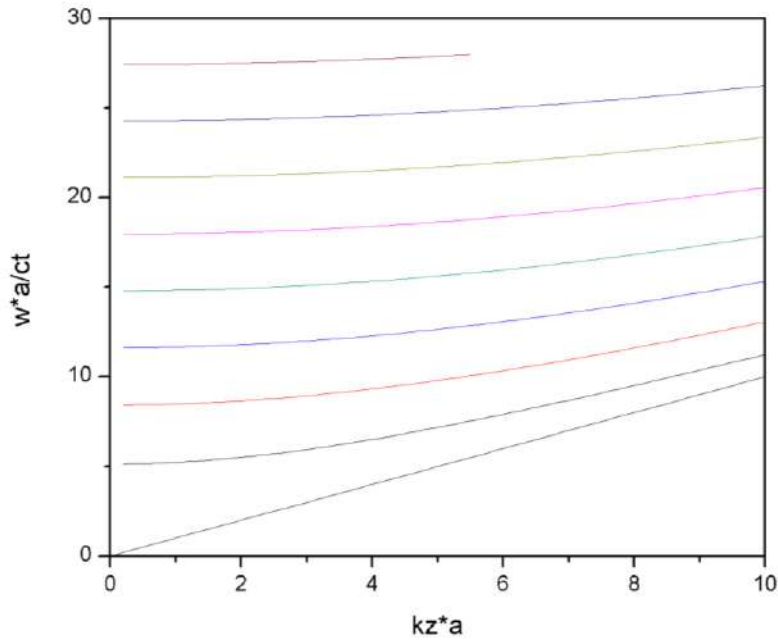


Fig. 5.1, Modos de dispersión torsionales en una barra cilíndrica

Los modos longitudinales se obtienen al encontrar las raíces de la ecuación (2.21), de igual manera existen varias soluciones debido a la naturaleza de la función Bessel. Se pueden observar la familia de soluciones de modos vibratoriales longitudinales en la Fig. 5.2. El primer modo de oscilación tiene velocidad de fase menor que la velocidad de sonido transversal y tiende a la velocidad de sonido de las ondas Rayleigh en el aluminio. Estos modos ocurren en interfaces sólido/vacío, para el sistema esto corresponde a oscilaciones cuyo máximo se encuentra en la superficie de la barra de aluminio, donde tanto las contribuciones longitudinales como las transversales decaen al interior en la dirección radial.

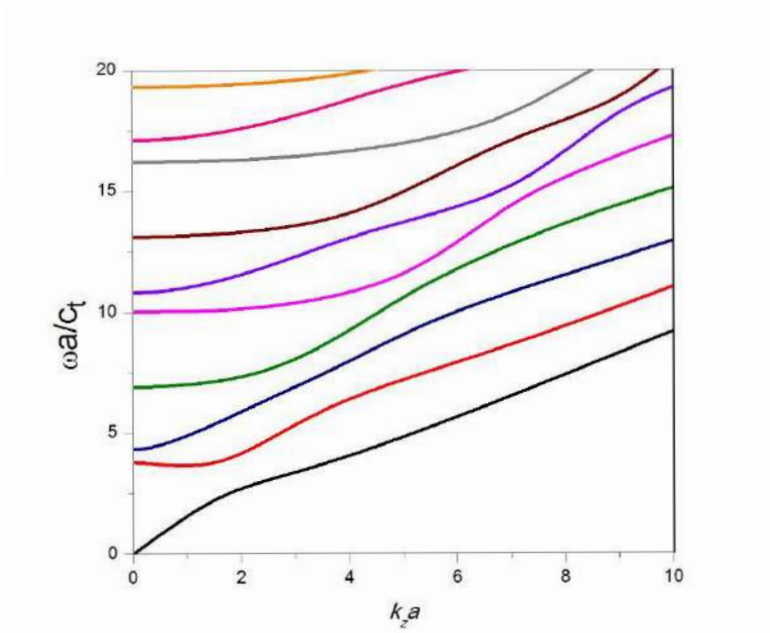


Fig. 5.2, Modos longitudinales en una barra cilíndrica

Para una mejor discusión de los modos longitudinales que son los que se revisarán experimentalmente más adelante, se tiene la Fig. 5.3. donde se muestra los modos longitudinales para la barra de estudio, con los parámetros materiales reportados en el Capítulo 4 de esta tesis, a diferencia de la Fig.5.2 el eje de ordenada muestra frecuencia desnormalizada en Hertzios.

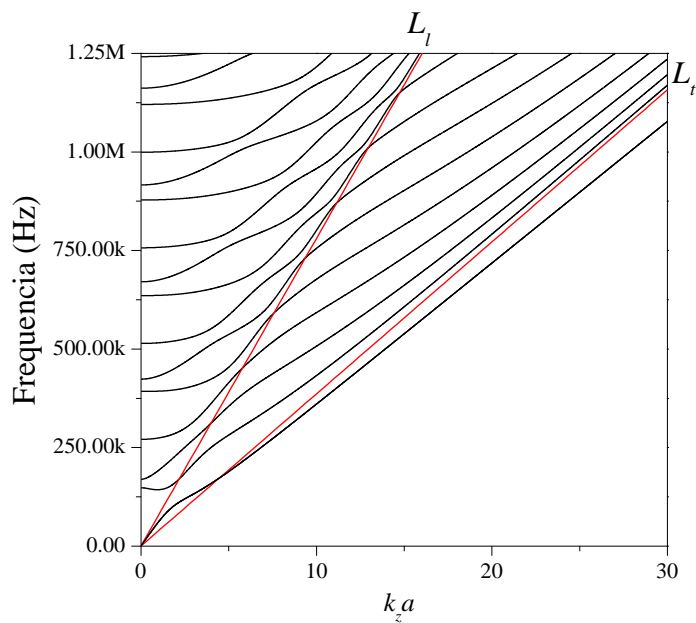


Fig. 5.3, En líneas negras los modos de oscilación longitudinales para una varilla de aluminio de 1 pulgada de diámetro. En rojo líneas de sonido longitudinal (L_l) y transversal (L_t) para el aluminio.

Las líneas de sonido (Fig. 5.3) se definen como la recta cuya pendiente es la velocidad de fase:

$$L_\mu = c_\mu k_z \quad (5.1)$$

donde $\mu = l, t$ para las velocidades de sonido longitudinal y transversal respectivamente. Por otra parte, se cumple la siguiente relación entre frecuencia y vector de onda:

$$|\vec{k}|^2 = \frac{\omega^2}{c_\mu^2} = k_z^2 + k_r^2. \quad (5.2)$$

Despejando la componente r del vector de onda tenemos

$$k_r = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_\mu^2} - k_z^2}. \quad (5.3)$$

Si se quiere que la onda tenga componente k_r del vector de onda real entonces es necesario que la cantidad dentro de la raíz sea positiva, esto implica que

$$\frac{\omega^2}{c_\mu^2} > k_z^2. \quad (5.4)$$

Un vector de onda k_r imaginario correspondería a una onda que decae en la dirección radial; si es real entonces tendrá un comportamiento oscilatorio en esa dirección. Por tanto, la línea de sonido definida en la Ec. (5.1) divide al espacio en dos regiones: la parte de la relación de dispersión ubicada por encima de la línea de sonido corresponde a modos oscilantes con velocidad de fase mayor que la velocidad de sonido del material. Por debajo de la línea de sonido las parejas (ω, k_z) corresponden a ondas que decaen en la dirección radial, cuya velocidad de fase es menor que la velocidad de sonido.

De manera similar se encontraron los modos flexurales de primer orden, pero esta vez se obtuvieron minimizando la ecuación (2.22).

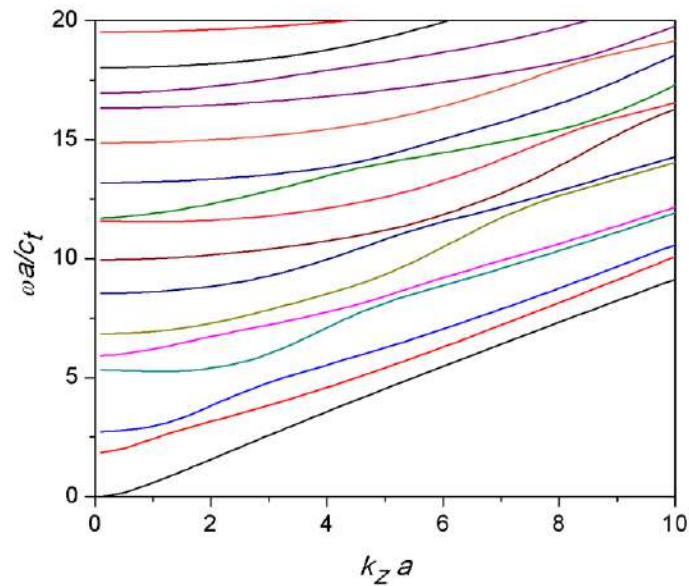


Fig. 5.4, Modos flexurales

Por último, se realiza un nuevo programa para encontrar la solución a la ecuación de los modos flexurales de orden mayor. Los cuales como ya se mencionó en la sección 2.5 son las soluciones cuando $n > 1$.

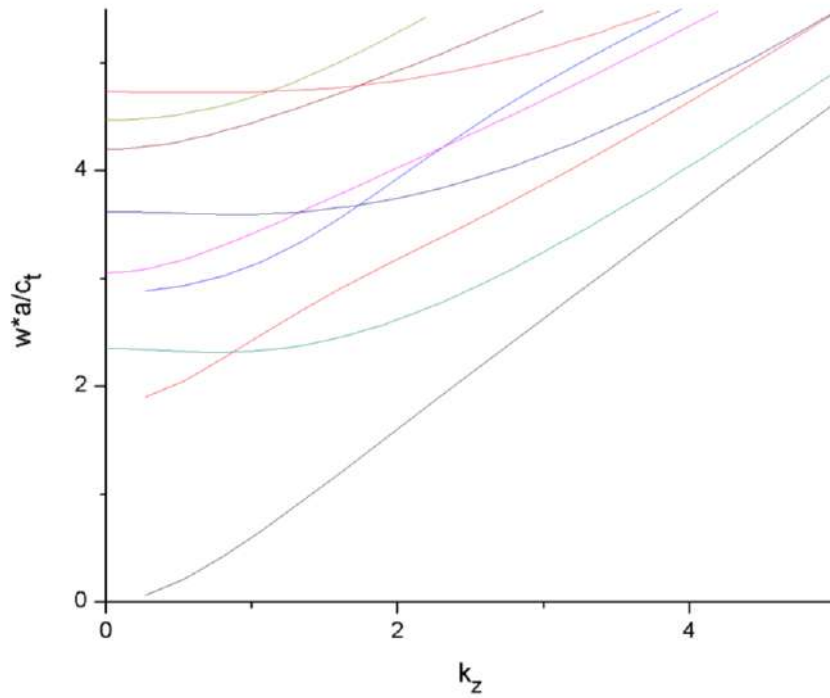


Fig. 5.5, Modos Flexurales de orden superior

Tras que se realizaran los cálculos de los modos vibracionales con los programas, se hicieron mediciones en el sistema descrito en el Capítulo 4. A primera instancia se hicieron incidir pulsos ultrasónicos de 1MHz de frecuencia central, con un transductor piezoeléctrico longitudinal. En la Fig. 5.6 se muestra cómo estaba compuesto el arreglo experimental en estas pruebas.

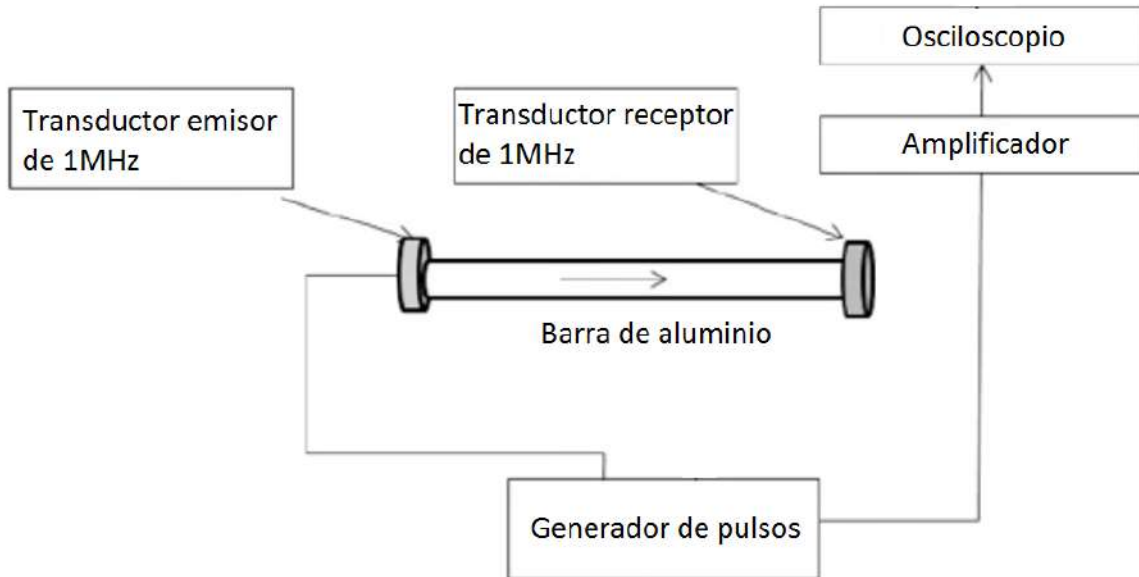


Fig. 5.6, Configuración experimental.

Como se observa en la figura anterior, la señal era creada por el generador de funciones y transmitida a la barra mediante el transductor piezoeléctrico emisor, esta señal se trataba de pulso. A continuación, en la Fig. 5.7 se muestra uno de estos pulsos antes de viajar a través de la barra de aluminio.

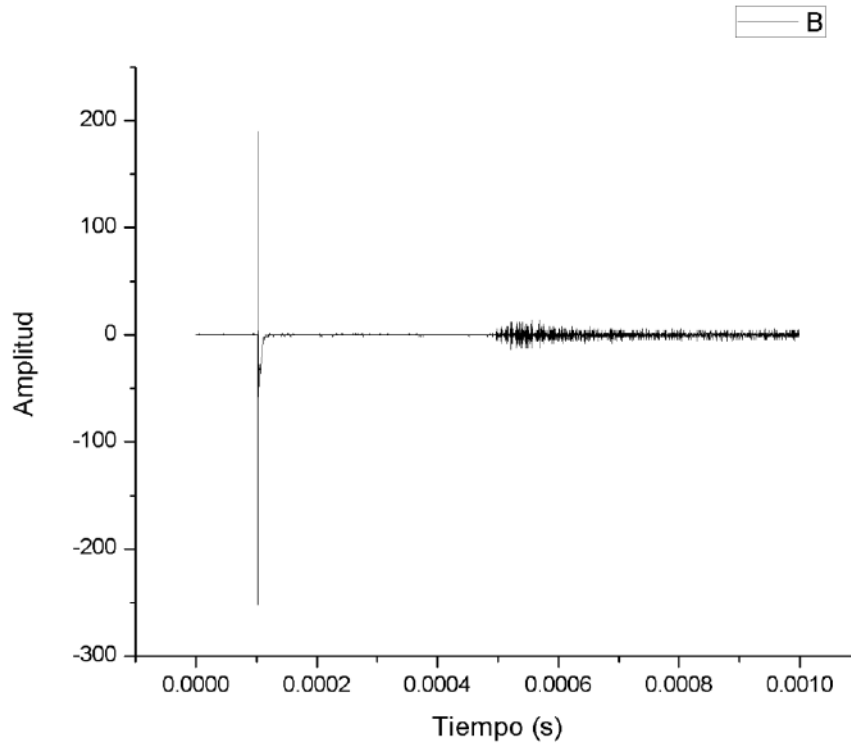


Fig. 5.7, Pulso de 1MHz de frecuencia central.

Como se observa esta señal consiste de una perturbación de voltaje, la cual es convertida en una perturbación mecánica por el transductor piezoeléctrico. Esta perturbación mecánica es pues, la que viaja a través de la barra, excitando la configuración del medio. Una vez que la perturbación llega al otro extremo de la barra se captura una señal como la presentada en la Fig. 5.8, esta señal de recepción es el mismo pulso dispersado por la barra de aluminio. A continuación, en la Fig. 5.8 se muestra la señal capturada por el transductor piezoeléctrico receptor.

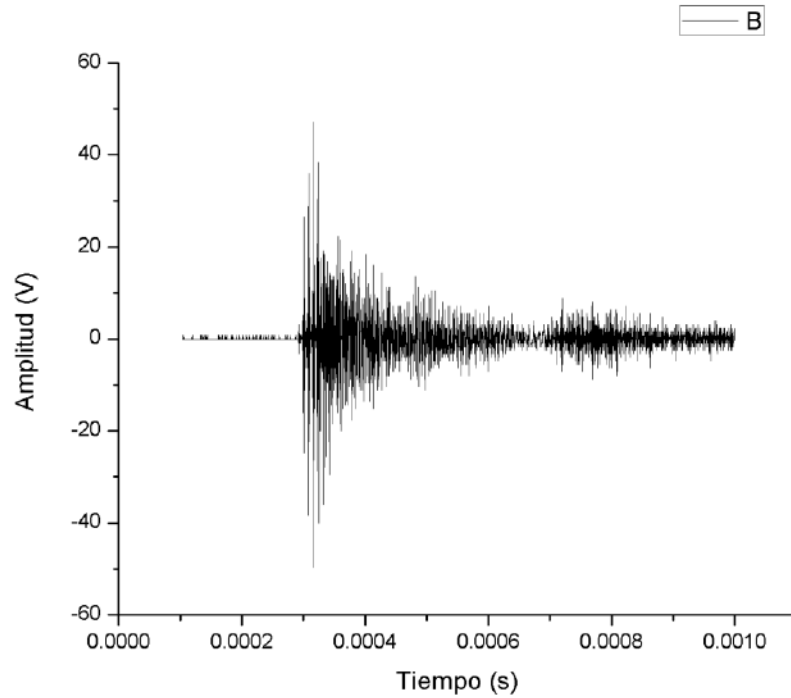


Fig. 5.8, Pulso ultrasónico longitudinal de 1Mhz de frecuencia central.

Una vez obtenida la gráfica del pulso se procede a realizar la transformada de Fourier de tiempo corto (STFT). Como ya se describió en el Capítulo 4, esta herramienta matemática da información de cómo la frecuencia cambia con el tiempo. Al ser este un pulso longitudinal se esperaría que éste excitara los modos longitudinales de la barra. En la Fig.5.9, se muestra lo obtenido al realizar la STFT.

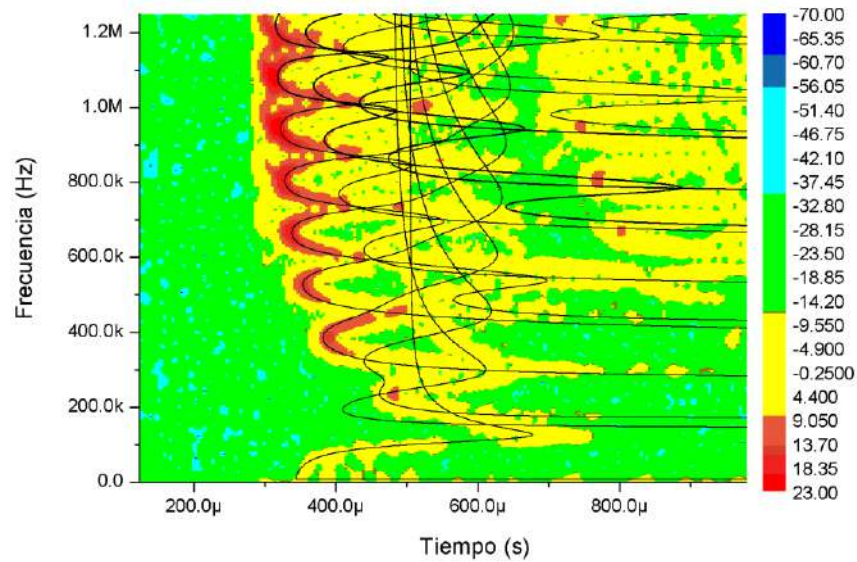


Fig. 5.9, STFT de un pulso longitudinal de 1Mhz de frecuencia central, con modos longitudinales calculados (color negro).

Como se observa en la Fig. 5.9, los modos longitudinales fueron excitados por el pulso transmitido en la barra, dado que la superposición de la STFT (en colores) coincide perfectamente con los modos longitudinales calculados para esta barra (color negro). Es de notar que los modos longitudinales presentados en la figura 5.2 y los presentados en la imagen de arriba son los mismos. Antes de compararlos con la STFT de la señal, éstos pasan por un cálculo para obtener las curvas en los ejes de tiempo contra frecuencia, como se muestra en la figura de arriba.

Este proceso no es más que encontrar la velocidad de grupo de la gráfica en la Fig 5.2, la cual por definición es $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$. Al obtenerla y conociendo la longitud de la barra, es posible encontrar los tiempos de llegada con un simple despeje ya que $v_g = \frac{d}{t}$, donde d es la longitud de la barra y t los tiempos de llegada. Después se encuentra la frecuencia con la definición de frecuencia angular $\omega = 2\pi f$, con esto se calcula la frecuencia y así se obtienen los datos en los ejes necesarios para graficar junto con la STFT.

5.2 Intercambio de energía entre dos barras

Como se vio en el capítulo tres se obtuvieron las ecuaciones (3.12) con las cuales podemos describir el decrecimiento de la energía mecánica entre dos barras en contacto, en el capítulo cuatro se mencionó el arreglo experimental y procedimientos a seguir. En este último capítulo se revisará los resultados obtenidos para el fenómeno estudiado.

Los transductores piezoeléctricos de contacto utilizados para el arreglo experimental mostrado en el Capítulo 4 (Figura 4.1) emiten ondas de tipo pulso de cinco ciclos. En la Fig 5.10 mostramos como se da la interacción mecánica entre las dos barras, siendo la barra uno la activa (por donde se transmite la señal) y la barra número dos que es la pasiva.

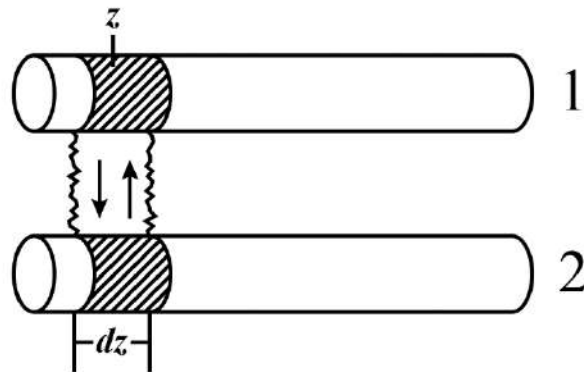


Fig 5.10 Segmento dz que muestra la Interacción entre ambas barras, donde, la barra (activa) uno es la barra por donde se transmite la señal y la barra (pasiva) dos la que recibe energía mecánica de la barra número 1.

Como vimos en el capítulo cuatro esta interacción es modelada de acuerdo con las ecuaciones (3.12). Para visualizar esta interacción se realizó un programa en mathematica donde se encontró la solución de estas ecuaciones. A continuación, se muestra los resultados de la gráfica obtenida.

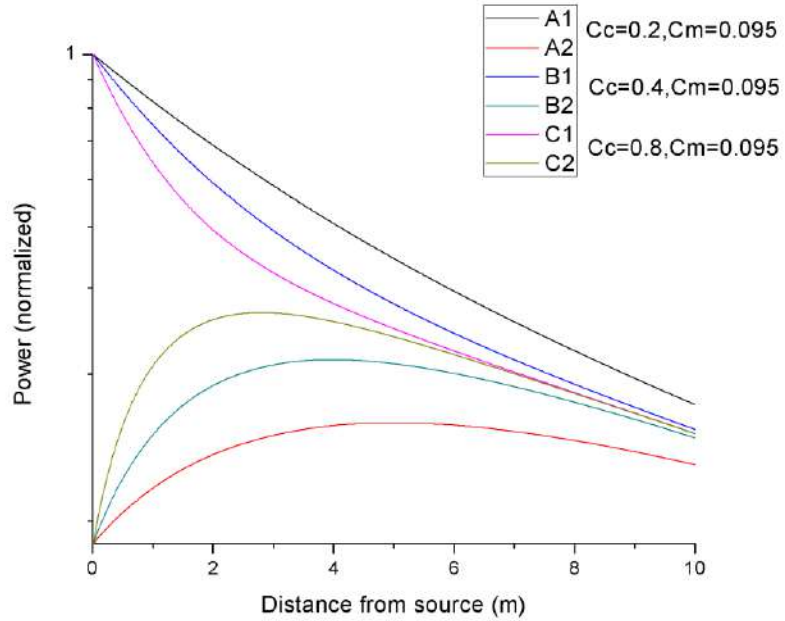


Fig. 5.11, Cambio de energía en ambas barras a lo largo del cilindro.

Como podemos observar en la Fig. 5.11 tenemos tres casos para diferentes valores de c_c , estos vienen en pares, siendo A1 y A2 el primero. En esta grafica se nota la perdida de energía de ambas barras debido al material, ya que, si extendiéramos la gráfica en el eje x, ambos valores de la energía tienden a cero. También se observa una ganancia al principio en la barra pasiva, debido a su interacción con la otra.

Se ideó un experimento tal que permitiese percibir el decrecimiento de la amplitud para el caso de la interacción mecánica de dos barras en contacto, para el cual se espera un decrecimiento en la energía mecánica de la barra, así un decrecimiento en la amplitud de la señal. El arreglo experimental que se usó para este caso es el presentado en la Fig. 5.12.

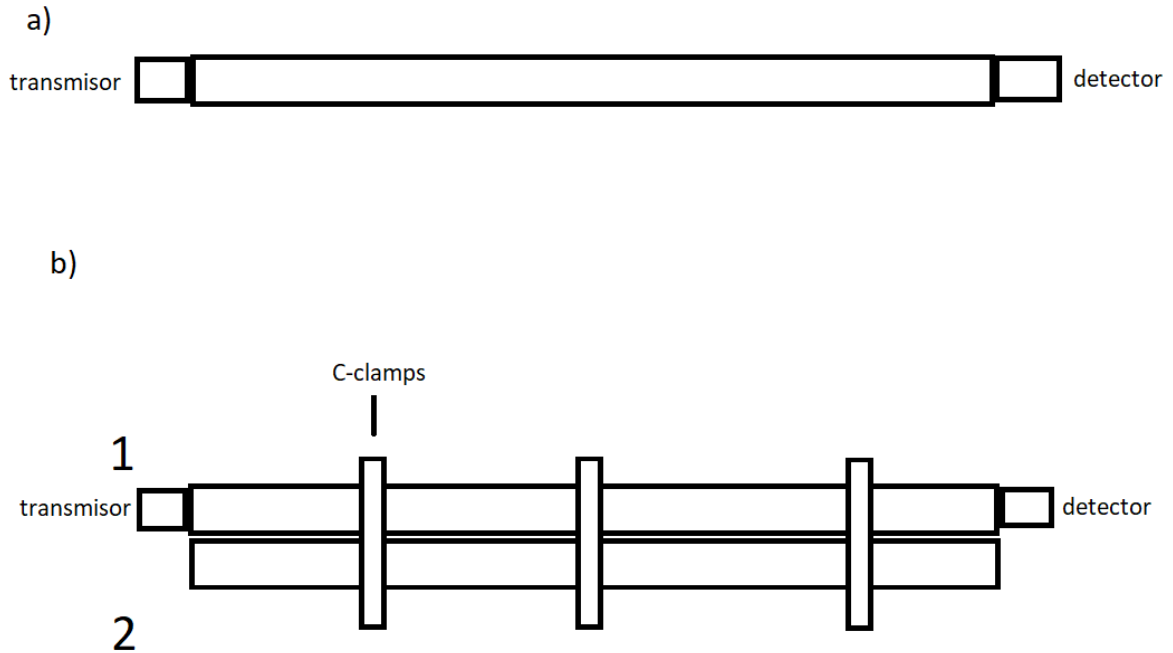


Fig. 5.12, Arreglo experimental usado para medir la interacción entre dos barras, a) primer caso donde solamente hay transmisión y recepción en una misma barra. b) segundo caso donde hay transmisión entre la misma barra, pero esta está acoplada a la barra pasiva.

Como podemos ver en la figura se hizo transmisión en dos casos, el primero de ellos fue para el caso de transmisión en la misma barra, se realizaron varias medidas de la amplitud de la señal de recepción, donde se aumentaba la frecuencia de una señal de tipo “burst”. La amplitud ofrece una medida de cómo es la energía de la señal.

Tras esto se procedió al segundo caso donde se realizó el mismo procedimiento, pero esta vez se tenía la barra acoplada a otra barra que hacía el papel de barra pasiva. A continuación, en las gráficas 5.13 y 5.14, se muestran los resultados de estas mediciones.

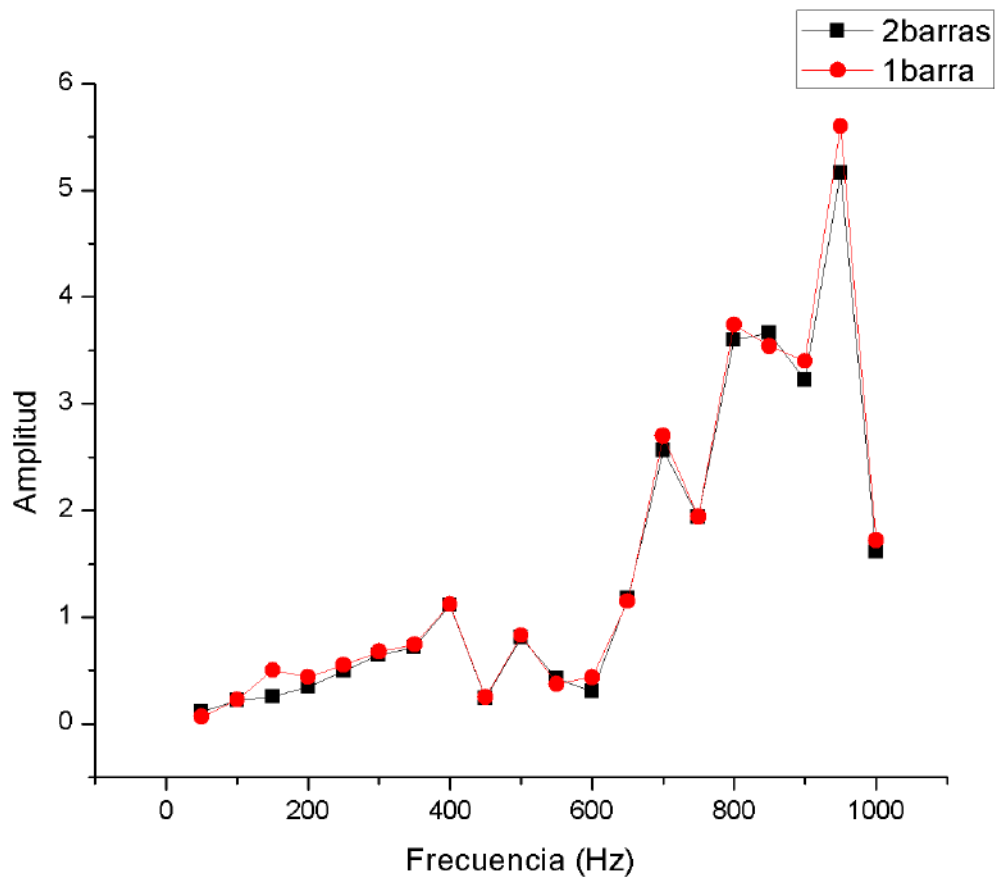


Fig. 5.13, Diferencia de amplitud entre los casos a) y b).

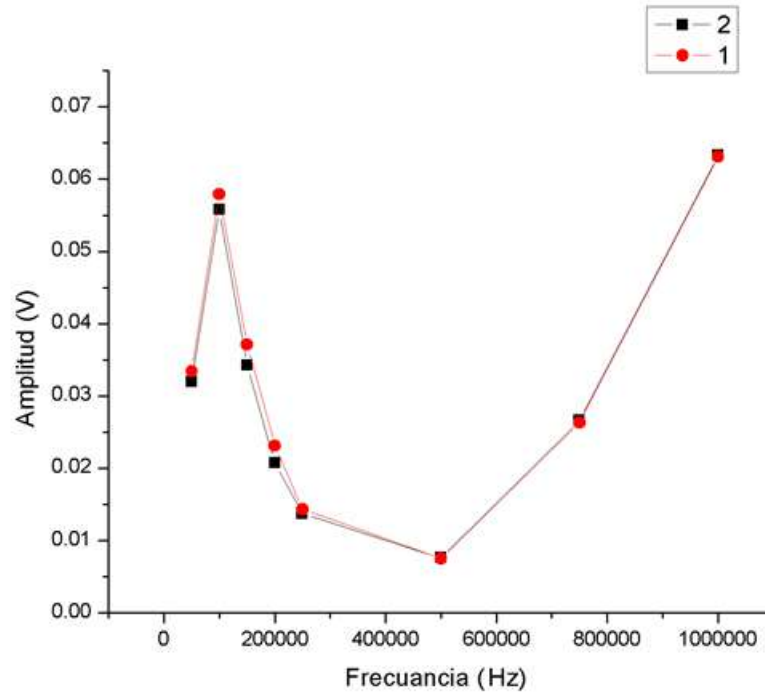


Fig. 5.14, Diferencia de amplitud entre los casos a) y b).

Como se puede observar en la gráfica en el primer caso donde solo se tiene una barra la amplitud de la señal es un poco más intensa al llegar al transductor receptor que en el caso b) que es de las dos barras acopladas. Gracias a que sabemos que para una onda el doble de su amplitud es proporcional a su energía, que la energía, por esto podemos decir que la señal es mayor en el primer caso que en el segundo caso y esto es evidente ya que por el contacto entre ambas barras genera una pérdida de energía de la barra activa hacia la pasiva.

Conclusiones

Como se presentó en la introducción e hipótesis de este trabajo, se estudia la transmisión de ondas mecánicas en sistemas de barras de longitud l y radio a , con condiciones de frontera imperfectas. Se revisó la teoría necesaria para la descripción matemática del fenómeno estudiado, dentro del ámbito de la MMC. Donde se revisó la teoría de elasticidad para y posteriormente el modelo de por Pochhammer—Chree de la transmisión de ondas mecánicas en barrass, con la cual se expresa matemáticamente los tipos de movimientos que las partículas que conforman el medio continuo interactúan al ser perturbadas por fuerzas externas. Con esta teoría que se llegó a las ecuaciones de frecuencia con los que se obtuvieron valores para k_z y ω , se graficaron las diferentes familias de modos vibracionales. Para lo cual se obtuvieron resultados comparables con la teoría.

Después de revisar la teoría de Pochhammer—Chree para la transmisión en una sola barra se procedió a estudiar la transferencia de energía entre dos barras en contacto paralelo. Por lo cual se hizo un análisis de cómo se da la transmisión en de energía en este tipo de sistema. Con este se revisó el trabajo de Haag et al [4]. Con esto se llegaron a dos ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de la potencia por unidad de longitud en el medio. Ya con la solución se hallaron gráficas que describen este mismo comportamiento.

Se desarrolló el sistema experimental, el cual se compone de una barra de aluminio, tras haber realizado la caracterización de las velocidades de sonido, se procedió a realizar las corridas experimentales con el fin de comparar con los resultados teóricos obtenidos de los programas realizados. Para esto se procedió a incidir ondas de tipo longitudinal en el sistema, para las cuales se utilizaron transductores piezoeléctricos de contacto para transmitir y capturar las señales. Después de haber capturado las señales se procedió a hacer un análisis de éstas con un software especializado en el procesamiento de señales con lo que se encontraron los modos longitudinales del sistema de una barra de aluminio. Comparando la señal encontrada con el programa hecho en fortran se encontró que coincidió perfectamente con la señal hecha experimentalmente. Por lo que se encontró que el uso de la teoría de Pochhammer—Chree para la descripción del fenómeno de transmisión de ondas en barras.

Posteriormente se presenta un sistema compuesto por dos barras de aluminio en contacto superficial paralelo. Donde por una de las dos barras se transmite la señal, esta barra se conoce como la barra activa y otra barra en contacto superficial con ésta que se conoce como la barra pasiva. La hipótesis propuesta dice que habrá un decrecimiento en la energía en la barra activa y un incremento en la pasiva debido al contacto que hay entre ellas. Lo cual se puede observar en las gráficas hechas con los datos encontrados al resolver las ecuaciones diferenciales al estudiar la teoría de Haag et al. Para ver este fenómeno experimentalmente se ideó el sistema descrito en el Capítulo 5, el cual consistía de las barra activa y pasiva acopladas con C-clamps. Se procedió a incidir ondas a diferentes frecuencias en la barra activa tomando lectura de la amplitud de la señal, para después hacer incidir la de nueva cuenta las mismas señales en la barra activa sin la presencia de la barra pasiva para ver ¿Cómo es que la afectaba la amplitud de la señal? Esto debido a que la amplitud de la señal está relacionada con la energía del sistema. Tras haber tomado lectura en ambos casos se procedió a graficar ambos casos en una sola grafica para observar el comportamiento de la amplitud de la señal.

Con esto se observó un decrecimiento en la amplitud de la señal por lo cual quedó demostrada la hipótesis antes dicha. La presencia de la barra pasiva afecta la energía del sistema decreciendo la energía mecánica de la señal en la barra activa, la cual transfiere parte de la energía a la barra pasiva.

Como futuro trabajo se propone realizar un arreglo para más de una barra pasiva en contacto, haciendo los cambios necesarios en las ecuaciones de transferencia de energía para cada barra presente.

Referencias

1. Landau L. D. y Lifshitz, *Theory of Elasticity* (Pergamon Press, 1970).
2. K. L. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids* (Dover Publication, 1991).
3. J. L. Rose, *Ultrasonic Waves in Solid Media* (Cambridge University Press, 1999).
4. T. Haag, B. M. Beadle y H. Sprenger, *Arch. Appl. Mech.* **79** (2009) 517-528.
5. Xavier Oliver y Carlos Agelet de Saracibar, *Mecánica de medios continuos para ingenieros* (EDICIONS UPC, 2010).
6. Beltzer, Abraham I, *Acoustics of Solids* (1988).
7. B. Manzanares-Martinez, F. Ramos-Mendieta y A. Baltazar, *JASA*, **127**, n° 6 (2010) 3503-3510.
8. S.W. Rienstra & A. Hirschberg, *An Introduction to Acoustics* (Eindhoven University of Technology, 2018).
9. Xavier Serra, The Short Time Fourier Transform
10. R. Raisutis, R. Kazys, *Ultra Snc wb testing tech for inspc of mw Struc*, **62** (2014) 40-49
11. Introduction to Continuum Mechanics, David J. Raymond, Physics Department, New Mexico Tech.
12. O. A. Bauchau y J. I. Craig, *Structural Analysis*, (Springer, 2009).
13. Y.X. Li, Z. J. Hu y Lu. Sun *Dynamical Behavior of a double-beam system interconnected by a viscoelastic layer*, **105** (2016) 291-303.
14. A. Baltazar, C. D. Hernandez-Salazar y B. Manzanares-Martínez, *NDT&E International*, **43** (2010) 726-732.
15. T. P. Moreno, *Estudio Teórico-Experimental de la Dependencia Angular de la Propagación de Modos Longitudinales Pohhammer-Chree en Barras de Aluminio*, Tesis para obtener el título de Licenciado en Física, Hermosillo, (2017).
16. Lawrence E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, (Prentice Hall, Inc. 1969)
17. C. Schaal, S. Bischoff, L. Gaul, *Int. J. Solids Struct.* **64-65** (2015) 22-29.
18. F.Seco and A.R. Jiménez, "Modelling the generation and propagation of ultrasonic signals in cylindrical waveguides", in *Ultrasonic waves*, chapter 1, pp. 1-28, Intech Open Access Publisher (2012) (ISBN 978-953-307-955-4).

19. Wave Propagation In Elastic Solids, J. D. Achenbach, The Technological Institute,
Northwestern University, Evanston Illinois

Anexos

A continuación, se muestra el código de los programas utilizados en este trabajo, estos incluyen los programas para resolver las ecuaciones de frecuencia para los tres tipos de modos vistos en el Capítulo 2 y las ecuaciones 3.53 para hallar cómo es la potencia en el caso del acoplamiento de dos barras cilíndricas visto en el Capítulo 3

Código para encontrar las raíces de los modos torsionales.

```
PROGRAM Tor
```

```
! Declaración de variables
```

```
implicit none
```

```
real :: b, a, w, cl, ct, kz, kzmin, wmin, dkz, dw, tor, torAA, torA, kzmax, wmax, wl, w1
```

```
integer :: n, maxkz, maxw, m, f
```

```
cl=6367.9854
```

```
ct=3798.185
```

```
a=0.0127
```

```
kzmax=10
```

```
wmax=28
```

```
kzmin=0.001
```

```
wmin=0.001
```

```
tor = 0.0
```

```
torAA=0.0
```

```
torA=0.0
```

```
! Escritura de datos obtenidos
```

```
open(1, file='datos1.dat', status= 'unknown')
```

```
open(2, file='datos2.dat', status= 'unknown')
```

```
open(3, file='datos3.dat', status= 'unknown')
open(4, file='datos4.dat', status= 'unknown')
open(5, file='datos5.dat', status= 'unknown')
open(6, file='datos6.dat', status= 'unknown')
open(7, file='datos7.dat', status= 'unknown')
open(8, file='datos8.dat', status= 'unknown')
open(9, file='datos9.dat', status= 'unknown')
```

! Aquí definimos el número de iteraciones que realiza el programa

```
maxkz=100
dkz = (kzmax - kzmin)/maxkz
maxw=10000
dw = (wmax - wmin)/maxw
do n=1, maxkz, 1
kz = kzmin + n*dkz
f=0
do m=1, maxw, 1
w1=w
w1=kz
w = w1 + m*dw
if (w<wmax) then
b = sqrt((w)**2 - (kz)**2)
torAA=torA
torA=tor
```

! Ecuación de frecuencia para los modos torsionales

```
tor =abs(2.0*bessel_j1(b)-b*bessel_j0(b))
```

! Criterio de selección de datos para encontrar los mínimos de la ecuación de frecuencia

```
if ( torAA > torA .and. tor>torA ) then  
write(f,*) kz, w1  
f=f+1  
end if  
end if  
end do  
end do  
end program
```

B. Código para hallar raíces de modos longitudinales

```
PROGRAM Long  
implicit none
```

! Declaración de variables

```
DOUBLE PRECISION :: b, a, w, cl, ct, kz, kzmin, wmin, dkz, dw, long, longAA, &  
longA, kzmax, wmax, wl, w1, a1, a0, a2, wt, b0, b2, J1a,J1b,I1a,I1b,&  
Bi0,Di0,Bi1,Di1,Bk0,Dk0,Bk1,Dk1, i0a2, i1a2, i0b2, i1b2  
integer :: n, maxkz, maxw, m, f  
COMPLEX :: i=cmplx(0.0, 1.0)  
cl=6367.9854  
ct=3798.185
```

```
a=0.0127
kzmax=10.0
wmax=28.0
kzmin=0.001
wmin=0.001
```

! Escritura de datos en archivos externos

```
open(1, file='datos1.dat', status= 'unknown')
open(2, file='datos2.dat', status= 'unknown')
open(3, file='datos3.dat', status= 'unknown')
open(4, file='datos4.dat', status= 'unknown')
open(5, file='datos5.dat', status= 'unknown')
open(6, file='datos6.dat', status= 'unknown')
open(7, file='datos7.dat', status= 'unknown')
open(8, file='datos8.dat', status= 'unknown')
open(9, file='datos9.dat', status= 'unknown')
open(10, file='datos10.dat', status= 'unknown')
open(11, file='datos11.dat', status= 'unknown')
open(12, file='datos12.dat', status= 'unknown')
```

! Aquí se define el número de iteraciones que el programa hará

```
maxkz=100
dkz = (kzmax - kzmin)/dble(maxkz)
maxw=100000
dw = (wmax - wmin)/dble(maxw)
do n=1, maxkz, 1
```

```

kz = kzmin + n*dkz
long= 0.0
longAA=0.0
longA=0.0
    f=0
    wl = kz*(cl/ct)
    wt = kz
    do m=1, maxw, 1
        w = wmin + m*dw

```

! Zona tres donde los resultados son todos reales

```

if(w>wl) then
    b = sqrt((w)**2 - (kz)**2)
    a1 =sqrt(((w*ct/cl)**2)-(kz*kz))
    longAA=longA
    longA=long

```

! Ecuación de frecuencia de los modos longitudinales

```

long =dabs(2.0*a1*(b*b+kz*kz)*bessel_j1(b)*bessel_j1(a1) &
-(b*b-kz*kz)**2*bessel_j1(b)*bessel_j0(a1)&
-4*kz*kz*b*a1*bessel_j0(b)*bessel_j1(a1))

if ( longAA > longA .and. long>longA ) then
    write(f,*) kz, w
    f=f+1
end if

```


! Zona dos donde existen resultados imaginarios para alfa

```
else if (w>wt .and. w<wl) then
```

```
b = sqrt((w)**2 - (kz)**2)
```

```
a0 =(((w*ct/cl)**2)-(kz*kz))
```

```
a2= sqrt((kz*kz)-(w*ct/cl)**2)
```

! Llamada a la subrutina de función bessel para números complejos ln(X)

```
call IK01A(a2,Bi0,Di0,Bi1,Di1,Bk0,Dk0,Bk1,Dk1)
```

```
I1a2 = Bi1
```

```
I0a2 = Bi0
```

```
longAA=longA
```

```
longA=long
```

! Ecuación de frecuencia para modos flexurales

```
long =dabs(-2.0*a2*(b*b+kz*kz)*bessel_J1(b)*I1a2-((b*b-kz*kz)**2)*bessel_J1(b)*I0a2 &  
+4.0*kz*kz*b*a2*bessel_J0(b)*I1a2)
```

! Criterio de selección para encontrar los mínimos

```
if ( longAA > longA .and. long>longA .and. dabs(w-dw-wt)> dw ) then
```

```
write(f,*) kz, w
```

```
f=f+1
```

```
end if
```

! Primera zona donde existen resultados imaginarios tanto para alfa como beta

```
!primer zona
```

```
else if (w<wt)then
```

$$b0 = ((w)**2 - (kz)**2)$$

$$a0 = (((w*ct/cl)**2) - (kz*kz))$$

$$a2 = \text{sqrt}((kz*kz) - (w*ct/cl)**2)$$

$$b2 = \text{sqrt}((kz)**2 - (w)**2)$$

! Llamada a la subrutina de función Bessel para números complejos ln(X)

call IK01A(a2,Bi0,Di0,Bi1,Di1,Bk0,Dk0,Bk1,Dk1)

$$I1a2 = Bi1$$

$$I0a2 = Bi0$$

call IK01A(b2,Bi0,Di0,Bi1,Di1,Bk0,Dk0,Bk1,Dk1)

$$I1b2 = Bi1$$

$$I0b2 = Bi0$$

$$\text{longAA} = \text{longA}$$

$$\text{longA} = \text{long}$$

! Ecuación de frecuencia para modos flexurales

$$\text{long} = \text{abs}(-2.0*i*a2*(-b2*b2+kz*kz)*I1b2*I1a2 - i*((-b2*b2-kz*kz)**2)*I1b2*I0a2 \& \\ + 4.0*i*kz*kz*b2*a2*I0b2*I1a2)$$

! Criterio para obtener los valores para la cual la ecuación de la frecuencia se minimiza.

if (longAA > longA .and. long > longA) then

write(f,*) kz, w

f=f+1

end if

end if

end do

end do

end program

!Subrutina para la función Bessel de primer orden para números complejos.

```
SUBROUTINE IK01A(X,BI0,DI0,BI1,DI1,BK0,DK0,BK1,DK1)
! =====
! Purpose: Compute modified Bessel functions I0(x), I1(x),
!          K0(x) and K1(x), and their derivatives
! Input : x --- Argument ( x >= 0 )
! Output: BI0 --- I0(x)
!          DI0 --- I0'(x)
!          BI1 --- I1(x)
!          DI1 --- I1'(x)
!          BK0 --- K0(x)
!          DK0 --- K0'(x)
!          BK1 --- K1(x)
!          DK1 --- K1'(x)
! =====
!
IMPLICIT NONE

DOUBLE PRECISION a , a1 , b , BI0 , BI1 , BK0 , BK1 , ca , cb , &
& ct , DI0 , DI1 , DK0 , DK1 , el , pi , r , w0 , &
& ww , X

DOUBLE PRECISION x2 , xr , xr2

INTEGER k , k0

DIMENSION a(12) , b(12) , a1(8)

PI=3.141592653589793D0
EL=0.5772156649015329D0
```

```

X2=X*X
IF (X.EQ.0.0D0) THEN
  B10=1.0D0
  B11=0.0D0
  BK0=1.0D+300
  BK1=1.0D+300
  D10=0.0D0
  D11=0.5D0
  DK0=-1.0D+300
  DK1=-1.0D+300
  RETURN
ELSE IF (X.LE.18.0D0) THEN
  B10=1.0D0
  R=1.0D0
  DO 15 K=1,50
    R=0.25D0*R*X2/(K*K)
    B10=B10+R
    IF (DABS(R/B10).LT.1.0D-15) GO TO 20
15  CONTINUE
20  B11=1.0D0
    R=1.0D0
    DO 25 K=1,50
      R=0.25D0*R*X2/(K*(K+1))
      B11=B11+R
      IF (DABS(R/B11).LT.1.0D-15) GO TO 30
25  CONTINUE
30  B11=0.5D0*X*B11
ELSE
  DATA A/0.125D0,7.03125D-2, &

```

```

7.32421875D-2,1.1215209960938D-1, &
2.2710800170898D-1,5.7250142097473D-1, &
1.7277275025845D0,6.0740420012735D0, &
2.4380529699556D01,1.1001714026925D02, &
5.5133589612202D02,3.0380905109224D03/
DATA B/-0.375D0,-1.171875D-1, &
-1.025390625D-1,-1.4419555664063D-1, &
-2.7757644653320D-1,-6.7659258842468D-1, &
-1.9935317337513D0,-6.8839142681099D0, &
-2.7248827311269D01,-1.2159789187654D02, &
-6.0384407670507D02,-3.3022722944809D03/
K0=12
IF (X.GE.35.0) K0=9
IF (X.GE.50.0) K0=7
CA=DEXP(X)/DSQRT(2.0D0*PI*X)
BIO=1.0D0
XR=1.0D0/X
DO 35 K=1,K0
35     BIO=BIO+A(K)*XR**K
      BIO=CA*BIO
      BI1=1.0D0
      DO 40 K=1,K0
40     BI1=BI1+B(K)*XR**K
      BI1=CA*BI1
ENDIF
IF (X.LE.9.0D0) THEN
      CT=-(DLOG(X/2.0D0)+EL)
      BK0=0.0D0
      W0=0.0D0

```

```

R=1.0D0
DO 65 K=1,50
    W0=W0+1.0D0/K
    R=0.25D0*R/(K*K)*X2
    BK0=BK0+R*(W0+CT)
    IF (DABS((BK0-WW)/BK0).LT.1.0D-15) GO TO 70
65    WW=BK0
70    BK0=BK0+CT
ELSE
    DATA A1/0.125D0,0.2109375D0, &
        1.0986328125D0,1.1775970458984D01, &
        2.1461706161499D02,5.9511522710323D03, &
        2.3347645606175D05,1.2312234987631D07/
    CB=0.5D0/X
    XR2=1.0D0/X2
    BK0=1.0D0
    DO 75 K=1,8
75    BK0=BK0+A1(K)*XR2**K
    BK0=CB*BK0/BIO
ENDIF
BK1=(1.0D0/X-BI1*BK0)/BIO
DIO=BI1
DI1=BI0-BI1/X
DK0=-BK1
DK1=-BK0-BK1/X
RETURN
END

```

C. Programa para encontrar raíces de los modos flexurales

```
PROGRAM Flex
```

```
implicit none
```

```
! Definición de variables
```

```
DOUBLE PRECISION :: b, a, w, cl, ct, kz, kzmin, wmin, dkz, dw, tor, torAA, &
```

```
torA, kzmax, wmax, wl, w1, a1, a0, a2, wt, b0, b2, J1a,J1b,l1a,l1b,&
```

```
Bi0,Di0,Bi1,Di1,Bk0,Dk0,Bk1,Dk1, i0a2, i1a2, i0b2, i1b2, fa, fb&
```

```
, f1, f2, f3, f4, f5
```

```
integer :: n, maxkz, maxw, m, f
```

```
COMPLEX :: i=cmplx(0.0, 1.0)
```

```
cl=6367.9854
```

```
ct=3798.185
```

```
a=0.0127
```

```
kzmax=10.0
```

```
wmax=28.0
```

```
kzmin=0.001
```

```
wmin=0.001
```

```
!eEscritura de datos en archivos externos
```

```
open(1, file='datos1.dat', status= 'unknown')
```

```
open(2, file='datos2.dat', status= 'unknown')
```

```
open(3, file='datos3.dat', status= 'unknown')
```

```
open(4, file='datos4.dat', status= 'unknown')
```

```
open(5, file='datos5.dat', status= 'unknown')
```

```
open(6, file='datos6.dat', status= 'unknown')
```

```
open(7, file='datos7.dat', status= 'unknown')
```

```
open(8, file='datos8.dat', status= 'unknown')
open(9, file='datos9.dat', status= 'unknown')
open(10, file='datos10.dat', status= 'unknown')
open(11, file='datos11.dat', status= 'unknown')
open(12, file='datos12.dat', status= 'unknown')
open(13, file='datos13.dat', status= 'unknown')
open(14, file='datos14.dat', status= 'unknown')
open(15, file='datos15.dat', status= 'unknown')
open(16, file='datos16.dat', status= 'unknown')
open(17, file='datos17.dat', status= 'unknown')
open(18, file='datos18.dat', status= 'unknown')
open(19, file='datos19.dat', status= 'unknown')
open(20, file='datos20.dat', status= 'unknown')
open(21, file='datos21.dat', status= 'unknown')
open(22, file='datos22.dat', status= 'unknown')
open(23, file='datos23.dat', status= 'unknown')
open(24, file='datos24.dat', status= 'unknown')
```

!Definición de número de iteraciones que realiza el programa

```
maxkz=100
dkz = (kzmax - kzmin)/dble(maxkz)
maxw=100000
dw = (wmax - wmin)/dble(maxw)
do n=1, maxkz, 1

    kz = kzmin + n*dkz
    tor=0.0
    torAA=0.0
```


torA=0.0

f=1

wl = kz*(cl/ct)

wt = kz

do m=1, maxw, 1

w = wmin + m*dw

!Zona tres con valores reales para alfa y beta

!zona tres

if(w>wl) then

b = sqrt((w)**2 - (kz)**2)

a1 =sqrt(((w*ct/cl)**2)-(kz*kz))

torAA=torA

torA=tor

fa=a1*bessel_j0(a1)/bessel_j1(a1)

fb=b*bessel_j0(b)/bessel_j1(b)

f1=2*(b**2-kz**2)**2

f2=2*(5*(kz**2)+b**2)*(b**2)

f3=(b**6)-10*(b**4)-2*(kz**2)*(b**4)+2*(b**2)*(kz**2)+&

(b**2)*(kz**4)-4*(kz**4)

f4=2*(b**2)*(2*(b**2)*(kz**2)-(b**2)-9*(kz**2))

f5=(b**2)*(-(b**4)+8*(b**2)-2*(b**2)*(kz**2)+8*(kz**2)-(kz**4))

! Ecuación de frecuencia para los modos flexurales

tor=dabs((bessel_j1(a)*bessel_j1(b)**2)*(f1*fb**2+f2*fa*fb+f3*fb+f4*fa+f5))

!Criterio que elige los valores minimos hallados

```
if ( torAA > torA .and. tor > torA .and. dabs(w-dw-wl)> dw ) then
```

```
  if( w>=7.5270 .and. w<=7.82478 .and. kz>=2.2007 .and. kz<=2.4009) then
```

```
    go to 100
```

```
    end if
```

```
  if( kz>=5.90035 .and. kz<=6.0005 .and. w>=11.8740 .and. w<=12.1128) then
```

```
    go to 100
```

```
  end if
```

```
  if( kz>=0.10099 .and. kz<=0.70094 .and. w>=11.85885 .and. w<=11.86838) then
```

```
    go to 100
```

```
    end if
```

```
    write(f,*) kz, w
```

```
    f=f+1
```

```
  100 end if
```

!segunda zona con valores complejos para alfa

```
!zona dos
```

```
else if (w>wt .and. w<wl) then
```

```
b = sqrt((w)**2 - (kz)**2)
```

```
a2 = sqrt((kz*kz)-(w*ct/cl)**2)
```

```
call IK01A(a2,Bi0,Di0,Bi1,Di1,Bk0,Dk0,Bk1,Dk1)
```

```
l1a2 = Bi1
```

```
l0a2 = Bi0
```

```
torAA = torA
```

```
torA = tor
```

```
fa=a2*I0a2/I1a2
```

```
fb=b*bessel_j0(b)/bessel_j1(b)
```

```
f1=2*(b**2-kz**2)**2
```

```
f2=2*(5*(kz**2)+b**2)*(b**2)
```

```
f3=(b**6)-10*(b**4)-2*(kz**2)*(b**4)+2*(b**2)*(kz**2)+&
```

```
(b**2)*(kz**4)-4*(kz**4)
```

```
f4=2*(b**2)*(2*(b**2)*(kz**2)-(b**2)-9*(kz**2))
```

```
f5=(b**2)*(-(b**4)+8*(b**2)-2*(b**2)*(kz**2)+8*(kz**2)-(kz**4))
```

```
!ecuacion de frecuencia para modos flexurales
```

```
tor=abs((i*I1a2*(bessel_j1(b)**2))*(f1*fb**2+f2*fa*fb+f3*fb+f4*fa+f5))
```

```
if ( torAA > torA .and. tor>torA .and. dabs(w-dw-wt)> dw .and. dabs(w-dw-wl)> dw) then
```

```
  write(f,*) kz, w
```

```
  f=f+1
```

```
end if
```

```
!primer zona
```

```
else if (w<wt)then
```

```
  a2= sqrt((kz*kz)-(w*ct/cl)**2)
```

```
  b2 = sqrt((kz)**2-(w)**2 )
```

```
  call IK01A(a2,Bi0,Di0,Bi1,Di1,Bk0,Dk0,Bk1,Dk1)
```

```
I1a2 = Bi1
```

```
l0a2 = Bi0
```

```
call IK01A(b2,Bi0,Di0,Bi1,Di1,Bk0,Dk0,Bk1,Dk1)
```

```
l1b2 = Bi1
```

```
l0b2 = Bi0
```

```
call IK01A(a2,Bi0,Di0,Bi1,Di1,Bk0,Dk0,Bk1,Dk1)
```

```
l1a2 = Bi1
```

```
l0a2 = Bi0
```

```
torAA=torA
```

```
torA=tor
```

```
fa=a2*l0a2/l1a2
```

```
fb=b2*l0b2/l1b2
```

```
f1=2*(-b2**2-kz**2)**2
```

```
f2=-2*(5*kz**2-b2**2)*b2**2
```

```
f3=(-b2**6)-10*(b2**4)-2*(b2**4)*(kz**2)-2*(b2**2)*(kz**2)-&
```

```
(b2**2)*(kz**4)-4*(kz**4)
```

```
f4=-2*(b2**2)*(-2*(b2**2)*(kz**2)+(b2**2)-9*(kz**2))
```

```
f5=-1*(b2**2)*((-b2**4)-8*(b2**2)+2*(b2**2)*(kz**2)+8*(kz**2)-(kz**4))
```

```
tor=abs((-1*i*l1a2*(l1b2**2))*(f1*(fb**2)+f2*fa*fb+f3*fb+f4*fa+f5))
```

```
if ( torAA > torA .and. tor>torA ) then
```

```
write(f,*) kz, w
```

```
f=f+1
```

```
end if
```

```
end if
```

```

        end do
    end do
end program

SUBROUTINE IK01A(X,Bi0,Di0,Bi1,Di1,Bk0,Dk0,Bk1,Dk1)
! =====
! Purpose: Compute modified Bessel functions I0(x), I1(x),
!         K0(x) and K1(x), and their derivatives
! Input : x --- Argument ( x >= 0 )
! Output: BI0 --- I0(x)
!         DI0 --- I0'(x)
!         BI1 --- I1(x)
!         DI1 --- I1'(x)
!         BK0 --- K0(x)
!         DK0 --- K0'(x)
!         BK1 --- K1(x)
!         DK1 --- K1'(x)
! =====
!
IMPLICIT NONE

DOUBLE PRECISION a , a1 , b , Bi0 , Bi1 , Bk0 , Bk1 , ca , cb , &
                & ct , Di0 , Di1 , Dk0 , Dk1 , el , pi , r , w0 , &
                & ww , X

DOUBLE PRECISION x2 , xr , xr2

INTEGER k , k0

DIMENSION a(12) , b(12) , a1(8)

PI=3.141592653589793D0

```

```

EL=0.5772156649015329D0
X2=X*X
IF (X.EQ.0.0D0) THEN
  BI0=1.0D0
  BI1=0.0D0
  BK0=1.0D+300
  BK1=1.0D+300
  DI0=0.0D0
  DI1=0.5D0
  DK0=-1.0D+300
  DK1=-1.0D+300
  RETURN
ELSE IF (X.LE.18.0D0) THEN
  BI0=1.0D0
  R=1.0D0
  DO 15 K=1,50
    R=0.25D0*R*X2/(K*K)
    BI0=BI0+R
    IF (DABS(R/BI0).LT.1.0D-15) GO TO 20
15  CONTINUE
20  BI1=1.0D0
    R=1.0D0
    DO 25 K=1,50
      R=0.25D0*R*X2/(K*(K+1))
      BI1=BI1+R
      IF (DABS(R/BI1).LT.1.0D-15) GO TO 30
25  CONTINUE
30  BI1=0.5D0*X*BI1
ELSE

```

```

DATA A/0.125D0,7.03125D-2, &
      7.32421875D-2,1.1215209960938D-1, &
      2.2710800170898D-1,5.7250142097473D-1, &
      1.7277275025845D0,6.0740420012735D0, &
      2.4380529699556D01,1.1001714026925D02, &
      5.5133589612202D02,3.0380905109224D03/
DATA B/-0.375D0,-1.171875D-1, &
      -1.025390625D-1,-1.4419555664063D-1, &
      -2.7757644653320D-1,-6.7659258842468D-1, &
      -1.9935317337513D0,-6.8839142681099D0, &
      -2.7248827311269D01,-1.2159789187654D02, &
      -6.0384407670507D02,-3.3022722944809D03/
K0=12
IF (X.GE.35.0) K0=9
IF (X.GE.50.0) K0=7
CA=DEXP(X)/DSQRT(2.0D0*PI*X)
BI0=1.0D0
XR=1.0D0/X
DO 35 K=1,K0
35   BI0=BI0+A(K)*XR**K
      BI0=CA*BI0
      BI1=1.0D0
      DO 40 K=1,K0
40   BI1=BI1+B(K)*XR**K
      BI1=CA*BI1
ENDIF
IF (X.LE.9.0D0) THEN
      CT=- (DLOG(X/2.0D0)+EL)
      BK0=0.0D0

```

```

W0=0.0D0
R=1.0D0
DO 65 K=1,50
    W0=W0+1.0D0/K
    R=0.25D0*R/(K*K)*X2
    BK0=BK0+R*(W0+CT)
    IF (DABS((BK0-WW)/BK0).LT.1.0D-15) GO TO 70
65    WW=BK0
70    BK0=BK0+CT
ELSE
    DATA A1/0.125D0,0.2109375D0, &
        1.0986328125D0,1.1775970458984D01, &
        2.1461706161499D02,5.9511522710323D03, &
        2.3347645606175D05,1.2312234987631D07/
    CB=0.5D0/X
    XR2=1.0D0/X2
    BK0=1.0D0
    DO 75 K=1,8
75    BK0=BK0+A1(K)*XR2**K
    BK0=CB*BK0/BIO
ENDIF
BK1=(1.0D0/X-BI1*BK0)/BIO
DIO=BI1
DI1=BI0-BI1/X
DK0=-BK1
DK1=-BK0-BK1/X
RETURN
END

```


D. Programa para encontrar raíces de los modos flexurales de orden superior

Programa creado en lenguaje Python.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
```

```
"""
```

```
Created on Fri Nov 10 09:40:06 2017
```

```
"""
```

```
from scipy import special
```

```
import numpy as np
```

```
from cmath import sqrt
```

```
epsilon=1.0e-6
```

```
#valores de entrada
```

```
r=2.714
```

```
cl=6.368e5
```

```
ct=3.142e5
```

```
kmin=0.0
```

```
kmax=5.0
```

```
divk=50
```

```
omegamin=0.0
```

```
omegamax=5.5
```

```
divomega=1000
```

```
mu=r*ct*ct
```

```
l=r*(cl**2-2*ct**2)
```

```
divk=(kmax-kmin)/divk
```

```
divomega=(omegamax-omegamin)/divomega
```

```
fil1=open("f2-1.dat","w")
```

```
fil2=open("f2-2.dat","w")
```

```
fil3=open("f2-3.dat","w")
```

```
for k in np.arange(kmin+epsilon,kmax+2*epsilon,divk):
```

```
    det=0.0
```

```
    detA=0.0
```

```
    detAA=-1.0
```

```
    n=1
```

```
    for omega in np.arange(omegamin+epsilon,omegamax+2*epsilon,divomega):
```

```
        detAA=detA
```

```
        detA=det
```

```
        BB=omega**2-k**2
```

```
        B=sqrt(BB)
```

```
        AA=(omega*ct/cl)**2-k**2
```

```
        A=sqrt(AA)
```

```
        J2A=special.jn(1,A)
```

```
        J2B=special.jn(1,B)
```

```
        J2Ap=special.jvp(1,A)
```

```
        J2Bp=special.jvp(1,B)
```

```
        a11=(1*(AA+k*k)/(2*mu)+AA-1)*J2A+A*J2Ap
```

```
        a12=(1-BB)*J2B-B*J2Bp
```

```
        a13=2*(B*J2Bp-J2B)
```

```
        a21=1*(A*J2Ap-J2A)
```

```
        a22=-1*(B*J2Bp-J2B)
```

```
        a23=-(2-BB)*J2B+2*B*J2Bp
```

```
        a31=-A*J2Ap
```

```
        a32=-(BB-k*k)*B*J2Bp/(2*k*k)
```

```

a33=1*J2B

a=np.matrix([[a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]])

det=np.linalg.det(a)

det=np.absolute(det)

p1=abs(omega-divomega-k)-divomega

p2=abs(omega-divomega-k*cl/ct)-divomega

if(detAA>detA and detA<det and p1>0.0 and p2>0.0):

    print k, omega-divomega

    if(n==1):

        fil=fil1

    elif(n==2):

        fil=fil2

    elif(n==3):

        fil=fil3

    fil.write("%10.5f %10.5f\n" % (k,omega-divomega))

    n=n+1

```

E. Programa para resolver el cambio de energía entre un sistema de dos barras acopladas horizontalmente

Programa hecho en Matlab

```

function xp = Haag2000(t,x)
k1=6;k2=4;m1=1;m2=1;cm=0.20;kc=1;
xp=zeros(4,1);
%xp=[x(2);-cm*x(2)-kc*(x(1)-x(3));x(4);-cm*x(4)-
kc*(x(3)-x(1))];
xp(1)=x(2);
xp(2)=-cm*x(2)-kc*sqrt(x(1))*(sqrt(x(1))-sqrt(x(3)));
%xp(2)=-k1/m1*x(1)-k2/m1*(x(1)-x(3));
xp(3)=x(4);
%xp(4)=-k2/m2*(x(3)-x(1));
xp(4)=-cm*x(4)-kc*sqrt(x(3))*(sqrt(x(3))-sqrt(x(1)));

```

