



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

---

---

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Matemáticas

Uso de la Verosimilitud Perfil para estimar  $\theta = P(X < Y)$   
bajo los modelos Tensión-Fuerza: Caso Normal

## T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Ramona Idalia Cota Plascencia

Director de Tesis: Dr. José Arturo Montoya Laos

Hermosillo, Sonora, México, 6 de Enero, 2012.

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Q A276  
.C68

RIS 1883

# AGRADECIMIENTOS

Quiero aprovechar este apartado para agradecer a quienes fueron parte importante en la elaboración de este trabajo de Tesis.

Le doy mi más sincero reconocimiento, por su paciencia, dedicación, esmero y esfuerzo, al director de esta Tesis,  
Dr. José Arturo Montoya Laos.

Agradezco también a mis sinodales, Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa, M. C. Gudelia Figueroa Preciado, M. C. María Teresa Robles Alcaraz, por dedicar parte de su tiempo a la revisión de esta Tesis, a L. M. Milagros

Jeaneth Valenzuela Ochoa agradezco su compañerismo. Agradezco también el apoyo moral, económico y didáctico a mi hoy esposo, L.M. Jorge Alberto Valencia Yañez, quien fungió como un gran pilar en mi vida como estudiante de esta  
Licenciatura.

Por último, agradezco a mi familia su apoyo y su fe en mí, especialmente a mi madre, Martha Olivia Plascencia Urbina, quien estuvo y ha estado al pendiente de mis logros, siendo ella uno de mis más fuertes pilares.

# Índice general

Prefacio	3
<b>1. Modelos Tensión-Fuerza</b>	<b>5</b>
1.1. Introducción . . . . .	5
1.2. Revisión histórica . . . . .	6
<b>2. Conceptos básicos de inferencia estadística</b>	<b>8</b>
2.1. Función de verosimilitud . . . . .	8
2.1.1. Plausibilidad . . . . .	10
2.1.2. Estimador de máxima verosimilitud . . . . .	11
2.1.3. Invarianza . . . . .	11
2.2. Función de verosimilitud relativa . . . . .	12
2.3. Intervalos de verosimilitud . . . . .	13
2.4. Intervalos de verosimilitud-confianza . . . . .	14
2.5. Función de verosimilitud perfil . . . . .	15
2.6. Prueba de bondad de ajuste de modelos . . . . .	16
2.6.1. Papel de probabilidad . . . . .	17
2.6.2. Gráfica cuantil-cuantil . . . . .	19
2.6.3. Ejemplo . . . . .	21
<b>3. Verosimilitud perfil del parámetro de confiabilidad <math>\theta = P(X &lt; Y)</math>: Caso Normal</b>	<b>24</b>
3.1. Introducción . . . . .	24
3.2. Función de verosimilitud de los parámetros del modelo . . . . .	25
3.3. Reparametrización de la verosimilitud en términos de $\theta$ . . . . .	26
3.4. Función de verosimilitud perfil de $\theta$ . . . . .	26
<b>4. Uso del modelo Tensión-Fuerza para explorar la confiabilidad del acero</b>	<b>29</b>
4.1. Descripción del problema . . . . .	29
4.2. Distribución de la fuerza, $Y$ , del material . . . . .	31
4.3. Simulación de estrés, $X$ , bajo el modelo normal . . . . .	38
4.4. Inferencias sobre $\theta = P(X < Y)$ vía la verosimilitud perfil . . . . .	39
<b>Conclusiones</b>	<b>48</b>



# Prefacio

Generalmente, los modelos estadísticos usados para representar fenómenos aleatorios de la naturaleza se encuentran indexados por uno o varios parámetros que son de interés primordial y otros parámetros considerados de estorbo. Un ejemplo de esta situación es el caso de los modelos Tensión-Fuerza. Bajo estos modelos, la confiabilidad de un dispositivo la podemos evaluar en términos de dos variables aleatorias. Una variable aleatoria  $X$  que representa la tensión o estrés que sufre el dispositivo cuando éste se encuentra en operación y otra variable aleatoria  $Y$  que representa la fuerza que tiene el dispositivo para realizar las operaciones para las cuales fue diseñado. Así, el parámetro  $\theta = P(X < Y)$ , llamado parámetro de confiabilidad en este contexto, resulta ser el de interés y los parámetros heredados de las distribuciones paramétricas supuestas para las variables aleatorias  $X$  y  $Y$  son considerados de estorbo.

En la literatura estadística se ha puesto mucho énfasis en la estimación del parámetro  $\theta$  desde un punto de vista clásico. Es decir, se buscan estimadores insesgados de mínima varianza e intervalos de confianza asintóticos para  $\theta$  bajo distintos supuestos sobre las distribuciones de las variables aleatorias  $X$  y  $Y$ . Sin embargo, se ha explorado muy poco el uso de la verosimilitud perfil para hacer inferencias sobre  $\theta$ , siendo éste un método comunmente usado para estimar por separado a un parámetro de interés en presencia de otros de estorbo. Nuestro objetivo en esta tesis es usar el método de verosimilitud perfil para hacer inferencias sobre el parámetro de interés  $\theta = P(X < Y)$ , cuando las variables aleatorias  $X$  y  $Y$  son normales e independientes con medias y varianzas no necesariamente iguales.

En el Capítulo 1 describimos a los modelos Tensión-Fuerza, así como el término confiabilidad. Además, hacemos una breve revisión histórica de los enfoques empleados para estimar el parámetro de confiabilidad  $\theta$ . Luego, en el siguiente capítulo, estudiamos algunos conceptos básicos de inferencia estadística, los cuales utilizaremos en el desarrollo de esta tesis. Posteriormente, en el Capítulo 3 presentamos una expresión matemática para la verosimilitud perfil de  $\theta$ . En el último capítulo, aplicamos el método de verosimilitud perfil para hacer inferencias sobre el parámetro  $\theta$ , usando datos reales de mediciones de fuerza de un material (acero corrugado) y datos simulados de estrés bajo diferentes esenarios a los que podría estar sujeto el material. Cabe mencionar aquí que los datos de fuerza antes mencionados los obtuvimos a partir de un experi-

mento realizado en el Laboratorio de Ingeniería Civil del Departamento de Ingenierías de la Universidad de Sonora, México.

Nuestras aportaciones principales con este trabajo de tesis son:

- Mostramos que el enfoque de verosimilitud perfil, un método estadístico muy poco utilizado para hacer inferencias sobre el parámetro  $\theta = P(X < Y)$ , cuando  $X$  y  $Y$  son normales e independientes, produce inferencias adecuadas y fáciles de calcular numéricamente.
- Presentamos una expresión matemática para la verosimilitud perfil del parámetro  $\theta$ .
- Mostramos una manera de usar un modelo estadístico que nos represente una situación o fenómeno de interés. En nuestro caso, bajo el modelo Tensión-Fuerza, exploramos la confiabilidad de un material (acero corrugado) para diferentes escenarios hipotéticos de estrés.
- Presentamos un experimento a partir del cual obtuvimos mediciones reales de la fuerza del acero corrugado, las cuales no rechazan una distribución normal.

Las extensiones inmediatas de este trabajo son:

- Explorar el uso de la verosimilitud perfil para hacer inferencias sobre el parámetro  $\theta$  cuando  $X$  y  $Y$  no son normales. Por ejemplo, cuando  $X$  y  $Y$  son Binomiales, Weibull, Poisson, entre otros.
- Investigar el uso de la verosimilitud perfil para hacer inferencias sobre el parámetro  $\theta$  cuando las variables  $X$  y  $Y$  tienen distribuciones distintas. Por ejemplo, cuando  $X$  es Weibull y  $Y$  es normal.
- Investigar el uso de la verosimilitud perfil para hacer inferencias sobre el parámetro  $\theta$  cuando las variables  $X$  y  $Y$  no son independientes.

# Capítulo 1

## Modelos Tensión-Fuerza

### 1.1. Introducción

Antes de que entremos de lleno al tema principal de ésta tesis, que es el problema de hacer inferencias sobre el parámetro de confiabilidad  $\theta = P(X < Y)$  en los modelos Tensión-Fuerza a través del enfoque estadístico de verosimilitud perfil, consideramos importante responder algunas preguntas que surgen de manera natural debido a la génesis del tema. Preguntas como ¿Qué es la confiabilidad?, ¿Qué son los modelos Tensión-Fuerza?, ¿Cómo podemos medir la confiabilidad en los modelos Tensión-Fuerza?, ¿Qué aplicaciones tienen los modelos Tensión-Fuerza?

El término confiabilidad es usado generalmente para expresar un cierto grado de seguridad de que un sistema o componente opere de manera exitosa. En general podemos definir a la confiabilidad como la capacidad que tiene un cierto componente para realizar de manera adecuada sus funciones en un ambiente normal de trabajo, así como en circunstancias hostiles o inesperadas.

El modelo Tensión-Fuerza es una abstracción matemática de la confiabilidad de un componente. En este modelo, dicha confiabilidad se evalúa mediante dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$ , donde  $X$  representa la tensión o estrés que sufre el componente cuando éste realiza su trabajo y  $Y$  representa la fuerza que tiene el componente para realizar las labores para las cuales fue diseñado. Si la tensión excede o sobrepasa a la fuerza del componente, entonces éste fallará. En caso contrario el componente no falla. Por lo tanto, la confiabilidad del componente es la probabilidad de que no falle y ésta se representa a través del parámetro fijo y desconocido  $\theta = P(X < Y)$ , al cual se le llama parámetro de confiabilidad.

Una aplicación muy destacada de los modelos Tensión-Fuerza es en el área de la aeronáutica. Por ejemplo, muchos cohetes usan hidrógeno líquido como su combustible y oxígeno líquido como el oxidante. Los gases calientes producidos por la combustión escapan rápidamente a través de una tobera cónica, produciendo así el impulso. Uno de

los principales factores para el buen funcionamiento de un cohete es la fuerza que tiene la cámara de combustión para soportar la presión generada dentro de ella. Así, si  $X$  es una variable aleatoria que representa la presión dentro de la cámara de combustión del cohete (*stress*) y  $Y$  es otra variable aleatoria que representa la fuerza con la que fue diseñada la cámara para soportar presión (*strength*), entonces una medida de la confiabilidad del cohete es  $\theta = P(X < Y)$ .

Cabe mencionar que nuestra motivación para hacer inferencias sobre el parámetro  $\theta$  son los modelos Tensión-Fuerza. Sin embargo existen otros escenarios, contextos o aplicaciones en los cuales resulta ser de interés este parámetro. Por ejemplo, cuando deseamos comparar dos distribuciones, la de  $X$  y la de  $Y$ . Algunos casos particulares ocurren cuando estas variables nos representan el Índice de Masa Corporal de mujeres y hombres, el tiempo de vida de un componente fabricado por dos proveedores distintos, etc.

## 1.2. Revisión histórica

A partir de la mitad del siglo XX se ha producido una gran cantidad de publicaciones, en el área estadística, dedicadas solamente al estudio del parámetro de confiabilidad  $\theta = P(X < Y)$  bajo los modelo Tensión-Fuerza. Esta idea la introdujo Birnbaum (1956) y posteriormente fue desarrollada por Birnbaum y McCarty (1958). Este último trabajo incluye por primera vez en su título la expresión  $P(Y < X)$ . El término Tensión-Fuerza aparece ya de manera formal en un artículo de Church y Harris (1970). Éste es el primer dato bibliográfico que encontramos en la literatura estadística. Cabe mencionar que Kotz *et al.* (2003), en su detallada revisión bibliográfica del tema, también menciona a Church y Harris (1970) como los primeros en introducir el término Tensión-Fuerza.

En la literatura estadística hay un gran número de trabajos dedicados exclusivamente a problemas asociados con la estimación de  $\theta = P(X < Y)$ , basados en varias hipótesis sobre la distribución de  $X$  y  $Y$ . Gran parte de los trabajos suponen que ambas variables aleatorias tienen distribuciones que pertenecen a la misma familia (Normal, Exponencial, Weibull, etc.) y asumen independencia entre las dos variables. En particular, el caso de variables aleatorias normales ha recibido un interés especial. De hecho, en esta tesis vamos a trabajar bajo el supuesto de que las variables aleatorias  $X$  y  $Y$ , con parámetros  $(\mu_x, \sigma_x)$  y  $(\mu_y, \sigma_y)$ , donde  $\mu_x$  y  $\sigma_x^2$  son la media y la varianza de  $X$  y  $\mu_y$  y  $\sigma_y^2$  son la media y la varianza de  $Y$ . Además supondremos que  $X$  y  $Y$  son independientes.

En la literatura estadística el problema de estimación del parámetro  $\theta$ , ya sea estimación puntual o por intervalos cuando  $X$  y  $Y$  son normales e independientes, ha sido abordado por varios autores, Mazumdar (1970), Downton (1973), Woodward y Kelley (1977), Voinov (1984), Ivishn y Lumelskii (1985) y Mukherjee y Sharan (1985), Reiser

y Guttman (1986), entre otros. En muchos de los trabajos antes mencionados, el enfoque de solución es la estimación insesgada de mínima varianza. Bajo este enfoque, el objetivo principal es construir estimadores de mínima varianza para  $\theta$ ; así como para la varianza de dichos estimadores. Es importante mencionar aquí que en varios de estos trabajos se hacen supuestos sobre los parámetros de las distribuciones normales de  $X$  y  $Y$ . Por ejemplo, varianzas iguales, varianzas conocidas, etc. Por otro lado, existen pocos trabajos en la literatura estadística que abordan el problema de estimación de  $\theta$  desde un enfoque diferente al empleado en los trabajos antes mencionados. Por ejemplo, Enis y Geiser (1971) utilizan un enfoque Bayesiano para la estimación de  $\theta$ . Por otro lado, Montoya (2008) hace inferencias sobre el parámetro de interés  $\theta$  mediante el enfoque de verosimilitud perfil. Montoya (2008) considera a todos los parámetros desconocidos.

Como vemos hay una gran variedad de trabajos dedicados a la estimación del parámetro  $\theta = P(X < Y)$ , cuando  $X$  y  $Y$  son normales e independientes. Notemos también que resulta sorprendente la inclinación que existe hacia el uso de un enfoque clásico para hacer inferencias sobre  $\theta$ ; es decir, el uso de estimadores insesgados de mínima varianza para hacer estimación puntual de  $\theta$  y construir intervalos de confianza simétricos para  $\theta$ . Parece curioso que la verosimilitud perfil, un método estadístico usado generalmente para estimar un parámetro de interés en presencia de otros de estorbo, casi no haya sido utilizado para estimar a  $\theta$ . En esta tesis usaremos el enfoque estadístico de verosimilitud perfil para hacer inferencias sobre el parámetro  $\theta = P(X < Y)$ . Además, ejemplificaremos la metodología estadística con datos reales de fuerza de un material (acero corrugado) y datos simulados de escenarios hipotéticos de estrés.

# Capítulo 2

## Conceptos básicos de inferencia estadística

En este capítulo revisaremos algunos conceptos que son básicos en la teoría de inferencia estadística, los cuales utilizaremos a lo largo de esta tesis. Por ejemplo, definiremos conceptos generales tales como: la función de verosimilitud, la función de verosimilitud relativa, intervalos de verosimilitud, intervalos de verosimilitud-confianza, la función de verosimilitud perfil o maximizada, entre otros.

### 2.1. Función de verosimilitud

Supongamos que  $X = (X_1, \dots, X_n)$  es un vector de variables aleatorias y  $E_x$  es un evento observado en términos de  $X$  con probabilidad  $P(E_x; \theta)$  que depende de un número finito de parámetros reales desconocidos  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ , donde  $\Theta$  es la región de valores posibles que puede tomar  $\theta$ . La verosimilitud de  $\theta$  se define como la probabilidad de observar  $E_x$  pero vista como función de  $\theta$ ,

$$L(\theta; x) = P(E_x; \theta). \quad (2.1)$$

La verosimilitud en (2.1) la definimos para el caso general, pues un evento observado  $E_x$  lo podríamos asociar a variables aleatorias continuas o discretas, que pueden ser independientes e idénticamente distribuidas o dependientes con alguna función de probabilidad conjunta paramétrica. Para los fines que perseguimos en esta tesis consideraremos que  $X = (X_1, \dots, X_n)$  es un vector de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

#### ▪ *Caso discreto*

Supongamos que  $X = (X_1, \dots, X_n)$  es una muestra de variables aleatorias discretas, independientes e idénticamente distribuidas con función de probabilidad  $f(x; \theta)$ . Si

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una muestra observada de  $X = (X_1, \dots, X_n)$  entonces

$$\begin{aligned} P(E_x; \theta) &= P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$L(\theta; x) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta).$$

### ■ *Caso continuo*

Supongamos que  $X = (X_1, \dots, X_n)$  es una muestra de variables aleatorias continuas, independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad  $f(x; \theta)$ . Si  $x_i - \epsilon \leq X_i \leq x_i + \epsilon$ , donde  $x_i$  y  $\epsilon$  son valores fijos y conocidos ( $\epsilon > 0$ ), entonces

$$\begin{aligned} P(E_x; \theta) &= P(x_1 - \epsilon < X_1 < x_1 + \epsilon, \dots, x_n - \epsilon < X_n < x_n + \epsilon; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n P(x_i - \epsilon < X_i < x_i + \epsilon; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{x_i - \epsilon}^{x_i + \epsilon} f(t; \theta) dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$L(\theta; x) = \prod_{i=1}^n \int_{x_i - \epsilon}^{x_i + \epsilon} f(t; \theta) dt. \quad (2.2)$$

En la práctica, la cantidad  $x_i$  la podemos considerar como un valor observado de  $X_i$  obtenida mediante un instrumento que tiene un mecanismo de medición simétrico y de precisión conocida  $\epsilon > 0$  para medir la magnitud de  $X_i$ . Notemos que la expresión (2.2) puede ser difícil de manejar para hacer cálculos matemáticos o computacionales, por ejemplo calcular derivadas y máximos. A continuación veremos una forma de aproximar la verosimilitud dada en (2.2); esto con el objetivo de obtener una expresión más simple.

El teorema de valor medio para integrales definidas, establece que si  $g(x)$  es una función continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b g(x) dx = (b - a)g(c).$$

Por lo tanto, si la función de densidad  $f(x; \theta)$  cumple con las condiciones del teorema de valor medio para integrales definidas, entonces la  $i$ -ésima integral en (2.2) es  $2\epsilon f(x_i; \theta)$  para algún  $x' \in [x_i - \epsilon, x_i + \epsilon]$ . Si  $f(x; \theta)$  es aproximadamente constante, para todo valor plausible de  $\theta$ , en  $[x_i - \epsilon, x_i + \epsilon]$  se tiene que  $f(x'; \theta) \approx f(x_i; \theta)$ . Entonces, si esto es válido para cualquier  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  y  $\epsilon$  no depende de  $\theta$ , una aproximación a la función de verosimilitud dada en (2.2) es

$$\begin{aligned} L(\theta; x) &= \prod_{i=1}^n \int_{x_i - \epsilon}^{x_i + \epsilon} f(t; \theta) dt \\ &= \prod_{i=1}^n 2\epsilon f(x_i; \theta) \\ &\approx \prod_{i=1}^n 2\epsilon f(x_i; \theta) \\ &\propto \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta). \end{aligned} \tag{2.3}$$

A la expresión (2.3) se le llama “aproximación continua” a la función de verosimilitud.

Notemos que por medio de la verosimilitud podemos combinar datos de experimentos distintos de una manera muy sencilla. Sabemos que la probabilidad conjunta de eventos independientes es el producto de sus probabilidades individuales. Así, la verosimilitud combinará conjuntos de datos que provienen de eventos distintos e independientes por medio del producto de las verosimilitudes individuales basadas en cada uno de estos conjuntos de datos.

Nos parece importante mencionar que la verosimilitud no es una función de probabilidad. La probabilidad es una función de conjuntos que tiene como dominio una  $\sigma$ -álgebra y como contradominio el intervalo  $[0, 1]$ . En cambio la verosimilitud es una función puntual cuyo dominio es el espacio parametral y su contradominio son los reales.

La función de verosimilitud juega un papel fundamental en la Inferencia Estadística. Su rol principal es inferir qué valores del vector de parámetros  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$  son razonables para la función de densidad de probabilidad  $f(x; \theta)$  que haya sido elegida para el fenómeno aleatorio de interés, a partir de un evento observado (datos). Nótese que esto es particularmente relevante después de un experimento, cuando ya fueron observados los datos.

### 2.1.1. Plausibilidad

La función de verosimilitud  $L(\theta; x)$  nos permite ordenar la credibilidad o plausibilidad entre los valores de  $\theta$  a la luz de los datos. Si  $L(\theta_1; x) > L(\theta_2; x)$  entonces de (2.1)

se sigue que  $P(E_x; \theta_1) > P(E_x; \theta_2)$ . Es decir, el evento observado  $E_x$  es más probable cuando el parámetro  $\theta$  toma el valor  $\theta_1$  que cuando toma el valor  $\theta_2$ . Así, el cociente de verosimilitudes

$$\frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_2; x)} = \frac{P(E_x; \theta_1)}{P(E_x; \theta_2)},$$

es una medida de la plausibilidad de  $\theta_1$  relativa a  $\theta_2$  basandonos en el evento observado  $E_x$ . El cociente  $L(\theta_1; x)/L(\theta_2; x) = k$  significa que el valor  $\theta_1$  es  $k$  veces más plausible que el valor  $\theta_2$  en el sentido de que  $\theta_1$  hace al evento observado  $k$  veces más probable de lo que lo hace  $\theta_2$ .

### 2.1.2. Estimador de máxima verosimilitud

La función de verosimilitud  $L(\theta; x)$  es una medida de la plausibilidad de diferentes valores posibles de  $\theta$ . Así, un estimador puntual razonable de  $\theta$  es aquel valor de  $\theta$  que maximiza  $L(\theta; x)$ . El estimador de máxima verosimilitud (emv) de  $\theta$  es cualquier valor  $\hat{\theta}$  en el espacio parametral,  $\hat{\theta} \in \Theta$ , que cumple que

$$L(\hat{\theta}; x) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; x).$$

Notemos que  $L(\theta; x) = P(E_x; \theta) \leq 1$  debido a que  $P(E_x; \theta)$  es una probabilidad como función de  $\theta$ . Así, el supremo de  $L(\theta; x)$  en  $[0, 1]$  existe y es finito. Sin embargo, puede ocurrir que el emv no existe, o si existe, puede ser que no sea único. De aquí en adelante procederemos como si existiera un único valor  $\hat{\theta} \in \Theta$  que maximiza a la función de verosimilitud  $L(\theta; x)$ . Es decir, supondremos que el emv existe y es único.

El emv del parámetro  $\theta$  es el valor más plausible de  $\theta$ . Es decir, el emv  $\hat{\theta}$  es el valor de  $\theta$  que explica mejor al evento observado en el sentido de que maximiza su probabilidad bajo el modelo de probabilidad propuesto para el fenómeno aleatorio de interés.

### 2.1.3. Invarianza

En algunas ocasiones se utilizan reparametrizaciones de un modelo de probabilidad por conveniencia matemática, conveniencia computacional, interés en un parámetro que es función de otros que aparecen en el modelo, etc. Para estas situaciones la invarianza funcional es una propiedad muy conveniente de la verosimilitud. Significa que, en términos de plausibilidad, cualquier declaración cuantitativa acerca de  $\theta$  implica la misma declaración cuantitativa acerca de cualquier función uno a uno de  $\theta$ . Una función  $g(\theta)$  se llama función uno a uno si para cada valor de  $\theta$  existe un valor único  $g(\theta)$  y viceversa.

**Teorema 1.** *Supongamos que  $L(\theta; x)$  es la función de verosimilitud de  $\theta \in \Theta$ . Sea  $g(\theta) : \Theta \rightarrow \Delta$  una función uno a uno. Si*

$$\frac{L(\theta_1; x)}{L(\theta_2; x)} = k$$

entonces

$$\frac{L(\delta_1; x)}{L(\delta_2; x)} = k,$$

donde  $\delta_1 = g(\theta_1)$  y  $\delta_2 = g(\theta_2)$ .

*Demostración.* Se sigue por directa sustitución algebraica.  $\square$

Una consecuencia inmediata de la propiedad de invarianza de la función de verosimilitud  $L(\theta; x)$  es la invarianza del emv de  $\theta$ .

**Teorema 2.** Si  $g(\theta) : \Theta \rightarrow \Delta$  es una función uno a uno y  $\hat{\theta}$  es el emv de  $\theta$  entonces el emv de  $\delta = g(\theta)$  es  $\hat{\delta} = g(\hat{\theta})$ .

*Demostración.* Supongamos que  $L(\theta; x)$  es la función de verosimilitud de  $\theta$ . Como  $\delta = g(\theta)$  es una función uno a uno entonces  $\theta = g^{-1}(\delta)$ , donde  $g^{-1}$  es la función inversa de  $g$ . Así, la función de verosimilitud de  $\delta$  es  $L'(\delta; x) = L[\theta = g^{-1}(\delta); x]$ . Entonces,

$$L'(\hat{\delta}; x) = \sup_{\delta \in \Delta} L'(\delta; x) = \sup_{\delta \in \Delta} L[\theta = g^{-1}(\delta); x] = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; x) = L(\hat{\theta}; x).$$

Así,  $\hat{\theta} = g^{-1}(\hat{\delta})$ . Por lo tanto,  $\hat{\delta} = g[g^{-1}(\hat{\delta})] = g(\hat{\theta})$ .  $\square$

Un ejemplo simple de invarianza funcional es el siguiente. Si  $\theta > 0$ ,  $\hat{\theta}$  es el emv de  $\theta$  y  $\delta = \log \theta$ , entonces por medio de la invarianza funcional, se tiene que el emv de  $\delta$  es  $\hat{\delta} = \log \hat{\theta}$ .

## 2.2. Función de verosimilitud relativa

La función de verosimilitud relativa es una normalización o estandarización de la función de verosimilitud que permite ordenar la plausibilidad de los valores de  $\theta$ . La función de verosimilitud relativa de  $\theta$  se define como

$$R(\theta; x) = \frac{L(\theta; x)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; x)}.$$

Como el supremo de  $L(\theta; x)$  en  $[0, 1]$  existe y es finito, entonces la función de verosimilitud relativa existe y la podemos emplear para hacer declaraciones cuantitativas acerca del grado sobre el cual valores del parámetro describen mejor el fenómeno aleatorio de interés, con base en los eventos observados. Notemos que cuando el emv del parámetro  $\theta$  existe y es único entonces la función verosimilitud relativa de  $\theta$  la podemos escribir como

$$R(\theta; x) = \frac{L(\theta; x)}{L(\hat{\theta}; x)},$$

donde  $\hat{\theta}$  es el emv del parámetro  $\theta$ .

La función de verosimilitud relativa de  $\theta$  nos permite medir la plausibilidad de cualquier valor específico de  $\theta$  con respecto al emv de  $\theta$ ,  $\hat{\theta}$ . Valores de  $\theta$  con  $R(\theta; x)$  cercanos a 1 son muy plausibles mientras que valores cercanos a 0 son poco plausibles, a la luz de los datos.

### 2.3. Intervalos de verosimilitud

En la Sección 2.2, mediante la verosimilitud relativa, obtuvimos la plausibilidad de un cierto valor específico de  $\theta$  con respecto al emv de  $\theta$ ,  $\hat{\theta}$ , dada la muestra observada. Sin embargo, en algunas ocasiones puede ser de nuestro interés especificar una región para  $\theta$ , donde cada valor de  $\theta$  dentro de esta región tenga al menos una plausibilidad especificada. Esta es una manera, diferente a la estimación puntual, de hacer inferencias sobre el parámetro  $\theta$  usando el enfoque de verosimilitud.

Una región de verosimilitud o intervalo de verosimilitud de nivel  $c$  para  $\theta$ ,  $IV(c)$ , se define como

$$IV(c) = \{\theta : R(\theta; x) \geq c, \quad 0 \leq c \leq 1\}.$$

Cada valor de  $\theta$  dentro del  $IV(c)$  tiene verosimilitud relativa mayor o igual que  $c$  y todo valor de  $\theta$  fuera tiene verosimilitud relativa menor que  $c$ . Por lo tanto, el  $IV(c)$  separa los valores plausibles de  $\theta$  de los no plausibles a un nivel  $c$ .

Cuando  $\theta$  es unidimensional, podemos obtener un  $IV(c)$  trazando una línea horizontal en la gráfica de  $R(\theta; x)$  a una distancia  $c$  paralela al eje cartesiano correspondiente a  $\theta$ , y calculando los valores de  $\theta$  asociados a la intersección de la línea con  $R(\theta; x)$ . Variando  $c$  de 0 a 1 obtenemos un conjunto jerarquizado y anidado de intervalos, el cual es equivalente a la gráfica de  $R(\theta; x)$ . Notemos que el emv  $\hat{\theta}$  está contenido en todos los intervalos de verosimilitud. Además, cuando  $c$  tiende a uno el  $IV(c)$  converge al emv de  $\theta$ ,  $\hat{\theta}$ .

Para que tengamos una mayor comprensión del cambio en la plausibilidad de los valores de  $\theta$  dentro del  $IV(c)$ , es recomendable, al menos, acompañar al  $IV(c)$  del valor del emv de  $\theta$ ,  $\hat{\theta}$ . Esto nos da una idea de la simetría de la función de verosimilitud con respecto a  $\hat{\theta}$ . De hecho es mucho más recomendable que proporcionemos  $\hat{\theta}$  junto con varios intervalos de verosimilitud de nivel  $c$ . Por ejemplo podemos usar  $c = 0.25, 0.15, 0.036$ . En la siguiente sección veremos como es posible asignar una cierta confianza a los  $IV(c)$  y porqué estos valores de  $c$  son importantes.

## 2.4. Intervalos de verosimilitud-confianza

Supongamos que  $X = (X_1, \dots, X_n)$  es una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad de probabilidad  $f(x; \theta)$ , donde  $\theta$  es un parámetro escalar desconocido. Si el valor verdadero de  $\theta$  es  $\theta_0$ , entonces podemos calcular, a partir de la muestra observada, un intervalo  $[A, B]$  para ese valor verdadero  $\theta_0$ . Así, los extremos del intervalo  $[A, B]$  son variables aleatorias puesto que su valor varía cuando cambia la muestra. Notemos que debido a que los extremos del intervalo  $[A, B]$  son variables aleatorias, este puede algunas veces incluir y en otras no al valor verdadero  $\theta_0$ .

A la probabilidad de que el intervalo  $[A, B]$  incluya o cubra al verdadero valor del parámetro  $\theta_0$  se le llama probabilidad de cobertura,  $PC(\theta_0)$ , y se define como

$$PC(\theta_0) = P(A \leq \theta_0 \leq B; \theta = \theta_0).$$

Podemos interpretar a  $PC(\theta_0)$  como la fracción de veces que el intervalo  $[A, B]$  incluye o contiene al verdadero valor del parámetro  $\theta$ ,  $\theta_0$ , en un número muy grande de repeticiones de la muestra con  $\theta$  fijo en  $\theta_0$ .

Un intervalo  $[A, B]$  se llama intervalo de confianza cuando su probabilidad de cobertura  $PC(\theta_0)$  no depende de  $\theta_0$ . Aunque en la literatura estadística existen otras definiciones de probabilidad de cobertura, nosotros adoptaremos esta definición, pues es clara, adecuada y suficiente para los fines de esta tesis.

Recordemos que un valor específico de  $\theta$ , digamos  $\theta_0$ , esta en el IV(c) si y solo si

$$R(\theta_0; x) \geq c$$

o equivalentemente

$$-2 \log R(\theta_0; x) \leq -2 \log c.$$

Por lo tanto la probabilidad de cobertura del IV(c) es

$$\begin{aligned} PC(\theta_0) &= P[\theta_0 \in IV(c); \theta_0] \\ &= P[RV_n \leq -2 \log(c); \theta_0], \end{aligned}$$

donde  $RV_n = -2 \log R(\theta_0; x)$  es la estadística de la razón de verosimilitud para un  $\theta$  fijo en  $\theta_0$ .

Existe teoría asintótica que da una buena aproximación a la distribución de  $RV_n$ . Bajo ciertas condiciones de regularidad, la estadística de la razón de verosimilitud  $RV_n = -2 \log R(\theta_0; x)$  converge en distribución a una ji-cuadrada con un grado de libertad para todo  $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$ . Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P[RV_n \leq x] = P[\chi_{(1)}^2 \leq x],$$

para todo  $x$  positivo. Para mayores detalles de la prueba ver Serfling (1980; pág. 155-156). Así, cuando  $x = -2\log(c)$  se tiene que  $c = \exp(-x/2)$ . Por lo tanto, si seleccionamos  $x = q_{1-\alpha}$ , donde  $q_{1-\alpha}$  es el cuantil  $(1 - \alpha)$  de una distribución ji-cuadrada con un grado de libertad se tiene que el IV(c) tiene una probabilidad de cobertura del  $100(1 - \alpha)\%$ , donde  $c = \exp(-q_{1-\alpha}/2)$ . Así, el IV(c) es también un intervalo o región de confianza para el parámetro  $\theta$  y toma el nombre de intervalo o región de verosimilitud-confianza para  $\theta$ .

Los valores 2.706, 3.841 y 6.635 son los cuantiles 0.90, 0.95 y 0.99 de una distribución ji-cuadrada con un grado de libertad, respectivamente. Así, los IV(c) con  $c=0.258$ , 0.146 y 0.036 tienen una probabilidad de cobertura aproximada del 90%, 95% y 99% respectivamente. En la Tabla 2.1 presentamos un resumen de la probabilidad de cobertura para los IV(c) antes mencionados.

$(1 - \alpha)$	$c$	$q_{1-\alpha}$
0.90	0.258	2.706
0.95	0.146	3.841
0.99	0.036	6.635

Tabla 2.1: Confianza aproximada de los intervalos de verosimilitud.

## 2.5. Función de verosimilitud perfil

En muchas ocasiones sucede que el modelo paramétrico que elegimos para modelar un fenómeno aleatorio de interés se encuentra compuesto por distribuciones de probabilidad etiquetadas o indexadas por varios parámetros, donde sólo alguno o algunos son de interés fundamental y los restantes son parámetros que pueden ser considerados como de estorbo. También suele suceder que el parámetro que nos interesa no aparece en el modelo; sin embargo podemos hacer una reparametrización para incluirlo.

Un enfoque estadístico que sirve para estimar por separado un parámetro de interés en presencia de parámetros de estorbo es el enfoque de “verosimilitud perfil”. Cabe mencionar que la verosimilitud perfil juega un papel fundamental en esta tesis, pues aquí utilizaremos esta metodología para hacer inferencias sobre un parámetro de interés  $\theta$  en presencia de otros de estorbo.

La función de verosimilitud perfil del parámetro de interés  $\theta$ , en presencia de un parámetro de estorbo  $\lambda$ , se define como

$$L_P(\theta; x) = \max_{\lambda|\theta} L(\theta, \lambda; x) = L[\theta, \hat{\lambda}(\theta, x); x], \quad (2.4)$$

donde  $\widehat{\lambda}(\theta, x)$  es el estimador de máxima verosimilitud restringido (emvr) de  $\lambda$  para un valor específico de  $\theta$ . El emvr  $\widehat{\lambda}(\theta, x)$  es el valor de  $\lambda$  que tiene mayor plausibilidad para ese valor fijo de  $\theta$ , dada la muestra observada  $x$ . Es decir, la función de verosimilitud perfil se obtiene maximizando la función de verosimilitud  $L(\theta, \lambda; x)$  sobre  $\lambda$  pero fijando  $\theta$ . Notemos que la expresión (2.4) se obtiene reemplazando el parámetro de estorbo  $\lambda$  por su emvr  $\widehat{\lambda}(\theta, x)$ , que depende de  $\theta$ , en la función de verosimilitud global  $L(\theta, \lambda; x)$ .

La función de verosimilitud perfil relativa de un parámetro de  $\theta$ , que se define como

$$R_P(\theta; x) = \frac{L_P(\theta; x)}{\max_{\theta \in \Theta} L_P(\theta; x)}.$$

Algunas propiedades importantes que tiene la función de verosimilitud perfil son las siguientes:

- El emv perfil de  $\theta$  es igual a el emv global o no restringido  $\widehat{\theta}$ .
- La estadística de la razón de verosimilitud perfil

$$RVP_n = -2 \log R_P(\theta_0; x),$$

converge en distribución a una Ji-cuadrada con un grado de libertad para todo  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ . Los detalles de la prueba se pueden ver en Serfling (1980).

- Del punto anterior tenemos que un intervalo o región de verosimilitud de nivel  $c$ ,  $IV(c)$ , obtenido a partir de la función de verosimilitud perfil de  $\theta$ , también es un intervalo o región de confianza aproximada para el parámetro de interés  $\theta$ .

La verosimilitud perfil es un método simple y fácil de utilizar cuando deseamos estimar por separado un parámetro de interés en presencia de otros considerados de estorbo. En esta tesis, usaremos el enfoque de verosimilitud perfil (capítulo 3 y 4) para hacer inferencias sobre el parámetro de confiabilidad  $\theta = P(X < Y)$  en los modelos Tensión-Fuerza cuando  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias normales e independientes

## 2.6. Prueba de bondad de ajuste de modelos

En algunas ocasiones es difícil discernir qué modelo, dentro de un grupo de modelos, es razonable para un fenómeno aleatorio de interés. Un criterio comúnmente usado para tal propósito es seleccionar el modelo que mejor se ajuste a los datos. A continuación, veremos dos métodos gráficos con los que de una manera fácil podemos evaluar el ajuste del modelo elegido para representar a dicho fenómeno.

### 2.6.1. Papel de probabilidad

El papel de probabilidad es un método gráfico comunmente usado para determinar si la distribución que hallamos propuesto para modelar un fenómeno aleatorio de interés, basado en el contexto del problema, en un análisis visual de los datos, etc., se ajusta a las observaciones del fenómeno bajo estudio. El problema fundamental detrás de la construcción de un papel de probabilidad, es lograr una linealización de la función de distribución  $F$  elegida para modelar los datos.

Para construir la gráfica del papel de probabilidad primero hacemos

$$p = F(x_p; \alpha, \beta), \quad (2.5)$$

donde  $x_p$  es el cuantil  $p$  ( $0 < p < 1$ ) de la familia de distribuciones  $F(x; \alpha, \beta)$  propuesta para modelar datos y donde  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros desconocidos. El siguiente paso es encontrar una función  $g(\cdot)$  que linealice la igualdad (2.5); es decir, encontrar una función que  $g(\cdot)$  tal que

$$y = g(p) = g[F(x_p; \alpha, \beta)] = mh(x_p) + b, \quad (2.6)$$

donde  $m$  es la pendiente de la recta,  $b$  es la ordenada en el origen y  $h(\cdot)$  es una función de  $x_p$ . Nótese que  $m$  y  $b$  pueden depender de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

Luego de encontrar la linealización para la familia de distribuciones  $F(x; \alpha, \beta)$ , procedemos a ordenar, de menor a mayor, las observaciones en la muestra. Es decir, acomodamos la muestra  $x_1, \dots, x_n$  como  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ , donde  $x_{(1)} = \min\{x_1, \dots, x_n\}$  es la observación más pequeña y  $x_{(n)} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$  es la observación más grande. Por último, graficamos el conjunto de puntos  $\{h(x_{(i)}), g(p_i)\}$ , donde  $p_i = (i - 0.5)/n$ , para  $i = 1, \dots, n$ , son las probabilidades asociadas a los cuantiles empíricos  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ .

Si los puntos de la gráfica del papel de probabilidad se sitúan aproximadamente a lo largo de una línea recta, entonces se tiene evidencia de que la distribución propuesta se ajusta de manera adecuada a los datos. Por el contrario, si los puntos se desvían significativamente de una línea recta entonces el modelo elegido no es el apropiado. Nótese que determinar el ajuste de los puntos a la línea recta es subjetivo. Sin embargo, es posible proponer una línea recta a partir de los datos. Una propuesta natural es la linealización dada en (2.6), en la cual reemplazaremos los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  por estimadores  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$ , respectivamente. Por ejemplo, los estimadores de máxima verosimilitud. Por lo tanto

$$\hat{y} = \hat{m}h(x) + \hat{b}. \quad (2.7)$$

Así, si del conjunto de puntos se sitúan aproximadamente a lo largo de la línea recta dada en (2.7), podemos usar esto como evidencia de que la familia propuesta se ajusta

razonablemente bien a los datos.

Para los fines que perseguimos en este trabajo y a manera de ejemplo, a continuación construiremos un papel de probabilidad normal y uno exponencial.

### Papel de probabilidad normal

Supongamos que  $x_1, \dots, x_n$  es una muestra observada de una variable aleatoria  $X$  que representa un fenómeno aleatorio de interés. Supongamos que  $X$  tiene una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Entonces, de acuerdo a la ecuación dada en (2.5) tenemos que

$$\begin{aligned} p = F(x; \mu, \sigma) &= P[X \leq x; \mu, \sigma] \\ &= P\left[\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}; \mu, \sigma\right] \\ &= \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $\Phi$  es la función de densidad acumulada normal estándar. Ahora, si aplicamos la inversa de  $\Phi$  en (2.8) tenemos que

$$\Phi^{-1}(p) = \frac{1}{\sigma}x - \frac{\mu}{\sigma}.$$

Por lo tanto, de (2.6) se sigue que

$$y = mh(x) + b, \quad (2.9)$$

donde  $y = g(p) = \Phi^{-1}(p)$ ,  $m = 1/\sigma$ ,  $b = \mu/\sigma$  y  $h(x) = x$ . Así, la expresión (2.9) será nuestra linealización para la familia  $F(x; \mu, \sigma)$  de distribuciones normales. Por lo tanto, las parejas de puntos que constituirán nuestro papel de probabilidad normal serán  $\{h(x_{(i)}), g(p_i)\} = \{x_{(i)}, \Phi^{-1}(p_i)\}$ , donde  $p_i = (i - 0.5)/n$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

Ahora, necesitamos estimar la recta que “mejor” ajuste a los puntos  $\{x_{(i)}, \Phi^{-1}(p_i)\}$  bajo el supuesto de normalidad. Para ello utilizaremos los emv de  $\mu$  y  $\sigma$ ,  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$ . Así, la recta estimada es

$$\frac{1}{\hat{\sigma}}x - \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}},$$

donde

$$\hat{\mu} = \bar{x} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (2.10)$$

## Papel de probabilidad exponencial

Sea  $x_1, \dots, x_n$  una muestra observada de una variable aleatoria  $X$  con función de distribución exponencial  $F(x; \lambda) = 1 - \exp\left(\frac{-x}{\lambda}\right)$ . Supongamos que ésta proviene de una familia de distribuciones exponenciales  $F(x; \lambda)$ . De (2.5) tenemos que

$$p = 1 - \exp\left(\frac{-x}{\lambda}\right).$$

o equivalentemente

$$y = \log(1 - p) = \frac{1}{\lambda}x. \quad (2.11)$$

Así

$$y = mx, \quad (2.12)$$

donde  $y = g(p) = \log(1 - p)$ ,  $m = 1/\lambda$ ,  $b = 0$  y  $h(x) = x$ . Así, el conjunto de puntos que constituirán la gráfica del papel de probabilidad será  $\{h(x_{(i)}), g(p_i)\} = \{x_{(i)}, \log(1 - p_i)\}$ , donde  $p_i = (i - 0.5)/n$ , para  $i = 1, \dots, n$  y  $x_{(i)}$  son las estadísticas de orden.

Ahora, teniendo la linealización (2.12), necesitamos estimar la recta que “mas” ajuste a los datos, bajo el modelo exponencial. Para ello utilizaremos el emv de  $\lambda$ ,  $\hat{\lambda}$ . Así, la recta estimada es

$$\hat{y} = \frac{1}{\hat{\lambda}}x,$$

donde  $\hat{\lambda} = \bar{x}$ . A continuación veremos otro método, que al igual que la gráfica de papel de probabilidad, nos sirve para ver si el modelo paramétrico elegido se ajusta a los datos observados.

### 2.6.2. Gráfica cuantil-cuantil

Una gráfica cuantil-cuantil (*Q-Q plot*) es un método que sirve para validar al modelo paramétrico que elegimos para representar algún fenómeno de interés observado. Un *Q-Q plot* básicamente compara los cuantiles empíricos con los cuantiles teóricos estimados de la distribución que hallamos propuesto.

Supóngase que se propone una función de distribución  $F(x; \alpha, \beta)$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros, para modelar el comportamiento probabilístico de un fenómeno aleatorio de interés. Sea  $x_1, \dots, x_n$  una muestra observada de dicho fenómeno. Para hacer un *Q-Q plot* primero identificamos a los cuantiles empíricos y teóricos. Los cuantiles empíricos ( $Q_p^E$ ) son la muestra ordenada de menor a mayor; es decir,  $Q_p^E = x_{(i)}$ , donde  $x_{(i)}$  es la

$i$ -ésima estadística de orden asociada a la probabilidad  $p_i = (i - 0.5)/n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Los cuantiles teóricos los obtenemos mediante la inversa de la función de distribución,  $Q_{p_i}^T = F^{-1}(p_i, \alpha, \beta)$ . Posteriormente, para obtener los cuantiles teóricos estimados ( $\widehat{Q}_{p_i}^T$ ) reemplazamos  $\alpha$  y  $\beta$  por sus respectivos estimadores,  $\widehat{\alpha}$  y  $\widehat{\beta}$ ; es decir,  $\widehat{Q}_{p_i}^T = F^{-1}(p_i, \widehat{\alpha}, \widehat{\beta})$ . Por último, el conjunto de puntos que debemos graficar es  $\{Q_{p_i}^E, \widehat{Q}_{p_i}^T\}$ , donde  $p_i = 0.5/n$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Si efectivamente la distribución propuesta se ajusta razonablemente a los datos, entonces los puntos en el  $Q$ - $Q$  plot se aproximarán a la recta  $y = x$ . Si por el contrario, las puntos en el  $Q$ - $Q$  plot se desvían significativamente de la recta de  $45^\circ$ , podemos tomar esto como evidencia de que el modelo elegido no es el adecuado para los datos.

### **$Q$ - $Q$ plot normal**

Sea  $x_1, \dots, x_n$  una muestra observada de una variable aleatoria  $X$  que tiene una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$ . Entonces, la probabilidad  $p$  asociada a un cuantil  $Q_p$  de esta distribución es

$$p = \Phi \left( \frac{Q_p - \mu}{\sigma} \right).$$

Por lo tanto el cuantil  $Q_p$  normal es

$$Q_p = \Phi^{-1}(p)\sigma + \mu. \quad (2.13)$$

Para encontrar los cuantiles teóricos estimados,  $\widehat{Q}_p$ , reemplazaremos a  $\mu$  y  $\sigma$  en (2.13) por sus estimadores. Por ejemplo, los estimadores de máxima verosimilitud de  $\mu$  y  $\sigma$  son:

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{y} \quad \widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Entonces,

$$\widehat{Q}_p = \Phi^{-1}(p)\widehat{\sigma} + \widehat{\mu}.$$

Así, el conjunto de puntos a graficar será  $\{\widehat{Q}_{p_i}, x_{(i)}\}$ , donde  $x_{(i)}$  son las estadísticas de orden y  $p_i = (i - 0.5)/n$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### **$Q$ - $Q$ plot exponencial**

Sea  $y_1, y_2, \dots, y_n$  una muestra observada de una variable aleatoria exponencial con media  $\lambda$ . Entonces la probabilidad  $p$  asociada a un cuantil  $Q_p$  de esta distribución está dada por

$$p = 1 - \exp \left( -\frac{Q_p}{\lambda} \right).$$

Por lo tanto, el cuantil  $Q_p$  exponencial es

$$Q_p = -\lambda \log(p - 1). \quad (2.14)$$

Los cuantiles teóricos estimados,  $\widehat{Q}_p$ , los obtendremos reemplazando  $\lambda$  en (2.14) por algún estimador  $\widehat{\lambda}$ . En este caso utilizaremos el emv de  $\lambda$ , el cual es

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Entonces

$$\widehat{Q}_p = -\widehat{\lambda} \log(p - 1).$$

Por lo tanto, el conjunto de puntos que debemos graficar es  $\{\widehat{Q}_{p_i}, y_{(i)}\}$ , donde  $y_{(i)}$  son las estadísticas de orden y  $p_i = (i - 0.5)/n$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### 2.6.3. Ejemplo

El siguiente ejemplo es completamente artificial y tiene por objetivo mostrar como el papel de probabilidad y el  $Q-Q$  plot pueden identificar cuando un modelo no es adecuado para un juego de datos y cuando si.

Simulamos un conjunto de 40 datos de una normal con media  $\mu=62$  y desviación  $\sigma=7$  (ver Tabla 2.2). Imaginemos que no sabemos que provienen de una normal y supongamos que una distribución exponencial puede ser adecuada para los datos. Claramente, un histograma podría servir en este caso para darnos cuenta de que sería casi absurdo querer ajustar una exponencial a los datos. Sin embargo, como se mencionó antes, este ejemplo es sólo ilustrativo.

En el inciso (a) de la Figura 2.1, mostramos un  $Q-Q$  plot normal y en el inciso (b) uno exponencial. Como es de esperarse, el  $Q-Q$  plot normal (a) no muestra evidencia suficiente para rechazar que la distribución normal se ajusta de manera razonable a los datos de la Tabla 4.1, pues el conjunto de puntos que constituyen el gráfico se aproximan a la línea recta de  $45^\circ$ . En contraste, el  $Q-Q$  plot exponencial (b) muestra que hay suficiente evidencia para rechazar que la distribución exponencial se ajuste a los datos.

En la Figura 2.2 (a) mostramos un papel de probabilidad normal y en la Figura 2.2 (b) uno exponencial. Notemos que se tiene un comportamiento muy similar al que observamos en la Figura 2.1; es decir, la distribución normal se ajusta razonablemente bien al conjunto de datos mientras que la exponencial no.

Dato	Valor	Dato	Valor	Dato	Valor	Dato	Valor
1	47.7	11	50.2	21	63.2	31	63.5
2	52.4	12	52.5	22	64.2	32	65.4
3	52.9	13	53.8	23	65.4	33	65.6
4	53.9	14	54.6	24	66.3	34	66.6
5	54.7	15	54.9	25	66.6	35	66.8
6	55.3	16	55.5	26	67.2	36	67.5
7	56.4	17	57.5	27	67.6	37	68.0
8	59.0	18	60.0	28	68.4	38	69.6
9	61.1	19	61.4	29	70.4	39	70.7
10	62.4	20	62.7	30	72.6	40	74.4

Tabla 2.2: Datos simulados de una normal con media  $\mu = 62$  y desviación  $\sigma = 7$ .

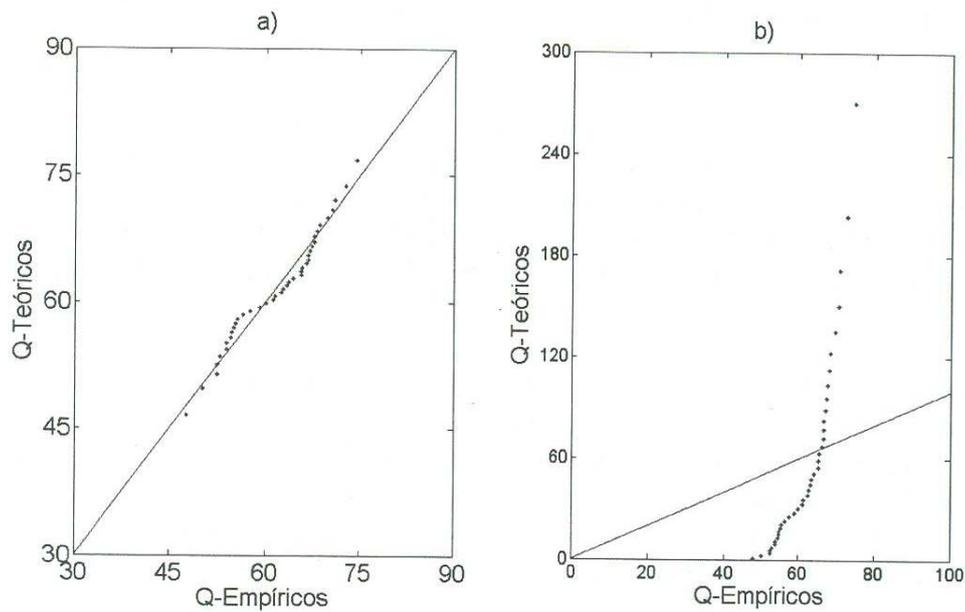


Figura 2.1: a) Se muestra un *Q-Q plot* normal y se observa que la distribución normal se ajusta razonablemente bien a los datos. b) Se muestra que hay suficiente evidencia para rechazar que la distribución exponencial se ajuste adecuadamente a los datos.

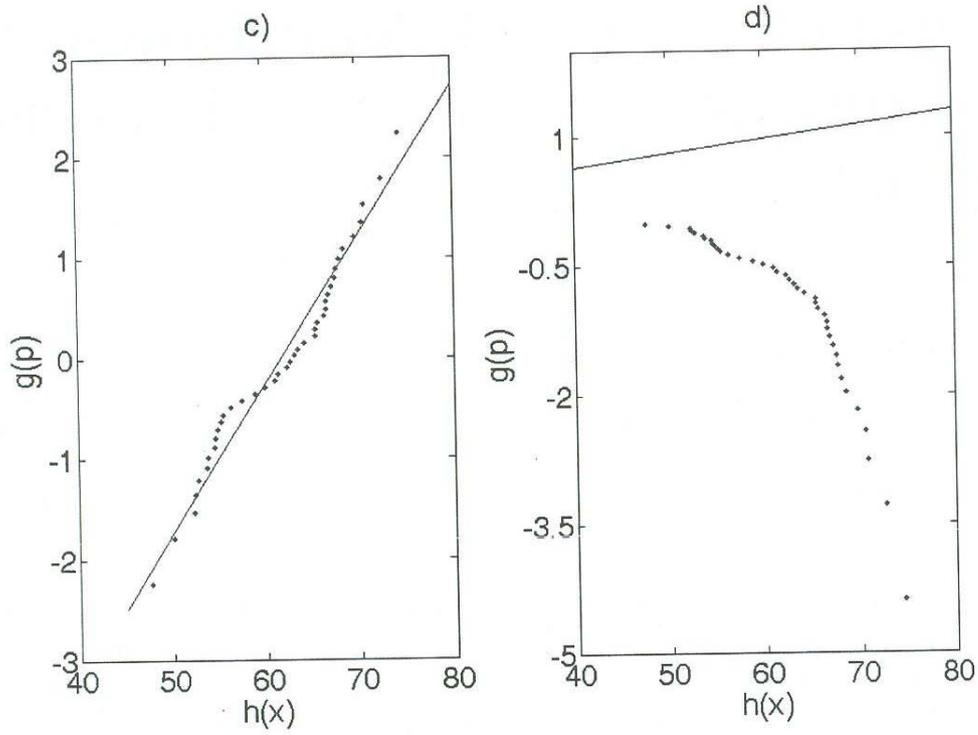


Figura 2.2: a) Se muestra un papel de probabilidad normal y se observa que la distribución normal ajusta razonablemente bien a los datos. b) Se presenta un papel de probabilidad exponencial el cual muestra suficiente evidencia para rechazar que la distribución exponencial se ajusta a los datos.

## Capítulo 3

# Verosimilitud perfil del parámetro de confiabilidad $\theta = P(X < Y)$ : Caso Normal

### 3.1. Introducción

Como mencionamos en el Capítulo 1, la confiabilidad bajo los modelos Tensión-Fuerza se mide a través del parámetro  $\theta = P(X < Y)$ , donde  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias que representan el estrés y la fuerza experimentadas por un componente, respectivamente.

En este capítulo abordaremos el problema de estimación estadística del parámetro  $\theta$  vía el enfoque de verosimilitud, para el caso en el que  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias normales e independientes con parámetros  $(\mu_x, \sigma_x)$  y  $(\mu_y, \sigma_y)$ , respectivamente. Se supondrá que las varianzas no son necesariamente iguales. Las inferencias serán basadas en dos muestras observadas  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ .

Lo que haremos en las siguientes secciones es definir la función de verosimilitud del vector de parámetros  $(\mu_x, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y)$ , basada en las muestras observadas  $x$  y  $y$ . Una vez obtenida la verosimilitud de  $(\mu_x, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y)$  se procederá a una reparametrización de ésta en términos del parámetro de interés  $\theta$ . Por último, daremos una expresión matemática para la verosimilitud perfil de este parámetro.

## 3.2. Función de verosimilitud de los parámetros del modelo

Supongamos que se tienen dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$  normales e independientes, con parámetros desconocidos  $(\mu_x, \sigma_x)$  y  $(\mu_y, \sigma_y)$ , respectivamente. Entonces, la función de verosimilitud de  $(\mu_x, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y)$  basada en las muestras observadas  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ , la representaremos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L(\mu_x, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y; x, y) &\propto \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_x} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x_i - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} \right] \prod_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_y} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(y_j - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \\ &\propto \sigma_x^{-n} \sigma_y^{-m} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 + \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2\sigma_y^2} \sum_{j=1}^m (y_j - \mu_y)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Notemos que el parámetro de interés es

$$\begin{aligned} \theta &= P(X < Y) \\ &= P(X - Y < 0) \\ &= P \left[ \frac{(X - Y) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} < \frac{\mu_y - \mu_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \right] \\ &= \Phi \left( \frac{\mu_y - \mu_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \right) = \Phi(\eta), \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $\eta = \frac{\mu_y - \mu_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}$  y  $\Phi$  es la función de distribución acumulada normal estándar.

Así, por la propiedad de invarianza de la verosimilitud, el emv de  $\theta$  es

$$\hat{\theta} = \Phi(\hat{\eta}), \quad \text{donde } \hat{\eta} = \frac{\hat{\mu}_y - \hat{\mu}_x}{\sqrt{\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2}}.$$

Notemos que  $\hat{\mu}_x$ ,  $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\mu}_y$  y  $\hat{\sigma}_y$  son los estimadores de máxima verosimilitud de  $\mu_x$ ,  $\sigma_x$ ,  $\mu_y$  y  $\sigma_y$ , respectivamente. Dichos estimadores son los que maximizan la función de verosimilitud de  $(\mu_x, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y)$  dada en (3.1), (véase la Sección 2.7). A continuación se presentan las expresiones de los emv de  $\mu_x$ ,  $\sigma_x$ ,  $\mu_y$  y  $\sigma_y$  respectivamente

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_x &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} & \hat{\sigma}_x^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ \hat{\mu}_y &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j = \bar{y} & \hat{\sigma}_y^2 &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y})^2 \end{aligned}$$

Como nuestro objetivo es hacer inferencias sobre el parámetro  $\theta$  y éste no aparece explícitamente en la verosimilitud dada en (3.1), resulta conveniente hacer una reparametrización en la que se incluya al parámetro  $\theta$ . Dicha reparametrización se presenta a continuación.

### 3.3. Reparametrización de la verosimilitud en términos de $\theta$

Para incluir al parámetro de interés  $\theta$  en la verosimilitud (3.1) primero despejaremos  $\mu_x$  de la ecuación dada en (3.2). Esto es,

$$\mu_x = \mu_x(\theta, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y) = \mu_y - \Phi^{-1}(\theta) \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}, \quad (3.3)$$

donde  $\Phi^{-1}$  es la inversa de la función de distribución normal estándar. Luego, reemplazando  $\mu_x$  por la expresión dada en (3.3) en la verosimilitud (3.1), obtenemos la función de verosimilitud de  $\theta$  y  $(\sigma_x, \mu_y, \sigma_y)$ , esto es

$$L(\theta, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y; x, y) \propto \sigma_x^{-n} \sigma_y^{-m} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n [x_i - \mu_y + \Phi^{-1}(\theta) \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}]^2 + \right. \\ \left. -\frac{1}{2\sigma_y^2} \sum_{j=1}^m (y_j - \mu_y)^2 \right\}. \quad (3.4)$$

Es importante señalar que la verosimilitud es invariante frente a reparametrizaciones (ver Sección 2.1.3), por lo tanto resulta irrelevante en términos matemáticos, quizá no en términos computacionales, la elección del parámetro que se desee despejar de (3.2).

### 3.4. Función de verosimilitud perfil de $\theta$

En la sección anterior logramos una reparametrización, la cual llevamos a cabo con el objetivo de incluir al parámetro  $\theta$  en la verosimilitud, esta expresión se muestra en (3.4). Nuestro objetivo ahora es hacer inferencias sobre el parámetro de interés  $\theta$  en presencia de los parámetros de estorbo  $(\sigma_x, \mu_y, \sigma_y)$ , haciendo uso de la verosimilitud perfil. Entonces la verosimilitud perfil del parámetro de interés  $\theta$  podemos obtenerla maximizando numéricamente (3.4) sobre  $(\sigma_x, \mu_y, \sigma_y)$  para cada valor fijo de  $\theta$ , esto es

$$L_P(\theta; x, y) \propto \max_{\mu_y, \sigma_y, \sigma_x | \theta} L(\theta, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y; x, y). \quad (3.5)$$

Notemos que esta expresión general de la perfil de  $\theta$  puede simplificarse utilizando el emv restringido de  $\mu_y$  para cada valor fijo de  $(\sigma_x, \sigma_y)$  y  $\theta$ , el cual obtendremos a continuación.

Debido a que la función de verosimilitud de  $\theta$  dada en (3.4) está representada como un producto de términos, le aplicaremos logaritmo para que nos quede en términos de sumas y restas, esto con el fin de simplificar las operaciones a la hora de obtener el emv restringido de  $\mu_y$  para cada valor fijo de los parámetros  $(\sigma_x, \sigma_y)$  y  $\theta$ . Así

$$\begin{aligned} \log L(\theta, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y; x, y) &= -n \log \sigma_x - m \log \sigma_y \\ &- \frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n \left[ x_i - \mu_y - \Phi^{-1}(\theta) \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right]^2 \\ &- \frac{1}{2\sigma_y^2} \sum_{j=1}^m (y_j - \mu_y)^2 + C, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $C$  es una constante arbitraria que no depende de los parámetros.

Ahora, maximizaremos  $\log L(\theta, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y; x, y)$  dada en (3.6) con respecto a  $\mu_y$  para cada valor fijo de los parámetros  $(\theta, \sigma_x, \sigma_y)$ . La derivada de  $\log L(\theta, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y; x, y)$  con respecto a  $\mu_y$  es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(\theta, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y; x, y)}{\partial \mu_y} &= \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n \left[ x_i - \mu_y - \Phi^{-1}(\theta) \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right] \\ &+ \frac{1}{\sigma_y^2} \sum_{j=1}^m (y_j - \mu_y). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para encontrar los puntos críticos igualamos (3.7) a cero y resolvemos para  $\mu_y$ ,

$$\frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n \left[ x_i - \mu_y - \Phi^{-1}(\theta) \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right] + \frac{1}{\sigma_y^2} \sum_{j=1}^m (y_j - \mu_y) = 0. \quad (3.8)$$

Así, si desarrollamos (3.8) tenemos que

$$\frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n \mu_y - \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n \Phi^{-1}(\theta) \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^m y_i - \frac{1}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^m \mu_y = 0.$$

Luego, al simplificar la parte izquierda de la igualdad anterior obtenemos que

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_x^2} - \frac{n\mu_y}{\sigma_x^2} - \frac{n\Phi^{-1}(\theta) \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}{\sigma_x^2} + \frac{m\bar{y}}{\sigma_y^2} - \frac{m\mu_y}{\sigma_y^2} = 0.$$

Finalmente despejamos  $\mu_y$  de la ecuación anterior para así obtener un punto crítico que en este caso es el emv restringido de  $\mu_y$  para cada valor fijo de los otros parámetros,

$$\hat{\mu}_y(\theta, \sigma_x, \sigma_y) = \frac{m\bar{y}\sigma_x^2 + n\bar{x}\sigma_y^2 + n\Phi^{-1}(\theta) \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}{m\sigma_x^2 + n\sigma_y^2}. \quad (3.9)$$

Ahora, podemos obtener una expresión de la verosimilitud perfil de  $\theta$  más simple que la que mostramos en (3.5). Ésta se obtiene reemplazando  $\mu_y$  que aparece en (3.4) por  $\hat{\mu}_y$  dada en (3.9) y maximizando numéricamente sobre  $(\sigma_x, \sigma_y)$  con  $\theta$  fijo, esto es

$$L_P(\theta; x, y) \propto \max_{\sigma_x, \sigma_y | \theta} L[\theta, \sigma_x, \hat{\mu}_y(\theta, \sigma_x, \sigma_y), \sigma_y; x, y].$$

Cabe señalar que el proceso de maximización para obtener la perfil de  $\theta$ , bajo las muestras observadas  $x$  y  $y$ , se hace computacionalmente.

# Capítulo 4

## Uso del modelo Tensión-Fuerza para explorar la confiabilidad del acero

Cuando tenemos un modelo que nos representa adecuadamente una situación de interés, éste puede ser utilizado para ayudarnos a indagar el comportamiento de dicha situación en distintas condiciones hipotéticas, desde simples hasta extremas. Por ejemplo, si deseamos conocer el comportamiento de un edificio cuando se encuentra en un medio ambiente hostil, podemos construir modelos a escala de éstos y generar ambientes de estrés (posibles temblores, huracanes, lluvias, etc.) para evaluar el comportamiento de la estructura o del modelo frente a estas situaciones extremas, que pueden causar tanto graves pérdidas económicas como humanas.

Nuestro objetivo en este capítulo, es explorar el comportamiento de la confiabilidad usando los modelos Tensión-Fuerza bajo el supuesto de normalidad. Para llevar a cabo dicho objetivo realizamos un experimento en el cual obtuvimos datos reales de fuerza de un material, mismos que utilizamos para estimar la distribución de la fuerza. Además, simulamos distintos escenarios de estrés para contrastarlos con la fuerza del material de experimentación. Dicho experimento es detallado a continuación.

### 4.1. Descripción del problema

El hierro es un metal relativamente duro y tenaz. Mientras que el carbono es un metaloide blando y frágil en la mayoría de sus formas alotrópicas (excepto en la forma de diamante en que su estructura cristalográfica lo hace el más duro de los materiales conocidos). El acero es el más popular de las aleaciones, es la combinación entre un metal (hierro) y un metaloide (carbono), que conserva las características metálicas del primero, pero con propiedades notablemente mejoradas gracias a la adición del segundo y de otros elementos metálicos y no metálicos.

El acero es una aleación de hierro y carbono, donde el carbono no supera el 2.1%

en peso de la composición de la aleación, alcanzando normalmente porcentajes entre el 0.2% y el 0.3%. Porcentajes mayores que el 2.1% de carbono dan lugar a las fundiciones, aleaciones que al ser quebradizas y no poderse forjar (a diferencia de los aceros) se moldean.

Existen varios tipos de acero, entre ellos el acero corrugado. El acero corrugado es una clase de acero laminado usado especialmente en construcción, para montar hormigón armado, y cimentaciones de obra civil y pública. Por ejemplo, es utilizado para la construcción de pasos subterráneos transitables, drenajes, silos de almacenaje, depósitos subterráneos, entre muchas otras cosas más. Se trata de barras de acero que presentan resaltos o corrugas que mejoran la adherencia con el hormigón. Además tiene muchas ventajas el utilizarlo, pues está dotado de una gran ductilidad, la cual permite que a la hora de cortar y doblar no sufra daños, tiene una gran soldabilidad, es fácil de transportar, facilidad de montaje e instalación, es muy flexible y versátil, es muy durable y requiere un mínimo de mantenimiento y algo muy importante, es económico.

Como vemos, el acero corrugado tiene una gran importancia en nuestra vida cotidiana por sus usos y ventajas. A continuación, presentaremos un experimento que llevamos a cabo con el objetivo obtener información sobre la fuerza del acero corrugado, la cual utilizaremos más adelante para explorar la confiabilidad de este material bajo distintos escenarios de estrés.

### **Preparación de las muestras**

Para la realización de este experimento consideramos 36 muestras de acero corrugado. Cada muestra tenía una longitud de 60 cm y 3/8 de pulgada de diámetro. Estas muestras las tomamos de tres varillas de acero comerciales de 12 m de longitud, 12 muestras por varilla. Para la elaboración de las muestras despreciamos los extremos de cada varilla debido a que no conocíamos el método con el cual fueron cortadas de fábrica. Esto es importante puesto que el material o método para hacer el corte en el acero afecta la fuerza que éste tenga. Por ejemplo, si el corte se hace por medio de la aplicación de calor, el acero tiende a dilatarse y esto puede alterar el comportamiento de la fuerza del material. Además, excluimos también una porción pequeña de la parte media de la varilla ya que presentaba un doblez que fue hecho para facilitar el transporte del material. Todo esto con el objetivo de no considerar en el análisis muestras que pudieran provenir de otras poblaciones. Cabe mencionar que las muestras que obtuvimos de cada varilla las manejamos por grupos, es decir, formamos tres grupos de 12 muestras cada uno.

### **Medición de la fuerza del material**

Llevamos a cabo el experimento con la ayuda de una máquina de prueba de tensión Forney World Standar in Material Testing modelo LT-900/920, con una capacidad de

181.9 toneladas y un margen de error de  $\pm 4$  kg (veáse Figura 4.1). Primero colocamos cada unidad muestral en la máquina de forma vertical, como se muestra en la Figura 4.2, y la ajustamos con la ayuda de un martillo. Luego la maquina la estiró hasta que ocurrió la fractura total; es decir, hasta que se rompe en dos partes (ver Figura 4.3). La carga aplicada al acero aumenta rápido al principio puesto que el acero tiende a comportarse elásticamente; una vez perdida la elasticidad éste se rompe. Probamos por separado cada grupo de muestras y el dato de fuerza que registramos fue al momento de la fractura total. Debido a que el motor de la maquina tiende a calentarse, probamos 6 muestras por cada 30 minutos de descanso, aproximadamente.

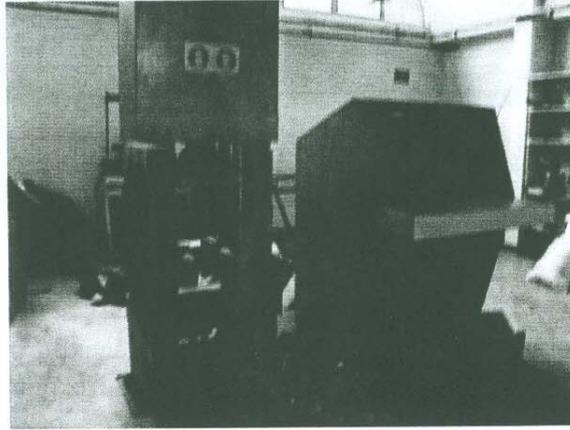


Figura 4.1: Máquina de prueba de tensión Forney World Standar in Material Testing modelo LT-900/920.

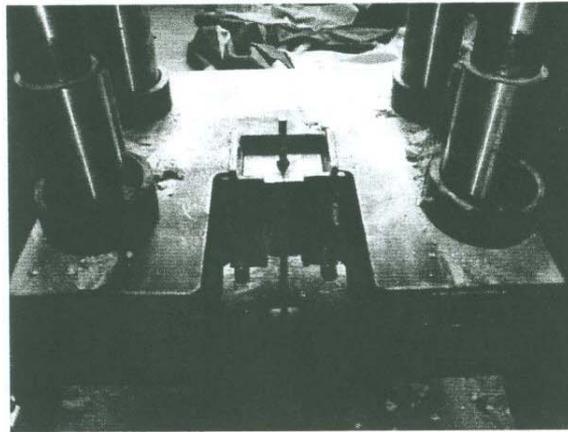


Figura 4.2: La muestra de acero es colocada de forma vertical en la máquina.

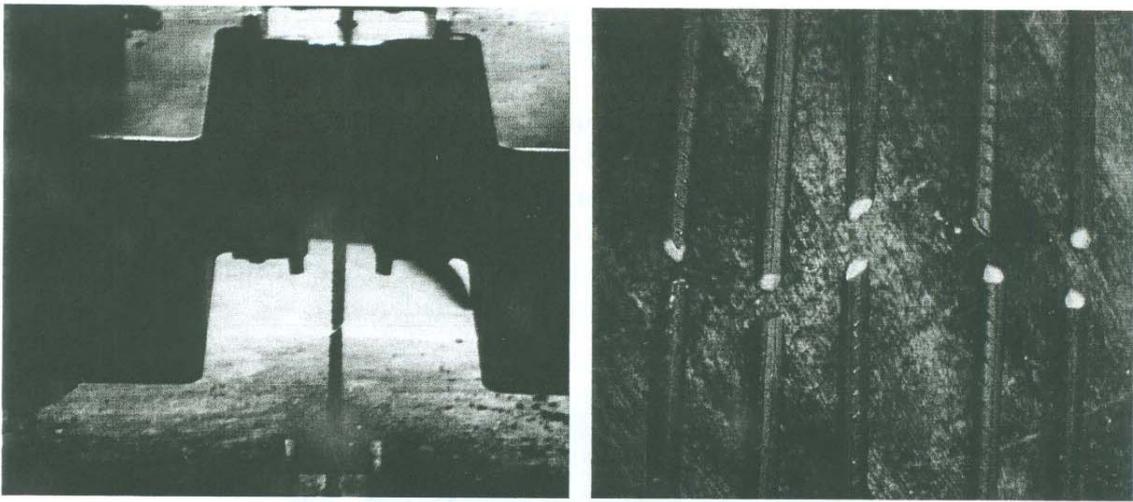


Figura 4.3: Se registra el dato cuando ocurre la fractura total en la muestra.

## Resultados

En la Tabla 4.1 mostramos los resultados obtenidos del experimento. Ésta se encuentra dividida en cuatro columnas. La primera columna, de izquierda a derecha, corresponde al número de unidad muestral y las otras columnas continen la fuerza observada del material para cada grupo. Recordemos que formamos cada grupo con una varilla de 12 m de longitud . Las unidades de los datos de fuerza obtenidos estan en kilogramos.

Muestra	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
1	5468	5088	5588
2	5452	5456	5484
3	5452	5468	5548
4	5396	5340	5636
5	5284	5508	5528
6	5432	5472	5512
7	5416	5356	5668
8	5304	5436	5560
9	5396	5440	5524
10	5440	5476	5532
11	5304	5400	5556
12	5444	5388	5640

Tabla 4.1: Datos de fuerza de varilla.

## 4.2. Distribución de la fuerza, $Y$ , del material

Una parte muy importante en un proceso de inferencia es definir un modelo de probabilidad razonable para el fenómeno bajo estudio y que se ajuste adecuadamente a los datos que se tengan. Normalmente, un histograma puede darnos una idea general sobre la forma (simetría, sesgo, etc.) de la función de densidad que aproxime el comportamiento probabilístico de la variable aleatoria que representa el fenómeno de interés. En la Figura 4.4 mostramos el histograma de los datos de fuerza de la Tabla 4.1. Notemos que el histograma resulta casi simétrico y que una observación se encuentra muy alejada (hacia la izquierda) de las demás observaciones. Sin embargo pudiera ser que una distribución simétrica, como la normal, sea razonable para estos datos de fuerza.

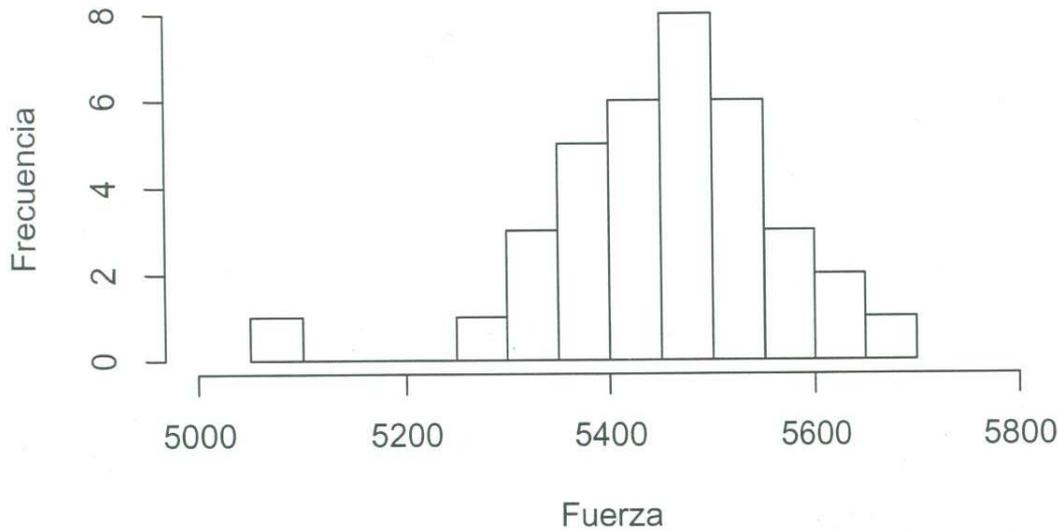


Figura 4.4: Histograma de los datos de fuerza de la Tabla 4.1.

Para corroborar si el modelo normal se ajusta razonablemente a los datos de fuerza, hemos construido una gráfica  $Q-Q$  plot y un papel de probabilidad normal, descritos en la Sección 2.8. Mostramos estas gráficas en la Figura 4.5. Notemos que en ambas gráficas todos los puntos se aproximan a su correspondiente recta de referencia a excepción de uno. Este punto corresponde al primer dato del grupo 2 de la Tabla 4.1 ( $y^* = 5088$ ).

Observamos que en la Figura 4.5 (a) el primer cuantil empírico ( $y^*$ ) es más pequeño

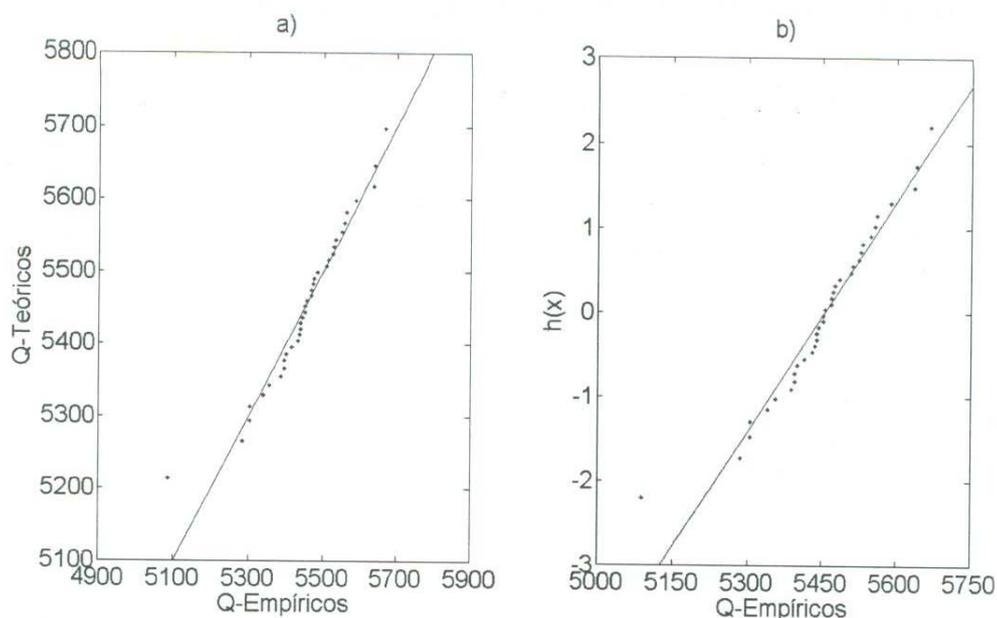


Figura 4.5: a) Gráfica  $Q-Q$  plot y b) Papel de probabilidad normal para los datos de fuerza dados en la Tabla 4.1.

que su correspondiente cuantil teórico estimado bajo el modelo normal (ver Sección 2.6). Cabe mencionar que este dato pudo ser el resultado de un error técnico, en el sentido de que no se halla puesto adecuadamente la varilla, que ésta ya trajera un defecto, que no se halla apretado lo suficiente con el martillo, etc. Es por todo esto que decidimos no incluir a  $y^*$  en nuestro análisis.

En la Figura 4.6 mostramos el  $Q-Q$  plot y el papel de probabilidad sin el dato  $y^*$ . Claramente observamos que no se tiene evidencia suficiente para rechazar que el modelo normal se ajuste de manera razonable a los datos. En la Tabla 4.2 presentamos el valor de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de la función de densidad normal para los datos de fuerza (sin  $y^*$ ). En la Figura (4.7) mostramos esta densidad junto con el histograma de los datos.

Es importante señalar que deben realizarse más experimentos para determinar si el dato que no fue considerado en el análisis es precisamente un dato atípico o no. Por ejemplo, si pasa que al realizarse más experimentos resulta que tenemos valores mucho más grandes o más pequeños con respecto a los demás datos, entonces un modelo adecuado podría ser una distribución simétrica de colas pesadas. Pero, si por el contrario pasa que no tenemos datos extremos entonces ciertamente podemos pensar que el modelo normal es el adecuado para describir la fuerza del acero corrugado.

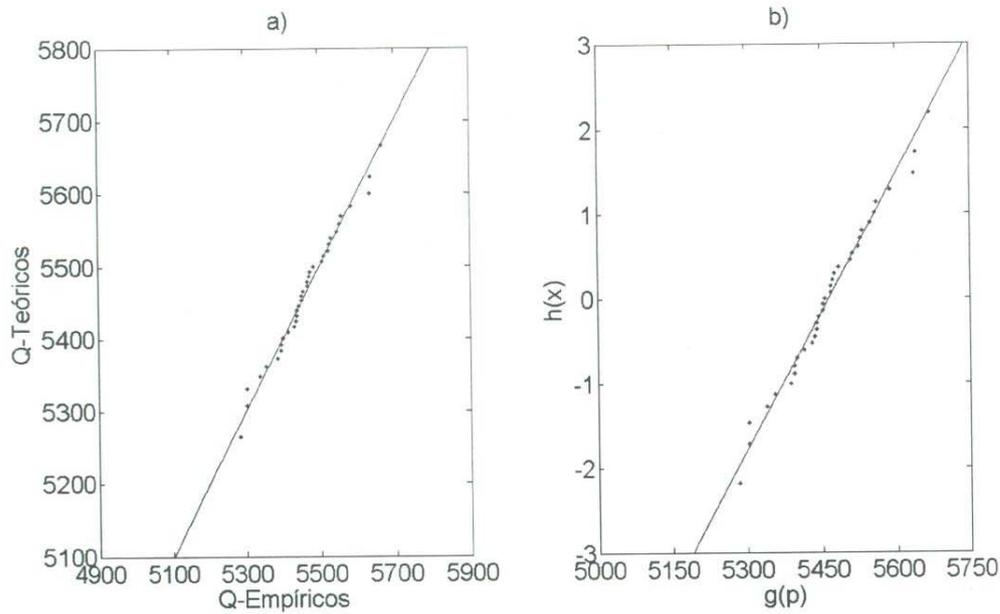


Figura 4.6: a) Gráfica  $Q-Q$  plot y b) Papel de probabilidad normal para los datos de fuerza dados en la Tabla 4.1 sin el dato  $y^*$ . Se observa claramente en ambas gráficas que no hay evidencia en contra de que la distribución normal se ajuste adecuadamente a los datos.

Estimadores	$\hat{\mu}_y$	$\hat{\sigma}_y$
Valores	5465	93.2

Tabla 4.2: Estimadores de  $\mu_y$  y  $\sigma_y$  para la distribución normal de la fuerza  $Y$ .

### 4.3. Simulación de estrés, $X$ , bajo el modelo normal

En esta sección vamos a simular datos de estrés bajo el modelo normal para distintos escenarios con el objetivo de explorar, en la siguiente sección, el comportamiento de la confiabilidad del material (acero corrugado) considerado en nuestro experimento que fue descrito en la Sección 4.1. Esto se hará a través de un análisis completo de la función de verosimilitud perfil de  $\theta$ . Además, mostraremos como las inferencias sobre el parámetro de confiabilidad  $\theta$  son afectadas tanto por los parámetros involucrados en la distribución del estrés,  $\mu_x$  y  $\sigma_x$ , como por el tamaño de la muestra  $n$  que se tenga para el estrés.

En todos los escenarios de este estudio de simulación consideramos tres conjuntos de datos para el estrés. Para cada escenario, los tres juegos de datos fueron simulados

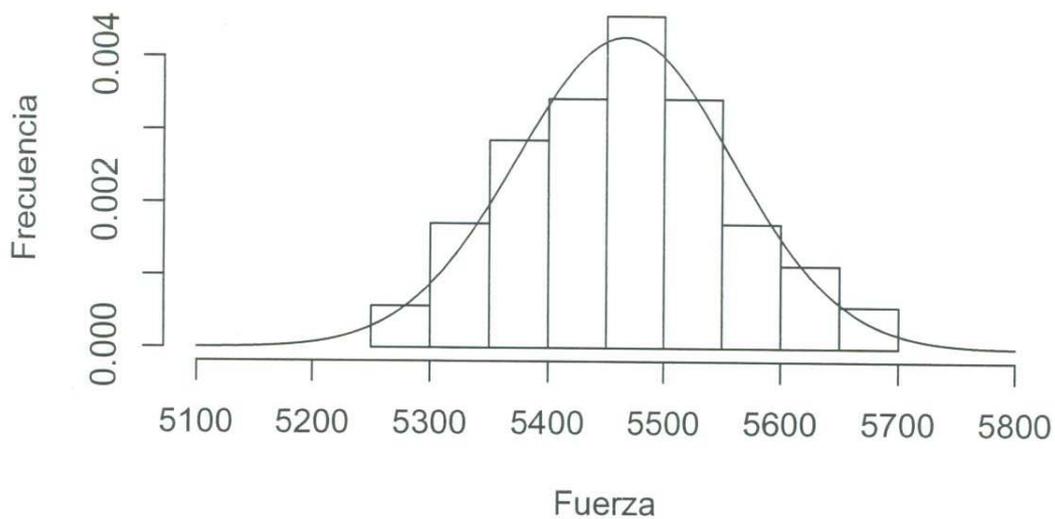


Figura 4.7: Densidad estimada de la fuerza  $Y$  con parámetros  $\hat{\mu}_y = 5465$  y  $\hat{\sigma}_y = 93.2$ .

de una distribución normal pero con distintas medias,  $\mu_x = 4700$ ,  $5500$  y  $6100$ . El primer valor de la media,  $4700$ , corresponde a una densidad del estrés ( $X$ ) que está situada a la izquierda de la densidad de la fuerza ( $Y$ ) del material, estimada en la sección anterior. El segundo valor,  $\mu_x = 5500$ , corresponde a una densidad de  $X$  localizada casi en el mismo lugar de la densidad estimada de  $Y$ . El tercer valor de la media del estrés determina una densidad para  $X$  ubicada a la derecha de la densidad estimada de la fuerza. Esto nos dará un panorama general del comportamiento de la confiabilidad cuando la distribución del estrés está situada a la izquierda, casi en el mismo lugar o a la derecha la densidad estimada de la fuerza. Para fines prácticos, cuando hablemos de estrés nos estaremos refiriendo a las tres densidades consideradas en cada escenario de simulación.

### Escenario 1

En el primer escenario simulamos el estrés utilizando una desviación  $\sigma_x = 93.2$  y un tamaño muestral de  $n = 35$ . Notemos que el número de observaciones de la fuerza del material (sín el dato atípico  $y^* = 5088$ ) y el valor estimado de la desviación, son utilizados como valores de referencia en la simulación del estrés.

### Escenario 2

Al igual que en el Escenario 1, aquí consideraremos un valor para la desviación del

estrés  $X$  igual al de la fuerza  $Y$ ,  $\sigma_x = \hat{\sigma}_y = 93.2$ . Además consideramos dos diferentes tamaños muestrales,  $n = 15$  y  $n = 55$ . Observemos que  $n = 15$  corresponde a un tamaño muestral para el estrés menor que el tamaño muestral que se tiene para la fuerza del material. En contraste,  $n = 55$  corresponde al caso donde se tienen más observaciones para el estrés que para la fuerza. Cabe mencionar que el caso  $n = 35$  y  $\sigma_x = \hat{\sigma}_y = 93.2$  ya es considerado en el Escenario 1.

### Escenario 3

Por último, los conjuntos de datos de estrés que constituyen el tercer escenario provienen de distribuciones normales con desviaciones  $\sigma_x = 60$  y  $\sigma_x = 130$ , respectivamente, y tienen un tamaño muestral de  $n = 35$ . Notemos que en este escenario se considera el caso de datos simulados de estrés de una normal con una desviación ( $\sigma_x = 60$ ) menor que la desviación estimada con los datos de fuerza ( $\hat{\sigma}_y = 93.2$ ). También se considera el caso en el que la desviación del estrés ( $\sigma_x = 130$ ) es mayor que  $\hat{\sigma}_y = 93.2$ . El caso  $\sigma_x = \hat{\sigma}_y = 93.2$  ya es utilizado en el Escenario 1.

## 4.4. Inferencias sobre $\theta = P(X < Y)$ vía la verosimilitud perfil

En esta sección mostraremos la función de verosimilitud perfil del parámetro  $\theta$  correspondiente a cada escenario descrito en la sección anterior. Dicho parámetro nos representa la confiabilidad del material. Además, por claridad, también se presentan las densidades del estrés que corresponden a dichos escenarios junto con la densidad estimada de la fuerza. Otro aspecto muy importante que mostramos en esta sección son los intervalos de verosimilitud-confianza para  $\theta$  (ver Sección 2.4), trazados para cada una de las perfiles de  $\theta$  a un nivel de plausibilidad  $c = 0.15$ . Estos intervalos tienen una confianza aproximada del 95%.

### Resultados bajo el Escenario 1

La Figura 4.8 corresponde al Escenario 1, descrito en la sección anterior. En la Figura 4.8 (a) mostramos en la misma gráfica la densidad estimada de la fuerza y las tres densidades de estrés correspondientes al Escenario 1. En la Figura 4.8 (b) presentamos las tres funciones de verosimilitud perfil relativa de  $\theta$ , denotadas como perfil A, B y C, correspondientes a dicho escenario. La perfil A la calculamos con base en los datos de fuerza de nuestro experimento y los datos simulados de estrés bajo la densidad ubicada a la derecha de la densidad estimada de la fuerza en la Figura 4.8 (a). La perfil B también la calculamos con los datos de fuerza de nuestro experimento pero con los datos simulados de estrés bajo la densidad que tiene media  $\mu_x = 5500$  y desviación  $\sigma_x = 93.2$ , la cual se interseca fuertemente con la densidad de la fuerza, como se muestra en la Figura 4.8 (b). Finalmente, calculamos la perfil C exactamente igual que las perfiles A y B, solo que los datos de estrés utilizados son los que fueron simulados bajo la densidad

ubicada a la izquierda de la densidad estimada de la fuerza. Además, en la Figura 4.5 (b) señalamos cortes en la verosimilitud perfil de  $\theta$  a un nivel  $c = 0.15$ . Estos cortes a ese nivel  $c$  están asociados a intervalos de verosimilitud con una confianza aproximada del 95%. Mostramos los valores de los extremos de los intervalos de verosimilitud-confianza en la Tabla 4.3.

Notemos que cuando la distribución del estrés se encuentra claramente separada de la distribución de la fuerza y ubicada a su izquierda, entonces los valores plausibles de  $\theta$  se encuentran a la derecha del valor 0.5 y cercanos a uno como lo mostramos en la Tabla 4.3. Estos valores son razonables puesto que la densidad del estrés es estocasticamente menor que la densidad estimada de la fuerza. En contraste, cuando la densidad del estrés está a la derecha de la densidad estimada de la fuerza entonces valores plausibles de  $\theta$  se encuentran a la izquierda del valor 0.5 y cercanos a cero. Como vemos estos valores de  $\theta$  también son razonables, pues la densidad del estrés en este caso es estocasticamente mayor que la densidad estimada de la fuerza. Ahora, observemos que si la densidad estimada de la fuerza y la densidad del estrés se intersectan fuertemente entonces los valores plausibles de  $\theta$  se encuentran ubicados alrededor de 0.5 como lo mostramos en la Tabla 4.3.

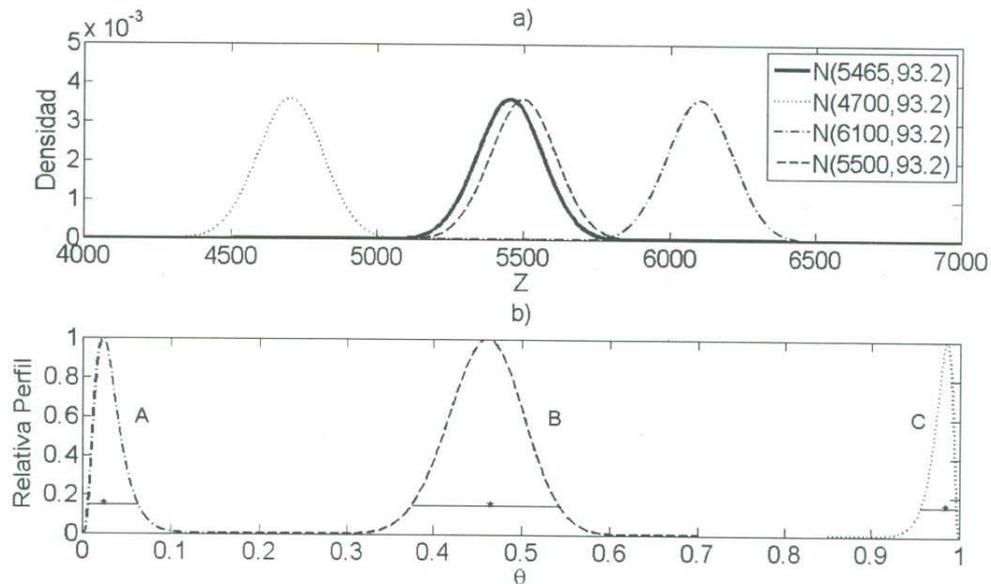


Figura 4.8: a) La curva sólida corresponde a la densidad de la Fuerza  $Y$  y las punteadas a la tensión, todas con el mismo tamaño muestral,  $m = n = 35$ . b) Perfiles de  $\theta$  relacionadas con cada densidad del estrés con respecto a la fuerza.

## Resultados bajo el Escenario 2

Perfil de $\theta$	Nivel de plausibilidad $c$	Confianza aprox.	Intervalo
Perfil A	0.15	95 %	[0.0070,0.0634]
Perfil B	0.15	95 %	[0.3752,0.5450]
Perfil C	0.15	95 %	[0.9557,0.9970]

Tabla 4.3: Intervalos de verosimilitud-confianza para  $\theta$  correspondientes a cada una de las perfiles de la Figura 4.8 b).

Las Figuras 4.9 y 4.10 estan relacionadas con el Escenario 2, descrito en la Sección 4.3. Estas figuras tienen la misma estructura que la Figura 4.8 correspondiente al Escenario 1. Es decir, en el inciso (a) de las Figuras 4.9 y 4.10 presentamos las densidades del estrés y la densidad estimada de la fuerza, en el inciso (b) mostramos las perfiles A, B y C con sus correspondientes intervalos de verosimilitud-confianza del 95 %. De igual manera que en el Escenario 1, cada una de las perfiles la calculamos con los datos de fuerza que obtuvimos a partir del experimento descrito en la Sección 4.1 y con los datos simulados bajo cada una de las densidades de estrés que mostramos en las Figuras 4.9 (a) y 4.10 (a). A diferencia del Escenario 1, en el que consideramos un tamaño de muestra de  $n = 35$  para las muestras simuladas de estrés, aquí utilizamos tamaños de muestra de  $n = 15$  y  $n = 55$ .

Los extremos de los intervalos de verosimilitud-confianza correspondientes a las perfiles A, B y C de las Figuras 4.9 (b) y 4.10 (b) los mostramos en la Tabla 4.4. Al igual que en el Escenario 1, se observa que los valores que mostramos en dicha tabla son razonables, pues cuando la densidad del estrés esta ubicada a la izquierda de la densidad estimada de la fuerza, entonces los valores plausibles de  $\theta$  se encuentran a la derecha del valor 0.5 y muy cercanos a 1. Para el caso en el que la densidad del estrés esta ubicada a la derecha de la densidad estimada de la fuerza, los valores plausibles de  $\theta$  se concentran a la izquierda del valor 0.5 y muy cercanos 0. Ahora, cuando la densidad del estrés se interseca fuertemente con la densidad estimada de la fuerza entonces los valores plausibles de  $\theta$  se ubican alrededor de 0.5.

Por otro lado, en la Tabla 4.4 mostramos que cuando el tamaño de muestra crece se tienen intervalos de verosimilitud confianza más cortos, como es esperarse. Sin embargo, al parecer requerimos un tamaño de muestra excesivamente grande (tanto para el estrés como para la fuerza) para lograr alcanzar más precisión en las inferencias para una confianza fija. Esto lo podemos atribuir al hecho de que el parámetro  $\theta$  que deseamos estimar está relacionado con las colas de las densidades del estrés y de la fuerza.

### Resultados bajo el Escenario 3

Las Figuras 4.11 y 4.12 se asocian al Escenario 3, el cual describimos en la sección

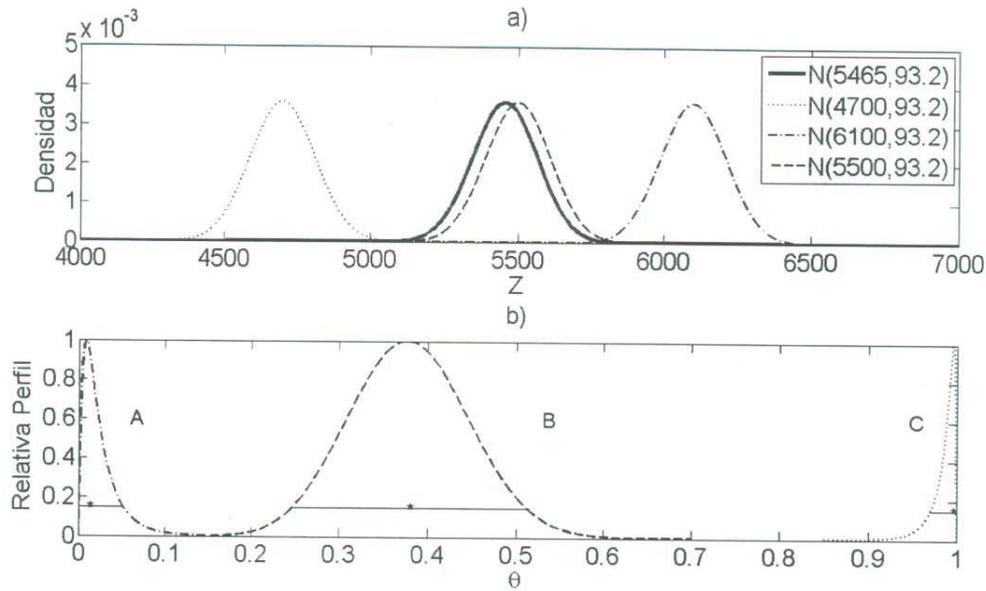


Figura 4.9: a) La curva sólida corresponde a la densidad de la Fuerza  $Y$  y las punteadas a la tensión. El tamaño muestral es  $15 = n \neq m = 35$ . b) Perfiles de  $\theta$  relacionadas con cada densidad del estrés con respecto a la fuerza.

Perfil de $\theta$	Nivel de plausibilidad $c$	Confianza aproximada	Intervalos	
			$n = 15$	$n = 55$
Perfil A	0.15	95 %	[0.0010, 0.0513]	[0.0101, 0.0624]
Perfil B	0.15	95 %	[0.2460, 0.5154]	[0.4158, 0.5487]
Perfil C	0.15	95 %	[0.969, 1]	[0.9697, 0.9950]

Tabla 4.4: Intervalos de verosimilitud-confianza para  $\theta$  correspondientes a cada una de las perfiles de las Figuras 4.9 b) y 4.10 b).

anterior. El arreglo de estas figuras es el mismo que en las figuras de los Escenarios 1 y 2. Las densidades del estrés y la densidad estimada de la fuerza se presentan en el inciso (a) y las perfiles A, B y C, con sus respectivos intervalos de verosimilitud-confianza del 95 %, en el inciso (b). En contraste a los Escenarios 1 y 2, en los que tomamos una desviación para la muestra simulada de estrés de  $\sigma_x = 93.2$ , en éste consideramos una desviación de  $\sigma_x = 60$  y  $\sigma_x = 130$ .

Los intervalos de verosimilitud-confianza de  $\theta$  correspondientes a las perfiles A, B y C de las Figuras 4.11 (b) y 4.12 (b) los mostramos en la Tabla 4.5. Una vez más, observamos que estos valores de  $\theta$  resultan ser razonables. Como ya lo mencionamos en

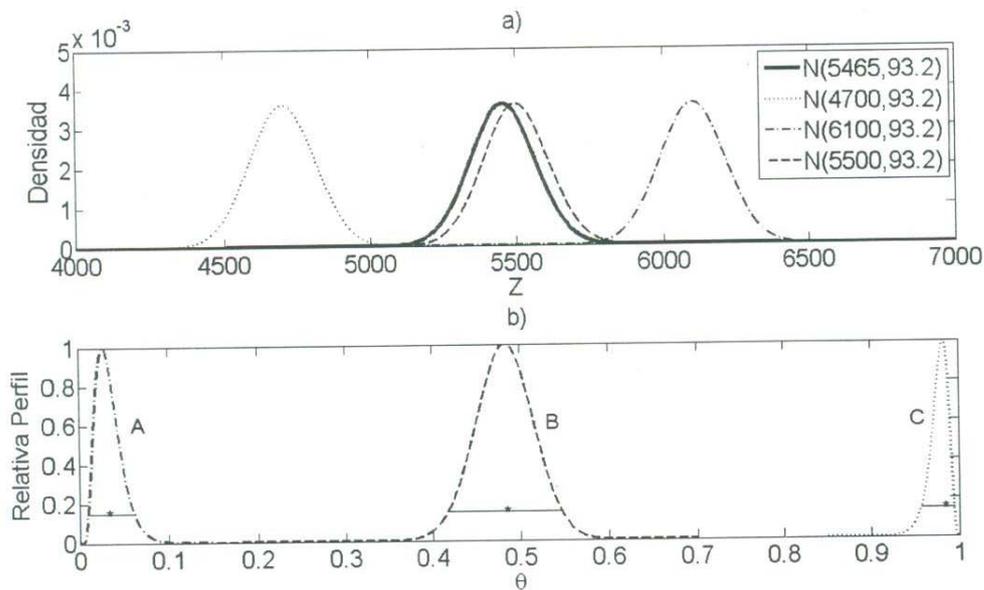


Figura 4.10: a) La curva s3lida corresponde a la densidad de la Fuerza  $Y$  y las punteadas a la tensi3n. El tama3o muestral es  $55 = n \neq m = 35$ . b) Perfiles de  $\theta$  relacionadas con cada densidad del estr3s con respecto a la fuerza.

los Escenarios 1 y 2, cuando la densidad del estr3s se encuentra alejada por la izquierda de la densidad estimada de la fuerza, entonces los valores plausibles de  $\theta$  se encuentran a la derecha del valor 0.5 y muy cercanos a 1. En contraste, cuando la densidad del estr3s se encuentra alejada pero por la derecha de la densidad estimada de la fuerza, entonces los valores plausibles de  $\theta$  se encuentran a la izquierda del valor 0.5 y muy cercanos a 0, cuando las densidades del estr3s y la fuerza se intersectan fuertemente entonces los valores plausibles de  $\theta$  se agrupan alrededor de 0.5.

En la Tabla 4.5 mostramos el impacto que tiene el hacer variar la desviaci3n  $\sigma_x$  en la longitud de los intervalos de verosimilitud-confianza para  $\theta$ . Observamos que al aumentar la varianza del estr3s (dejando fijo el tama3o de muestra), la longitud de los intervalos para  $\theta$  aumenta. Este comportamiento es muy similar al que observamos en el Escenario 2, donde al parecer se requiere un tama3o muestral grande para obtener intervalos de verosimilitud-confianza para  $\theta$  cortos para un nivel de plausibilidad fija. Podemos atribuir 3sto al hecho de que cuando se mantiene fijo el tama3o muestral y se aumenta la variabilidad en el estr3s, se va perdiendo la capacidad para conocer con certeza si  $X$  es menor que  $Y$  (o  $X$  es mayor que  $Y$ ) lo que produce que los intervalos de verosimilitud incrementen su longitud.

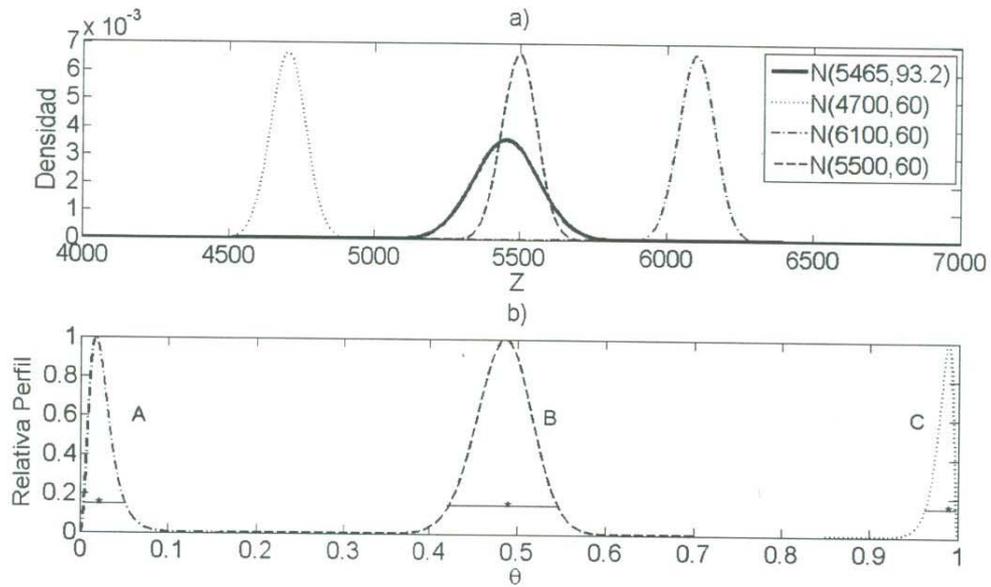


Figura 4.11: a) La curva s3lida corresponde a la densidad de la Fuerza  $Y$  y las punteadas a la tensi3n todas con el mismo tama3o muestral,  $n = m = 35$ . b) Perfiles de  $\theta$  relacionadas con cada densidad del estr3s con respecto a la fuerza.

Perfil de $\theta$	Nivel de plausibilidad $c$	Confianza aproximada	Intervalos	
			$\sigma_x = 60$	$\sigma_x = 93.2$
Perfil A	0.15	95 %	[0.0050,0.0523]	[0.0060,0.0634]
Perfil B	0.15	95 %	[0.4195,0.5487]	[0.3530,0.5487]
Perfil C	0.15	95 %	[0.9628,0.9980]	[0.9507,0.9960]

Tabla 4.5: Intervalos de verosimilitud-confianza para  $\theta$  correspondientes a cada una de las perfiles de las Figuras 4.11 b) y 4.12 b).

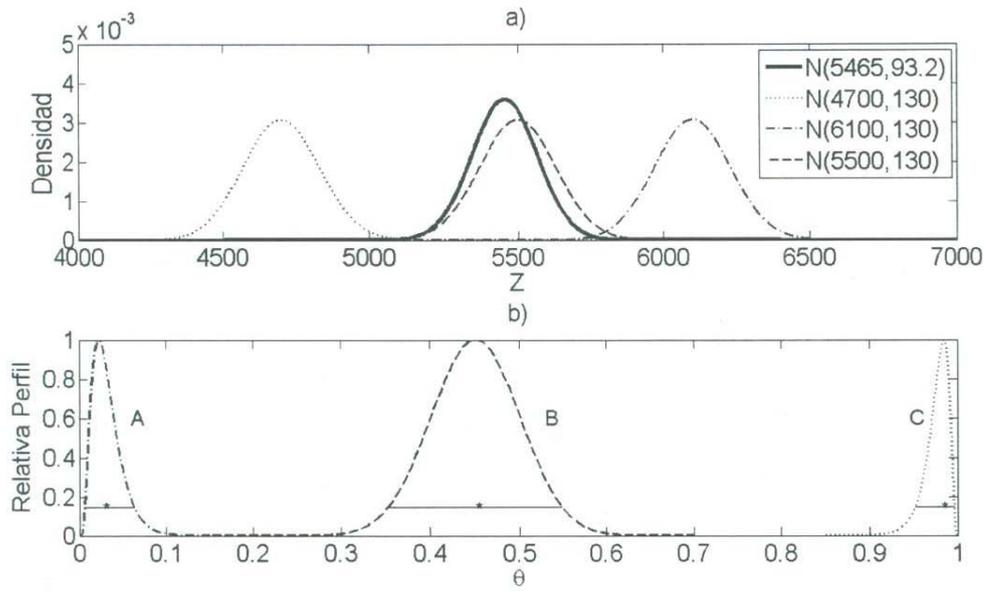


Figura 4.12: a) La curva s3lida corresponde a la densidad de la Fuerza  $Y$  y las punteadas a la tensi3n todas con el mismo tama3o muestral,  $m = n = 35$ . b) Perfiles de  $\theta$  relacionadas con cada densidad del estr3s con respecto a la fuerza.

# Conclusiones

Resulta sorprendente que el enfoque de verosimilitud perfil, un método estadístico ampliamente usado para estimar un parámetro de interés en presencia de otros de estorbo, halla sido muy poco considerado en la literatura estadística para estimar el parámetro  $\theta = P(X < Y)$ , cuando  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias normales e independientes.

Es admirable la facilidad con la que se pueden hacer inferencias, en el caso normal, sobre el parámetro de interés  $\theta = P(X < Y)$  vía el enfoque de verosimilitud perfil. Además, estas inferencias resultan ser adecuadas. En el caso de estimación por intervalos para  $\theta$ , es posible asociar una confianza a los intervalos de verosimilitud.

En esta tesis mostramos una manera de usar un modelo estadístico que nos represente a una situación o fenómeno de interés. En nuestro caso, bajo el modelo Tensión-Fuerza, mostramos como se comporta la confiabilidad de un material (acero corrugado) para diferentes escenarios hipotéticos de estrés. La distribución de la fuerza de este material fue estimada a partir de datos obtenidos de un experimento que realizamos para este fin. Las conclusiones a las que llegamos las presentamos a continuación:

- La distribución normal es un modelo adecuado para los datos de fuerza analizados en esta tesis.
- Cuando la distribución del estrés se encuentra claramente separada de la distribución de la fuerza y ubicada a su izquierda, entonces los valores plausibles de  $\theta$  se encuentran a la derecha del valor 0.5 y cercanos a uno. En contraste, cuando la densidad del estrés está a la derecha de la densidad estimada de la fuerza entonces valores plausibles de  $\theta$  se encuentran a la izquierda del valor 0.5 y cercanos a cero. Ahora, si la densidad estimada de la fuerza y la densidad del estrés se intersectan fuertemente entonces los valores plausibles de  $\theta$  se encuentran ubicados alrededor de 0.5.
- El parámetro unidimensional  $\theta = P(X < Y)$ , es una cantidad que proporciona información sobre la diferencia entre las distribuciones de  $X$  y  $Y$ . Esta información es especialmente significativa puesto que indica para valores de  $\theta$  cercanos a 0 ó 1 cuando dichas distribuciones se encuentran claramente separadas.

Es importante que mencionemos aquí que algún cuidado debemos de tener a la hora de interpretar el valor de  $\theta=1/2$ . Notemos que cuando las distribuciones de  $X$  y  $Y$  son iguales entonces claramente  $\theta$  vale  $1/2$ . Sin embargo,  $\theta=1/2$  no implica que las distribuciones de  $X$  y  $Y$  sean iguales.

# Bibliografía

- [1] Birnbaum, Z. W. y McCarty, B. C. (1958). A Distribution-free upper Confidence Bounds for  $P_r(X < Y)$  Based on Independent Samples of  $X$  and  $Y$ . *Ann. Math. Statist.*, Vol. 29, Págs. 558-562.
- [2] Casella, G. (1986). Stabilizing Binomial  $n$  Estimators. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 81, págs. 172 - 175.
- [3] Castillo, E., Hadi, A. S. y Sarabia, J. M. (2005). *Extreme Value and Related Models with Applications in Engineering y Science*. Nueva Jersey: Wiley.
- [4] Church, J. D. y Harris, B. (1970). The Estimation of Reliability from Stress-Strenght relationships. *Technometrics*, Vol. 12, No. 1, Págs. 49-54.
- [5] Downton, F. (1973). The Estimation of  $P_r(X < Y)$  in the Normal Case. *Technometrics*, Vol. 15, No. 3, Págs. 551-558.
- [6] Enis, P. y Geisser, S. (1971). Estimation of the Probability that  $X < Y$ . *J. Amer. Statist. Assoc.*, Vol. 66, Págs. 162-168.
- [7] Guttman, I., Jonnson R. A., Battacharyya G. K. y Reiser B. (1988). Confidence Limits for Stress-Strength Models With Explanatory Variables. *Technometrics*, Vol. 30, No. 2, Págs. 161-168.
- [8] Ivshin, V. V. y Lumelskii, Ya. P. (1995). *Statistical Estimation Problems in "Stress-Strength" Models*. Perm. University Press, Perm, Russia.
- [9] Kotz, S., Lumelskii, Y. y Pensky, M. (2003). *The Stress-Strength Model and its Generalizations: Theory and Applications*. Singapore: World Scientific.
- [10] Mazumdar, M. (1970). Some Estimates of Reliability Using Interference Theory. *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol. 17, Págs. 159-165.
- [11] Montoya, J.A. (2008), La Verosimilitud Perfil en la Inferencia Estadística. (2008). Tesis de Doctorado en Ciencias con Especialidad en Probabilidad y Estadística, CIMAT, Guanajuato, Gto. México.
- [12] Mood, A. M., Graybill, F. A. y Boes, D. C. (1985). *Introduction to the Theory of Statistics*. Singapore: McGraw-Hill.

- [13] Mukherjee, S. P. y Sharan, L. K. (1985). Estimation of Failure Probability from a Bivariate Normal Stress-Strength Distribution. *Microelect. Reliab.*, Vol. 25, Págs. 699-702.
- [14] Owen, D. B., Craswell, K. J. y Hanson, D. L. (1964). Nonparametric Upper Confidence Bounds for  $P(Y < X)$  and confidence Limits for  $P(Y < X)$  when  $X$  and  $Y$  are Normals. *J. Amer. Statist. Assoc.*, Vol. 59, Págs. 906-924.
- [15] Reiser, B. y Guttman, I. (1986). Statistical Inference for  $P_r(Y < X)$ : The Normal Case. *Technometrics*, Vol. 28, No. 3, Págs. 253-257.
- [16] Serfling, R. J. (1980). Approximation Theorems of Mathematical Statistics. Nueva York: Wiley.
- [17] Sprott, D. A. (2000). *Statistical Inference in Science*. Nueva York: Springer.
- [18] Teskin, O. I., Kostyukova, T. M. (1991). Interval Estimation of Exponent of Reliability Using the "Load-Strength" Rejection Method. *Journ. Soviet Math.*, Vol. 56, Págs. 2434-2438.
- [19] Voinov, V. G. (1984). On Unbiased Estimation of  $P(Y < X)$  in the Normal Case. *Zapiski Nauchn. Sem.*, Vol. 136, Págs. 5-12.
- [20] Woodward, W. A. y Kelley, G. D. (1977). Minimum Variance Unbiased Estimation of  $P(X < Y)$  in the Normal Case. *Tecnometrics*, Vol. 19, Págs. 95-98.

