



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

---

---

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Matemáticas

Gráficas asociadas a 1-formas sobre la esfera de  
Riemann

## T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Sergio Zamora Erazo

Director de Tesis: Dr. Martín Eduardo Frías Armenta

Asesor de Tesis: Dr. Jesús Ruperto Muciño Raymundo

Hermosillo, Sonora, México, 2010

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



“El saber de mis hijos  
hará mi grandeza”



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess



*A mis padres*

*Dagoberto Zamora Orozco*

*y*

*Jesús Mireya Erazo Acuña*

*Que mi logro sea su orgullo*



# Agradecimientos

A mi papá, el Sr. Dagoberto Zamora, y mi mamá, la Sra. Mireya Erazo, por el apoyo que siempre me han brindado en cada proyecto que emprendo en mi vida y por el incansable esfuerzo que hacen día a día para darme una vida satisfactoria y así no tener pretextos para seguir cosechando logros. Por eso y por mucho más, gracias papito, gracias mamita. Los quiero mucho.

A mis hermanos, el Ing. Dagoberto Zamora y Jesús Arturo Zamora, por ese apoyo incondicional de hermanos con el que puedo contar siempre y por ser pacientes y comprensibles por las cosas que hago o dejo de hacer.

A mi novia, Silvia Anahí Valdés, por estar conmigo alentandome para seguir adelante y no dejarme caer ante la presión que originó esta tesis y por haberme acompañado en este proceso culminante de mi licenciatura.

A mi asesor de tesis, Dr. Jesús Muciño Raymundo, por la paciencia y tiempo que me dedicó para que preparara mejor este trabajo y por las observaciones, correcciones y sugerencias que hizo al mismo.

A mis maestros y sinodales, Dr. Martín Eduardo Frías Armenta, Dr. Martín Gildardo García Alvarado, Dr. Fernando Verduzco González, por las observaciones y sugerencias hechas a la tesis. Además, gracias por todo el apoyo que me brindaron durante la licenciatura y por haber hecho de las matemáticas mi pasión y mi forma de vida.

A mis amigos Humberto, Adriana, Manuela, Carol y Dante, por estar ahí en los momentos de pena y gloria y por saber que siempre puedo contar con ustedes. Fue un honor compartir el aula con ustedes, amigos míos.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por haberme apoyado para la realización de esta tesis como becario (Ref. no. 79073).



# Introducción

Las superficies de Riemann se estudian en distintas áreas de las matemáticas. De ellas se obtienen resultados en los que se miran con distintas estructuras matemáticas: como espacios topológicos, son variedades diferenciables, tienen espacios de funciones meromorfas, armónicas y diferenciables. Además de que en ellas se describen de manera nítida propiedades topológico-algebraicas como el grupo fundamental y varios tipos de homología y cohomología. En este trabajo nos interesaremos en una superficie de Riemann, conocida como *esfera de Riemann* y denotada por  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

En este trabajo de tesis tratamos de describir el comportamiento de las 1-formas meromorfas no exactas (aquellas que no son diferenciales de funciones racionales) con polos y ceros simples, mediante la construcción de otros objetos matemáticos que están canónicamente asociados. De esta manera, para cada 1-forma meromorfa  $\omega$  con polos y ceros simples se asigna una función localmente holomorfa representada por la integral compleja, una figura geométrica que conserva isometrías entre abiertos en  $\mathbb{C}$  y en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , y una gráfica invariante que encierra su información.

La integración de 1-formas meromorfas en la esfera de Riemann y en superficies Riemann compactas, tiene sus raíces desde los primeros días del cálculo. Señalamos a continuación algunos puntos en su desarrollo.

- Al buscar la longitud de la elipse y la lemniscata, uno de los Bernoulli y el Conde Fagnano llegaron a integrales de la forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Euler consideró el problema en mayor generalidad para denominadores en el integrando:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+mx^2+nx^4}}.$$



- Abel y Jacobi crearon técnicas nuevas que permiten tratar la ambigüedad en el signo de la raíz e introducen lo que hoy llamamos superficies de Riemann. Entre sus contribuciones ellos mostraron que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\tau)}}$$

para  $\tau \neq 0, 1$  puede re-interpretarse como la integral de la 1-forma holomorfa  $d\zeta$  sobre un toro, es decir

$$\int d\zeta : \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z} \oplus \sigma \Delta \mathbb{Z}}$$

donde el dominio es un toro y la imagen bajo la integral (introduciendo dos cortes, como los que hacemos en este trabajo,  $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$  en el toro origen) es exactamente un rectángulo de lados 1 y  $\sigma$  con  $Im(\sigma) > 0$ , a partir del cual se recupera el toro original (Ver [3], pags. 656-657).

- Teichmüller y Schiffer (entre otros) alrededor de los años 30's estudiaron las diferenciales cuadráticas, ellas son integrales de la forma

$$\int \sqrt{\phi(z)} dz$$

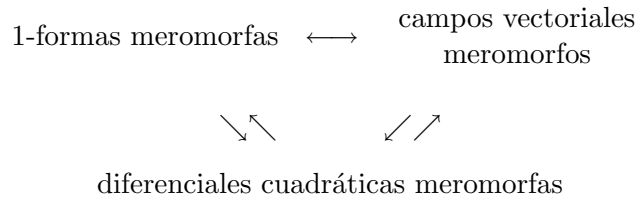
para  $\phi$  función meromorfa (Ver [14], pags. VII,17,20). Ellos introdujeron la idea de la métrica plana. La motivación de dichas integrales proviene de problemas de variacionales de análisis complejo.

La descripción de las métricas planas que aparecen en la integración de 1-formas meromorfas multivaluadas, como es el caso de la raíz, se desarrolló a partir de Teichmüller. Pero ya era implícita en muchos trabajos previos, citemos algunos ejemplos.

- Riemann distinguió el comportamiento de las 1-formas en que tienen polos, residuos cero y no cero y las llamó de la 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> y 3<sup>a</sup> especie respectivamente (Ver [11], pags. 96-97 y [3], pags. 628-629).
- Klein describió cualitativamente el comportamiento de trayectorias de campos vectoriales que provienen de la integración de 1-formas (Ver [7]).
- Ahlfors describió las trayectorias de diferenciales cuadráticas (y por ello, de campos vectoriales meromorfos) cerca de sus singularidades (Ver [1], pag. 111).
- Strebel resumió toda la teoría conocida para métricas y geodésicas de

diferenciales cuadráticas en [14].

Las correspondencias



exhiben la coherencia a las ideas anteriores. Ello muestra que los tres tipos de objetos son caras de una misma cosa. Dicha correspondencia es implícita en muchos de los trabajos mencionados. J. Muciño la enuncia explícitamente en [9]. En este trabajo nosotros usamos la correspondencia en la línea superior.

Es curioso notar que la técnica de expresar las integrales de las 1-formas meromorfas mediante sus campos vectoriales y métricas asociadas, no ha sido completamente desarrollada sobre la esfera de Riemann. Si bien en el caso de superficies de género  $g \geq 1$  la integración de 1-formas holomorfas sí lo ha sido. Pero recordemos que la esfera de Riemann no posee 1-formas holomorfas (pues la diferencia de polos menos ceros es dos en esta superficie).

E. Frías, J. Muciño y L. Hernández están trabajando en el problema sobre la esfera (Ver [4]). Nuestra contribución es la introducción de una gráfica con pesos para describir los objetos.

En el capítulo 1 se describirá la construcción de la esfera de Riemann bajo la definición de superficie de Riemann. Además, se describirá sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  sus funciones meromorfas, 1-formas meromorfas y campos vectoriales meromorfas y se probará que cada objeto es holomorfo y racional. También se probará que existe una relación entre 1-formas y campo vectoriales y entre 1-formas y funciones meromorfas; esta última está condicionada para 1-formas exactas.

En el capítulo 2 se describirá un dominio para la función  $\Psi = \int \omega$  con  $\omega$  1-forma meromorfa con polos y ceros simples, tal que exista una correspondencia entre la familia de 1-formas meromorfas de polos y ceros simples y la familia de funciones definidas como  $\Psi$ . Este es el resultado principal del trabajo. Además, se hará la construcción de la representación de la imagen

de  $\omega$  bajo  $\Psi$ , que llamamos por simplicidad *tofico* y de la gráfica con pesos asociada a  $\omega$ . De esta manera tenemos una relación entre el área del análisis complejo y el área de la combinatoria.

En el capítulo 3 se mostrarán ejemplos de lo descrito en el capítulo anterior; es decir, a partir de una 1-forma  $\omega$  dada

- graficaremos su campo vectorial en  $\widehat{\mathbb{C}}$ ,
- construiremos su tofico y
- construiremos su gráfica asociada.

El objetivo primordial de este capítulo es mostrar de manera visual que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \omega \text{ 1-forma meromorfa} & \longrightarrow & \text{gráfica (árbol finito)} \\
 \text{con polos y ceros simples} & & \text{con pesos complejos} \\
 & \searrow \quad \nearrow & \\
 & \text{tofico} &
 \end{array}$$

efectivamente funciona para 1-formas meromorfas de polos y ceros simples.

Se anexan dos apéndices: el apéndice A muestra un camino para demostrar que el plano complejo extendido  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  es un espacio topológico. Este hecho es básico para probar que la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  es una superficie de Riemann.

El apéndice B muestra un algoritmo, de uso en el programa *Mathematica 7*, para construir un controlador que manipula rotaciones aplicadas al campo vectorial meromorfo  $X$ . Esta fue una herramienta importante para determinar asociaciones entre polos y ceros de  $\omega$  en nuestro trabajo.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. $\widehat{\mathbb{C}}$ es una superficie de Riemann . . . . .	1
1.2. Funciones meromorfas en $\widehat{\mathbb{C}}$ . . . . .	4
1.3. 1-formas y campos vectoriales en $\widehat{\mathbb{C}}$ . . . . .	10
1.4. Relaciones entre $g$ , $\omega$ y $X$ . . . . .	14
<b>2. Métrica y gráfica asociadas a <math>\omega</math></b>	<b>19</b>
2.1. Relación entre $\omega$ genéricas y $\Psi$ . . . . .	20
2.2. Métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$ y su gráfica de invariantes . . . . .	30
<b>3. Ejemplos</b>	<b>35</b>
3.1. 1-forma con únicamente 2 polos . . . . .	35
3.2. 1-forma con 1 cero . . . . .	38
3.3. 1-forma con 2 ceros . . . . .	41
3.4. 1-forma con 3 ceros . . . . .	47
3.5. 1-forma con 4 ceros . . . . .	54
3.5.1. primer ejemplo . . . . .	54
3.5.2. segundo ejemplo . . . . .	62
3.6. 1-forma con 5 ceros . . . . .	70
3.7. 1-forma con 6 ceros . . . . .	79
<b>A. <math>\widehat{\mathbb{C}}</math> es un espacio topológico</b>	<b>89</b>
<b>B. Rotación de <math>X</math> con <i>Mathematica 7</i></b>	<b>95</b>



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. $\widehat{\mathbb{C}}$ es una superficie de Riemann

Consideremos  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  un espacio topológico Hausdorff, compacto y conexo (ver Apéndice A) con la topología cuyos abiertos están formados por tres tipos de abiertos:

- Bolas abiertas con centro en  $z_0$ ,  $B(z_0, r)$ .
- Bolas abiertas con centro en  $\infty$ ,  $B(\infty, \frac{1}{r}) := \overline{B(0, r)}^c$ , donde el complemento se considera en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- Abiertos que son uniones arbitrarias de los anteriores,  $\bigcup_{\alpha \in I} B(P_\alpha, r_\alpha)$ .

Dada una función  $g : U \subset \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow V \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ,

¿se puede decidir si  $g$  es holomorfa sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ ?

Para dar respuesta a la cuestión, haremos las siguientes construcciones:

Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \Omega_1 \stackrel{def}{=} \widehat{\mathbb{C}} - \{\infty\} &\longrightarrow \mathbb{C}_z \\ \varphi_1(z) &= z \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \Omega_2 \stackrel{def}{=} \widehat{\mathbb{C}} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C}_w \\ \varphi_2(z) &= \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \neq \infty \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases}, \end{aligned}$$

en particular tenemos  $\frac{1}{z} = w$ .

**Lema 1.1.1.**  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son homeomorfismos (sobre su imagen).

*Demostración.* Verifiquemos que se cumplen las condiciones de homeomorfismo.

Para  $\varphi_1$  la prueba es automática, debido a que es la función identidad en el dominio  $\widehat{\mathbb{C}} - \{\infty\} = \mathbb{C}_z$ . Así, sólo debemos verificar las condiciones de homeomorfismo para  $\varphi_2$ .

- $\varphi_2$  es biyectiva. En efecto, podemos definir  $\varphi_2^{-1} : \mathbb{C}_w \longrightarrow \Omega_2$  como:

$$\varphi_2^{-1}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w} & \text{para } w \neq 0 \\ \infty & \text{para } w = 0 \end{cases} .$$

- $\varphi_2$  y  $\varphi_2^{-1}$  son continuas. Por la biyectividad de  $\varphi_2$ , y tomando una base de abiertos para la topología de  $\mathbb{C}_w$  formados por bolas, bastará verificar que  $\varphi_2^{-1}$  manda círculos de  $\mathbb{C}_w$  en círculos de  $\Omega_2$ .

Consideremos un círculo en  $\mathbb{C}_w$

$$w(t) = r \cos(t) + \alpha + ir \sin(t) + i\beta, \quad \text{para toda } t \in [0, 2\pi).$$

Aplicándole  $\varphi_2^{-1}$  tenemos que

$$\varphi_2^{-1}(w(t)) = \frac{r \cos(t) + \alpha}{r^2 + 2r\alpha \cos(t) + 2r\beta \sin(t) + \alpha^2 + \beta^2} - i \frac{r \sin(t) + \beta}{r^2 + 2r\alpha \cos(t) + 2r\beta \sin(t) + \alpha^2 + \beta^2}$$

es un círculo con centro en  $(\alpha)/(\alpha^2 + \beta^2) + i(-\beta)/(\alpha^2 + \beta^2)$  y radio  $1/r$  en  $\Omega_2$ , ello se verifica por un cálculo directo. ■

Llamamos *cartas* de  $\widehat{\mathbb{C}}$  a  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ . Consideremos los cambios de coordenadas inducido por las cartas:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}_z - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}_w - \{0\}$$

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$$

y

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{C}_w - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}_z - \{0\}$$

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(w) = \frac{1}{w} .$$

Notemos que

- $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  y  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  son funciones holomorfas, ya que  $\zeta \mapsto 1/\zeta$  es holomorfa para toda  $\zeta \in \mathbb{C} - \{0\}$ .
- $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  es inversa de  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ , pues componiendo dichas funciones obtenemos la función identidad.
- $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  y  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  preservan orientación; hecho que se sigue de que

$$\left| D \left( \frac{1}{\zeta} \right) \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} & \frac{2\zeta_1\zeta_2}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} \\ -\frac{2\zeta_1\zeta_2}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} & \frac{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} \end{pmatrix} \right| = \left( \frac{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} \right)^2 + \left( \frac{2\zeta_1\zeta_2}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} \right)^2 > 0$$

con  $\zeta \in \{z, w\}$  y donde  $D$  es la derivada de la composición.

Con esto se concluye que los espacios  $\mathbb{C}_z - \{0\}$  y  $\mathbb{C}_w - \{0\}$  son “indistinguibles” como subconjuntos de  $\widehat{\mathbb{C}}$ ; no podemos decir que uno de ellos es el preferido. Es decir, no importa si tomamos elementos de  $\mathbb{C}_z$  o de  $\mathbb{C}_w$  para operar, en el sentido que describiremos.

Responderemos a la cuestion inicial como sigue:

**Lema 1.1.2.** Consideremos  $g : U \subset \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow V \subset \widehat{\mathbb{C}}$  una función, entonces  $g \circ \varphi_1^{-1}$  es holomorfa en  $\varphi_1(z) \in \varphi_1^{-1}(U) \cap \mathbb{C}_z$  si y solo si  $g \circ \varphi_2^{-1}$  es holomorfa en  $\varphi_2(z) \in \varphi_2^{-1}(U) \cap \mathbb{C}_w$ .

*Demostración.* Primero, observemos que

$$g \circ \varphi_2^{-1} = g \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = (g \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}).$$

Ya se mostró que  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  es holomorfa y como por hipótesis  $g \circ \varphi_1^{-1}$  es holomorfa, entonces necesariamente  $g \circ \varphi_2^{-1}$  lo es.

Inversamente, tenemos

$$g \circ \varphi_1^{-1} = g \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = (g \circ \varphi_2^{-1}) \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}).$$

Ya se mostró que  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  es holomorfa, y como por hipótesis  $g \circ \varphi_2^{-1}$  es holomorfa, entonces necesariamente  $g \circ \varphi_1^{-1}$  lo es. ■

Con este hecho, podemos afirmar que la terna  $(\widehat{\mathbb{C}}, (\Omega_1, \varphi_1), (\Omega_2, \varphi_2))$  es una *superficie de Riemann*, a la cual llamaremos *esfera de Riemann* y denotaremos como

$$\widehat{\mathbb{C}} \stackrel{def}{=} \left( \widehat{\mathbb{C}}, (\Omega_1, \varphi_1), (\Omega_2, \varphi_2) \right).$$



## 1.2. Caracterización de las funciones meromorfas en $\widehat{\mathbb{C}}$

Describimos en la sección anterior que condiciones deben cumplir las funciones complejo-valuadas para ser holomorfas en la esfera, pero ¿qué podemos decir acerca de las funciones racionales en  $\widehat{\mathbb{C}}$ ?, ¿serán holomorfas? Es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{funciones holomorfas} \\ g : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \end{array} \right\} \stackrel{?}{\supseteq} \left\{ \begin{array}{l} \text{funciones racionales} \\ \frac{P}{Q} : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \end{array} \right\}.$$

Para resolver esta cuestión, necesitaremos asentar ciertos hechos:

Como consecuencia del lema 1.1.2, podemos escribir la siguiente definición:

**Definición 1.2.1.** Consideremos  $f : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  función. Diremos que  $f$  es función *holomorfa* en  $\widehat{\mathbb{C}}$  si para toda  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  podemos elegir  $\alpha$  y  $\beta$  tales que

$$\varphi_\alpha \circ f \circ \varphi_\beta^{-1}(z)$$

es función holomorfa en el sentido usual.

Así, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & \widehat{\mathbb{C}} \\ \varphi_\beta \downarrow & & \downarrow \varphi_\alpha \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi_\alpha \circ f \circ \varphi_\beta^{-1}} & \mathbb{C} \end{array}$$

**Lema 1.2.2.** Todo polinomio  $P : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es función holomorfa.

*Demostración.* Consideremos  $P(z) := (z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (z - \lambda_r)^{m_r}$  un polinomio, con  $m_\alpha \geq 1$  y  $m_1 + \cdots + m_r =: \text{grad}(P)$ . Usando la carta  $\varphi_1$ ,  $P$  en el dominio  $\mathbb{C}$  es función holomorfa trivialmente. Como  $P$  manda  $\infty$  a  $\infty$ , basta verificar que

$$\varphi_2 \circ P \circ \varphi_2^{-1} : w \longmapsto \frac{1}{P(\frac{1}{w})}$$

es holomorfa en  $w = 0$ .

Expresemos el denominador de

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(\frac{1}{w})} &= \frac{1}{(\frac{1}{w} - \lambda_1)^{m_1} \dots (\frac{1}{w} - \lambda_r)^{m_r}} \\ &= \frac{w^{\text{grad}(P)}}{(1 - w\lambda_1)^{m_1} \dots (1 - w\lambda_r)^{m_r}} \\ &= \frac{w^{\text{grad}(P)}}{\lambda_1^{m_1} \dots \lambda_r^{m_r} (\frac{1}{\lambda_1} - w)^{m_1} \dots (\frac{1}{\lambda_r} - w)^{m_r}}, \end{aligned}$$

él no se anula en  $w = 0$ , por lo que  $\varphi_2 \circ P \circ \varphi_2^{-1}$  está definida en  $w = 0$ . Calculando la derivada obtenemos

$$\frac{d}{dw} \frac{1}{P(\frac{1}{w})} = \frac{(\lambda_1^{m_1} \dots \lambda_r^{m_r} (\frac{1}{\lambda_1} - w)^{m_1} \dots (\frac{1}{\lambda_r} - w)^{m_r})(l)w^{l-1} - w^l \zeta(w)}{\lambda_1^{2m_1} \dots \lambda_r^{2m_r} (\frac{1}{\lambda_1} - w)^{2m_1} \dots (\frac{1}{\lambda_r} - w)^{2m_r}}$$

donde  $\zeta(w) = d/dw(\lambda_1^{m_1} \dots \lambda_r^{m_r} (1/\lambda_1 - w)^{m_1} \dots (1/\lambda_r - w)^{m_r})$  y  $l = \text{grad}(P)$ . Así, la derivada existe y es finita en  $w = 0$ .  $\blacksquare$

**Lema 1.2.3.** Toda función racional  $P/Q : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es función holomorfa (bajo la definición 1.2.1).

*Demostración.* Consideremos  $P(z)$  definido anteriormente y  $Q(z) := (z - \beta_1)^{n_1} \dots (z - \beta_s)^{n_s}$  polinomios, con  $n \geq 1$  y  $n_1 + \dots + n_s =: \text{grad}(Q)$ .  $P$  y  $Q$  son funciones holomorfas en  $\widehat{\mathbb{C}}$  y  $\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$  es el conjunto de los ceros de  $Q$ . Considerando la carta  $\varphi_1$ ,  $P/Q$  en el dominio  $\mathbb{C} - \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$  es holomorfa trivialmente. Así, sólo verificaremos que para el conjunto  $\{\beta_1, \dots, \beta_s, \infty\} \in \widehat{\mathbb{C}}$ ,  $P/Q$  es holomorfa.

Considerando la carta  $\varphi_2$  en el dominio de  $P/Q$  tenemos

$$\begin{aligned} (\frac{P}{Q} \circ \varphi_2^{-1})(w) &= \frac{P(\frac{1}{w})}{Q(\frac{1}{w})} = \frac{(\frac{1}{w} - \lambda_1)^{m_1} \dots (\frac{1}{w} - \lambda_r)^{m_r}}{(\frac{1}{w} - \beta_1)^{n_1} \dots (\frac{1}{w} - \beta_s)^{n_s}} \\ &= \frac{w^{\text{grad}(Q)}(1 - w\lambda_1)^{m_1} \dots (1 - w\lambda_r)^{m_r}}{w^{\text{grad}(P)}(1 - w\beta_1)^{n_1} \dots (1 - w\beta_s)^{n_s}} \\ &= \frac{w^{\text{grad}(Q)}\lambda_1^{m_1} \dots \lambda_r^{m_r} (\frac{1}{\lambda_1} - w)^{m_1} \dots (\frac{1}{\lambda_r} - w)^{m_r}}{w^{\text{grad}(P)}\beta_1^{n_1} \dots \beta_s^{n_s} (\frac{1}{\beta_1} - w)^{n_1} \dots (\frac{1}{\beta_s} - w)^{n_s}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_r^{m_r} \left(\frac{1}{\lambda_1} - w\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{1}{\lambda_r} - w\right)^{m_r}}{\beta_1^{n_1} \cdots \beta_s^{n_s} \left(\frac{1}{\beta_1} - w\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{1}{\beta_s} - w\right)^{n_s}} (w^{\text{grad}(Q) - \text{grad}(P)})$$

Para  $w \in \{1/\beta_1, \dots, 1/\beta_s\}$ , consideraremos la carta  $\varphi_2$  para el contradominio de  $P/Q$ , entonces

$$\begin{aligned} (\varphi_2 \circ \frac{P}{Q} \circ \varphi_2^{-1})(w) &= \frac{Q(\frac{1}{w})}{P(\frac{1}{w})} \\ &= \frac{\beta_1^{n_1} \cdots \beta_s^{n_s} \left(\frac{1}{\beta_1} - w\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{1}{\beta_s} - w\right)^{n_s}}{\lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_r^{m_r} \left(\frac{1}{\lambda_1} - w\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{1}{\lambda_r} - w\right)^{m_r}} (w^{\text{grad}(P) - \text{grad}(Q)}), \end{aligned}$$

ella esta definida para cada  $w \in \{1/\beta_1, \dots, 1/\beta_s\}$ . Además con cálculos directos se ve que  $d/dw(\varphi_2 \circ P/Q \circ \varphi_2^{-1})$  existe y es finita para cada  $w \in \{1/\beta_1, \dots, 1/\beta_s\}$ .

Para  $w = 0$  existen dos casos:

*Caso 1.* Definamos  $\delta := (\text{grad}(Q) - \text{grad}(P))$ . Si  $\delta > 0$ , consideraremos la carta  $\varphi_1$  para el contradominio de  $P/Q$ , y así

$$(\varphi_1 \circ \frac{P}{Q} \circ \varphi_1^{-1})(w) = \frac{P(\frac{1}{w})}{Q(\frac{1}{w})} = \frac{\lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_r^{m_r} \left(\frac{1}{\lambda_1} - w\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{1}{\lambda_r} - w\right)^{m_r}}{\beta_1^{n_1} \cdots \beta_s^{n_s} \left(\frac{1}{\beta_1} - w\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{1}{\beta_s} - w\right)^{n_s}} (w^\delta)$$

esta definida para  $w = 0$ ; la derivada existe y es finita.

*Caso 2.* Si  $\delta \leq 0$ , consideraremos la carta  $\varphi_2$  para el contradominio de  $P/Q$ , y tenemos que

$$(\varphi_2 \circ \frac{P}{Q} \circ \varphi_2^{-1})(w) = \frac{Q(\frac{1}{w})}{P(\frac{1}{w})} = \frac{\beta_1^{n_1} \cdots \beta_s^{n_s} \left(\frac{1}{\beta_1} - w\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{1}{\beta_s} - w\right)^{n_s}}{\lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_r^{m_r} \left(\frac{1}{\lambda_1} - w\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{1}{\lambda_r} - w\right)^{m_r}} (w^{-\delta})$$

esta definida para  $w = 0$ ; la derivada existe y es finita. ■

De esta manera, tenemos la contención

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{funciones holomorfas} \\ g : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \end{array} \right\} \supset \left\{ \begin{array}{l} \text{funciones racionales} \\ \frac{P}{Q} : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \end{array} \right\}.$$

Pero, ¿será válida la otra contención?

Para conocer la respuesta, introduciremos ciertos hechos:

**Definición 1.2.4.** Consideremos  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  función. Diremos que  $f$  es función *meromorfa* en  $\widehat{\mathbb{C}}$  si para cada carta  $\varphi_\alpha$ , con  $\alpha \in \{1, 2\}$ , se tiene que

$$\varphi_1 \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

es meromorfa en el sentido usual.

Diremos que  $f$  función meromorfa en  $\widehat{\mathbb{C}}$  tiene un *polo*  $p$  de orden  $k$  si  $(z - p)^k f(z)$  es holomorfa en una vecindad abierta alrededor de  $p$ .

**Lema 1.2.5.** Si  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es función meromorfa, entonces  $f$  es racional en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es función meromorfa. Como  $\widehat{\mathbb{C}}$  es compacta, entonces tiene un número finito de polos. Consideremos  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$  el conjunto de polos de  $f$  con multiplicidades  $m_1, \dots, m_s$ , y  $m_i \geq 1$ , y  $\{\beta_1, \dots, \beta_r\}$  el conjunto de ceos de  $f$  con multiplicidades  $n_1, \dots, n_r$ , y  $n_j \geq 1$ . Construimos una nueva función

$$\tilde{f}(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} f(z),$$

la cual es holomorfa en todo  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ , donde  $P(z) = (z - \lambda_1)^{m_1} \dots (z - \lambda_s)^{m_s}$  y  $Q(z) = (z - \beta_1)^{n_1} \dots (z - \beta_r)^{n_r}$ .

Como  $\tilde{f}(z) \neq \infty$  y  $\tilde{f}(z) \neq 0$  para toda  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ , entonces por el teorema de la función abierta para funciones holomorfas,  $\tilde{f}$  debe ser constante. Esto es

$$\tilde{f}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} f(z) = c$$

para toda  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Despejando a  $f$  tenemos que

$$f(z) := c \frac{Q(z)}{P(z)},$$

es decir,  $f$  es racional. ■

**Observación 1.2.6.** Si  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es función holomorfa (bajo la definición 1.2.1), entonces es función meromorfa en  $\widehat{\mathbb{C}}$  (bajo la definición 1.2.4).

Para exhibirlo, supongamos que  $f$  es holomorfa. Si la imagen de todo  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  bajo  $f$  no es infinito, entonces  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  bajo  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  es holomorfa (y meromorfa) de la manera usual.

Si  $f(z) = \infty$  para  $z \in \{z_1, \dots, z_n\}$  puntos aislados, entonces considerando los conjuntos

$$H := \{z_1, \dots, z_n, \infty\}$$

y

$$\widetilde{H} := \widehat{\mathbb{C}} - H$$

tenemos que

$$\varphi_1 \circ f|_{\widetilde{H}} \circ \varphi_1^{-1}$$

y

$$\varphi_1 \circ f|_H \circ \varphi_2^{-1}$$

son holomorfas (y meromorfas) de la manera usual. Así,  $f$  es función meromorfa en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Estos resultados se resumen en el siguiente:

**Teorema 1.2.7.** Consideremos  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  una función. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- 1)  $f$  es holomorfa en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- 2)  $f$  es meromorfa en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- 3)  $f$  es racional en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

*Demostración.* Por la observación 1.2.6, (1)  $\Rightarrow$  (2), por el lema 1.2.5, (2)  $\Rightarrow$  (3) y por el lema 1.2.3, (3)  $\Rightarrow$  (1). ■

Denotemos como  $\mathbf{z}(f)$  y  $\mathbf{p}(f)$  al número de ceros y polos contando multiplicidades de  $f$ , respectivamente.

**Lema 1.2.8.** Si  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es una función meromorfa, entonces

$$\mathbf{z}(f) = \mathbf{p}(f).$$

*Demostración.* Consideremos

$$f(z) = \frac{\prod_{i=1}^r (z - \lambda_i)^{n_i}}{\prod_{j=1}^s (z - \beta_j)^{m_j}}$$

función meromorfa sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  y que el grado del polinomio del numerador es  $R \geq 0$  y del denominador es  $S \geq 0$ .

Deseamos conocer qué tipo de singularidad aislada es  $\infty$  para  $f$ ; para ello, consideremos a  $w = 0$  para  $f$  bajo  $\varphi_2$ , obteniendo

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{w}\right) &= \frac{\prod_{i=1}^r ((1/w) - \lambda_i)^{n_i}}{\prod_{j=1}^s ((1/w) - \beta_j)^{m_j}} = \frac{w^S \prod_{i=1}^r (1 - w\lambda_i)^{n_i}}{w^R \prod_{j=1}^s (1 - w\beta_j)^{m_j}} \\ &= \frac{w^S \lambda_1^{n_1} \cdots \lambda_r^{n_r}}{w^R \beta_1^{m_1} \cdots \beta_s^{m_s}} \frac{\prod_{i=1}^r ((1/\lambda_i) - w)^{n_i}}{\prod_{j=1}^s ((1/\beta_j) - w)^{m_j}}. \end{aligned}$$

Tenemos tres casos:

- *Caso 1.* Si  $S - R = 0$ , entonces  $f$  evaluada en  $w = 0$  ( $z = \infty$ ) es finito y

$$\mathbf{z}(f) - \mathbf{p}(f) = (R) - (S) = 0.$$

- *Caso 2.* Si  $S - R < 0$ , entonces  $f$  evaluada en  $w = 0$  ( $z = \infty$ ) es polo de orden  $S - R$ , pues  $w^{R-S}f(1/w)$  es holomorfa en  $w = 0$ ; y

$$\mathbf{z}(f) - \mathbf{p}(f) = (R) - (S + (R - S)) = R - S - R + S = 0.$$

- *Caso 3.* Si  $S - R > 0$ , entonces  $f$  evaluada en  $w = 0$  ( $z = \infty$ ) es cero de orden  $S - R$ , pues  $w^{R-S}f(1/w)$  es finito en  $w = 0$ ; y

$$\mathbf{z}(f) - \mathbf{p}(f) = (R + (S - R)) - (S) = R + S - R - S = 0.$$

Esto prueba que siempre hay el mismo número de polos que ceros contando multiplicidades en una función meromorfa sobre la esfera  $\widehat{\mathbb{C}}$ . ■

### 1.3. 1-formas meromorfas y campos vectoriales meromorfos en $\widehat{\mathbb{C}}$

Sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  existen otros objetos importantes y naturales; los que estudiaremos serán las 1-formas diferenciales meromorfas y los campos vectoriales meromorfos.

Consideremos la transformación de Möbius

$$L : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

$$L(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc \neq 0$ . Las expresiones de  $L$  bajo las cartas  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son

$$(L \circ \varphi_1^{-1})(z) = L(\varphi_1^{-1}(z)) = L(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

y

$$(L \circ \varphi_2^{-1})(w) = L(\varphi_2^{-1}(w)) = L\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{bw + a}{dw + c},$$

respectivamente. Calculando la derivada a ambas funciones, obtenemos

$$((L \circ \varphi_1^{-1})(z))' = (L(z))' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = h_1(z)$$

y

$$((L \circ \varphi_2^{-1})(w))' = \left(L\left(\frac{1}{w}\right)\right)' = \frac{-(ad - bc)}{(dw + c)^2} = h_2(w).$$

Notemos que

$$h_2(w) = -\frac{1}{w^2}h_1\left(\frac{1}{w}\right); \tag{1.1}$$

en efecto pues

$$-\frac{1}{w^2}h_1\left(\frac{1}{w}\right) = \left(-\frac{1}{w^2}\right) \frac{ad - bc}{(c(1/w) + d)^2} = -\frac{ad - bc}{(dw + c)^2} = h_2(w).$$

Dado que  $z = 1/w$  y  $dz = -(1/w^2)dw$ , de (1.1) se concluye que

$$h_1(z)dz = h_2(w)dw. \tag{1.2}$$

En general, (1.2) se cumple para cualesquiera  $h_1 := f \circ \varphi_1^{-1}, h_2 := f \circ \varphi_2^{-1}$  funciones meromorfas que cumplan (1.1).

**Definición 1.3.1.** Consideremos  $h_1 = f \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  y  $h_2 = f \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{C}_w \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  funciones meromorfas. Llamaremos *1-forma (diferencial) meromorfa* sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  a una pareja  $\omega = \{\omega_1 = h_1(z)dz, \omega_2 = h_2(w)dw\}$  tal que se cumple (1.2).

Diremos que  $\omega = h_1(z)dz$  es *1-forma racional* sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  si

$$h_1(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

donde  $P, Q : \mathbb{C}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  son polinomios.

En el caso anterior, la derivada de  $L$  bajo las cartas  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  está bien definida como 1-forma diferencial meromorfa en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Observemos que (1.1) garantiza que al conocer la expresión de  $\omega$  en una carta, inmediatamente se conozca la expresión en la otra carta.

**Lema 1.3.2.** Si  $\omega = h_1(z)dz$  es una 1-forma meromorfa, entonces es racional sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

*Demostración.* Consideremos  $\omega = h_1(z)dz$  1-forma meromorfa. No podemos afirmar que es consecuencia del Teorema 1.2.7, pues el hecho de que  $h_1$  sea una función meromorfa en  $\mathbb{C}$  no implica que sea meromorfa en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Lo que debemos verificar es que  $h_1$  sea meromorfa en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , y para ello solo falta describir cuál es el comportamiento cerca de  $\infty$  para  $h_1$ . Del hecho de que  $z \longmapsto (1/z) = w$ , lo anterior es equivalente a describir el comportamiento cerca de  $w = 0$  para  $h_2$ .

De la igualdad (1.1), despejamos  $h_1$ , obteniendo

$$h_1\left(\frac{1}{w}\right) = -w^2 h_2(w).$$

Para  $h_2, w = 0$  es polo, cero o finito y para  $-w^2$  es cero de orden 2 bajo  $\omega$ , de donde se concluye que  $w = 0$  ( $z = \infty$ ) es polo, cero o finito para  $h_1$ .



De esta manera,  $h_1(z)$  es meromorfa (y racional) en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Un cálculo similar prueba que  $h_2(w)$  es meromorfa (y racional) en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . ■

Cuando tratamos con funciones meromorfas sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ , el número de ceros es igual al número de polos. En el caso de 1-formas meromorfas sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ , un nuevo comportamiento hace que el número de polos sea mayor que el número de ceros.

Denotemos como  $\mathbf{z}(\omega)$  y  $\mathbf{p}(\omega)$  al número de ceros y polos contando multiplicidades de  $\omega$ , respectivamente.

**Lema 1.3.3.** Si  $\omega = h_1(z)dz$  es una 1-forma meromorfa sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ , entonces

$$\mathbf{z}(\omega) - \mathbf{p}(\omega) = -2.$$

*Demostración.* Consideremos

$$\omega = h_1(z)dz = \frac{\prod_{i=1}^r (z - \lambda_i)^{n_i}}{\prod_{j=1}^s (z - \beta_j)^{m_j}} dz$$

1-forma meromorfa sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  tal que el grado del polinomio del numerador es  $R \geq 0$  y del denominador es  $S \geq 0$ .

Deseamos conocer qué tipo de singularidad aislada es  $\infty$  para  $h_1$ ; consideremos a  $w = 0$  para  $h_2$ . De la igualdad (1.1) tenemos que

$$\begin{aligned} h_2(w) &= -\frac{1}{w^2} h_1\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^2} \frac{\prod_{i=1}^r ((1/w) - \lambda_i)^{n_i}}{\prod_{j=1}^s ((1/w) - \beta_j)^{m_j}} \\ &= -\frac{1}{w^2} \frac{w^S \prod_{i=1}^r (1 - w\lambda_i)^{n_i}}{w^R \prod_{j=1}^s (1 - w\beta_j)^{m_j}} \\ &= -\frac{1}{w^2} \frac{w^S \lambda_1^{n_1} \cdots \lambda_r^{n_r} \prod_{i=1}^r ((1/\lambda_i) - w)^{n_i}}{\beta_1^{m_1} \cdots \beta_s^{m_s} \prod_{j=1}^s ((1/\beta_j) - w)^{m_j}} \\ &= w^{S-R-2} C \frac{\prod_{i=1}^r ((1/\lambda_i) - w)^{n_i}}{\prod_{j=1}^s ((1/\beta_j) - w)^{m_j}} \end{aligned}$$

donde  $C = -(\lambda_1^{n_1} \cdots \lambda_r^{n_r})/(\beta_1^{m_1} \cdots \beta_s^{m_s})$ . Tenemos tres casos:

- *Caso 1.* Si  $S - R = 2$ , entonces  $\omega$  evaluada en  $w = 0$  ( $z = \infty$ ) es finito y

$$\mathbf{z}(\omega) - \mathbf{p}(\omega) = (R) - (S) = -2.$$

- *Caso 2.* Si  $S - R < 2$ , entonces  $\omega$  evaluada en  $w = 0$  ( $z = \infty$ ) es polo de orden  $S - R - 2$ , pues  $w^{R-S+2}h_2(w)$  es holomorfa en  $w = 0$ ; y

$$\mathbf{z}(\omega) - \mathbf{p}(\omega) = (R) - (S + (R - S + 2)) = R - S - R + S - 2 = -2.$$

- *Caso 3.* Si  $S - R > 2$ , entonces  $\omega$  evaluada en  $w = 0$  ( $z = \infty$ ) es cero de orden  $S - R - 2$ , pues  $w^{R-S+2}h_2(w)$  es finito en  $w = 0$ ; y

$$\mathbf{z}(\omega) - \mathbf{p}(\omega) = (R + (S - R - 2)) - (S) = R + S - R - 2 - S = -2.$$

Esto prueba que siempre hay dos polos más que ceros contando multiplicidades en una 1-forma meromorfa sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ . ■

**Definición 1.3.4.** Consideremos  $f_1 = f \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  y  $f_2 = f \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{C}_w \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  funciones meromorfas. Llamaremos *campo vectorial meromorfo* sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  a la pareja  $X = \{X_1 = f_1(z)(\partial/\partial z), X_2 = f_2(w)(\partial/\partial w)\}$  tal que se cumple

$$f_2(w) = -w^2 f_1\left(\frac{1}{w}\right). \quad (1.3)$$

Diremos que  $X = f_1(z)(\partial/\partial z)$  es *campo vectorial racional* sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  si

$$f_1(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

donde  $P, Q : \mathbb{C}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  son polinomios.

Dado que  $z = 1/w$  y  $\partial z/\partial w = -(1/w^2)$ , de (1.3) se concluye que

$$f_1(z) \frac{\partial}{\partial z} \xrightarrow{\frac{1}{w}} f_2(w) \frac{\partial}{\partial w}. \quad (1.4)$$

Observemos que (1.3) garantiza que al conocer la expresión de  $X$  en una carta, inmediatamente se conozca la expresión en la otra carta.

**Lema 1.3.5.** Si  $X = f_1(z)(\partial/\partial z)$  es un campo vectorial meromorfo, entonces es racional sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

*Demostración.* Haciendo inferencias y cálculos similares que en el Lema 1.3.2, se concluye que si  $X$  es un campo vectorial meromorfo, debe ser racional. ■

Al igual que en el caso de 1-formas meromorfas sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ , existe una diferencia en el número de polos y el número de ceros de un campo vectorial meromorfo; pero en este caso, el número de ceros es mayor que el número de polos.

**Lema 1.3.6.** Si  $X = f_1(z)(\partial/\partial z)$  es un campo vectorial meromorfo sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ , entonces contando multiplicidades;

$$z(X) - p(X) = 2.$$

*Demostración.* Un proceso similar al realizado en el Lema 1.3.3, se concluye que

$$z(X) - p(X) = 2. \quad \blacksquare$$

## 1.4. Relación entre funciones, 1-formas y campos vectoriales meromorfos

Hasta este momento se han definido tres familias de objetos sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ :

- funciones meromorfas  $g$ ,
- 1-formas meromorfas  $\omega = h_1(z)dz$  y
- campos vectoriales meromorfos  $X = f_1(z)(\partial/\partial z)$ .

Aparentemente las tres familias son distintos; sin embargo, están relacionadas. A continuación describiremos dichas relaciones.

**Lema 1.4.1.** Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de 1-formas meromorfas  $\{\omega\}$  sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  y el conjunto de campos vectoriales meromorfos  $\{X\}$  sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

*Demostración.* Consideremos  $\omega = h_1(z)dz$  1-forma meromorfa sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Definimos la correspondencia

$$\psi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto de 1-formas} \\ \text{meromorfas } \omega \text{ sobre } \widehat{\mathbb{C}} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto de campos vectoriales} \\ \text{meromorfos } X \text{ sobre } \widehat{\mathbb{C}} \end{array} \right\}$$

$$h_1(z)dz \quad \xrightarrow{\psi_1} \quad \frac{1}{h_1(z)} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Dado  $X = f_1(z)(\partial/\partial z)$  campo vectorial meromorfo sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ , definimos  $\psi_1^{-1}$  como

$$f_1(z) \frac{\partial}{\partial z} \xrightarrow{\psi_1^{-1}} \frac{1}{f_1(z)} dz.$$

Debemos verificar que

$$\psi_1^{-1} \circ \psi_1 = I_\omega \quad \text{y} \quad \psi_1 \circ \psi_1^{-1} = I_X;$$

un cálculo directo muestra la validez de lo anterior. ■

Dada una función  $g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  meromorfa, podemos asignarle una 1-forma meromorfa  $\omega$  de la siguiente manera:

Consideremos  $g(z) = Q(z)/P(z)$  función meromorfa sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ . La correspondencia

$$d : \left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto de funciones} \\ \text{meromorfos } g \text{ sobre } \widehat{\mathbb{C}} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto de 1-formas} \\ \text{meromorfas } \omega \text{ sobre } \widehat{\mathbb{C}} \end{array} \right\}$$

define una 1-forma meromorfa, donde  $d$  es la diferencial

$$g(z) \xrightarrow{d} g'(z)dz,$$

Para verificarlo, usamos la carta  $\varphi_2$  y observamos que  $w = 0$  ( $z = \infty$ ) en  $(1/w^2)g'(1/w)$  es polo o cero o regular, por lo que  $g'(z)dz$  es meromorfa sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Ahora, como  $g(z)$  es meromorfa,  $g'(z)$  también es meromorfa y tiene los polos en las mismas posiciones que  $g(z)$ , pero no con las mismas multiplicidades, un cálculo directo sobre  $d(g)$  lo muestra.

Inversamente, el resultado no es cierto:

**Ejemplo 1.4.2.** Consideremos la 1-forma

$$\omega = \left( \frac{a_{-1}}{z - p_i} \right) dz, \quad a_{-1} \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Considerando que  $d^{-1}$  existe, salvo constantes (por el Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de contorno), aplicamos la integral a  $\omega$  obteniendo

$$d^{-1}(\omega) = \int_\gamma \omega = \int_{z_0}^z \left( \frac{a_{-1}}{\zeta - p_i} \right) d\zeta = a_{-1}(\log(z - p_i) - \log(z_0 - p_i)),$$

con  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  tal que  $\gamma(0) = z_0$  fijo y  $\gamma(1) = z$  variable. Tenemos que  $\log(z - p_i)$  no es una función meromorfa, pues no está definida continuamente en todo  $\mathbb{C}$  y las funciones racionales sí son continuas de  $\widehat{\mathbb{C}}$  a  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Llamaremos *1-forma exacta* a una 1-forma racional  $\omega$  tal que  $\text{Res}(\omega, p_i) = 0$  para todo polo  $p_i$  de  $\omega$ . Este tipo de 1-formas hace que  $d^{-1}$  pueda ser calculada de forma “casi” explícita; dicho resultado se describe a continuación.

**Teorema 1.4.3.** Consideremos  $\omega = h_1(z)dz$  racional. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1)  $\Psi(z) = \int_{z_0}^z \omega$  es función racional sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- 2)  $\text{Res}(\omega, p_i) = 0$  para todo polo  $p_i$  de  $\omega$ .

*Demostración:*

(2)  $\Rightarrow$  (1)

Supongamos que todos los polos y ceros de  $\omega$  son finitos; en caso contrario, existe una transformación de Möbius  $L : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  tal que  $L(\infty)$  es regular para  $L_*(\omega)$  y los demás polos y ceros continúan siendo finitos para  $L_*(\omega)$ . Denotemos por  $p_1, \dots, p_k$  a los polos de  $\omega$  con multiplicidades  $n_1, \dots, n_k$ .

Consideremos un punto arbitrario  $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$  tal que  $z_0 \neq p_i$  para todo polo  $p_i$ , y una curva cualquiera  $\gamma$  que une a  $z_0$  con algún  $z \in \widehat{\mathbb{C}} - \{p_1, \dots, p_k\}$  y que no pasa sobre los polos.

De esta manera,

$$\Psi(z) = \int_{z_0}^z \omega : \widehat{\mathbb{C}} - \{p_1, \dots, p_k\} \rightarrow \mathbb{C}$$

es función holomorfa. La hipótesis nos asegura que si tomamos alguna otra curva  $\alpha$  que une a  $z_0$  con  $z \in \widehat{\mathbb{C}} - \{p_1, \dots, p_k\}$  y que no pase por los polos, entonces  $\int_\gamma \omega = \int_\alpha \omega$ , por lo que  $\Psi(z)$  está bien definida en  $\widehat{\mathbb{C}} - \{p_1, \dots, p_k\}$ .

Ahora debemos verificar como se comporta  $\Psi$  en los puntos  $\{p_\alpha\}_{\alpha=1}^k$ .

Consideremos un disco  $D - \{p_i\}$  de radio  $r_0$ , y un punto arbitrario  $p_i + r_0 e^{i\theta_0}$  sobre la circunferencia. Podemos considerar la integral de  $\omega$  sobre

la curva que conecta a  $p_i + r_0 e^{i\theta_0}$  con  $p_i$  como la representante de la integral definida sobre todas las curvas que comienzan en cualquier punto de la circunferencia a  $p_i$ , puesto que da lo mismo integrar desde cualquier punto de la circunferencia al centro  $p_i$ .

Debemos probar que al integrar a lo largo de la curva cuando tiende a  $p_i$ , la integral tiende a  $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Tomemos la expansión de Laurent de  $\omega$  alrededor de  $p_i$  sobre  $D$ , así tenemos que

$$\omega = \left( \frac{a_{-m_i}}{(z - p_i)^{m_i}} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - p_i)^2} + H(z - p_i) \right) dz$$

donde  $H(z - p_i)$  es holomorfa en  $D$ . De esta manera, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{p_i + r_0 e^{i\theta_0}}^{p_i + r e^{i\theta_0}} \omega \right| &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \left| \int_{p_i + r_0 e^{i\theta_0}}^{p_i + r e^{i\theta_0}} \left( \frac{a_{-m_i}}{(z - p_i)^{m_i}} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - p_i)^2} \right) \right| |dz| \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_{p_i + r_0 e^{i\theta_0}}^{p_i + r e^{i\theta_0}} (H(z - p_i)) \right| |dz| \right) \end{aligned}$$

Notemos dos hechos: Cuando  $r$  tiende a cero,  $\left| \int_{p_i + r_0 e^{i\theta_0}}^{p_i + r e^{i\theta_0}} H(z - p_i) \right| |dz|$  tiende a una constante en  $\mathbb{C}$ , pues es holomorfa en  $p_i$ . Con respecto a la primera integral, como  $m_i$  es el índice más grande de los que se encuentra en la integral, hace que

$$\left| \int_{p_i + r_0 e^{i\theta_0}}^{p_i + r e^{i\theta_0}} \frac{a_{-m_i}}{(z - p_i)^{m_i}} \right| |dz|$$

crezca más rápido que las demás y como

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{p_i + r_0 e^{i\theta_0}}^{p_i + r e^{i\theta_0}} \frac{a_{-m_i}}{(z - p_i)^{m_i}} \right| |dz| \longrightarrow \infty.$$

Se concluye que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{p_i + r_0 e^{i\theta_0}}^{p_i + r e^{i\theta_0}} \omega \right| \longrightarrow \infty.$$

De esta manera,  $\Psi$  es meromorfa en  $p_i$  para cada  $i = 1, \dots, k$ ; con ello,  $\Psi : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es función meromorfa y por el Teorema 1.2.7,

$$\Psi(z) = \int_{z_0}^z \omega$$

es función racional.

(1)  $\Rightarrow$  (2)

Por contradicción, supongamos que existe algún polo  $p_j$  de  $\omega$  tal que

$$\text{Res}(\omega, p_j) \neq 0.$$

Consideremos un disco  $D - \{p_j\}$  y tomemos la expansión de Laurent de  $\omega$  alrededor de  $p_i$  sobre  $D$ ,

$$\omega = \left( \frac{a_{-m_j}}{(z - p_j)^{m_j}} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - p_j)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - p_j)} + f(z - p_j) \right) dz$$

donde  $f(z - p_j)$  es holomorfa en  $D$  y  $a_{-1} \neq 0$  por suposición. Realizando la integral, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z \omega = & \left[ -\frac{a_{-m_j}}{(m_j)(z - p_j)^{m_j-1}} - \cdots - \frac{a_{-2}}{2(z - p_j)} \right]_{z_0}^z \\ & + [a_{-1} \log(z - p_j)]_{z_0}^z + [F(z - p_j)]_{z_0}^z. \end{aligned}$$

Por el Ejemplo 1.4.2, tenemos que  $a_{-1} \log(z - p_j)$  es discontinua en  $\widehat{\mathbb{C}}$ ;  $[F(z - p_j)]_{z_0}^z$  es función holomorfa y continua en  $D$  y los demas sumandos también son funciones continuas.

De esta manera,  $\int_{z_0}^z \omega$  es función discontinua pues es suma de funciones continuas y una discontinua; de donde ella es discontinua. Se concluye que

$$\int_{z_0}^z \omega$$

no es función racional, lo cual es una contradicción con la hipótesis. ■

## Capítulo 2

# Métrica y gráfica asociadas a $\omega$

En la sección 1.4 describimos a la familia de 1-formas exactas y con ello la relación que existe con la familia de funciones racionales meromorfas.

Sin embargo, ¿qué podemos decir acerca de la familia de 1-formas no exactas, es decir, aquellas que tienen por lo menos un polo simple? ¿Habrá alguna relación con alguna familia de funciones explícita, geoméricamente sencilla de describir?

En este trabajo se estudian el caso para la familia de 1-formas meromorfas  $\omega$  sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  con todos sus polos y ceros de multiplicidad 1, que efectivamente tienen una relación con la familia de funciones

$$\Psi(z) = \int_{z_0}^z \omega \tag{2.1}$$

considerando un dominio distinto de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , como fue en el capítulo anterior (siendo este el resultado principal del trabajo).

Damos un mecanismo geométrico y un invariante semi-discreto (esto es, una gráfica con pesos) que nos permite expresar la aplicación (2.1) mediante una métrica plana y como un invariante encriptado en una gráfica con pesos.

El procedimiento, el cual será desarrollado durante este capítulo, es como sigue:

1. Identificar en  $\widehat{\mathbb{C}}$  los polos y ceros de  $\omega$ .



2. Decidir qué polos están asociados con qué ceros y qué ceros están asociados con qué ceros, ello mediante rotaciones del campo asociado  $X_\omega$ .
3. Unir cada par polo-cero o cero-cero asociado mediante una curva  $\Sigma_\alpha$  tal que  $\int_{\Sigma_\alpha} \omega$  sea la de menor norma entre las posibles (sólo para el caso cero-cero) y que  $\Sigma_\alpha$  no interseque a otra  $\Sigma_\beta$  ni a ella misma. El conjunto  $\{\Sigma_\alpha\}$  formará un árbol encajado en  $\widehat{\mathbb{C}}$  al cuál a cada arista se le asignara un peso, obtenido de calcular los residuos de polos e integrales de ceros a ceros. Este árbol será el invariante semi-discreto.
4. Calcular  $\int \omega$  alrededor de los polos y entre ceros asociados. La geometría de estas integrales describe objetos como son cilindros semi infinitos, cilindros finitos y esferas con tres agujeros que intersecan en un punto. Dichos objetos están unidos con respecto a las asociaciones dadas en (3) y con ciertos cortes (que resultan ser las  $\Sigma_\alpha$ ) se pueden encajar en  $\mathbb{C}$  bajo (2.1), formando así una métrica plana.

En este trabajo, no profundizaremos en la teoría de métricas. Hablaremos de métrica plana en el sentido del Teorema 2.1.7 sección (IV); es decir, cada pieza de nuestros objetos (que son paralelepípedos, rectángulos, rectángulos semi-infinitos y triángulos pegados por las fronteras como se describe en el mismo teorema 2.1.7) determina dicha métrica.

## 2.1. Relación entre 1-formas con polos y ceros simples y funciones definidas por $\Psi$

**Observación 2.1.1.** Toda 1-forma racional  $\omega$  pertenece a la familia de 1-formas no exactas si existe al menos un polo  $p_i$  tal que

$$\text{Res}(\omega, p_i) \neq 0.$$

Para verificarlo, supongamos que ocurre lo anterior, entonces

$$\Psi(z) = \int_{z_0}^z \omega = \sum_{i=1}^l \left( \text{Res}(\omega, p_i) \left( \log \left( \frac{z - p_i}{z_0 - p_i} \right) \right) \right) + \phi(z - z_0),$$

donde  $l$  es el número de polos con residuo no nulo y  $\phi(\zeta)$  es una función racional (libre de logaritmos). Como el logaritmo no es función racional, tenemos que  $\Psi(z)$  no es función meromorfa.

De esta manera, la correspondencia de la familia de 1-formas no exactas con la familia de funciones meromorfas (bajo derivada) queda totalmente descartada. Para el caso de la familia de 1-formas con polos y ceros simples, podemos considerar otra familia de funciones, que construiremos de la siguiente manera:

Consideremos  $\omega = h_1(z)dz$  1-forma meromorfa con polos y ceros simples, donde

$$h_1(z) = \frac{\prod_{j=1}^k (z - c_j)}{\prod_{i=1}^{k+2} (z - p_i)}, \quad (2.2)$$

con  $k \geq 1$ . Decimos que una 1-forma meromorfa  $\omega$  es *genérica* si  $h_1(z)$  es de la forma (2.2), con  $\{p_i, c_j\}$  todos distintos entre sí.

De aquí en adelante, al hablar de  $\omega$  como 1-forma nos referiremos a  $\omega$  como 1-forma meromorfa genérica. De igual manera, al hablar de polos y ceros nos referiremos a polos  $p_i \in \omega$  y ceros  $c_j \in \omega$  simples.

Recordemos del capítulo anterior que cada 1-forma meromorfa  $\omega$  tiene su campo vectorial meromorfo  $X$  canónicamente asociado. En este trabajo, a partir de (2.2) se estudian los campos

$$X = \frac{1}{h_1(z)} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\prod_{i=1}^{k+2} (z - p_i)}{\prod_{j=1}^k (z - c_j)} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.3)$$

Decimos que un campo meromorfo  $X$  es *genérico* si es de la forma (2.3). De aquí en adelante, al hablar de  $X$  como campo nos referiremos a  $X$  como campo vectorial meromorfo genérico.

El problema de considerar  $\Psi(z)$  para la 1-forma  $\omega$  es que

$$\Psi(z) = \int_{z_0}^z \omega = \sum_{i=1}^{k+2} \left( \text{Res}(\omega, p_i) \left( \log \left( \frac{z - p_i}{z_0 - p_i} \right) \right) \right) \quad (2.4)$$

por lo que la función logaritmo “saltará de rama en rama” tantas veces como vueltas de una curva alrededor de dichos polos y hará que  $\Psi(z)$  sea multivaluada.

El objetivo es considerar un dominio de  $\widehat{\mathbb{C}}$  tal que los logaritmos en (2.4) se mantengan en una misma rama. En los cursos de variable compleja se

demuestra que removiendo el semieje de los reales negativos con el cero, el logaritmo se mantiene en una sóla rama. Un proceso similar es el que consideraremos a continuación:

Sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ , para cada polo  $p_i$  consideremos una curva  $\Sigma_{p_i, c_j}$  tal que inicia en  $p_i$  y termina en algún cero  $c_j$ , no posee autointersecciones ni pasa por el resto de los polos o ceros de  $\omega$ . Así, en vecindades que no contengan a otro punto singular salvo  $p_i$ ,  $\Psi(z)$  se comporta como función univaluada. Para preservar dicha propiedad, consideremos un conjunto de curvas  $\{\Sigma_{c_k, c_l}\}$  que inicia en algún  $c_k$  y termina en algún otro  $c_l$  tal que para todo  $z \in \widehat{\mathbb{C}} - \{\Sigma_{p_i, c_j}\} \cup \{\Sigma_{c_k, c_l}\}$  exista al menos una curva  $\gamma$  que inicie en  $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$  fijo y termine en  $z$ .

Para mayor simplicidad, definamos  $\{\Sigma_\alpha\} := \{\Sigma_{p_i, c_j}\} \cup \{\Sigma_{c_k, c_l}\}$  y llamaremos *cortes* a los elementos de  $\{\Sigma_\alpha\}$ . Para decidir puntos iniciales y finales de los cortes debemos considerar ciertos argumentos:

Primeramente, con el uso de un graficador (ver Apéndice B) creamos la gráfica del campo vectorial (2.3). Como  $X$  es el campo canónicamente asociado a  $\omega$ , entonces los ceros de  $\omega$  serán los polos de  $X$  y los polos de  $\omega$  serán los ceros de  $X$ . Además, los polos y ceros de  $\omega$  son *puntos de equilibrio* de  $X$ , por lo que un polo de  $X$  se verá como un punto silla con el graficador; mientras que un cero de  $X$  con el graficador se verá como un pozo, centro o fuente si la parte imaginaria de  $\partial(1/h_1(z))/\partial z$  en dicho punto es positiva, igual a cero o negativa, respectivamente.

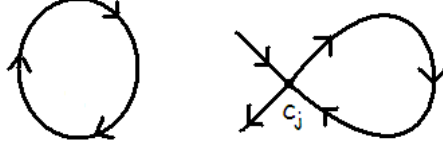
**Observación 2.1.2.** Consideremos  $X = (1/h_1(z))(\partial/\partial z)$  un campo. Existe un factor multiplicativo  $\rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ , con  $\rho \in \mathbb{R}^+$ ,  $\theta \in (0, 2\pi]$ , tal que actúa como expansión-contracción cuando varía  $\rho$  y como rotación cuando varía  $\theta$  en los vectores tangentes  $X(p)$ .

De manera abstracta podemos decir que  $\rho e^{i\theta}$  es la rotación y expansión-contracción en cada plano tangente a la esfera  $\widehat{\mathbb{C}}$ . De aquí en adelante, al hablar de rotaciones nos referiremos a  $\rho e^{i\theta}$  con  $\rho = 1$ .

**Observación 2.1.3.** Consideremos  $X = (1/h_1(z))(\partial/\partial z) = f_1(z)(\partial/\partial z)$  un campo. Diremos que una función  $\lambda(t) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es solución de  $X$  si

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = f_1(\lambda(t))$$

para toda  $t \in [a, b]$ ; llamaremos *órbita* a dicha solución. Diremos que una órbita es *periódica* si la solución es periódica y que es *homoclínica* si la órbita une a un polo  $c_j$  de  $X$  consigo mismo; llamaremos *punto homoclínico* a  $c_j$ .



(a) Órbita periódica (b) Órbita homoclínica

Figura 2.1: Representación de una órbita periódica y de una órbita homoclínica

**Observación 2.1.4.** Consideremos  $X = (1/h_1(z))(\partial/\partial z)$  un campo y un cero  $p_i$  y un polo  $c_j$  de  $X$ . Si existe una rotación tal que en  $e^{i\theta}X$ ,  $p_i$  es un centro y  $c_j$  es punto homoclínico tal que  $p_i$  está en el interior de la órbita homoclínica asociada a  $c_j$ , entonces diremos que  $p_i$  está asociado a  $c_j$  y se le asignará un corte  $\Sigma_{p_i, c_j}$  si ocurre lo anteriormente descrito.

**Observación 2.1.5.** Consideremos  $X = (1/h_1(z))(\partial/\partial z)$  un campo. Si existe una rotación tal que en  $e^{i\theta}X$  existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de algunos ceros  $c_k, c_l$ , entonces diremos que  $c_k$  está asociado a  $c_l$  y se le asignará un corte  $\Sigma_{c_k, c_l}$  si ocurre lo anteriormente descrito.

Ahora, consideremos  $\omega = h_1(z)dz$  1-forma. Diremos que  $\omega$  es de *grado*  $-k$  si  $\omega$  tiene  $k$  polos contando multiplicidades. El grado menor que puede tener  $\omega$  es  $-2$ .

Cada 1-forma  $\omega$  pertenece a una familia de 1-formas, dependiendo de su grado y las multiplicidades de sus polos y ceros. Por ejemplo, una 1-forma de grado  $-3$  puede estar en una de las 3 familias posibles:

$$\{-1, -1, -1, +1\}, \{-1, -2, +1\} \text{ y } \{-3, +1\}$$

donde el signo negativo denota polos y el positivo ceros, la cantidad de números negativos es el número de polos sin contar multiplicidad (y lo propio para ceros), y cada número representa la multiplicidad de cada polo y

cada cero. Las 1-formas genéricas de grado  $-k$  pertenecen a la familia

$$\underbrace{\{-1, \dots, -1\}}_{k \text{ veces}}, \underbrace{\{+1, \dots, +1\}}_{k-2 \text{ veces}}.$$

**Observación 2.1.6.** Las siguientes son afirmaciones:

- El único cero de cada  $\omega$  genérica de tipo  $\{-1, -1, -1, +1\}$  está asociado a los tres únicos polos.
- En  $\omega$  genéricas de grado  $-k$  con  $k \geq 3$ , cada polo sólo puede estar asociado a un cero a la vez. En  $\omega$ -genéricas de grado  $-k$  con  $k \geq 4$ , cada cero debe estar asociado al menos a un polo.
- Cada cero de cada  $\omega$  genérica de tipo  $\{-1, -1, -1, -1, +1, +1\}$  está asociado únicamente a dos polos y el otro cero.
- Cada cero de cada  $\omega$  genérica de tipo  $\{-1, -1, -1, -1, -1, +1, +1, +1\}$  está asociado o a dos polos y otro cero o a un polo y dos ceros.
- Cada cero de cada  $\omega$  genérica de grado  $-k$  con  $k \geq 6$  está asociado o a dos polos y un cero o a un polo y dos ceros o a tres ceros.

De esta manera, tenemos el resultado principal del trabajo:

**Teorema 2.1.7.** Consideremos  $\omega = h_1(z)dz$  1-forma con polos  $\{p_1, p_2, \dots, p_{k+2}\}$  y ceros  $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  todos de multiplicidad 1, con  $k \geq 1$ . Existe un número finito de cortes  $\{\Sigma_\alpha\}$  en la esfera de Riemann donde la integral de  $\omega$  es

$$\Psi(z) : \widehat{\mathbb{C}} - \{\Sigma_\alpha\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \Psi(z) = \int_{z_0}^z \omega,$$

con  $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} - \{\Sigma_\alpha\}$  punto regular de  $\omega$  y tal que:

- i)  $\Psi(z)$  es biholomorfismo local.
- ii)  $\Psi(z)$  envía soluciones reales de  $X$  en  $\widehat{\mathbb{C}} - \{\Sigma_\alpha\}$  a soluciones de  $\partial/\partial x$  en  $\mathbb{C}$ .
- iii) Las imágenes de  $\{\Sigma_\alpha\}$  bajo  $\Psi(z)$  son segmentos de recta en  $\mathbb{C}$  para cortes entre ceros y semi-rectas en  $\mathbb{C}$  para cortes entre ceros y polos.

iv) La cerradura de la imagen de  $\widehat{\mathbb{C}} - \{\Sigma_\alpha\}$  bajo  $\Psi(z)$  es unión finita de triángulos, paralelepípedos y rectángulos semi infinitos. Además, los lados finitos de las piezas vienen dados por residuos de polos de  $\omega$ , integrales de ceros asociados y suma de residuos de polos asociados a cada cero.

*Demostración:*

i) Para probar que  $z \mapsto \Psi(z)$  es biholomorfismo alrededor de algún  $z_1 \in \widehat{\mathbb{C}} - \{\Sigma_\alpha\}$ , por el Teorema de la función inversa compleja basta probar que

$$\left. \frac{d\Psi}{dz} \right|_{z_1} \neq 0.$$

En efecto, pues

$$\left. \frac{d}{dz} \left( \int_\gamma \omega \right) \right|_{z_1} = \omega(z_1) \in \mathbb{C} - \{0\}$$

pues  $z_1$  no es ni polo ni cero de  $\omega$ .

ii) Consideremos  $h_1(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ . Es facil probar que

$$\begin{aligned} \Psi = \int_\gamma \omega = \int_\gamma h_1(z) dz &= \int_\gamma (U(x, y) dx - V(x, y) dy) \\ &+ i \int_\gamma (U(x, y) dy + V(x, y) dx) \end{aligned}$$

para cualquier  $\gamma$  suave por partes. En particular, para  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \left. \frac{1}{h(z)} \right|_{z=\alpha(t)} = \frac{1}{h(\alpha(t))} \\ &= \frac{U(x(t), y(t))}{U^2(x(t), y(t)) + V^2(x(t), y(t))} - i \frac{V(x(t), y(t))}{U^2(x(t), y(t)) + V^2(x(t), y(t))} \end{aligned}$$

Esto es, que  $\alpha(t)$  es solución real de  $X = (1/h)(\partial/\partial z)$ . Se tiene

$$\begin{aligned} dx(\alpha'(t)) &= \frac{U(x(t), y(t))}{U^2(x(t), y(t)) + V^2(x(t), y(t))} \quad y \\ dy(\alpha'(t)) &= -\frac{V(x(t), y(t))}{U^2(x(t), y(t)) + V^2(x(t), y(t))}. \end{aligned}$$

Mediante cálculos directos obtenemos que  $\Psi$  valuada en  $\alpha(t)$  es

$$\Psi = \int_\alpha \omega = t + c.$$

De esta manera, tenemos que la composición  $\Psi \circ \alpha$  toma valores  $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$  y los manda a  $t + c$ , que en el plano complejo es una línea horizontal.

Se sigue que  $\Psi$  manda soluciones reales, que expresamos como  $\alpha(t)$ , de  $X = (1/h_1(z))(\partial/\partial z)$  en  $\widehat{\mathbb{C}} - \{\Sigma_\alpha\}$  a soluciones de  $(\partial/\partial x)$  en  $\mathbb{C}$ , que es el campo vectorial trivial cuyas soluciones son trayectorias horizontales de velocidad unitaria.

Un resultado inmediato de (ii) es que las imágenes de soluciones de campos rotados bajo  $\Psi$  son segmentos, esto es, la composición  $\Psi \circ \zeta$  toma valores  $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$  y los manda a  $e^{i\theta}(t+c)$ , donde  $\zeta$  es una solución real de  $e^{i\theta}X$ .

iii) Consideremos los dos casos:

- Si  $\Sigma_\alpha$  es un corte asociado a dos ceros, digamos que empieza en  $c_{j_1}$  y termina en  $c_{j_2}$ , entonces  $\int_{\Sigma_\alpha} \omega$  es un complejo finito. Denotemos como  $V_{\Sigma_{\alpha_1}}$  a la representación vectorial de dicho complejo en  $\mathbb{C}$ . Del hecho de que los residuos de los polos son distintos de cero,  $V_{\Sigma_{\alpha_1}}$  tendrá una copia  $V_{\Sigma_{\alpha_2}}$  y por el segundo resultado de (ii), ambos estarán anclados en el punto final de cada segmento dirigido que resulte de las imágenes de  $\int_{z_0}^{c_{j_1}} \omega$ .

Ahora consideremos la recta que pasa por  $V_{\Sigma_{\alpha_1}}$  y tomemos el segmento de recta  $l_{\Sigma_{\alpha_1}}$  con puntos inicial y final de los propios de  $V_{\Sigma_{\alpha_1}}$ . Haciendo lo propio con  $V_{\Sigma_{\alpha_2}}$ , tenemos que las imagen de  $\Sigma_\alpha$  bajo  $\Psi$  son  $l_{\Sigma_{\alpha_1}}$  y  $l_{\Sigma_{\alpha_2}}$ .

- Si  $\Sigma_\beta$  es un corte asociado a un cero y un polo, digamos que empieza en  $c_j$  y termina en  $p_i$ , entonces  $\int_{\Sigma_\beta} \omega$  es un complejo de módulo infinito. Consideremos un punto  $x$  sobre  $\Sigma_\beta$  diferente de  $c_j$  y  $p_i$ . Haciendo un procedimiento similar al anterior sobre  $c_j$  y  $x$ , obtendremos el vector imagen  $V_{\Sigma_{\beta_1}}$ .

Al acercarse  $x$  a  $p_i$ ,  $V_{\Sigma_{\beta_1}}$  aumentará en magnitud, pero no cambiará su sentido, por lo que el módulo de  $\int_{\Sigma_\beta} \omega$  tenderá a infinito si  $x$  tiende a  $p_i$  y el argumento convergerá a un argumento muy similar al de  $V_{\Sigma_{\beta_1}}$ . De esta manera, tendremos una semirecta  $L_{\Sigma_{\beta_1}}$  que está sobre  $V_{\Sigma_{\beta_1}}$ . Haciendo un procedimiento similar a los anteriores, tenemos que las imágenes de  $\Sigma_\beta$  bajo  $\Psi$  son  $L_{\Sigma_{\beta_1}}$  y  $L_{\Sigma_{\beta_2}}$ .

iv) Consideremos un polo  $p_i$  asociado a un  $c_j$  y un círculo  $D$  de radio  $\epsilon$  alrededor de él tal que no contenga otro punto singular. Tomemos un punto  $p$  sobre  $D$  diferente al punto de intersección  $x_0$  entre  $D$  y  $\Sigma_{\alpha_k}$  y denotemos

como  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  a los semicírculos que unen a  $p$  y  $x_0$ . Aplicando  $\Psi$  a  $x_0$  desde  $p$  tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\gamma_1} \omega = w_1 \neq v_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\gamma_2} \omega.$$

Así, cada  $x \in \Sigma_{\alpha_k} - p_i$  tiene dos imágenes  $w_1$  y  $v_2$  y por (iii) pertenecen a los segmentos de rectas  $W$  y  $V$ , respectivamente. Cuando  $x$  tiende a  $p_i \in \Sigma_{\alpha_k}$ , sus imágenes tienden a infinito (Ver Figura 2.2).

$W$  y  $V$  son semirectas paralelas y sus puntos iniciales están unidos por un segmento que es imagen de una curva  $\gamma$  que inicia y termina en  $c_j$  y que rodea a  $p_i$ . Dicho segmento es la representación vectorial correspondiente al valor del residuo de  $p_i$  y sin caer en tecnicismos lo llamaremos *residuo de  $p_i$* .

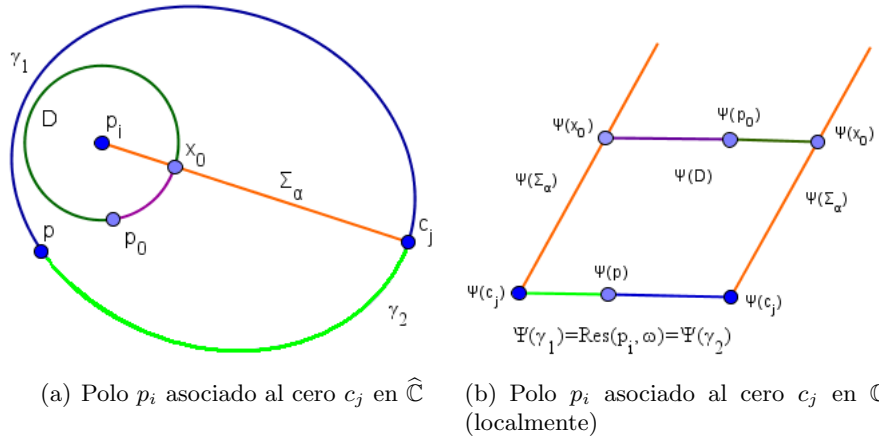


Figura 2.2: Representación de un polo asociado a un cero en el dominio y contradominio de  $\Psi$ .

Con procedimiento similar construimos los rectángulos semi-infinitos correspondientes a los demás polos.

Ahora, considerando las observaciones 2.1.4, 2.1.5 y 2.1.6, cada cero tiene como imágenes a 3 puntos, los cuales están ordenados de la siguiente manera:

- Para el caso en que un cero  $c_i$  tenga la configuración de tres polos asociados (la observación 2.1.6 asegura que sólo sucede en 1-formas que



pertenecen a la familia  $\{-1, -1, -1, +1\}$ , en una de las imágenes de  $c_i$  se “ancla” el residuo de uno de los polos (considérese como vector, para así considerar tomar un sentido antihorario al colocar los residuos; pero denótese como segmento) donde el punto final es otra imagen de  $c_i$ . En este punto se coloca el siguiente residuo, donde el punto final es la imagen restante de  $c_i$ .

*NOTA: se considerará a los residuos principalmente como vectores, para que se tenga noción de que se cumple que la suma de los residuos de los polos es cero; sin embargo se denotarán como segmentos, perdiendo así dirección y sentido*

Dado que  $\sum Res(p_i, \omega) = 0$ , aseguramos que el punto final del residuo restante retornará a la primera imagen de  $c_i$  considerada. Así, hemos formado un triángulo con las imágenes de  $c_i$  como puntas y donde de cada lado tiene un rectángulo semi-infinito. De esto se sigue que la cerradura de la imagen de  $\widehat{\mathbb{C}} - \{\Sigma_\alpha\}$  bajo  $\Psi$  es la frontera del objeto anteriormente descrito.

- Para el caso en que un cero  $c_l$  tenga la configuración de dos polos  $p_i$  y  $p_j$  y un cero  $c_k$  asociados seguimos un procedimiento similar anterior. El segmento faltante se obtiene de la suma de residuos de  $p_i$  y  $p_j$  (considérese como suma de vectores, para así tener un vector como resultado; pero denótese como segmento) en signo contrario (y por tanto, el vector de dirección contraria). A este segmento lo llamaremos *semiresiduo de  $c_k$  y  $c_l$*  (Ver Figura 2.3).

Consideremos  $\Sigma_{c_k, c_l}$  el corte que une a  $c_k$  y  $c_l$ ; y una curva cerrada  $\gamma$  que empieza y termina en  $x_0 \in \Sigma_{c_k, c_l}$  tal que rodee sólo a los polos  $p_i$  y  $p_j$ . Tomemos un punto  $p \in \gamma$  tal que partimos a  $\gamma$  en  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  que empiezan en  $p$  y terminan en  $x_0$ . De esta manera,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\gamma_1} \omega = u_1 \neq v_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\gamma_2} \omega.$$

Así, cada  $x \in \Sigma_{\alpha_{kl}}$  tiene dos imágenes  $u_1$  y  $v_2$  y por (iii) pertenecen a los segmentos de rectas  $U$  y  $V$ , respectivamente.

Como  $U$  y  $V$  son segmentos de recta paralelos, el otro lado finito es paralelo e igual al semiresiduo de  $c_k$  y  $c_l$ . Visto vectorialmente, es el mismo vector de semiresiduo pero anclado donde terminaba y con dirección contraria (Ver Figura 2.4).

- Para el caso en que un cero  $c_l$  tenga la configuración de un polo  $p_i$  y dos ceros  $c_j$  y  $c_k$  asociados seguimos con un procedimiento similar anterior salvo el hecho que debemos conocer al menos un de los semiresiduos de  $c_l$  con  $c_j$  o con  $c_k$ .
- Para el caso en que un cero  $c_l$  tenga la configuración de tres ceros  $c_i, c_j$  y  $c_k$  asociados el procedimiento es similar salvo que ahora debemos conocer al menos dos semiresiduos de  $c_l$  con  $c_i, c_j$  o con  $c_k$ .

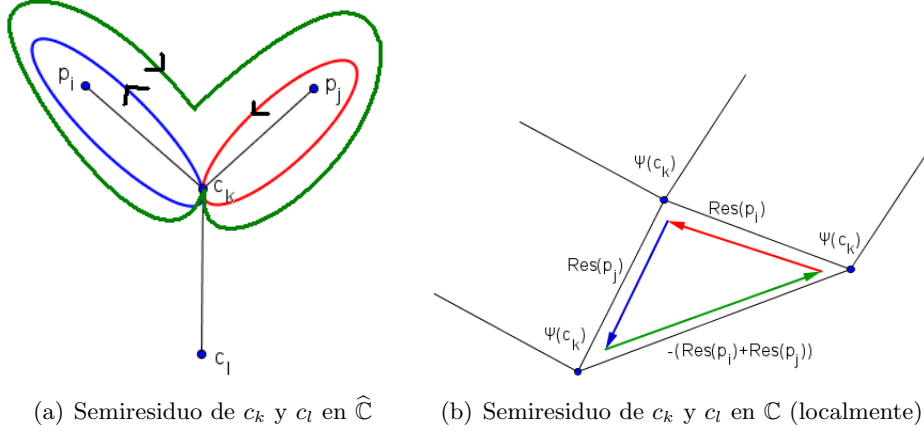


Figura 2.3: Representación del semiresiduo de ceros asociados en el dominio y contradominio de  $\Psi$ .

Así, tenemos que en cada triángulo puede haber o dos rectángulos semi-infinitos y un paralelepípedo o un rectángulo semi-infinito y dos paralelepípedos o tres paralelepípedos. De las observaciones 2.1.4, 2.1.5 y 2.1.6 unimos las piezas anteriormente descritas y se sigue que la cerradura de  $\widehat{\mathbb{C}} - \{\Sigma_\alpha\}$  es la frontera del objeto anterior. ■

De esta manera existe una correspondencia biunívoca entre la familia de 1-formas no exactas de polos y ceros simples y la familia de funciones definidas

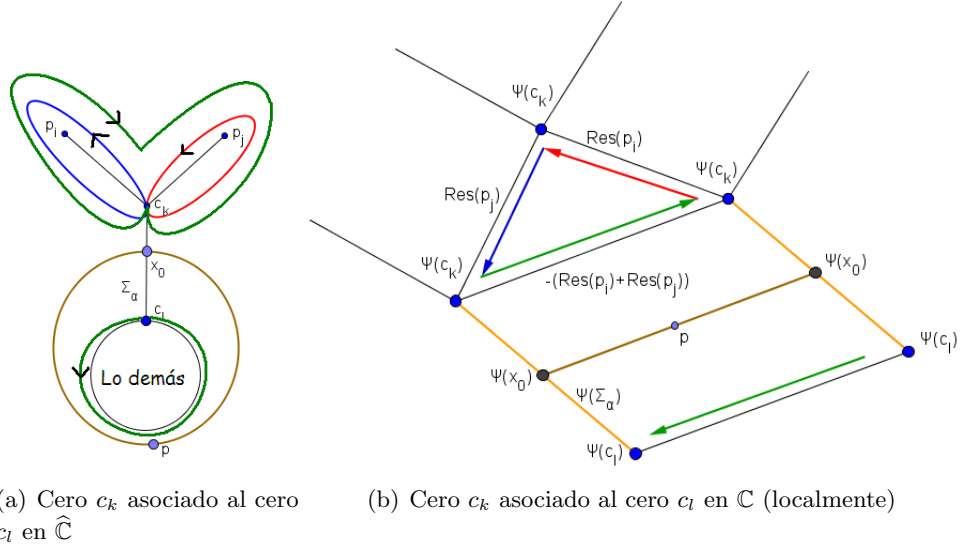


Figura 2.4: Representación de un cero asociado a otro cero en el dominio y contradominio de  $\Psi$ .

por  $\Psi$ .

## 2.2. Métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$ en base a $\omega$ y su gráfica de invariantes

Los apartados (ii), (iii), (iv) y (v) del Teorema 2.1.7 muestran la geometría que describe  $\omega$  bajo  $\Psi = \int_{z_0}^z \omega$ ; sin embargo, no es el único resultado que se obtiene a partir de ellos, si no que también se obtiene el siguiente:

**Corolario 2.2.1.** Consideremos  $\omega = h_1(z)dz$  1-forma en  $\widehat{\mathbb{C}} - \{\Sigma_\alpha\}$  con polos y ceros simples. El abierto  $\widehat{\mathbb{C}} - \{\Sigma_\alpha\}$  es isométrico a su imagen en  $\mathbb{C}$  bajo  $\Psi$ .

Dada una 1-forma  $\omega = h_1(z)dz$  genérica, se puede construir una representación gráfica de  $\Psi$  de la siguiente manera:

- 1) Graficamos el campo  $X(\omega) = (1/h_1(z))(\partial/\partial z)$ .

2) Considerando la observación 2.1.2, para cada polo  $p_i$  rotamos  $X$  hasta que  $p_i$  sea centro.

3) Aplicando la observación 2.1.4, para cada polo  $p_i$  observamos a qué cero  $c_j$  está asociado.

4) Por las observaciones 2.1.5 y 2.1.6, para cada par de ceros  $c_{j_1}, c_{j_2}$  sin la configuración completa verificamos si están asociados.

5) Aplicando los apartados (iii) y (iv) del Teorema 2.1.7, construimos la representación geométrica de  $\Psi$  asignando valores a los lados finitos de la anterior. Para el caso en el que la imagen de un corte entre un polo y un cero asociados  $\Sigma_\alpha$  intersekte a alguno de los lados del triángulo del cero asociado, consideraremos el ángulo inverso del complejo imagen de  $\Sigma_\alpha$ .

Llamaremos *tofico* asociado a  $\omega$  a la representación geométrica de  $\Psi = \int \omega$  construída de la manera anterior descrita (Ver figura 2.5). Esto es, el tofico es  $\Psi \left( \widehat{\mathbb{C}} - \{\Sigma_\alpha\} \right) \subset \widehat{\mathbb{C}}$  incluyendo su frontera. Para la construcción del tofico, se debe respetar magnitud, dirección y sentido de cada  $z \in \mathbb{C}$ .

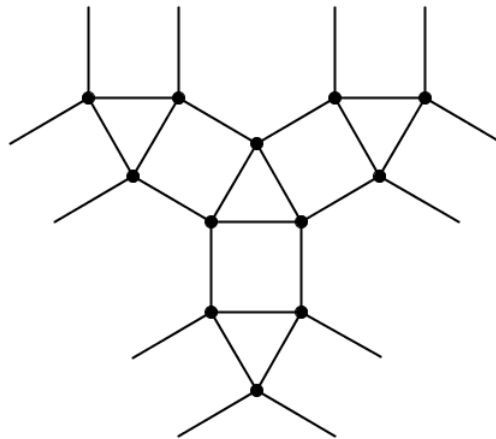


Figura 2.5: Ejemplo de un tofico

Además del tofico, usando la información de la integral  $\Psi = \int \omega$  podemos asignarle una gráfica  $G$  con pesos a  $\omega$ , cuyo conjunto de vértices está formado por los polos y los ceros de  $\omega$  y cuyo conjunto de aristas es el conjunto

$\{\Sigma_\alpha\}$ . La gráfica está formada de la siguiente manera:

Primero, se proyecta hacia  $\mathbb{C}$  la región que encierra a todos los polos y ceros de  $\omega$ . En ella se trazan las correspondientes  $\Sigma_\alpha$ . La posición tanto de los polos y ceros como de cada  $\Sigma_\alpha$  que tengan en la proyección será la posición de puntos y aristas de  $G$ ; es decir, hay una arista entre dos vértices si existe una  $\Sigma_{\alpha_0}$  que conecte a los puntos singulares correspondientes de los vértices.

Las aristas que provengan de cortes  $\Sigma_\alpha$  entre ceros se les asignará un peso complejo de  $\int_{\Sigma_\alpha} \omega$ , mientras que las que provengan de cortes  $\Sigma_\beta$  entre polos y ceros se les asignará un peso complejo igual al residuo del polo.

Llamaremos *gráfica de invariantes* asociada a  $\omega$  a la gráfica anterior descrita.

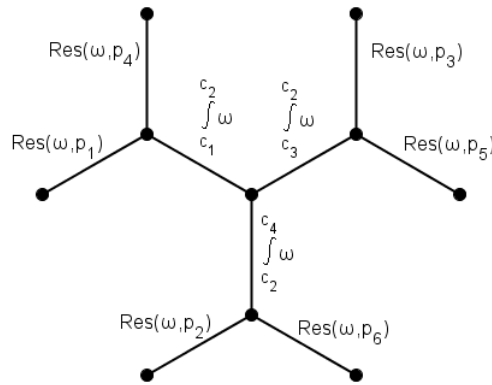


Figura 2.6: Ejemplo de una gráfica de invariantes

Este tipo de gráficas son árboles tales que el grado de los vértices no terminales es igual a tres (excepto el árbol trivial). Del hecho de que cada 1-forma  $\omega$  genérica tiene asociada canónicamente una gráfica con pesos, concluimos el siguiente:

**Corolario 2.2.1.** Cada familia de 1-formas genéricas tiene asociada canónicamente uno o varios tipos de gráficas, los cuáles no se repiten entre familias.

A continuación se expresan los tipos de gráficas para las primeras 7 familias de 1-formas genéricas:

Familia de 1-formas	Tipo de gráfica	Ejemplo
$\{-1, -1\}$	Árbol trivial	
$\{-1, -1, -1, +1\}$	Árbol de 4 vértices	
$\{-1, -1, -1, -1, +1, +1\}$	Árbol de 6 vértices	
$\{-1, -1, -1, -1, -1, +1, +1, +1\}$	Árbol de 8 vértices	
$\{-1, -1, -1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1\}$	Árbol de 10 vértices	
$\{-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1, +1\}$	Árbol de 12 vértices	
$\{-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1, +1, +1\}$	Árbol de 14 vértices	

Si sucede el caso en que dos 1-formas  $\omega_1$  y  $\omega_2$  pertenecientes a la misma familia posean la misma gráfica asociada (en el sentido de posición de vértices y aristas), entonces el peso asignado en las aristas de las gráficas, obtenido de operar la 1-forma a través de los cortes con la integral, son pieza fundamental para distinguir entre ambas gráficas. Es por esto que se toma un árbol con pesos como gráfica asociada a una 1-forma.



## Capítulo 3

# Ejemplos

Un algoritmo basado en lo mencionado en el capítulo anterior, para la construcción de la métrica plana (tofico) y de la gráfica con pesos asociadas a una 1-forma  $\omega$  es el siguiente:

- Dado  $\omega = h_1(z)dz$ , graficar  $X = (1/h_1(z)dz)(\partial/\partial z)$ .
- Observar en el campo las asociaciones correspondientes.
- Calcular  $\Psi = \int \omega$  sobre cada  $\Sigma_\alpha$  y calcular los semiresiduos.
- Construir el tofico a partir de la información anterior.
- Construir la gráfica a partir de  $\Sigma_\alpha$  y asignarle a las aristas los pesos correspondientes.

Ejemplos de construcción usando este algoritmo son mostrados a continuación.

### 3.1. 1-forma con únicamente 2 polos

Tomemos

$$\omega = \frac{dz}{(z-i)(z+i)}.$$

Este ejemplo es excepción al Teorema 2.1.7, sin embargo lo desarrollaremos para observar la evolución de las 1-formas al aumentar el número de ceros. La figura 3.1 muestra la gráfica del campo vectorial  $X$



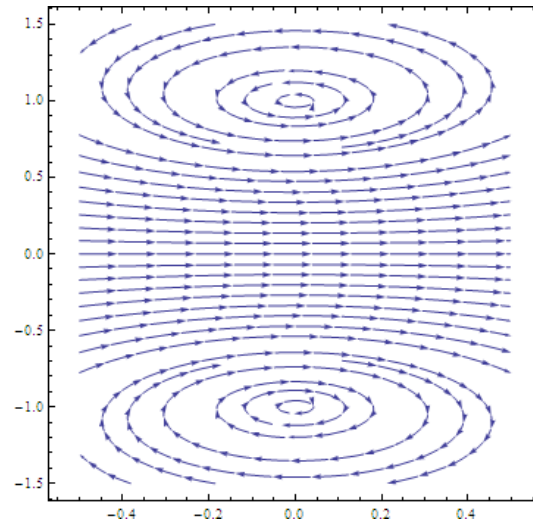
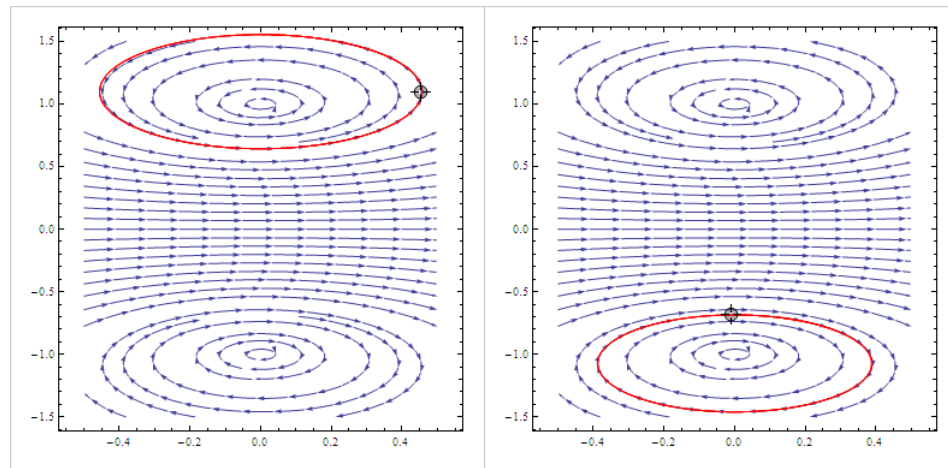


Figura 3.1: Campo vectorial  $X = (z - i)(z + i) \frac{\partial}{\partial z}$

Para conocer las asociaciones, rotamos el campo obteniendo los siguientes resultados:



(a) Polo  $i$

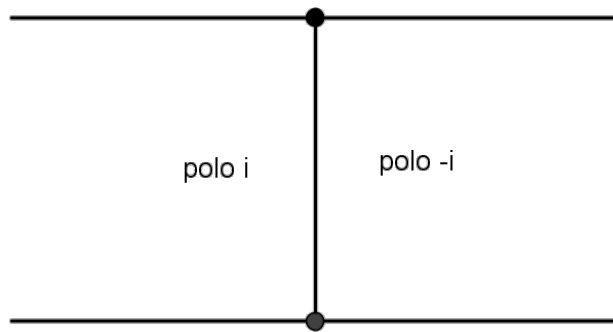
(b) Polo  $-i$

Figura 3.2: Sin aplicar rotación a  $X$ , los polos  $i$  y  $-i$  son centros y están asociados entre ambos.

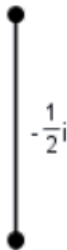
Los valores obtenidos en *Mathematica 7* para los residuos de los polos son los siguientes:

- El residuo del polo  $i$  es  $-\frac{1}{2}i$
- El residuo del polo  $-i$  es  $\frac{1}{2}i$

Con esta información, construimos el tofoco (fig. 3.3 (a)) y la gráfica de invariantes (fig. 3.3 (b)).



(a) Tofoco asociado a  $\omega$



(b) Gráfica de invariantes asociado a  $\omega$

Figura 3.3: Tofoco y gráfica de invariantes asociados a la 1-forma  $\omega = \frac{dz}{(z-i)(z+i)}$

### 3.2. 1-forma con 1 cero

Tomemos

$$\omega = \frac{(z - 8 - i)}{(z - 10)(z - 8 - 3i)(z - 6)} dz.$$

La figura 3.4 muestra la gráfica del campo vectorial  $X$

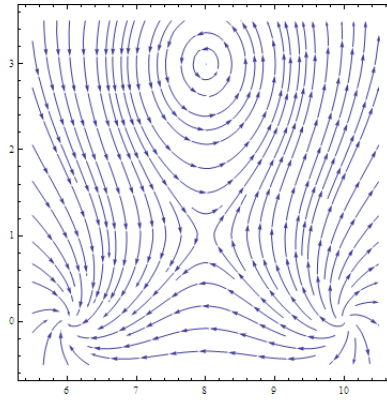


Figura 3.4: Campo vectorial  $X = \frac{(z-10)(z-8-3i)(z-6)}{(z-8-i)} \frac{\partial}{\partial z}$

Para conocer las asociaciones, rotamos el campo obteniendo los siguientes resultados:

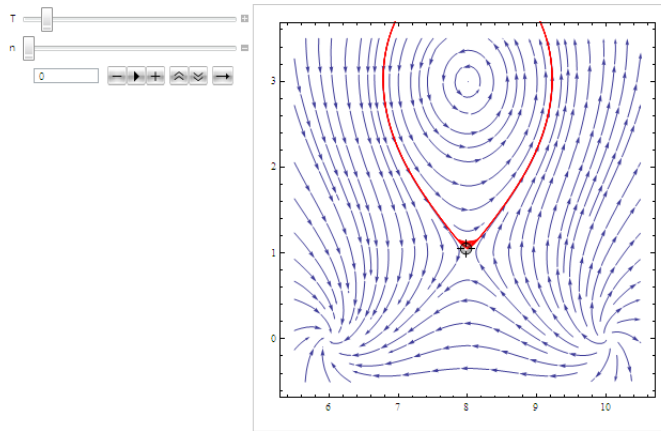
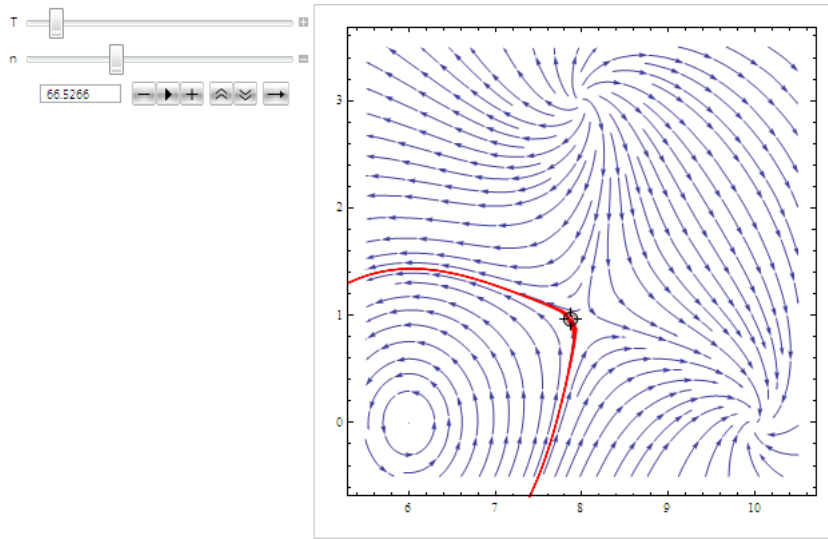
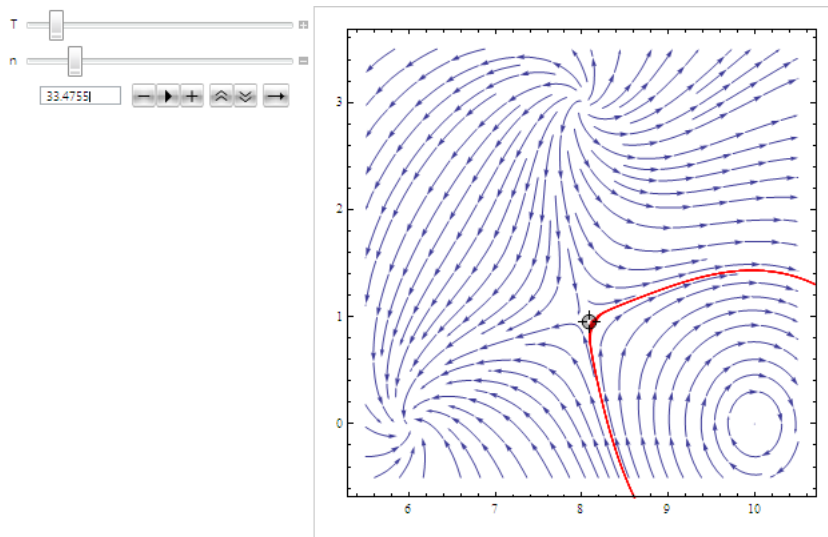


Figura 3.5: Sin aplicar rotación, el polo  $8 + 3i$  es centro y está asociado al cero  $8 + i$ .



(a) Polo 6 asociado a cero  $8 + i$



(b) Polo 10 asociado a cero  $8 + i$

Figura 3.6: Bajo la rotación de  $0,665266\pi$  a  $X$ , el polo 6 es centro y está asociado al cero  $8 + i$ . Bajo la rotación de  $0,334755\pi$  a  $X$ , el polo 10 es centro y está asociado al cero  $8 + i$ .

Los valores obtenidos en *Mathematica 7* para los residuos son los sigu-



### 3.3. 1-forma con 2 ceros

Tomemos

$$\omega = \frac{(z-1)(z+3)}{(z-1-i)(z-1+i)(z+3-i)(z+3+i)} dz.$$

La figura 3.8 muestra la gráfica del campo vectorial  $X$

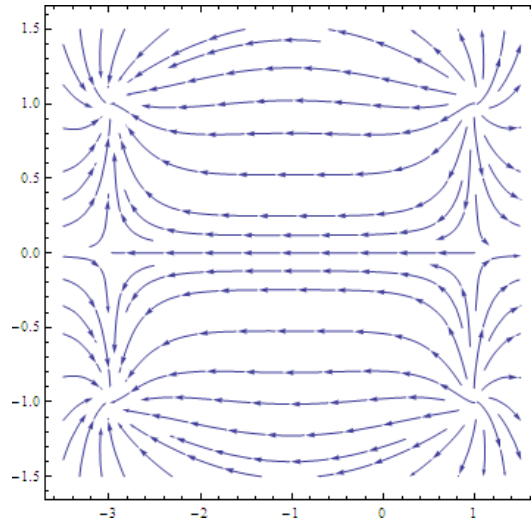


Figura 3.8: Campo vectorial  $X = \frac{(z-1-i)(z-1+i)(z+3-i)(z+3+i)}{(z-1)(z+3)} \frac{\partial}{\partial z}$

Para conocer las asociaciones, rotamos el campo obteniendo los siguientes resultados:

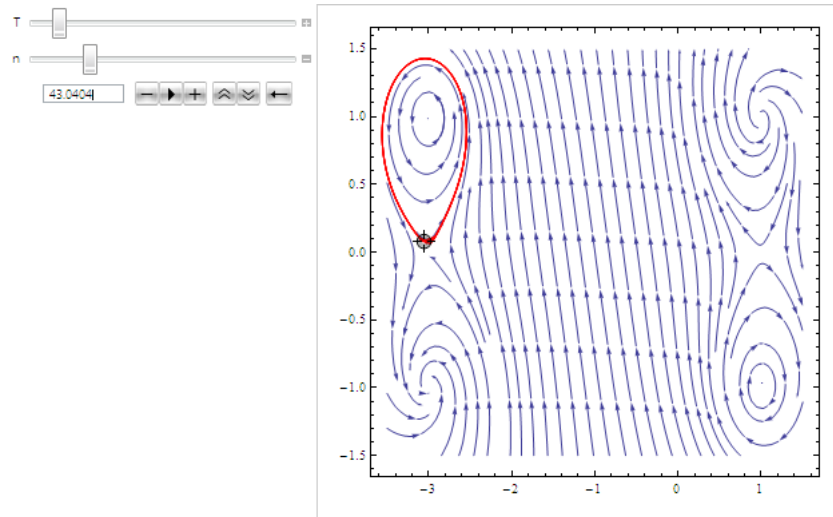
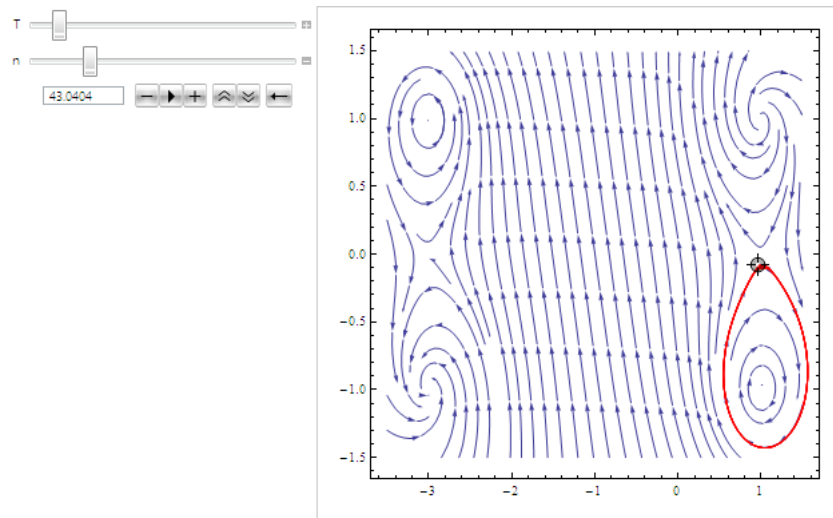
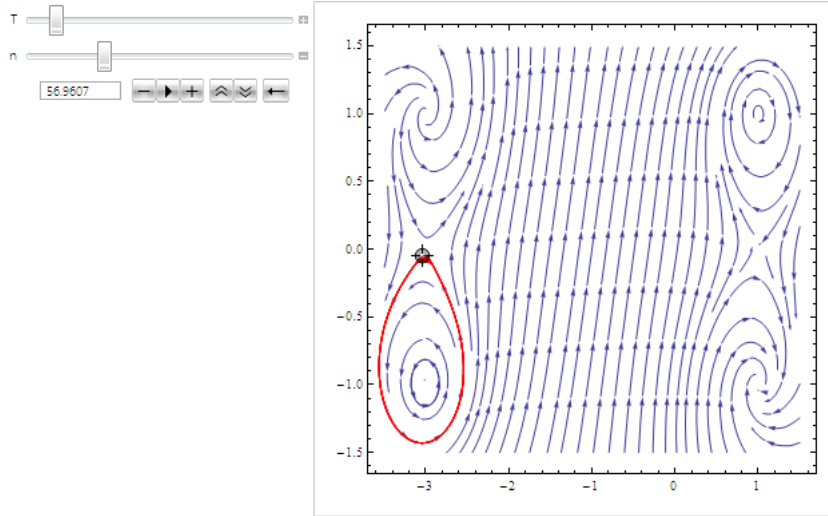
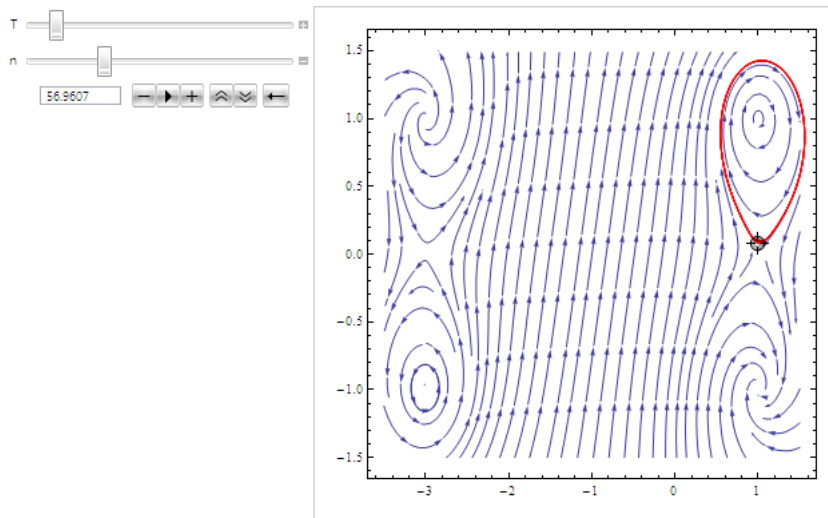
(a) Polo  $-3 + i$  asociado a cero  $-3$ (b) Polo  $1 - i$  asociado a cero  $1$ 

Figura 3.9: Bajo la rotación de  $0,430404\pi$  a  $X$ , los polos  $-3 + i$  y  $1 - i$  son centro y están asociados a los ceros  $-3$  y  $1$ , respectivamente.



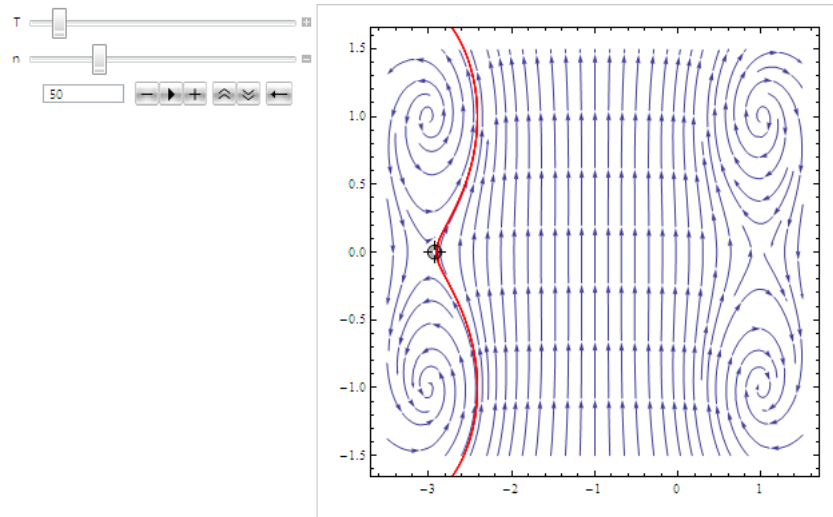
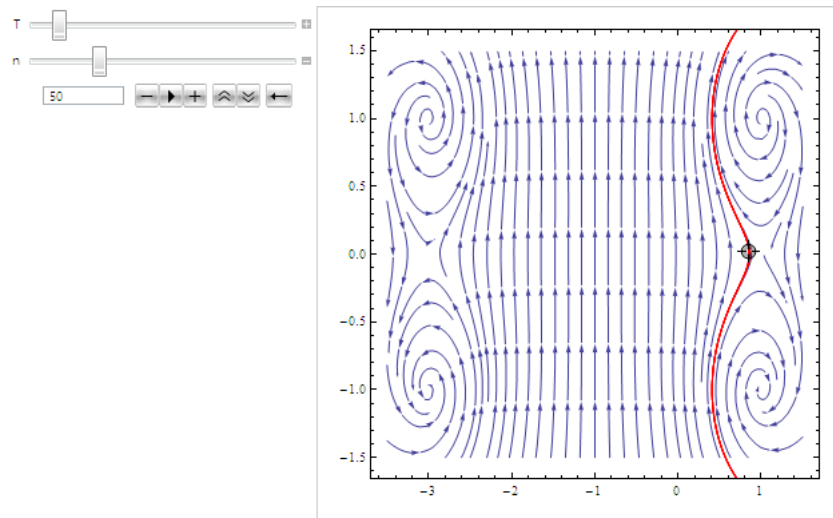
(a) Polo  $-3 - i$  asociado a cero  $-3$



(b) Polo  $1 + i$  asociado a cero  $1$

Figura 3.10: Bajo la rotación de  $0,569607\pi$  a  $X$ , los polos  $-3 - i$  y  $1 + i$  son centro y están asociados a los ceros  $-3$  y  $1$ , respectivamente.



(a) Cero  $-3$  con una órbita periódica alrededor

(b) Cero 1 con una órbita periódica alrededor

Figura 3.11: Bajo la rotación de  $\pi/2$  a  $X$ , se aprecia una órbita periódica alrededor de cada cero. De esta manera, hay un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros 2 y 0.

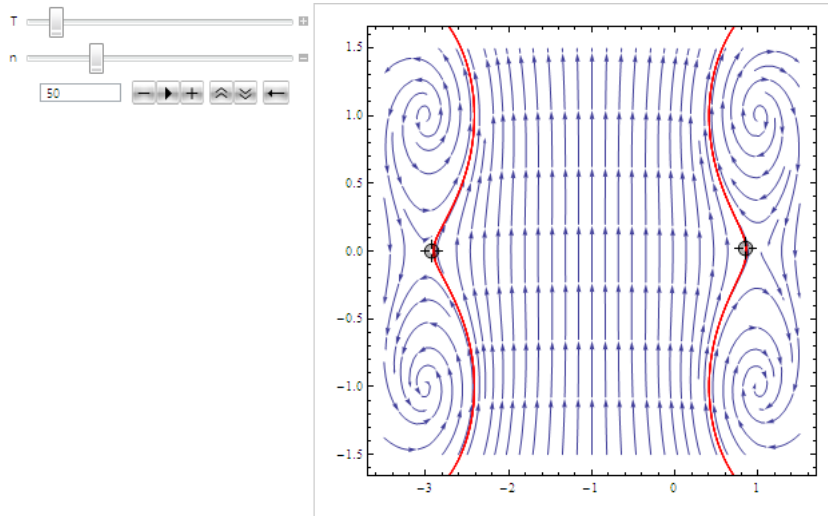


Figura 3.12: Unión de las figuras 3.11 (a) y 3.11 (b). De aquí en adelante, mostraremos este tipo de imágenes para aludir a la asociación de ceros. En este caso, el cero  $-3$  está asociado al cero  $1$ .

Así quedaron las asociaciones:

$$\bullet \text{ cero } -3 \text{ asociado a } \begin{cases} \text{polo } -3 + i \\ \text{polo } -3 - i \\ \text{cero } 1 \end{cases} \quad \bullet \text{ cero } 1 \text{ asociado a } \begin{cases} \text{polo } 1 + i \\ \text{polo } 1 - i \\ \text{cero } -3 \end{cases}$$

Los valores obtenidos en *Mathematica 7* para la integral sobre  $\Sigma_{-3,1}$  y los semiresiduos son los siguientes:

- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{-3,1} = -3 + 4t$  con  $t \in [0, 1]$ , es  $-0,504891$
- El residuo del polo  $-3 + i$  es  $-\frac{9}{80} - \frac{1}{40}i$
- El residuo del polo  $-3 - i$  es  $-\frac{9}{80} + \frac{1}{40}i$
- El residuo del polo  $1 + i$  es  $\frac{9}{80} - \frac{1}{40}i$
- El residuo del polo  $1 - i$  es  $\frac{9}{80} + \frac{1}{40}i$
- El semiresiduo de los ceros  $-3$  y  $1$  es  $\frac{9}{40}$

Con esta información, construimos el tofico (fig. 3.13 (a)) y la gráfica de invariantes (fig. 3.13 (b)).

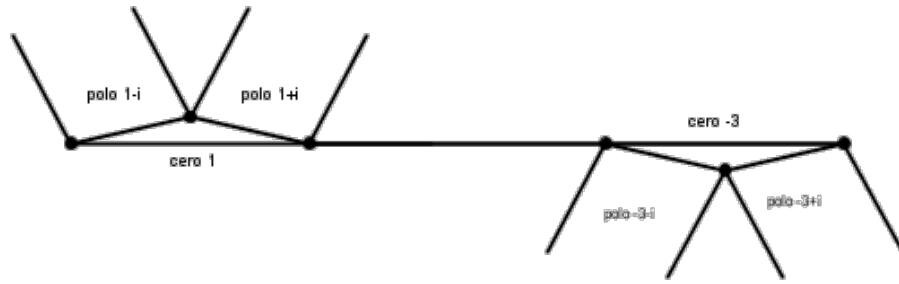
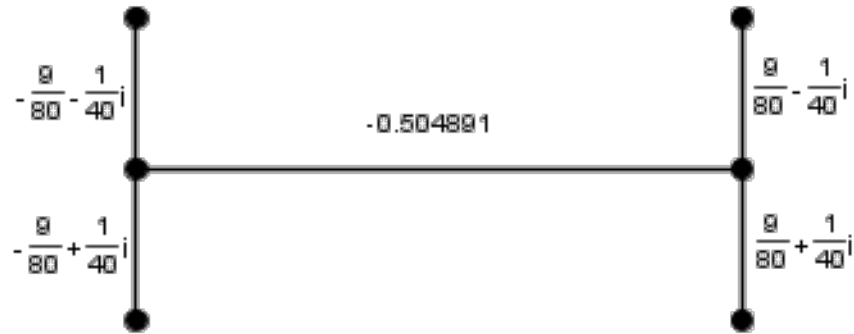
(a) Tofico asociado a  $\omega$ (b) Gráfica de invariantes asociado a  $\omega$ 

Figura 3.13: Tofico y gráfica de invariantes asociados a la 1-forma  

$$\omega = \frac{(z-1)(z+3)}{(z-1-i)(z-1+i)(z+3-i)(z+3+i)} dz$$

### 3.4. 1-forma con 3 ceros

Tomemos

$$\omega = \frac{(z-3)z(z+3)}{(z-3-i)(z-3+i)(z-i)(z+3-i)(z+3+i)} dz.$$

La figura 3.14 muestra la gráfica del campo vectorial  $X$

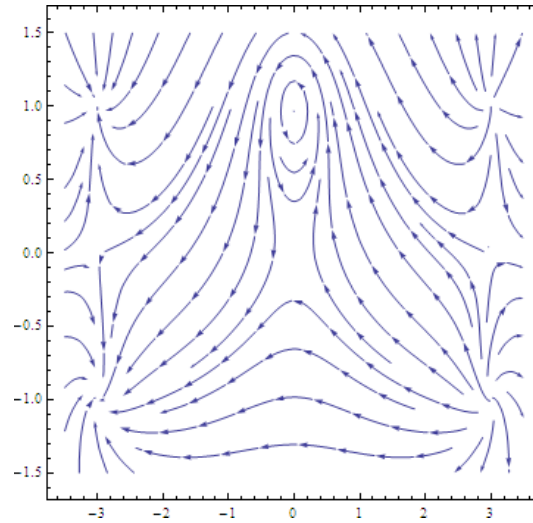


Figura 3.14: Campo vectorial  $X = \frac{(z-3-i)(z-3+i)(z-i)(z+3-i)(z+3+i)}{(z-3)z(z+3)} \frac{\partial}{\partial z}$

Para conocer las asociaciones, rotamos el campo obteniendo los siguientes resultados:

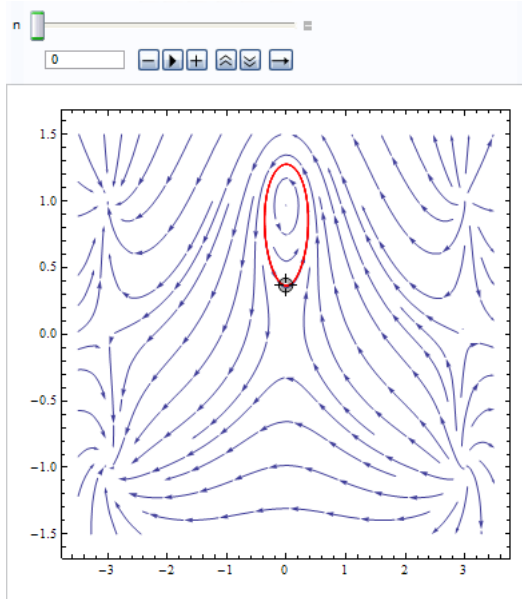
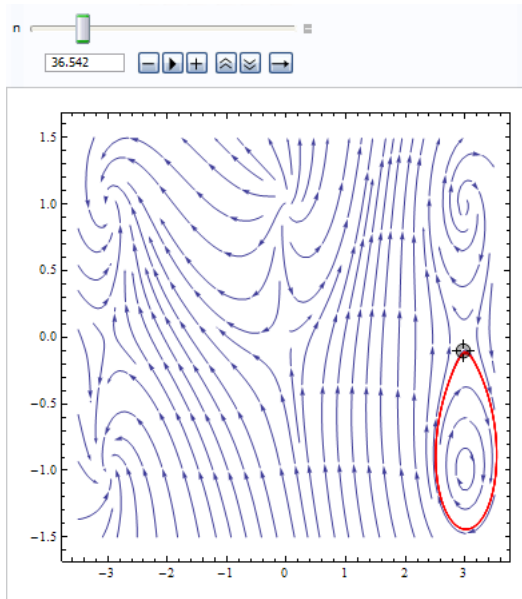
(a) Polo  $i$  asociado a cero 0(b) Polo  $3 - i$  asociado a cero 3

Figura 3.15: Sin aplicar rotación, el polo  $i$  es centro y está asociado al cero 0. Bajo la rotación de  $0,36542\pi$  a  $X$ , el polo  $3 - i$  es centro y está asociado al cero 3.

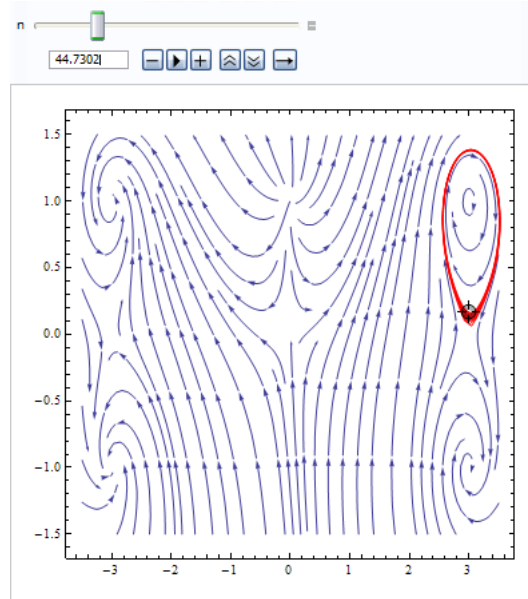
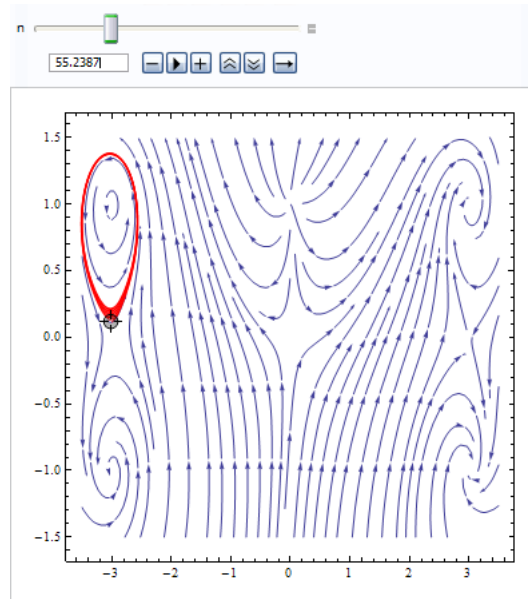
(a) Polo  $3 + i$  asociado a cero 3(b) Polo  $-3 + i$  asociado a cero  $-3$ 

Figura 3.16: Bajo la rotación de  $0,447302\pi$  a  $X$ , el polo  $3 + i$  es centro y está asociado al cero 3. Bajo la rotación de  $0,552387\pi$  a  $X$ , el polo  $-3 + i$  es centro y está asociado al cero  $-3$ .

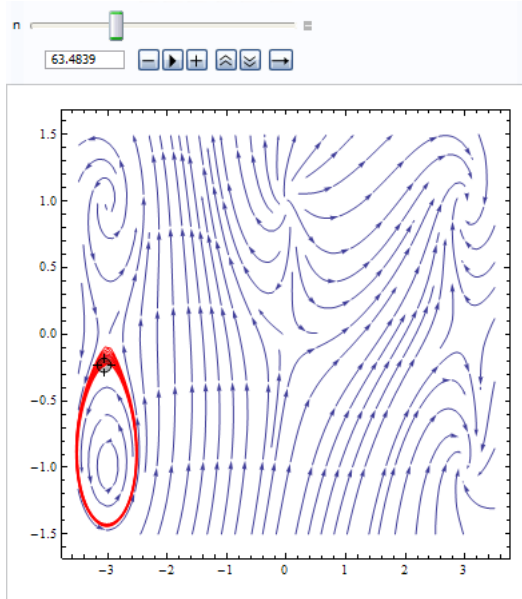
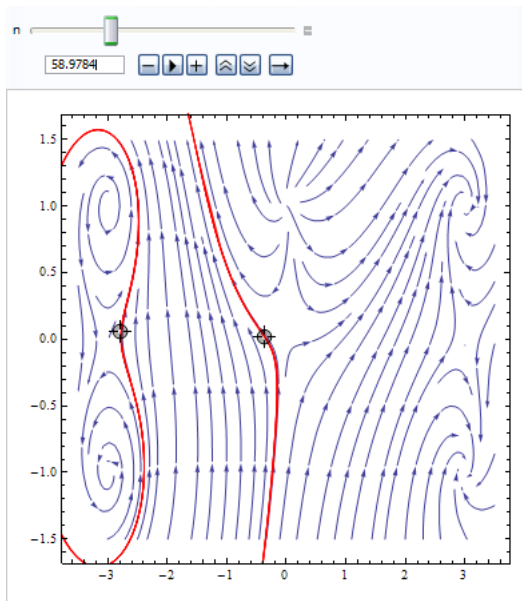
(a) Polo  $-3 - i$  asociado a cero  $-3$ (b) Cero  $-3$  asociado a cero  $0$ 

Figura 3.17: Bajo la rotación de  $0,634839\pi$  a  $X$ , el polo  $-3 - i$  es centroy está asociado al cero  $-3$ . Bajo la rotación de  $0,589784\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros  $-3$  y  $0$ .

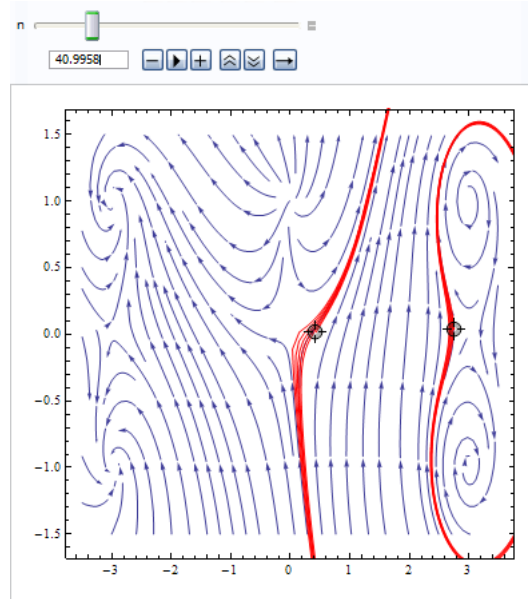


Figura 3.18: Bajo la rotación de  $0,409958\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros 3 y 0.

Así quedaron las asociaciones:

- cero  $-3$  asociado a  $\begin{cases} \text{polo } -3 + i \\ \text{polo } -3 - i \\ \text{cero } 0 \end{cases}$
- cero  $0$  asociado a  $\begin{cases} \text{polo } i \\ \text{cero } -3 \\ \text{cero } 3 \end{cases}$
- cero  $3$  asociado a  $\begin{cases} \text{polo } 3 + i \\ \text{polo } 3 - i \\ \text{cero } 0 \end{cases}$

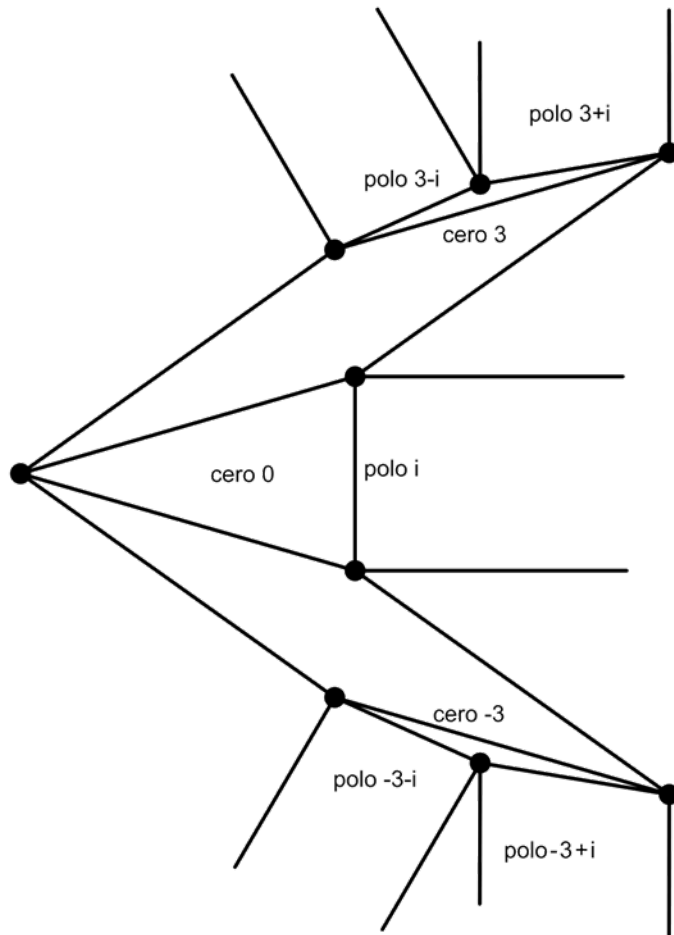
Los valores obtenidos en *Mathematica 7* para las integrales sobre  $\Sigma_{-3,0}$  y  $\Sigma_{0,3}$  y los semiresiduos son los siguientes:

- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{-3,0} = -3 + 3t$  con  $t \in [0, 1]$ , es  $-0,138409 + 0,0986372 i$
- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{0,3} = 3t$  con  $t \in [0, 1]$ , es  $-0,138409 - 0,0986372 i$
- El residuo del polo  $-3 + i$  es  $-\frac{1}{12} + \frac{1}{72} i$

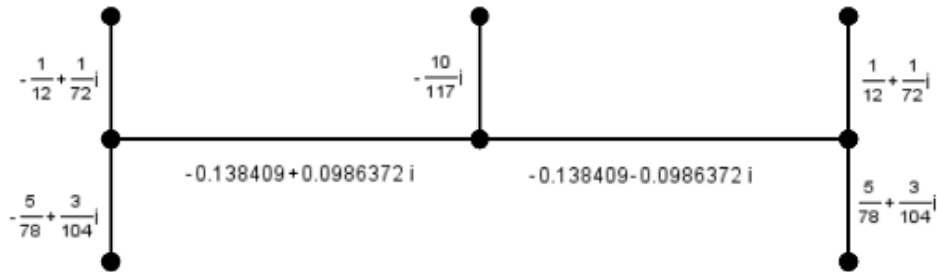


- El residuo del polo  $-3 - i$  es  $-\frac{5}{78} + \frac{3}{104} i$
- El residuo del polo  $i$  es  $-\frac{10}{117} i$
- El residuo del polo  $3 + i$  es  $\frac{1}{12} + \frac{1}{72} i$
- El residuo del polo  $3 - i$  es  $\frac{5}{78} + \frac{3}{104} i$
- El semiresiduo de los ceros  $i$  y  $1 + i$  es  $\frac{23}{156} - \frac{5}{117} i$
- El semiresiduo de los ceros  $1$  y  $1 + i$  es  $-\frac{23}{156} - \frac{5}{117} i$

Con esta información, construimos el tofico (fig. 3.19 (a)) y la gráfica de invariantes (fig. 3.19 (b)).



(a) Tofico asociado a  $\omega$



(b) Gráfica de invariantes asociado a  $\omega$

Figura 3.19: Tofico y gráfica de invariantes asociados a la 1-forma  $\omega = \frac{(z-3)z(z+3)}{(z-3-i)(z-3+i)(z-i)(z+3-i)(z+3+i)}dz$

### 3.5. 1-forma con 4 ceros

#### 3.5.1. primer ejemplo

Tomemos

$$\omega = \frac{(z-2)z(z+3-i)(z5)}{(z-2-i)(z-2+i)(z+i)(z-3)(z+5-i)(z+5+i)} dz$$

La figura 3.20 muestra la gráfica del campo vectorial  $X$

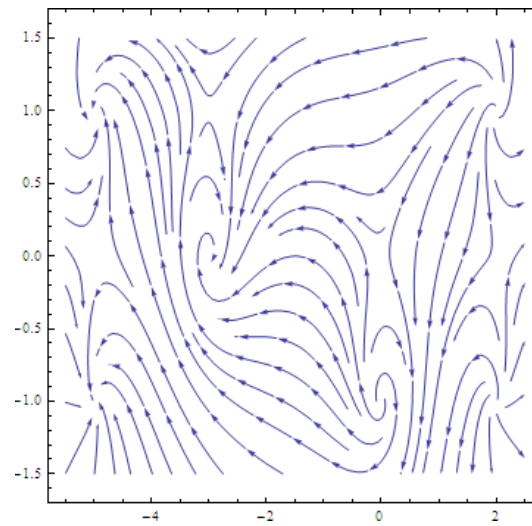
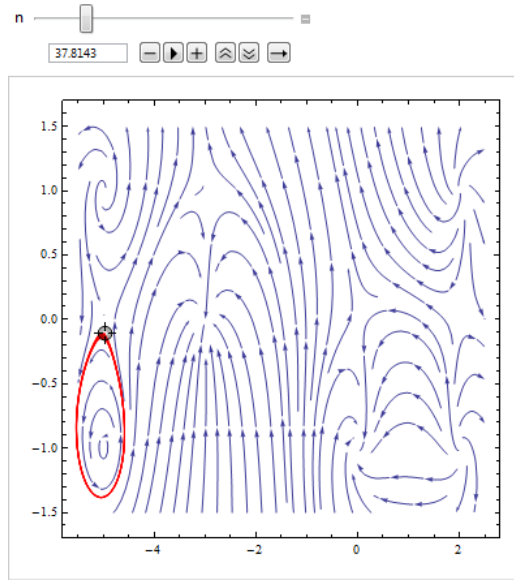
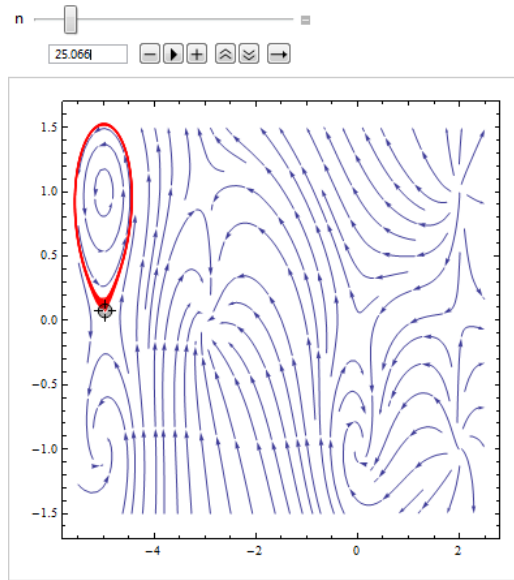


Figura 3.20: Campo vectorial  $X = \frac{(z-2-i)(z-2+i)(z+i)(z-3)(z+5-i)(z+5+i)}{(z-2)z(z+3-i)(z5)} \frac{\partial}{\partial z}$

Para conocer las asociaciones, rotamos el campo obteniendo los siguientes resultados:



(a) Polo  $-5 - i$  asociado a cero  $-5$



(b) Polo  $-5 + i$  asociado a cero  $-5$

Figura 3.21: Bajo la rotación de  $0,378143\pi$  a  $X$ , el polo  $-5 - i$  es centro y está asociado al cero  $-5$ . Bajo la rotación de  $0,25066\pi$  a  $X$ , el polo  $-5 + i$  es centro y está asociado al cero  $-5$ .

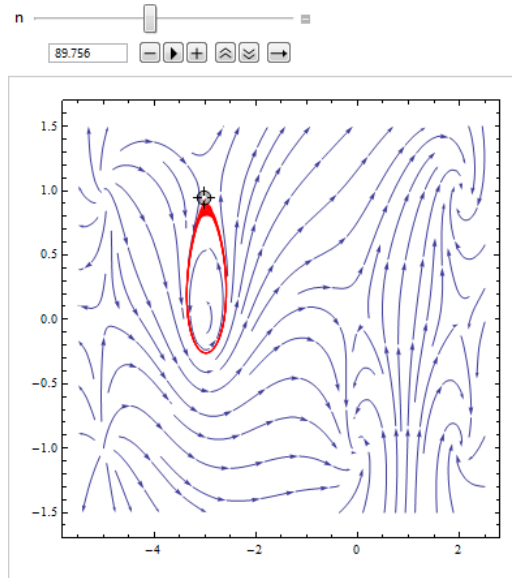
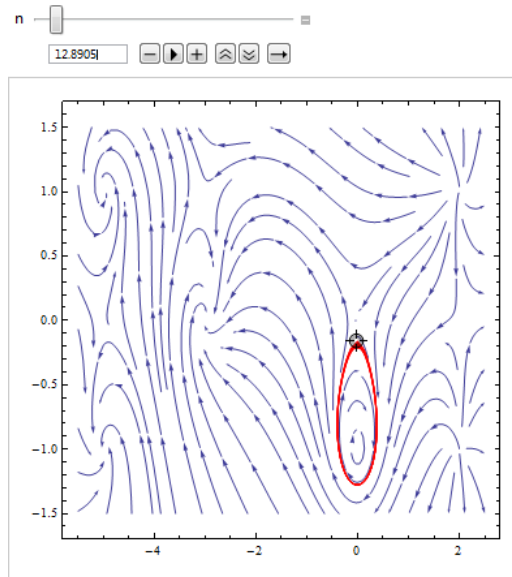
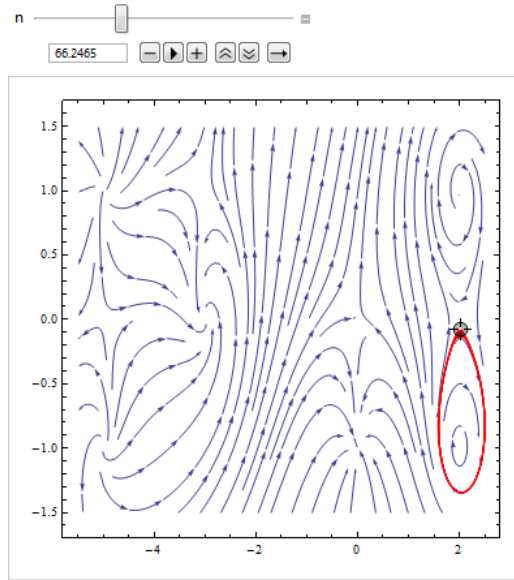
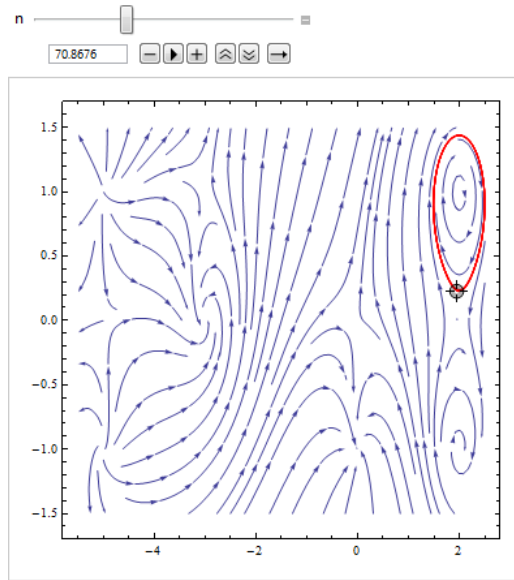
(a) Polo  $-3$  asociado a cero  $-3 + i$ (b) Polo  $-i$  asociado a cero  $0$ 

Figura 3.22: Bajo la rotación de  $0,89756\pi$  a  $X$ , el polo  $-3$  es centro y está asociado al cero  $-3 + i$ . Bajo la rotación de  $0,128905\pi$  a  $X$ , el polo  $-i$  es centro y está asociado al cero  $0$ .

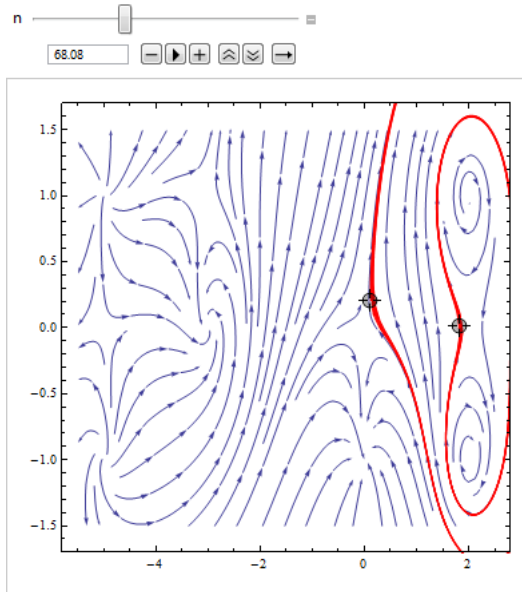


(a) Polo  $2 - i$  asociado a cero 2



(b) Polo  $2 + i$  asociado a cero 2

Figura 3.23: Bajo la rotación de  $0,89756\pi$  a  $X$ , el polo  $2 - i$  es centro y está asociado al cero 2. Bajo la rotación de  $0,128905\pi$  a  $X$ , el polo  $2 + i$  es centro y está asociado al cero 2.



(a) Cero 2 asociado a cero 0

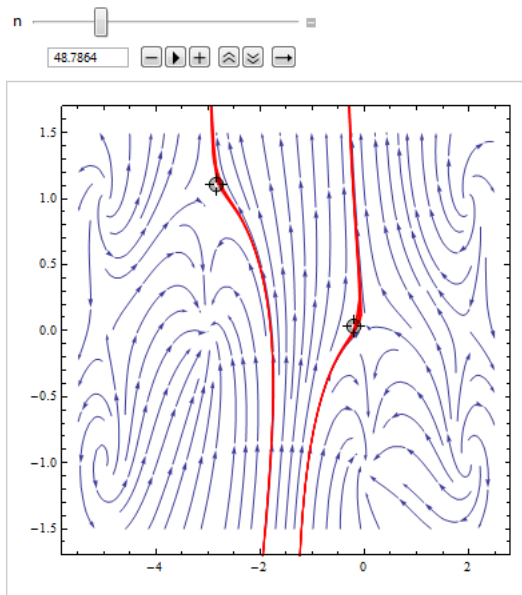
(b) Cero 0 asociado a cero  $-3 + i$ 

Figura 3.24: Bajo la rotación de  $0,6808\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros 2 y 0. Bajo la rotación de  $0,487864\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros 0 y  $-3 + i$ .

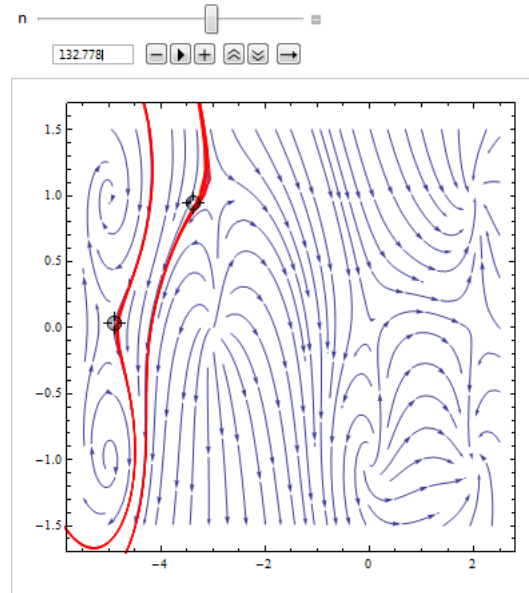


Figura 3.25: Bajo la rotación de  $1,32778\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros  $-3 + i$  y  $-5$ .

Así quedaron las asociaciones:

$$\begin{array}{ll}
 \bullet \text{ cero } -5 & \left\{ \begin{array}{l} \text{polo } -5 + i \\ \text{polo } -5 + i \\ \text{cero } -3 + i \end{array} \right. & \bullet \text{ cero } -3 + i & \left\{ \begin{array}{l} \text{polo } -3 \\ \text{cero } -5 \\ \text{cero } 0 \end{array} \right. \\
 \text{asociado a} & & \text{asociado a} & \\
 \\
 \bullet \text{ cero } 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{polo } -i \\ \text{cero } -3 + i \\ \text{cero } 2 \end{array} \right. & \bullet \text{ cero } 2 & \left\{ \begin{array}{l} \text{polo } 2 + i \\ \text{polo } 2 - i \\ \text{cero } 0 \end{array} \right. \\
 \text{asociado a} & & \text{asociado a} &
 \end{array}$$

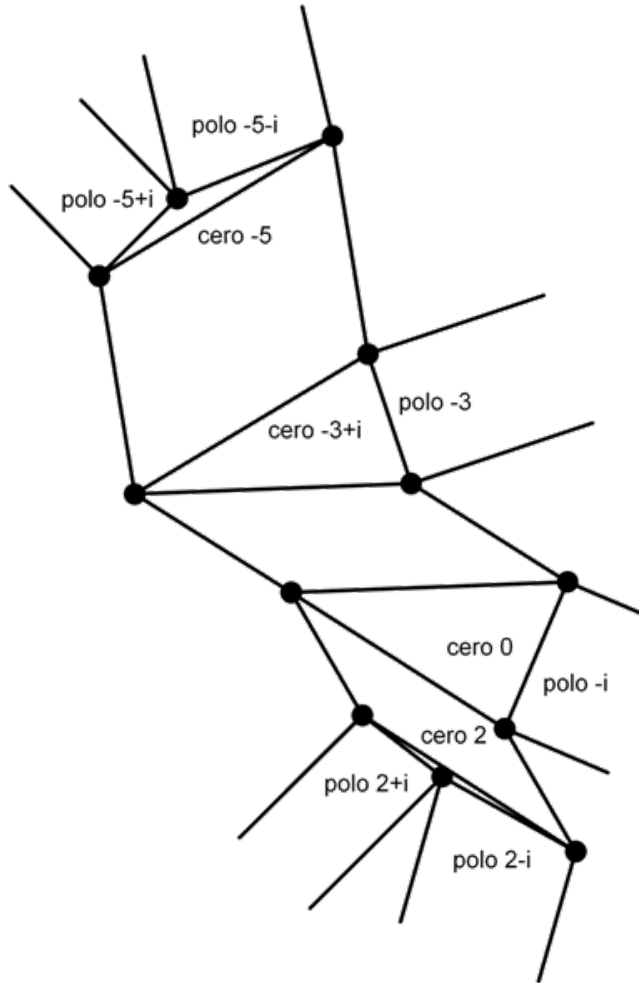
Los valores obtenidos en *Mathematica 7* para las integrales sobre  $\Sigma_{2,0}$ ,  $\Sigma_{0,-3+i}$  y  $\Sigma_{-3+i,-5}$  y los semiresiduos son los siguientes:

- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{2,0} = 2 - 2t$  con  $t \in [0, 1]$  es  $0,0380282 - 0,0657334 i$
- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{0,-3+i} = (-3 + i)t$  con  $t \in [0, 1]$  es  $0,0836167 - 0,0525771 i$
- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{-3+i,-5} = (-3 + i) - (2 + i)t$  con  $t \in [0, 1]$  es  $-0,0189744 + 0,116591 i$

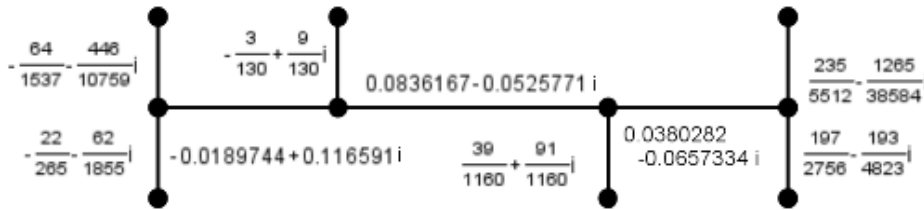


- El residuo del polo  $-5 - i$  es  $-\frac{22}{265} - \frac{62}{1855} i$
- El residuo del polo  $-5 + i$  es  $-\frac{64}{1537} - \frac{446}{10759} i$
- El residuo del polo  $-3$  es  $-\frac{3}{130} + \frac{9}{130} i$
- El residuo del polo  $-i$  es  $\frac{39}{1160} + \frac{91}{1160} i$
- El residuo del polo  $2 - i$  es  $\frac{197}{2756} - \frac{193}{4823} i$
- El residuo del polo  $2 + i$  es  $\frac{235}{5512} - \frac{1265}{38584} i$
- El semiresiduo de los ceros  $3i$  y  $4 - 2i$  es  $\frac{958}{7685} + \frac{76}{1015} i$
- El semiresiduo de los ceros  $4 - 2i$  y  $2 - 3i$  es  $\frac{29519}{199810} + \frac{149}{26390} i$
- El semiresiduo de los ceros  $2 - 3iy - i$  es  $-\frac{629}{5512} + \frac{53}{728} i$

Con esta información, construimos el tofico (fig. 3.26 (a)) y la gráfica de invariantes (fig. 3.26 (b)).



(a) Tofico correspondiente a  $\omega$



(b) Gráfica de invariantes de  $\omega$

Figura 3.26: Tofico y gráfica de invariantes correspondientes a la 1-forma  $\omega = \frac{(z-2)z(z+3-i)(z5)}{(z-2-i)(z-2+i)(z+i)(z-3)(z+5-i)(z+5+i)} dz$

### 3.5.2. segundo ejemplo

Tomemos

$$\omega = \frac{(z-5)(z-2)(z-2-3i)(z+1)}{(z-5-i)(z-5+i)(z-3-3i)(z-1-3i)(z+1-i)(z+1+i)} dz$$

La figura 3.27 muestra la gráfica del campo vectorial  $X$

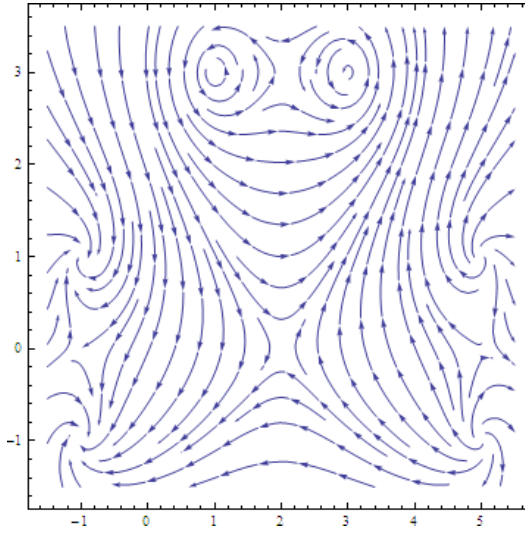


Figura 3.27: Campo vectorial

$$X = \frac{(z-5-i)(z-5+i)(z-3-3i)(z-1-3i)(z+1-i)(z+1+i)}{(z-5)(z-2)(z-2-3i)(z+1)} \frac{\partial}{\partial z}$$

Para conocer las asociaciones, rotamos el campo obteniendo los siguientes resultados:

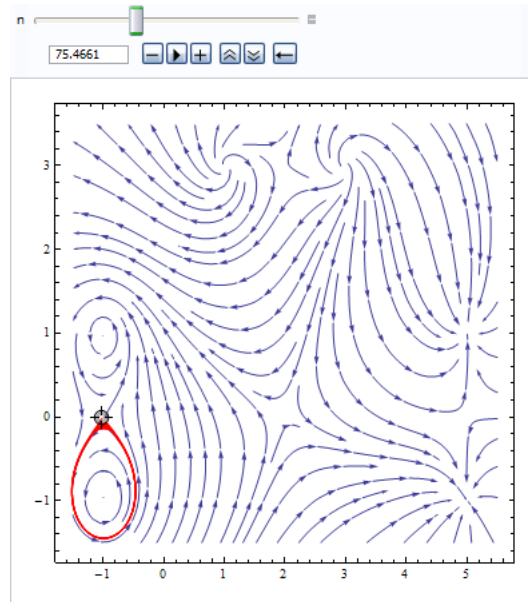
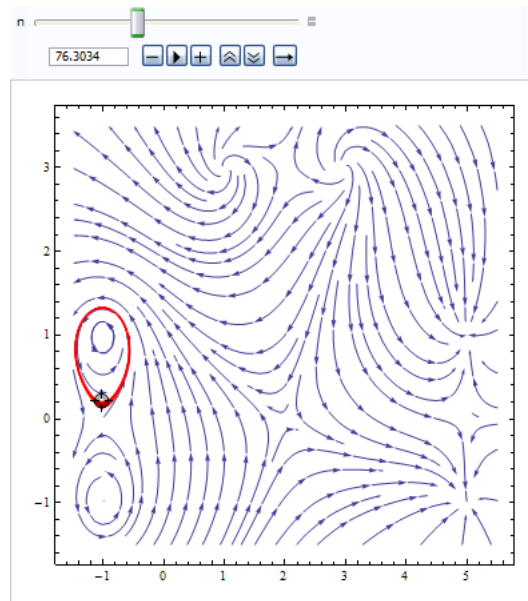
(a) Polo  $-1 - i$  asociado a cero  $-1$ (b) Polo  $-1 + i$  asociado a cero  $-1$ 

Figura 3.28: Bajo la rotación de  $0,754661\pi$  a  $X$ , el polo  $-1 - i$  es centro y está asociado al cero  $-1$ . Bajo la rotación de  $0,763034\pi$  a  $X$ , el polo  $-1 + i$  es centro y está asociado al cero  $-1$ .

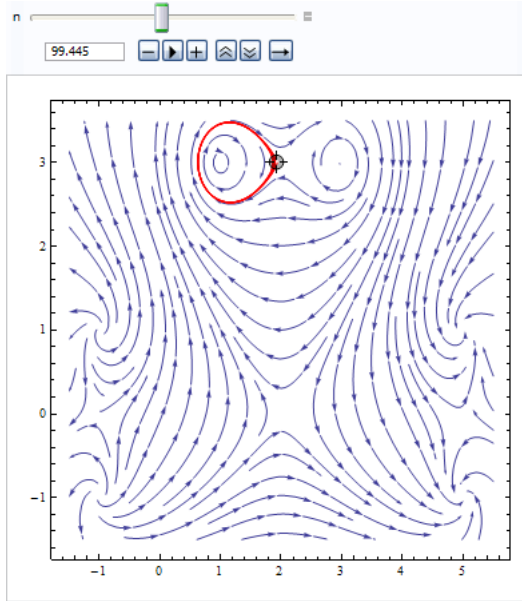
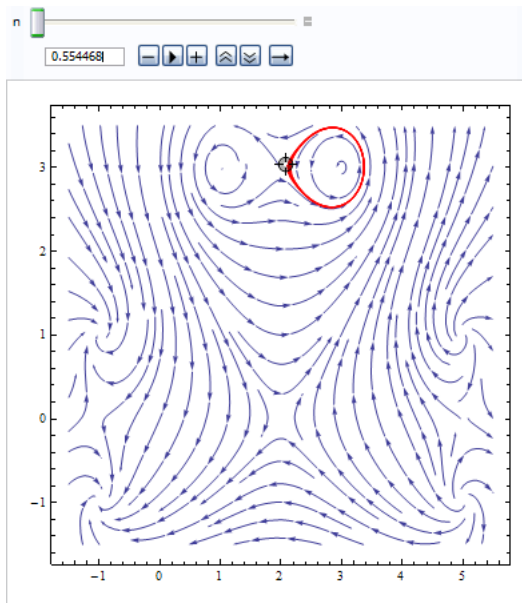
(a) Polo  $1 + 3i$  asociado a cero  $2 + 3i$ (b) Polo  $3 + 3i$  asociado a cero  $2 + 3i$ 

Figura 3.29: Bajo la rotación de  $0,99445\pi$  a  $X$ , el polo  $1 + 3i$  es centro y está asociado al cero  $2 + 3i$ . Bajo la rotación de  $1,00554468\pi$  a  $X$ , el polo  $3 + 3i$  es centro y está asociado al cero  $2 + 3i$ .

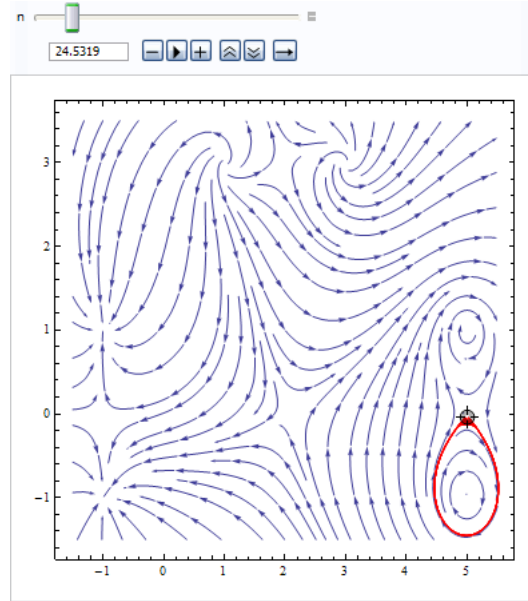
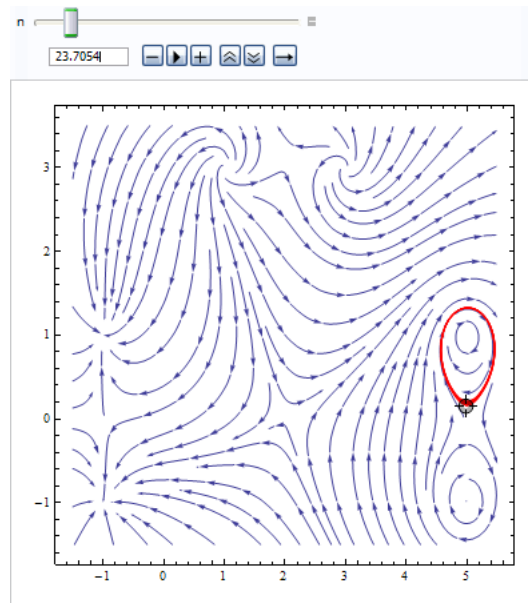
(a) Polo  $5 - i$  asociado a cero 5(b) Polo  $5 + i$  asociado a cero 5

Figura 3.30: Bajo la rotación de  $0,245319\pi$  a  $X$ , el polo  $5 - i$  es centro y está asociado al cero 5. Bajo la rotación de  $1,237054\pi$  a  $X$ , el polo  $5 + i$  es centro y está asociado al cero 5.

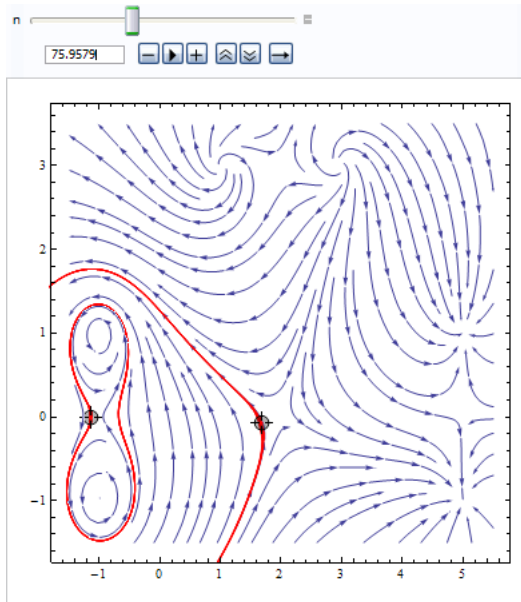
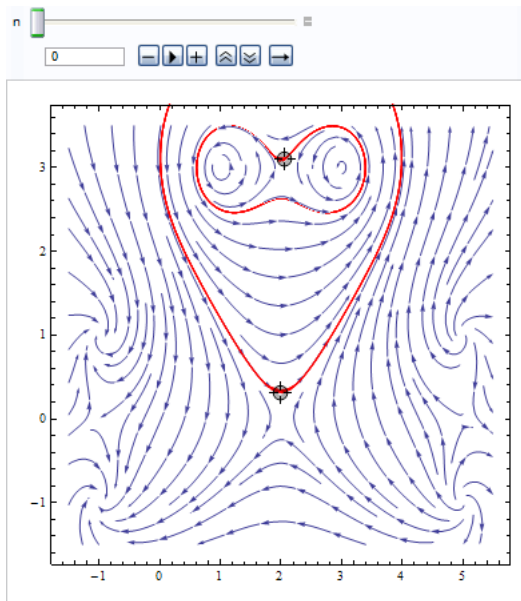
(a) Cero  $-1$  asociado a cero  $2$ (b) Cero  $2 + 3i$  asociado a cero  $2$ 

Figura 3.31: Bajo la rotación de  $0,759579\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros  $-1$  y  $2$ . Sin aplicar rotación a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros  $2 + 3i$  y  $2$ .

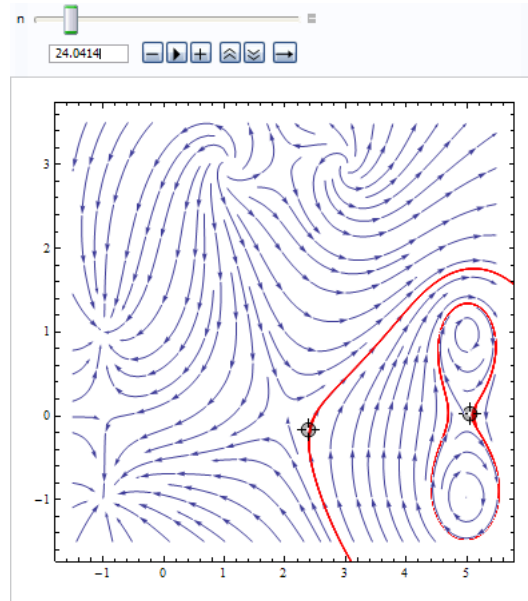


Figura 3.32: Bajo la rotación de  $0,240414\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros 5 y 2.

Así quedaron las asociaciones:

$$\begin{array}{ll}
 \bullet \text{ cero } -1 & \left\{ \begin{array}{l} \text{polo } -1 - i \\ \text{polo } -1 + i \\ \text{cero } 2 \end{array} \right. & \bullet \text{ cero } 2 + 3i & \left\{ \begin{array}{l} \text{polo } 1 + 3i \\ \text{polo } 3 + 3i \\ \text{cero } 2 \end{array} \right. \\
 \bullet \text{ asociado a} & & \bullet \text{ asociado a} & \\
 \\
 \bullet \text{ cero } 5 & \left\{ \begin{array}{l} \text{polo } 5 - i \\ \text{polo } 5 - i \\ \text{cero } 2 \end{array} \right. & \bullet \text{ cero } 2 & \left\{ \begin{array}{l} \text{cero } -1 \\ \text{cero } 2 + 3i \\ \text{cero } 5 \end{array} \right. \\
 \bullet \text{ asociado a} & & \bullet \text{ asociado a} &
 \end{array}$$

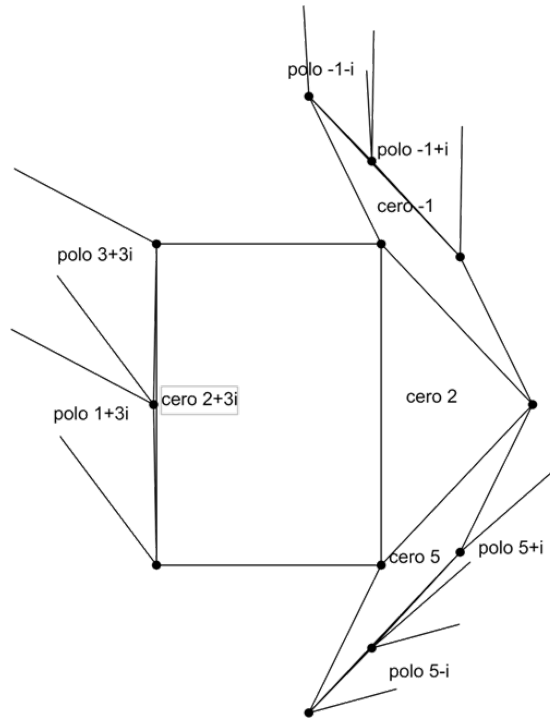
Los valores obtenidos en *Mathematica 7* para las integrales sobre  $\Sigma_{-1,2}$ ,  $\Sigma_{2+3i,2}$  y  $\Sigma_{5,2}$  y los semiresiduos son los siguientes:

- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{-1,2} = -1 + 3t$  con  $t \in [0, 1]$  es  $-0,0400877 + 0,0818751 i$
- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{2+3i,2} = (2 + 3i) - 3it$  con  $t \in [0, 1]$  es  $-0,124503 i$
- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{5,2} = 5 - 3t$  con  $t \in [0, 1]$  es  $0,0400877 + 0,0818751 i$

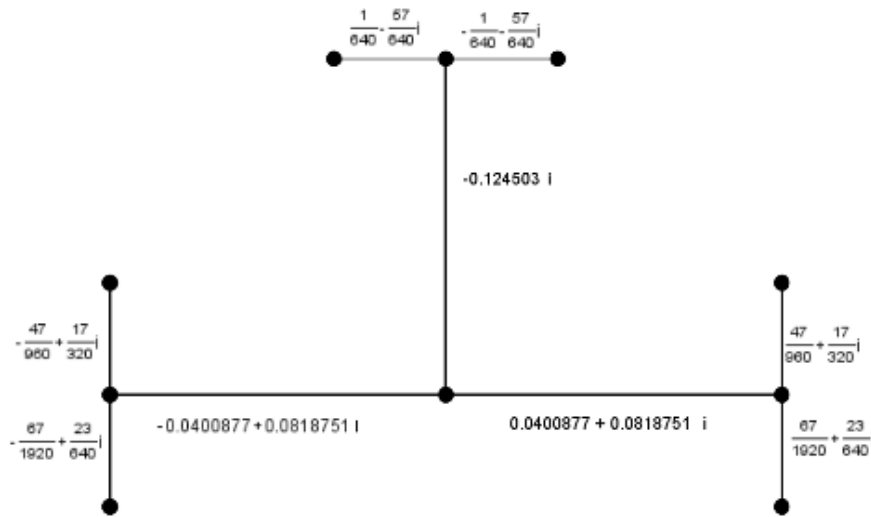


- El residuo del polo  $-1 - i$  es  $-\frac{67}{1920} + \frac{23}{640} i$
- El residuo del polo  $-1 + i$  es  $-\frac{47}{960} + \frac{17}{320} i$
- El residuo del polo  $1 + 3i$  es  $\frac{1}{640} - \frac{57}{640} i$
- El residuo del polo  $3 + 3i$  es  $-\frac{1}{640} - \frac{57}{640} i$
- El residuo del polo  $5 - i$  es  $\frac{67}{1920} + \frac{23}{640} i$
- El residuo del polo  $5 + i$  es  $\frac{47}{960} + \frac{17}{320} i$
- El semiresiduo de los ceros  $-1$  y  $2$  es  $\frac{161}{1920} - \frac{57}{640} i$
- El semiresiduo de los ceros  $2 + 3i$  y  $2$  es  $\frac{57}{320} i$
- El semiresiduo de los ceros  $5$  y  $2$  es  $-\frac{161}{1920} - \frac{57}{640} i$

Con esta información, construimos el tofico (fig. 3.33 (a)) y la gráfica de invariantes (fig. 3.33 (b)).



(a) Tofico correspondiente a  $\omega$



(b) Gráfica de invariantes de  $\omega$

Figura 3.33: Tofico y gráfica de invariantes correspondientes a la 1-forma  $\omega = \frac{(z-5)(z-2)(z-2-3i)(z+1)}{(z-5-i)(z-5+i)(z-3-3i)(z-1-3i)(z+1-i)(z+1+i)} dz$

### 3.6. 1-forma con 5 ceros

Tomemos

$$\omega = \frac{(z - 7 - i)(z - 4 - i)(z - 1 - i)(z + 2 - 1)(z + 5 - i)}{(z - 7)(z - 7 - 2i)(z - 4 - 2i)(z - 1)(z + 2 - 2i)(z + 5)(z + 5 - 2i)} dz$$

La figura 3.34 muestra la gráfica del campo vectorial  $X$

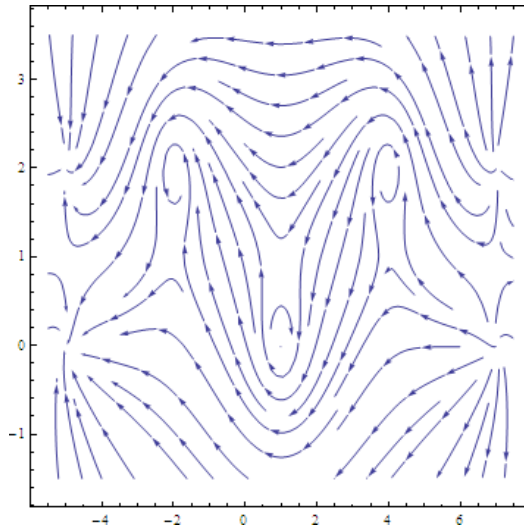


Figura 3.34: Campo vectorial

$$X = \frac{(z-7)(z-7-2i)(z-4-2i)(z-1)(z+2-2i)(z+5)(z+5-2i)}{(z-7-i)(z-4-i)(z-1-i)(z+2-1)(z+5-i)} \frac{\partial}{\partial z}$$

Para conocer las asociaciones, rotamos el campo obteniendo los siguientes resultados:

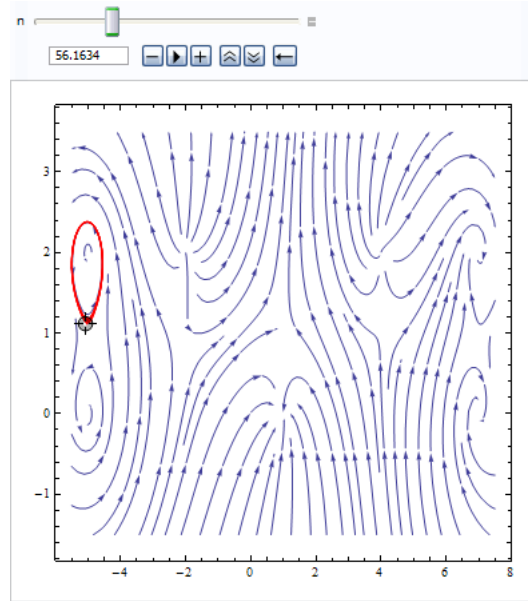
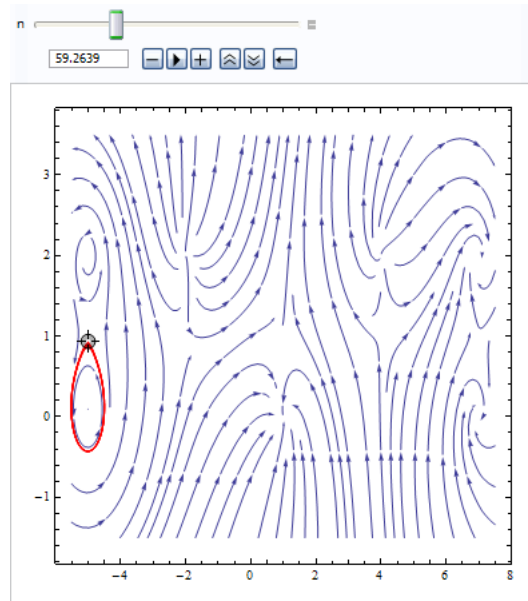
(a) Polo  $-5 + 2i$  asociado a cero  $-5 + i$ (b) Polo  $-5$  asociado a cero  $-5 + i$ 

Figura 3.35: Bajo la rotación de  $0,561634\pi$  a  $X$ , el polo  $-5 + 2i$  es centro y está asociado al cero  $-5 + i$ . Bajo la rotación de  $0,592639\pi$  a  $X$ , el polo  $-5$  es centro y está asociado al cero  $-5 + i$ .

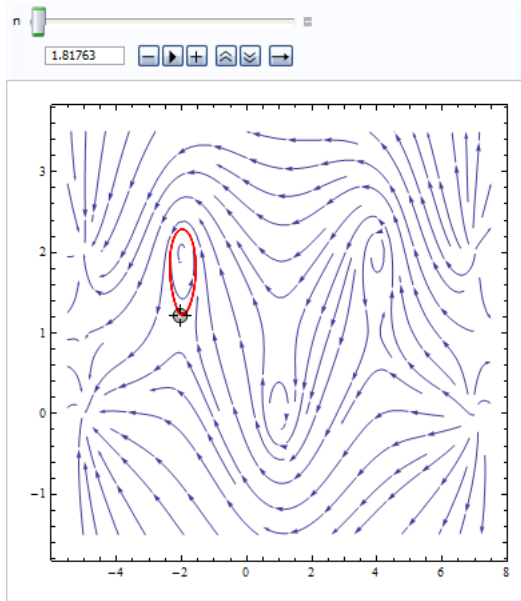
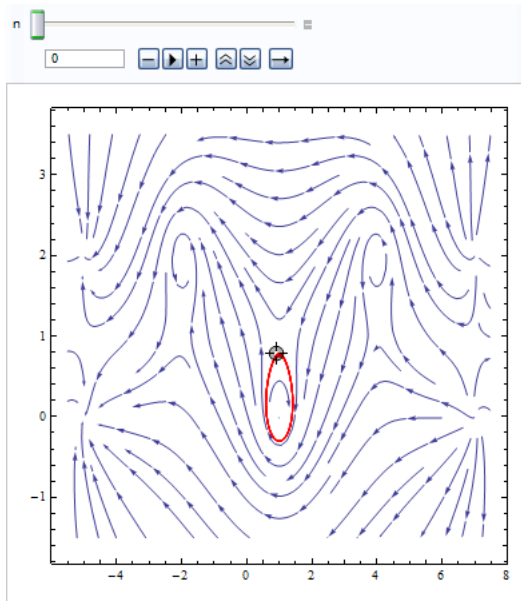
(a) Polo  $-2 + 2i$  asociado a cero  $-2 + i$ (b) Polo  $1$  asociado a cero  $1 + i$ 

Figura 3.36: Bajo la rotación de  $0,0181763\pi$  a  $X$ , el polo  $-2 + 2i$  es centro y está asociado al cero  $-2 + i$ . Sin aplicar rotación a  $X$ , el polo  $1$  es centro y está asociado al cero  $1 + i$ .

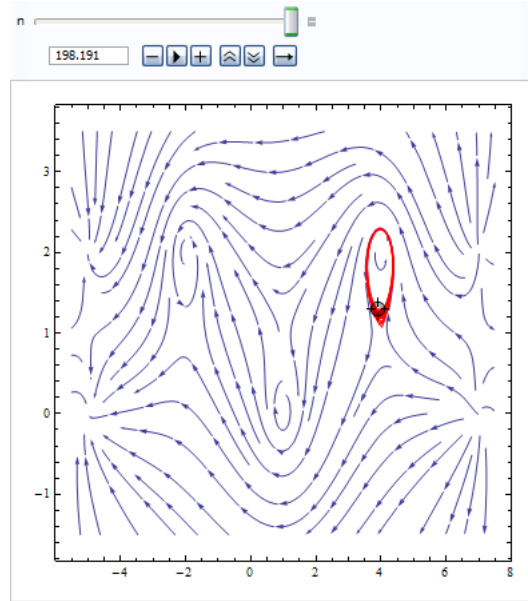
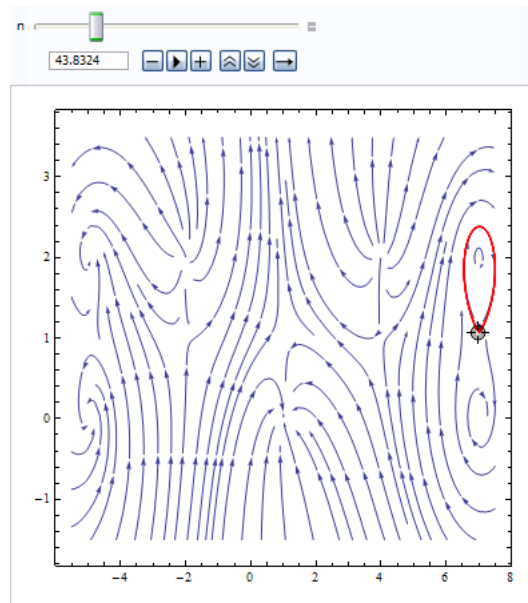
(a) Polo  $4 + 2i$  asociado a cero  $4 + i$ (b) Polo  $7 + 2i$  asociado a cero  $7 + i$ 

Figura 3.37: Bajo la rotación de  $1,98191\pi$  a  $X$ , el polo  $4 + 2i$  es centro y está asociado al cero  $4 + i$ . Bajo la rotación de  $0,438324\pi$  a  $X$ , el polo  $7 + 2i$  es centro y está asociado al cero  $7 + i$ .

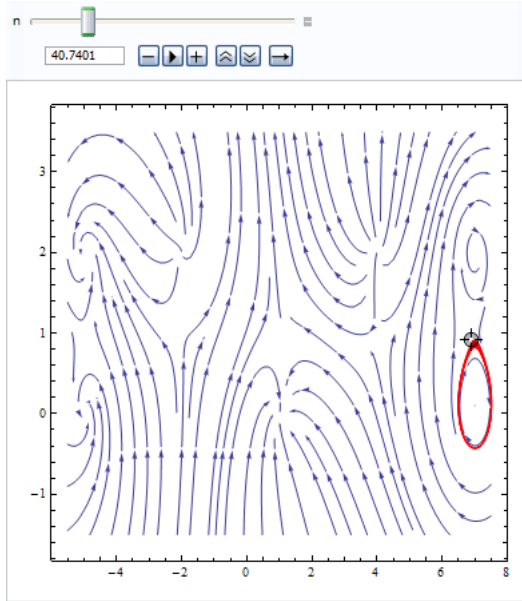
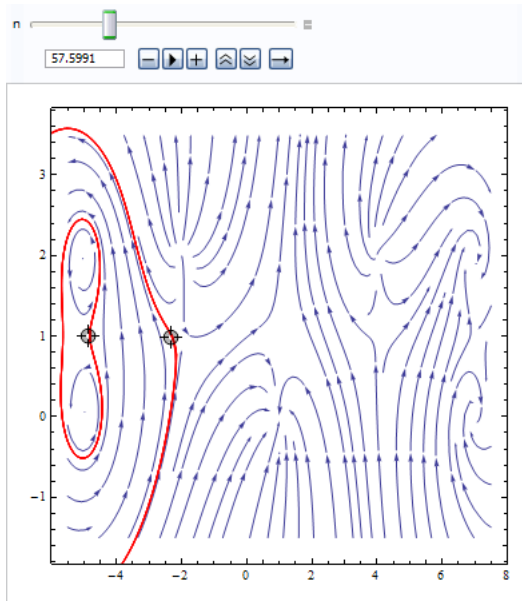
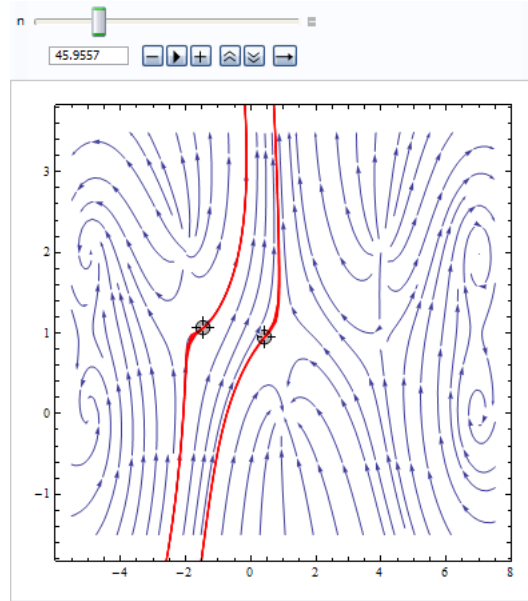
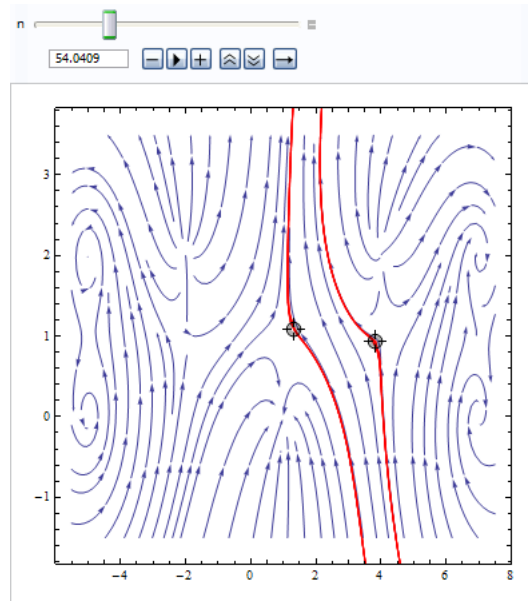
(a) Polo 7 asociado a cero  $7 + i$ (b) Cero  $-5 + i$  asociado a cero  $-2 + i$ 

Figura 3.38: Bajo la rotación de  $0,407401\pi$  a  $X$ , el polo 7 es centro y está asociado al cero  $7 + i$ . Bajo la rotación de  $0,575991\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros  $-5 + i$  y  $-2 + i$ .



(a) Cero  $-2 + i$  asociado a cero  $1 + i$



(b) Cero  $1 + i$  asociado a cero  $4 + i$

Figura 3.39: Bajo la rotación de  $0,459557\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros  $-2 + i$  y  $1 + i$ . Bajo la rotación de  $0,540409\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros  $1 + i$  y  $4 + i$ .



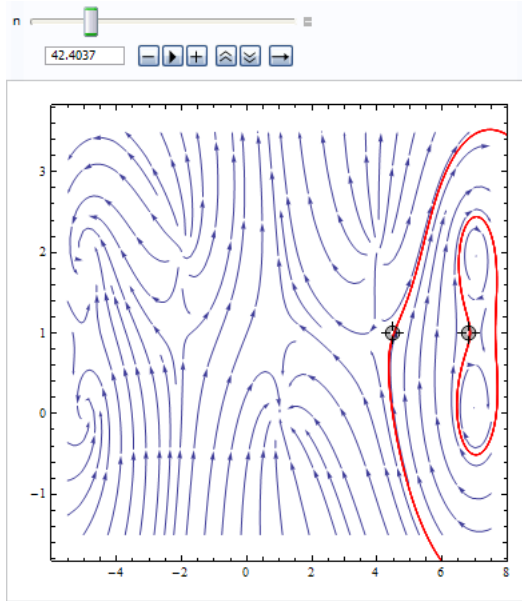


Figura 3.40: Bajo la rotación de  $0,424037\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros  $4 + i$  y  $7 + i$ .

Así quedaron las asociaciones:

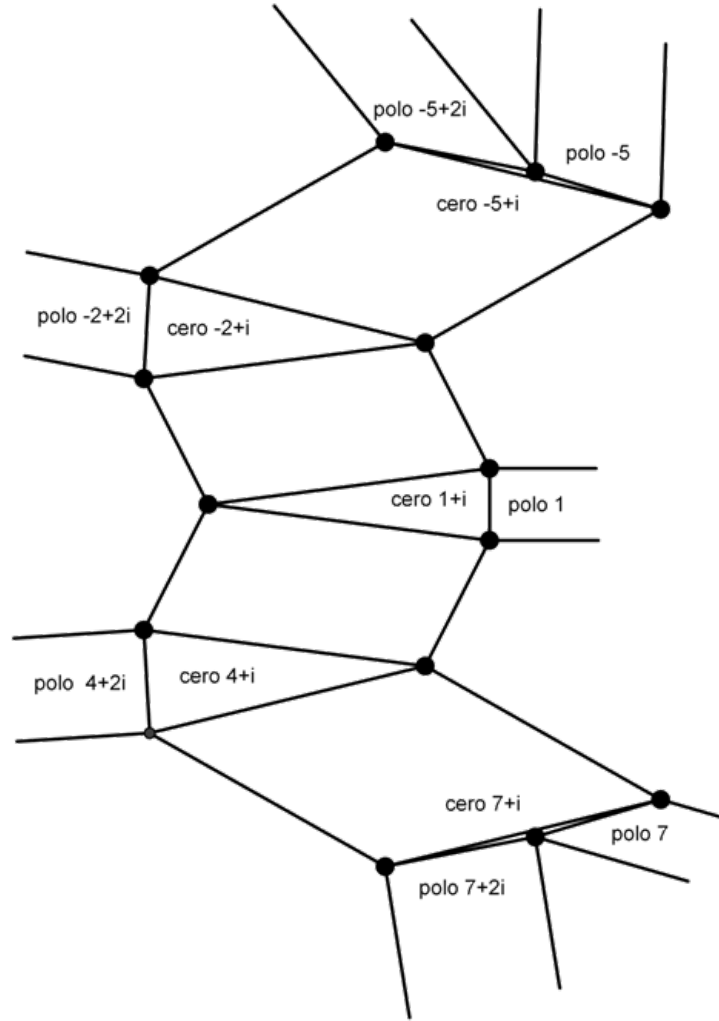
$$\begin{aligned}
 &\bullet \text{ cero } -5 + i \begin{cases} \text{polo } -5 + 2i \\ \text{polo } -5 \\ \text{cero } -2 + i \end{cases} & \bullet \text{ cero } -2 + i \begin{cases} \text{polo } -2 - 2i \\ \text{cero } -5 + i \\ \text{cero } 1 + i \end{cases} \\
 &\bullet \text{ cero } 1 + i \begin{cases} \text{polo } 1 \\ \text{cero } -2 + i \\ \text{cero } 4 + i \end{cases} & \bullet \text{ cero } 4 + i \begin{cases} \text{polo } 4 + 2i \\ \text{cero } 1 + i \\ \text{cero } 7 + i \end{cases} \\
 &\bullet \text{ cero } 7 + i \begin{cases} \text{polo } 7 + 2i \\ \text{cero } 7 \\ \text{cero } 4 + i \end{cases}
 \end{aligned}$$

Los valores obtenidos en *Mathematica 7* para las integrales sobre  $\Sigma_{-5+i, -2+i}$ ,  $\Sigma_{-2+i, 1+i}$ ,  $\Sigma_{1+i, 4+i}$  y  $\Sigma_{4+i, 7+i}$  y los semiresiduos son los siguientes:

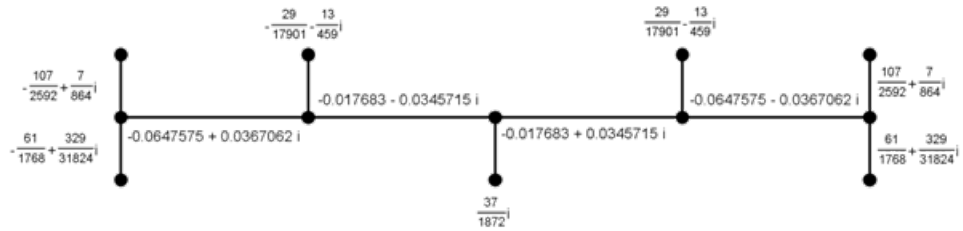
- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{-5+i, -2+i} = (-5+i) + 3t$  con  $t \in [0, 1]$  es  
 $-0,0647575 + 0,0367062 i$

- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{-2+i,1+i} = (-2+i) + 3t$  con  $t \in [0, 1]$  es  
 $-0,017683 - 0,0345715 i$
- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{1+i,4+i} = (1+i) + 3t$  con  $t \in [0, 1]$  es  
 $-0,017683 + 0,0345715 i$
- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{4+i,7+i} = (4+i) + 3t$  con  $t \in [0, 1]$  es  
 $-0,0647575 - 0,0367062 i$
- El residuo del polo  $-5 + 2i$  es  $-\frac{107}{2592} + \frac{7}{864} i$
- El residuo del polo  $-5$  es  $-\frac{61}{1768} + \frac{329}{31824} i$
- El residuo del polo  $-2 + 2i$  es  $-\frac{29}{17901} - \frac{13}{459} i$
- El residuo del polo  $1$  es  $\frac{37}{1872} i$
- El residuo del polo  $4 + 2i$  es  $\frac{29}{17901} - \frac{13}{459} i$
- El residuo del polo  $7 + 2i$  es  $\frac{107}{2592} + \frac{7}{864} i$
- El residuo del polo  $7$  es  $\frac{61}{1768} + \frac{329}{31824} i$
- El semiresiduo de los ceros  $-5 + i$  y  $-2 + i$  es  $\frac{43411}{572832} - \frac{3521}{190944} i$
- El semiresiduo de los ceros  $-2 + i$  y  $1 + i$  es  $\frac{44339}{572832} + \frac{37}{3744} i$
- El semiresiduo de los ceros  $1 + i$  y  $4 + i$  es  $\frac{44339}{572832} - \frac{37}{3744} i$
- El semiresiduo de los ceros  $4 + i$  y  $7 + i$  es  $\frac{43411}{572832} + \frac{3521}{190944} i$

Con esta información, construimos el tofoco (fig. 3.41 (a)) y la gráfica de invariantes (fig. 3.41 (b)).



(a) Tofico correspondiente a  $\omega$



(b) Gráfica de invariantes de  $\omega$

Figura 3.41: Tofico y gráfica de invariantes correspondientes a la 1-forma  $\omega = \frac{(z-7-i)(z-4-i)(z-1-i)(z+2-1)(z+5-i)}{(z-7)(z-7-2i)(z-4-2i)(z-1)(z+2-2i)(z+5)(z+5-2i)} dz$

### 3.7. 1-forma con 6 ceros

Tomemos

$$\omega = \frac{(z-5+i)(z-2+i)(z-2-2i)(z+5+i)(z+5+4i)(z+8+i)}{(z-5)(z-5-2i)(z-3-2i)(z-1-2i)(z+4+4i)(z+6+4i)(z+8)(z+8+2i)} dz$$

La figura 3.42 muestra la gráfica del campo vectorial  $X$

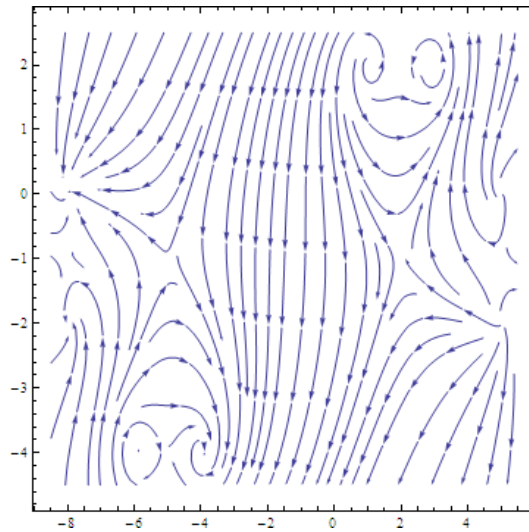


Figura 3.42: Campo vectorial

$$X = \frac{(z-5)(z-5-2i)(z-3-2i)(z-1-2i)(z+4+4i)(z+6+4i)(z+8)(z+8+2i)}{(z-5+i)(z-2+i)(z-2-2i)(z+5+i)(z+5+4i)(z+8+i)} \frac{\partial}{\partial z}$$

Para conocer las asociaciones, rotamos el campo obteniendo los siguientes resultados:

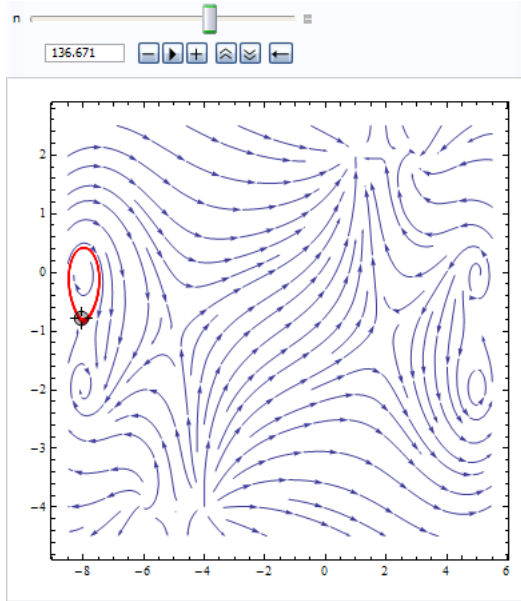
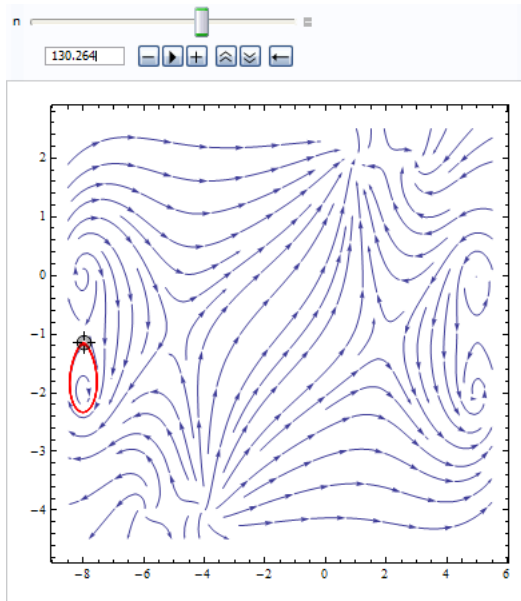
(a) Polo  $-8$  asociado a cero  $-8 - i$ (b) Polo  $-8 - 2i$  asociado a cero  $-8 - i$ 

Figura 3.43: Bajo la rotación de  $1,36671\pi$  a  $X$ , el polo  $-8$  es centro y está asociado al cero  $-8 - i$ . Bajo la rotación de  $1,30264\pi$  a  $X$ , el polo  $-8 - 2i$  es centro y está asociado al cero  $-8 - i$ .

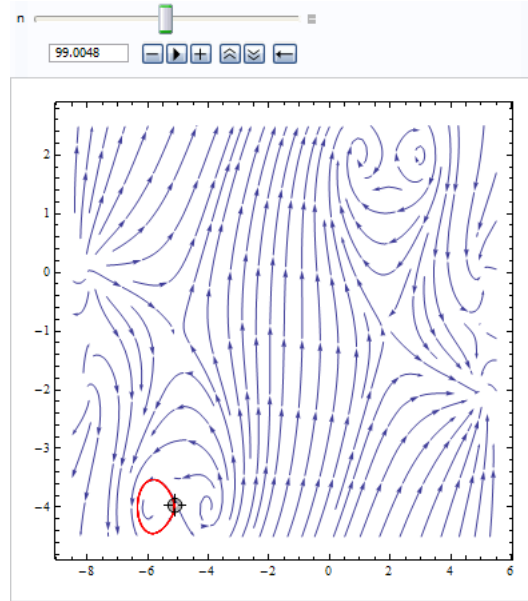
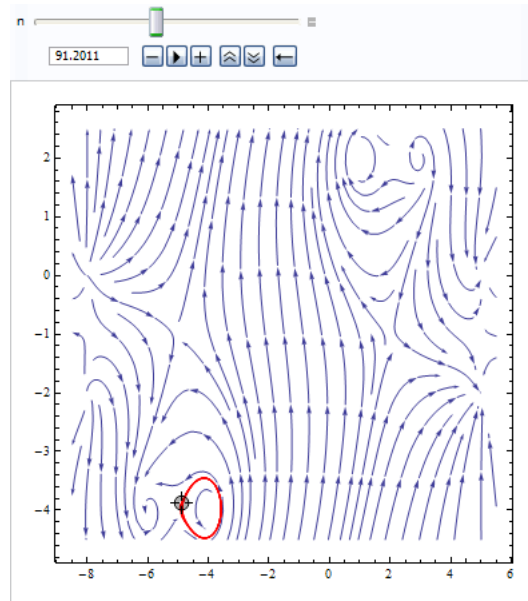
(a) Polo  $-6 - 4i$  asociado a cero  $-5 - 4i$ (b) Polo  $-4 - 4i$  asociado a cero  $-5 - 4i$ 

Figura 3.44: Bajo la rotación de  $0,990048\pi$  a  $X$ , el polo  $-6 - 4i$  es centro y está asociado al cero  $-5 - 4i$ . Bajo la rotación de  $0,912011\pi$  a  $X$ , el polo  $-4 - 4i$  es centro y está asociado al cero  $-5 - 4i$ .

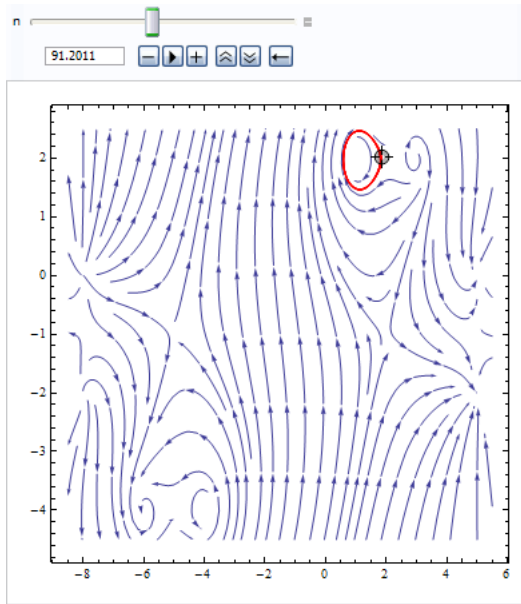
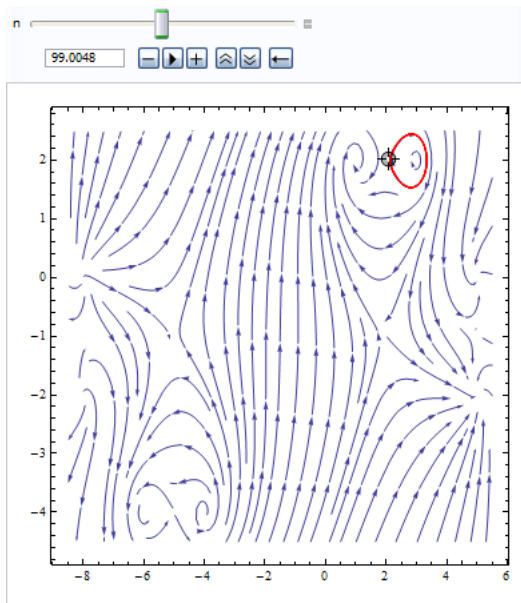
(a) Polo  $1 + 2i$  asociado a cero  $2 + 2i$ (b) Polo  $3 + 2i$  asociado a cero  $2 + 2i$ 

Figura 3.45: Bajo la rotación de  $0,912011\pi$  a  $X$ , el polo  $1 + 2i$  es centro y está asociado al cero  $2 + 2i$ . Bajo la rotación de  $0,990048\pi$  a  $X$ , el polo  $3 + 2i$  es centro y está asociado al cero  $2 + 2i$ .

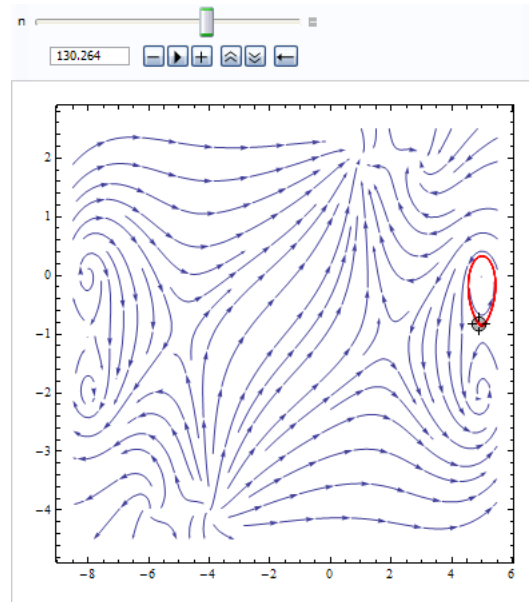
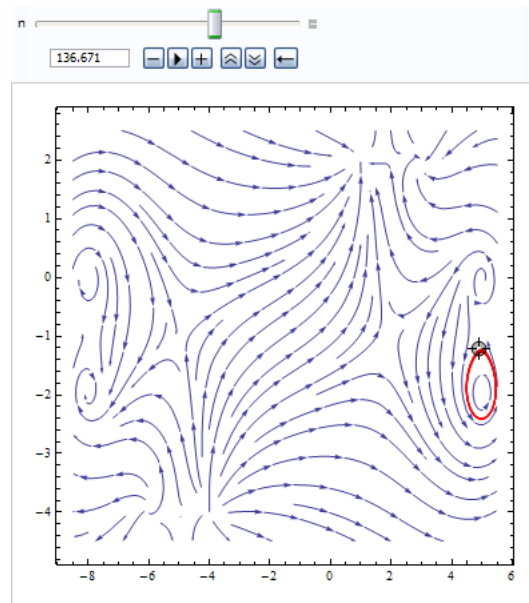
(a) Polo 5 asociado a cero  $5 - i$ (b) Polo  $5 - 2i$  asociado a cero  $5 - i$ 

Figura 3.46: Bajo la rotación de  $1,30264\pi$  a  $X$ , el polo 5 es centro y está asociado al cero  $5 - i$ . Bajo la rotación de  $1,36671\pi$  a  $X$ , el polo  $5 - 2i$  es centro y está asociado al cero  $5 - i$ .



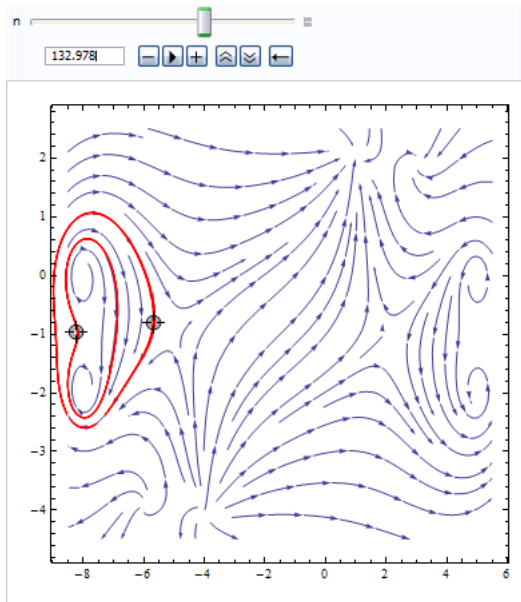
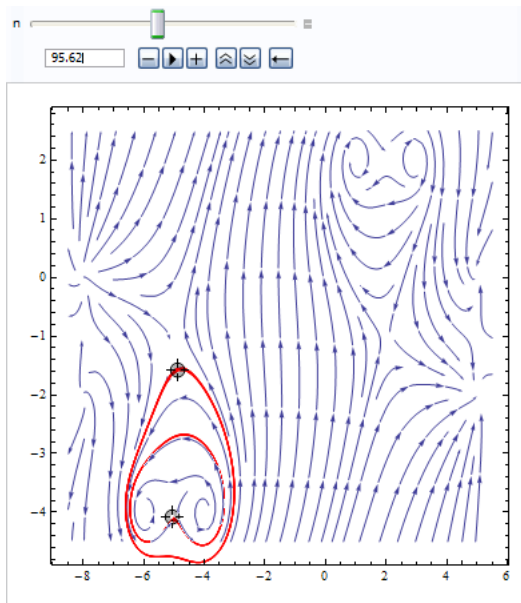
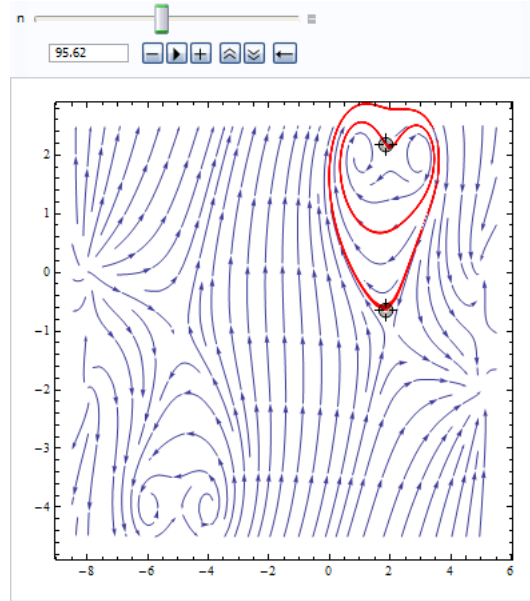
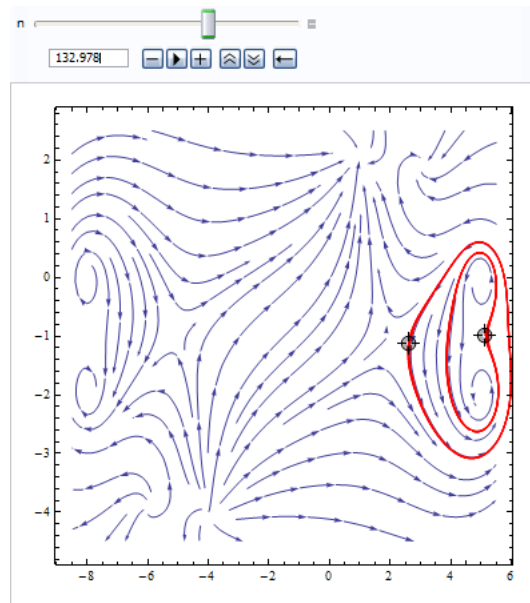
(a) Cero  $-8 - i$  asociado a cero  $-5 - i$ (b) Cero  $-5 - 4i$  asociado a cero  $-5 - i$ 

Figura 3.47: Bajo la rotación de  $1,32978\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros  $-8 - i$  y  $-5 - i$ . Bajo la rotación de  $0,9562\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros  $-5 - 4i$  y  $-5 - i$ .



(a) Cero  $2 + 2i$  asociado a cero  $2 - i$



(b) Cero  $5 - i$  asociado a cero  $2 - i$

Figura 3.48: Bajo la rotación de  $0,9562\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros  $2 + 2i$  y  $2 - i$ . Bajo la rotación de  $1,32978\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros  $5 - i$  y  $2 - i$ .

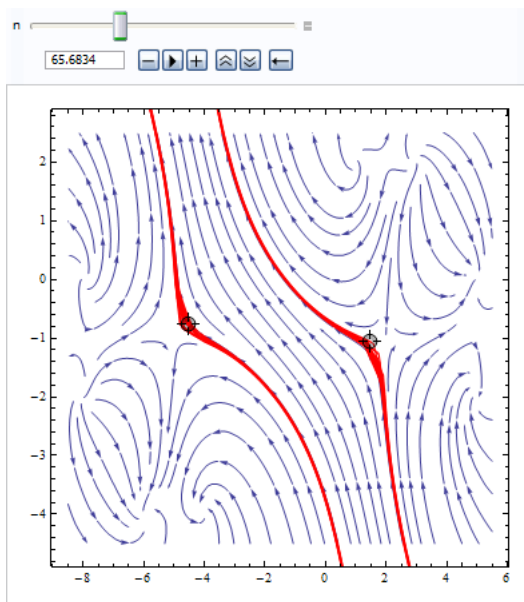


Figura 3.49: Bajo la rotación de  $0,656834\pi$  a  $X$ , existe un anillo de órbitas periódicas alrededor de los ceros  $-5 - i$  y  $2 - i$ .

Así quedaron las asociaciones:

$$\begin{array}{ll}
 \bullet \text{ cero } -8 - i & \left\{ \begin{array}{l} \text{polo } -8 \\ \text{cero } -8 - 2i \\ \text{cero } -5 - i \end{array} \right. & \bullet \text{ cero } -5 - 4i & \left\{ \begin{array}{l} \text{polo } -6 - 4i \\ \text{polo } -4 - 4i \\ \text{cero } -5 - i \end{array} \right. \\
 \text{asociado a} & & \text{asociado a} & \\
 \\
 \bullet \text{ cero } 2 + 2i & \left\{ \begin{array}{l} \text{polo } 1 + 2i \\ \text{polo } 3 + 2i \\ \text{cero } 2 - i \end{array} \right. & \bullet \text{ cero } 5 - i & \left\{ \begin{array}{l} \text{polo } 5 \\ \text{polo } 5 - 2i \\ \text{cero } 2 - i \end{array} \right. \\
 \text{asociado a} & & \text{asociado a} & \\
 \\
 \bullet \text{ cero } -5 - i & \left\{ \begin{array}{l} \text{cero } -8 - i \\ \text{cero } -5 - 4i \\ \text{cero } 2 - i \end{array} \right. & \bullet \text{ cero } 2 - i & \left\{ \begin{array}{l} \text{cero } 2 + 2i \\ \text{cero } 5 - i \\ \text{cero } -5 - i \end{array} \right. \\
 \text{asociado a} & & \text{asociado a} &
 \end{array}$$

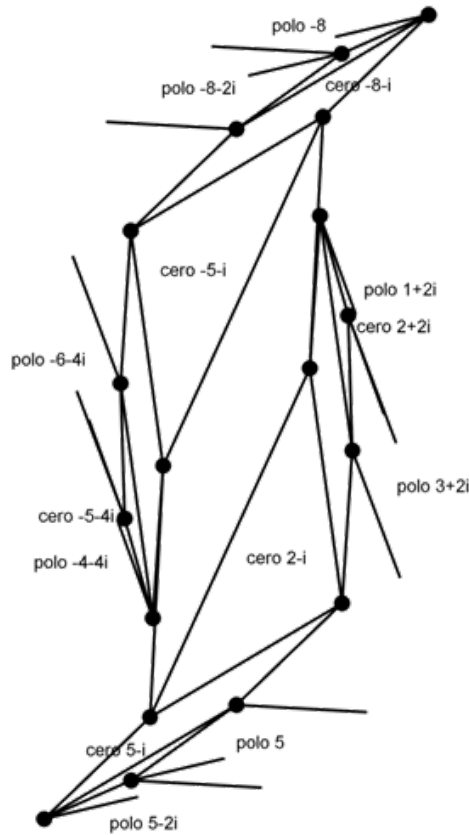
Los valores obtenidos en *Mathematica 7* para las integrales sobre  $\Sigma_{-8-i, -5-i}$ ,  $\Sigma_{-5-4i, -5-i}$ ,  $\Sigma_{2+2i, 2-i}$ ,  $\Sigma_{5-i, 2-i}$  y  $\Sigma_{-5-i, 2-i}$  y los semiresiduos son los siguientes:

- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{-8-i, -5-i} = (-8 - i) + 3t$  con  $t \in [0, 1]$  es

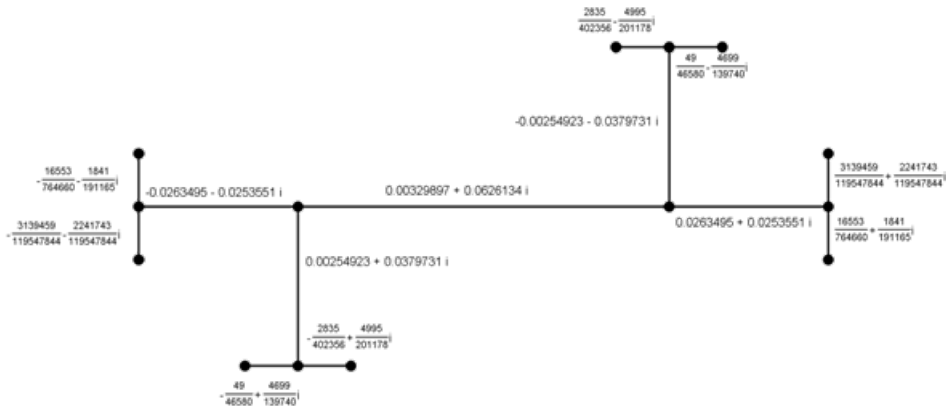
$$-0,0263495 - 0,0253551 i$$

- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{-5-4i,-5-i} = (-5 - 4i) + 3it$  con  $t \in [0, 1]$  es  
 $0,00254923 + 0,0379731 i$
- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{2+2i,2-i} = (2 + 2i) - 3it$  con  $t \in [0, 1]$  es  
 $-0,00254923 - 0,0379731 i$
- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{5-i,2-i} = (5 - i) - 3t$  con  $t \in [0, 1]$  es  
 $0,0263495 + 0,0253551 i$
- La integral de  $\omega$  sobre la curva  $\Sigma_{-5-i,2-i} = (-5 - i) + 7t$  con  $t \in [0, 1]$  es  
 $0,00329897 + 0,0626134 i$
- El residuo del polo  $-8$  es  $-\frac{16553}{764660} - \frac{1841}{191165} i$
- El residuo del polo  $-8 - 2i$  es  $-\frac{3139459}{119547844} - \frac{2241743}{119547844} i$
- El residuo del polo  $-6 - 4i$  es  $-\frac{49}{46580} + \frac{4699}{139740} i$
- El residuo del polo  $-4 - 4i$  es  $-\frac{2835}{402356} + \frac{4995}{201178} i$
- El residuo del polo  $1 + 2i$  es  $\frac{2835}{402356} - \frac{4995}{201178} i$
- El residuo del polo  $3 + 2i$  es  $\frac{49}{46580} - \frac{4699}{139740} i$
- El residuo del polo  $5$  es  $\frac{3139459}{119547844} + \frac{2241743}{119547844} i$
- El residuo del polo  $5 - 2i$  es  $\frac{16553}{764660} + \frac{1841}{191165} i$
- El semiresiduo entre los ceros  $-8 - i$  y  $-5 - i$  es  $\frac{121706708}{2540391685} + \frac{288408351}{10161566740} i$
- El semiresiduo entre los ceros  $-5 - 4i$  y  $-5 - i$  es  $\frac{557977}{68903465} - \frac{48333433}{826841580} i$
- El semiresiduo entre los ceros  $2 - 2i$  y  $2 - i$  es  $-\frac{557977}{68903465} + \frac{48333433}{826841580} i$
- El semiresiduo entre los ceros  $5 - i$  y  $2 - i$  es  $-\frac{121706708}{2540391685} - \frac{288408351}{10161566740} i$
- El semiresiduo entre los ceros  $-5 - i$  y  $2 - i$  es  $\frac{8678999461}{154963892785} - \frac{13980790646}{464891678355} i$

Con esta información, construimos el tofoco (fig. 3.50 (a)) y la gráfica de invariantes (fig. 3.50 (b)).



(a) Tofico correspondiente a  $\omega$



(b) Gráfica de invariantes de  $\omega$

Figura 3.50: Tofico y gráfica de invariantes correspondientes a la 1-forma  $\omega = \frac{(z-5+i)(z-2+i)(z-2-2i)(z+5+i)(z+5+4i)(z+8+i)}{(z-5)(z-5-2i)(z-3-2i)(z-1-2i)(z+4+4i)(z+6+4i)(z+8)(z+8+2i)} dz$

# Apéndice A

## $\widehat{\mathbb{C}}$ es un espacio topológico

Consideremos en  $\mathbb{C}$  la topología usual cuyos abiertos son bolas abiertas

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

y uniones arbitrarias de ellas.

Para construir una topología en  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  procedemos como sigue:

Consideremos tres tipos de abiertos:

- Bolas abiertas con centro en  $z_0$ ,  $B(z_0, r)$ .
- Bolas abiertas con centro en  $\infty$ ,  $B(\infty, \frac{1}{r}) := \overline{B(0, r)}^c$ , donde el complemento se considera en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- Abiertos que son uniones arbitrarias de los anteriores,  $\bigcup_{\alpha \in I} B(P_\alpha, r_\alpha)$ .

Definimos el conjunto  $\tau$  tal que sus elementos son generados por los abiertos antes mencionados.

**Lema A.1.1.**  $\tau$  es una topología en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Para ello verificaremos las propiedades de la definición de topología.

1. Naturalmente hemos incluido el vacío y el total en  $\tau$ .
2. De la definición de  $\tau$  se sigue que, un conjunto  $C$  que es unión arbitraria de abiertos en  $\tau$ , necesariamente está en  $\tau$ .

3. Tomemos una colección finita de abiertos  $C_1, \dots, C_n$  en  $\tau$ , debemos mostrar que la intersección de ella está en  $\tau$ .

Existen dos casos posibles:

- $\infty$  no está en la intersección. Notemos que todo abierto  $C$  de  $\tau$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$  induce un abierto  $C \cap \mathbb{C}$  usual en  $\mathbb{C}$ . De aquí tenemos que  $C_1 \cap \dots \cap C_n$  induce a  $(C_1 \cap \mathbb{C}) \cap \dots \cap (C_n \cap \mathbb{C}) = (C_1 \cap \dots \cap C_n) \cap \mathbb{C}$  un abierto  $C_1 \cap \dots \cap C_n$ , por lo que tenemos que la intersección debe ser abierto en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- $\infty$  está en la intersección. Si esto ocurre, entonces cada  $C_i$  debe contener a  $\infty$ , por lo que  $C_i = \cup_{\alpha \in I_i} \overline{B(z_\alpha, r_\alpha)}^c$  para toda  $i = 1, \dots, n$ . Así

$$\begin{aligned} C_1 \cap \dots \cap C_n &= \overline{\cup_{\alpha \in I_1} B(z_\alpha, r_\alpha)}^c \cap \dots \cap \overline{\cup_{\alpha \in I_n} B(z_\alpha, r_\alpha)}^c \\ &= (\overline{\cap_{\alpha \in I_1} B(z_\alpha, r_\alpha)})^c \cap \dots \cap (\overline{\cap_{\alpha \in I_n} B(z_\alpha, r_\alpha)})^c \\ &= \overline{((\cap_{\alpha \in I_1} B(z_\alpha, r_\alpha)) \cup \dots \cup (\cap_{\alpha \in I_n} B(z_\alpha, r_\alpha)))}^c. \end{aligned}$$

Notemos que  $\cap_{\alpha \in I_i} B(z_\alpha, r_\alpha)$  es abierto en  $\widehat{\mathbb{C}}$  para cada  $i = 1, \dots, n$  y la unión de abiertos en  $\widehat{\mathbb{C}}$  es abierta en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Entonces  $C_1 \cap \dots \cap C_n$  la podemos reescribir como  $\overline{\cup_{j=1}^n A_j}^c$  donde cada  $A_j$  es abierto en  $\widehat{\mathbb{C}}$  y no contienen a  $\infty$ . De aquí concluimos que la intersección es abierta. ■

Tomemos el conjunto

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

y la topología en él, cuyos abiertos son generados por intersecciones de bolas abiertas  $B((\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3), r) \subset \mathbb{R}^3$  con  $\mathbb{S}^2$ .

Consideremos la función  $h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$  descrita como

$$h(z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \left( \frac{4\Re(z)}{|z|^2+4}, \frac{4\Im(z)}{|z|^2+4}, \frac{2|z|^2}{|z|^2+4} \right) & \text{si } z \neq \infty \\ (0, 0, 2) & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

**Lema A.1.2.**  $h$  es homeomorfismo.

Debemos verificar lo siguiente:

- $h$  es biyectiva. En efecto, podemos definir  $h^{-1} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  como:

$$h^{-1}((x_1, x_2, x_3)) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \frac{2x_1}{2-x_3} + i \frac{2x_2}{2-x_3} & \text{si } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 2) \\ \infty & \text{si } (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 2). \end{cases}$$

- $h$  y  $h^{-1}$  son continuas. Es equivalente a probar que tanto  $h^{-1}$  y  $h$  mandan abiertos de sus respectivos dominios en abiertos de sus respectivos contradominios. Bastará considerar  $C$  abierto en la base de la topología de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Notemos que la frontera de cada abierto  $C$  es un círculo, por lo que sólo debemos probar que:

$$h \text{ manda círculos o rectas en } \widehat{\mathbb{C}} \text{ en círculos en } \mathbb{S}^2.$$

Tomemos el círculo

$$S_1 = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid |z - w|^2 = \rho^2\}$$

con  $w = \alpha + i\beta$  y  $\rho > 0$ . Deseamos probar que la imagen bajo  $h$  de los puntos de  $S_1$  están sobre un plano  $H$  que intersecta a  $\mathbb{S}^2$ . Usando  $|z - w|^2 = (z - w)(\bar{z} - \bar{w})$ , podemos reescribir la condición de  $S_1$  como

$$z\bar{z} - \bar{w}z - w\bar{z} + w\bar{w} - \rho^2 = 0. \quad (\text{A.1})$$

Tomemos  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$  arbitrario, le aplicamos  $h^{-1}$  y supongamos que dicha imagen cumple (A.1). Para ello, sustituyendo  $z = h^{-1}(x_1, x_2, x_3)$  en (A.1) tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{4(x_1^2 + x_2^2)}{(2 - x_3)^2} - \frac{2(\alpha - i\beta)(x_1 + ix_2)}{2 - x_3} - \\ & \frac{2(\alpha + i\beta)(x_1 - ix_2)}{2 - x_3} + (\alpha^2 + \beta^2) - \rho^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

De  $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 = 1$  tenemos

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 1 - (x_3 - 1)^2 \\ &= 1 - x_3^2 + 2x_3 - 1 \\ &= x_3(2 - x_3) \end{aligned}$$

lo que implica que

$$x_3 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2 - x_3} \quad (\text{A.3})$$

Ahora, multiplicando a (A.2) por  $(2 - x_3)$  tenemos

$$\begin{aligned} & 4 \frac{x_1^2 + x_2^2}{2 - x_3} - 2(\alpha - i\beta)(x_1 + ix_2) - 2(\alpha + i\beta)(x_1 - ix_2) \\ & + (\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2)(2 - x_3) = 0 \end{aligned}$$



Sustituyendo (A.3) en la ecuación anterior obtenemos

$$4x_3 - 2(\alpha - i\beta)(x_1 + ix_2) - 2(\alpha + i\beta)(x_1 - ix_2) + (\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2)(2 - x_3) = 0$$

Desarrollando y agrupando términos semejantes, obtenemos

$$(-4\alpha)x_1 + (-4\beta)x_2 + (4 - \alpha^2 - \beta^2 + \rho^2)x_3 + (2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\rho^2) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Notemos que los coeficientes de  $x_1, x_2$  y  $x_3$ , además del término independiente, son reales, por lo que (A.4) es la ecuación de un plano

$$H = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (-4\alpha)x_1 + (-4\beta)x_2 + (4 - \alpha^2 - \beta^2 + \rho^2)x_3 + (2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\rho^2) = 0 \text{ con } \alpha, \beta, \rho \in \mathbb{R}\}$$

que intersecta a  $\mathbb{S}^2$ , y  $h^{-1}(S_1) \subset \mathbb{S}^2$  es un círculo.

Otro camino para probar lo anterior es posible; consideremos

$$z_t = \rho \cos(t) + \alpha + i\rho \operatorname{sen}(t) + i\beta \quad \text{para toda } t \in [0, 2\pi)$$

la parametrización de  $S_1$ . Debemos probar que  $h(z_t) \subset \mathbb{S}^2 \cap H$ . Basta sustituir la composición  $h(z_t)$  en la ecuación de  $H$ . Así,

$$h(z_t) = \begin{pmatrix} \frac{4\rho \cos(t) + 4\alpha}{\rho^2 + 2\rho\alpha \cos(t) + 2\rho\beta \operatorname{sen}(t) + \alpha^2 + \beta^2 + 4} \\ \frac{4\rho \operatorname{sen}(t) + 4\beta}{\rho^2 + 2\rho\alpha \cos(t) + 2\rho\beta \operatorname{sen}(t) + \alpha^2 + \beta^2 + 4} \\ \frac{2\rho^2 + 4\rho\alpha \cos(t) + 4\rho\beta \operatorname{sen}(t) + 2\alpha^2 + 2\beta^2}{\rho^2 + 2\rho\alpha \cos(t) + 2\rho\beta \operatorname{sen}(t) + \alpha^2 + \beta^2 + 4} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo  $h(z_t)$  en (A.4) tenemos

$$\begin{aligned} & (-4\alpha) \left( \frac{4\rho \cos(t) + 4\alpha}{\rho^2 + 2\rho\alpha \cos(t) + 2\rho\beta \operatorname{sen}(t) + \alpha^2 + \beta^2 + 4} \right) \\ & + (-4\beta) \left( \frac{4\rho \operatorname{sen}(t) + 4\beta}{\rho^2 + 2\rho\alpha \cos(t) + 2\rho\beta \operatorname{sen}(t) + \alpha^2 + \beta^2 + 4} \right) \\ & + (4 - \alpha^2 - \beta^2 + \rho^2) \left( \frac{2\rho^2 + 4\rho\alpha \cos(t) + 4\rho\beta \operatorname{sen}(t) + 2\alpha^2 + 2\beta^2}{\rho^2 + 2\rho\alpha \cos(t) + 2\rho\beta \operatorname{sen}(t) + \alpha^2 + \beta^2 + 4} \right) \\ & + (2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\rho^2) = 0 \end{aligned}$$

Multiplicando todo por el denominador tenemos

$$\begin{aligned}
& (-4\alpha)(4\rho \cos(t) + 4\alpha) \\
& + (-4\beta)(4\rho \sen(t) + 4\beta) \\
& + (4 - \alpha^2 - \beta^2 + \rho^2)(2\rho^2 + 4\rho\alpha \cos(t) + 4\rho\beta \sen(t) + 2\alpha^2 + 2\beta^2) \\
& + (2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\rho^2)(\rho^2 + 2\rho\alpha \cos(t) + 2\rho\beta \sen(t) + \alpha^2 + \beta^2 + 4) = 0 \\
& \implies \\
& -16\rho\alpha \cos(t) - 16\alpha^2 - 16\rho\beta \sen(t) - 16\beta^2 \\
& + (2\rho^2 + 4\rho\alpha \cos(t) + 4\rho\beta \sen(t) \\
& + 2\alpha^2 + 2\beta^2)(4 - \alpha^2 - \beta^2 + \rho^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2) + 8\alpha^2 + 8\beta^2 - 8\rho^2 = 0 \\
& \implies \\
& 16\rho\alpha \cos(t) - 16\alpha^2 - 16\rho\beta \sen(t) - 16\beta^2 + 8\rho^2 + 16\rho\alpha \cos(t) + \\
& 16\rho\beta \sen(t) + 8\alpha^2 + 8\beta^2 + 8\alpha^2 + 8\beta^2 - 8\rho^2 = 0
\end{aligned}$$

lo que claramente es cero, para toda  $t \in [0, 2\pi)$ .

Dada la biyectividad de  $h$ ,  $h^{-1}$  también es continua, y termina por demostrar que  $h$  es homeomorfismo. ■

Gracias a este homeomorfismo,  $\widehat{\mathbb{C}}$  hereda las propiedades topológicas de la esfera  $\mathbb{S}^2$ , como ser Hausdorff, compacto y conexo.



## Apéndice B

# Manipulación de rotación del campo vectorial $X$ con *Mathematica 7*

Para determinar las asociaciones entre polos y ceros de una 1-forma  $\omega = h_1(z)dz$  dada, es esencial graficar el campo vectorial asociado  $X = f_1(z)(\partial/\partial z)$  a la 1-forma y diversas rotaciones aplicadas al mismo. A continuación se muestra un algoritmo hecho en el programa *Mathematica 7* para construir un controlador de parámetros, el cuál nos ayudará a manipular el parámetro de rotación aplicado al campo  $x$  y así observar rápidamente el campo rotado.

Utilizaremos el algoritmo para generar el controlador para una 1-forma  $\omega$  de dos ceros y cuatro polos. El algoritmo se puede generalizar para cualquier número positivo de ceros y polos.

El primer paso es asignar los valores de los polos y ceros de  $\omega$ . Para distinguir polos y ceros, las variables que manejaremos serán  $cx$  para ceros y  $py$  para polos, con  $x, y$  enteros positivos:

```
Clear[x,y,z]
```

```
c1 = -3;  
c2 = 1;  
p1 = -3 + I;  
p2 = -3 - I;
```

$$\begin{aligned} p3 &= 1 + I; \\ p4 &= 1 - I; \end{aligned}$$

Cada renglón vacío en el algoritmo denota que los comandos pertenecen a distintas celdas en *Mathematica 7*. Ahora, llamamos `fun0` a la función meromorfa  $h_1(z)$  de la 1-forma  $\omega$ , que la construiremos de la siguiente manera:

$$\text{fun0} = (z-c1)(z-c2)(1/(z-p1))(1/(z-p2))(1/(z-p3))(1/(z-p4))$$

Al evaluar la celda quedará así:

$$\text{fun0} = \frac{(z - c1) (z - c2) (1 / (z - p1)) (1 / (z - p2)) (1 / (z - p3)) (1 / (z - p4))}{(-1 + z) (3 + z)}$$

$$\frac{((-1 - i) + z) ((-1 + i) + z) ((3 - i) + z) ((3 + i) + z)}$$

Después, asignamos a  $z$  su parte real e imaginaria variables, y llamamos `fun` a  $h_1(z)$  expresada en términos de la nueva  $z$ :

$$z = x + I y;$$

$$\text{fun} = \text{fun0}$$

Al evaluar la celda quedará así:

$$\text{fun} = \text{fun0}$$

$$\frac{(-1 + x + i y) (3 + x + i y)}{((-1 - i) + x + i y) ((-1 + i) + x + i y) ((3 - i) + x + i y) ((3 + i) + x + i y)}$$

Ahora, le pedimos al programa que nos muestre la parte real e imaginaria del recíproco de `fun`, es decir, la función meromorfa  $f_1(z)$  de  $X$ :

$$X = \text{Re}[1/\text{fun}]$$

$$Y = \text{Im}[1/\text{fun}]$$

Por lo general no lo hace, por lo que al evaluar la celda quedará así:

$$\begin{aligned} &\text{Re}[1 / \text{fun}] \\ &\text{Im}[1 / \text{fun}] \\ &\text{Re} \left[ \frac{((-1 - i) + x + i y) ((-1 + i) + x + i y) ((3 - i) + x + i y) ((3 + i) + x + i y)}{(-1 + x + i y) (3 + x + i y)} \right] \\ &\text{Im} \left[ \frac{((-1 - i) + x + i y) ((-1 + i) + x + i y) ((3 - i) + x + i y) ((3 + i) + x + i y)}{(-1 + x + i y) (3 + x + i y)} \right] \end{aligned}$$

Ahora, asignaremos de la siguiente manera los valores límite de  $x$  y  $y$  entre los cuales graficaremos el campo  $X$ :

```
Mx = Max[Re[c1], Re[c2], Re[p1], Re[p2], Re[p3], Re[p4]];
mx = Min[Re[c1], Re[c2], Re[p1], Re[p2], Re[p3], Re[p4]];
My = Max[Im[c1], Im[c2], Im[p1], Im[p2], Im[p3], Im[p4]];
my = Min[Im[c1], Im[c2], Im[p1], Im[p2], Im[p3], Im[p4]];
```

de donde se sigue que  $mx \leq x \leq Mx$  y  $my \leq y \leq My$ . Por último, generaremos el controlador de las rotaciones del campo  $X$  por medio del siguiente:

```
Manipulate[
  Show[StreamPlot[{Re[((x+I y-p1)(x+I y-p2)(x+I y-p3)
    (x+I y-p4))/((E^((n/100) Pi I)) (x+I y-c1)
    (x+I y-c2))],Im[((x+I y-p1)(x+I y-p2)(x+I y-p3)
    (x+I y-p4))/((E^((n/100) Pi I)) (x+I y-c1)
    (x+I y-c2))]}],{x,mx-.5,Mx+.5},{y,my-.5,My+.5},
    StreamPoints->100,VectorScale -> Small],
  ParametricPlot[
    Evaluate[
      First[{x[t],y[t]}/.NDSolve[{x'[t]==
        Re[((x[t]+I y[t]-p1)(x[t]+I y[t]-p2)
        (x[t]+I y[t]-p3)(x[t]+I y[t]-p4))
        /((E^((n/100)Pi I))(x[t]+I y[t]-c1)
        (x[t]+I y[t]-c2))],y'[t]==
        Im[[((x[t]+I y[t]-p1)(x[t]+I y[t]-p2)
        (x[t]+I y[t]-p3)(x[t]+I y[t]-p4))
        /((E^((n/100)Pi I))(x[t]+I y[t]-c1)
        (x[t]+I y[t]-c2))],Thread[{x[0],y[0]}==point]],
        {x,y}, {t, 0, 10}]]],
      {t,0,10},PlotStyle->Red]],
    {n,0,200},{point,{0.5,0.5}},Locator},
  SaveDefinitions -> True]
```

Analicemos las partes de este controlador:

```
StreamPlot[
  {Re[((x+I y-p1)(x+I y-p2)(x+I y-p3)(x+I y-p4))
    /((E^((n/100)Pi I))(x+I y-c1)(x+I y-c2))],
    Im[((x+I y-p1)(x+I y-p2)(x+I y-p3)(x+I y-p4))
```

```

/((E^((n/100)Pi I))(x+I y-c1)(x+I y-c2))],
{x,mx-.5,Mx+.5},{y,my-.5,My+.5},
StreamPoints->100,VectorScale -> Small]

```

Este comando genera el campo vectorial  $X$  con la rotación  $((E^((n/100)Pi I))$ ). El parámetro  $n$  es el que manipularemos para generar las rotaciones;  $n$  varía de 0 a 200 y así generar una rotación que varíe de 0 a  $2\pi$ . En los valores límites  $mx, Mx$  de  $x$  y  $my, My$  de  $y$  agregamos 0,5 para poder observar los polos o ceros que están sobre dichos límites de graficación.

```

ParametricPlot[
Evaluate[
First[{ x[t],y[t]}/.
NDSolve[
{x' [t]==
Re[((x[t]+I y[t]-p1)(x[t]+I y[t]-p2)
(x[t]+I y[t]-p3)(x[t]+I y[t]-p4))
/((E^((n/100)Pi I))(x[t]+I y[t]-c1)
(x[t]+I y[t]-c2))],
y' [t]==
Im[[((x[t]+I y[t]-p1)(x[t]+I y[t]-p2)
(x[t]+I y[t]-p3)(x[t]+I y[t]-p4))
/((E^((n/100)Pi I))(x[t]+I y[t]-c1)
(x[t]+I y[t]-c2))],
Thread[{x[0],y[0]}==point] ],{x,y},{t,0,10}]
] ], {t,0,10},PlotStyle->Red]

```

Este comando genera una órbita  $\{x[0],y[0]\}$ , señalada con el puntero, del campo vectorial  $X$  con la rotación  $((E^((n/100)Pi I))$ ). Aquí el puntero es el parámetro manipulable.

```
Show[StreamPlot[...],ParametricPlot[...]]
```

Este comando nos permite trabajar en el mismo cuadro con el campo vectorial generado por `StreamPlot` y las soluciones del campo vectorial generadas por `ParametricPlot`.

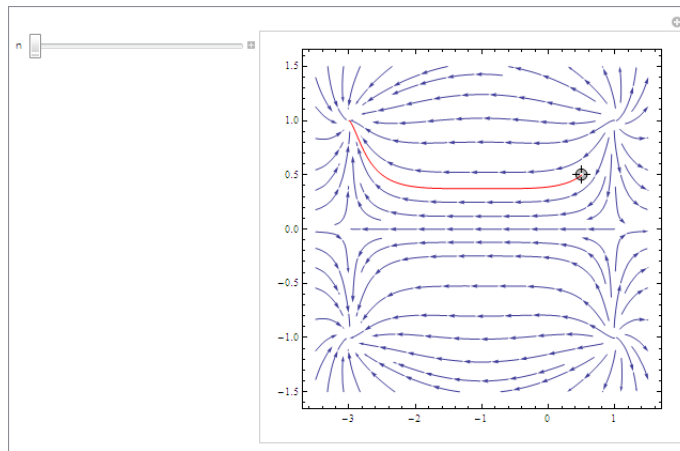
```

Manipulate[...,{n,0,200},{point,{0.5,0.5}},Locator},
SaveDefinitions -> True]

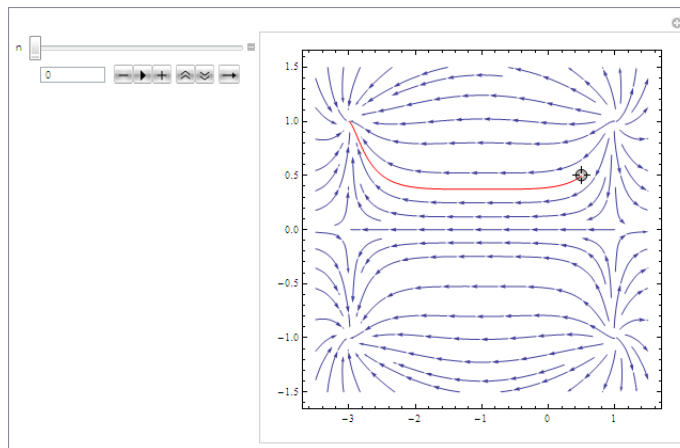
```

Por último, este comando es el que nos permite modificar el parámetro  $n$  y la selección de puntos con el puntero. Aquí se define el intervalo sobre el cual  $n$  tomará los valores; para el puntero, se define un punto inicial al momento de evaluar la celda. El argumento `SaveDefinitions -> True` causa que al salir del archivo y reingresar, no haya necesidad de evaluar la celda nuevamente (salvo si se hacen cambios en los valores de polos o ceros).

Al evaluar la celda del controlador quedará así:

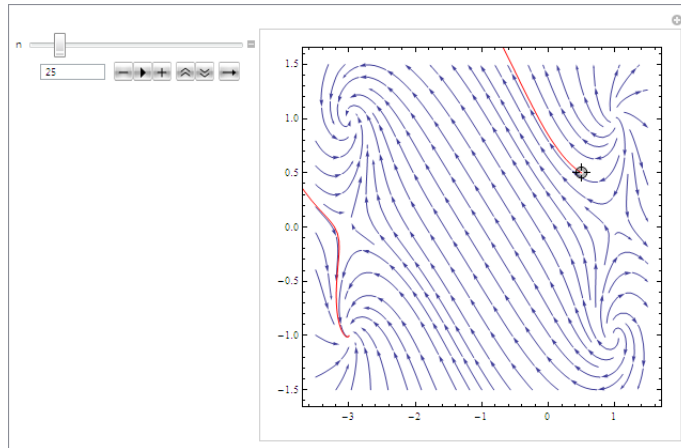


La barra desplazadora es la que manipula los valores de  $n$ , mientras que seleccionando cualquier punto sobre la gráfica, obtendremos la órbita en dicho punto. Para precisar mejor la rotación, el controlador tiene la opción para modificar los valores al parámetro  $n$ , haciendo click en el símbolo  $+$  al final de la barra e ingresando el valor en el espacio correspondiente.





Por ejemplo, modificando el valor 0 por 25 obtenemos el siguiente campo:



# Bibliografía

- [1] Ahlfors, L.V., “*Conformal Invariants*”, Mc Graw-Hill, 1973.
- [2] Arnold, V.I., “*Mathematical Methods of Classical Mechanics*”, Springer, 2nd edition, 1989.
- [3] Brieskorn, E., Knörrer, H., “*Plane Algebraic Curves*”, Birkhäuser, 1986.
- [4] Frías, M. E.; Hernández, L.; Muciño, J., “*Spaces of singular flat metrics from meromorphic 1-forms on the Riemann sphere*”, en proceso.
- [5] Fritzsche, K.; Grauert, H., “*From holomorphic functions to Complex Manifolds*”, Springer, 2002.
- [6] Hernández-Moguel, L., “*El conjunto de 1-formas diferenciales meromorfas sobre la esfera de Riemann*”, Tesis de Maestría, diciembre 2006.
- [7] Klein, F., “*On Riemann’s Theory of Algebraic Functions and their Integrals*”, Dover, (2003).
- [8] Marsden, J., Hoffman, M., “*Basic Complex Analysis*”, W.H.Freeman and Company, 3rd edition, 1999.
- [9] Muciño, J., “*Complex structures adapted to smooth vector fields*”, Math. Annalen, 2002.
- [10] Remmert, R., “*Theory of Complex functions*”, Springer, 1990.
- [11] Riemann, B., “*Collected Papers*”, Kendrick Press, (2004).
- [12] Rodríguez, C. H., “*Método de Newton y mosaicos en la esfera de Riemann*”, Cartel mostrado en el *XLI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana*.
- [13] Shaw, W. T., “*Complex analysis with Mathematica*”, Cambridge University Press, 2006.

- [14] Strebel, K., "*Quadratic Differentials*", Springer-Verlag, 1984.
- [15] Zaldivar, F., "*Funciones algebraicas de una variable compleja*", UAM, México, 1995.