UNIVERSIDAD DE SONORA
DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ELEMENTOS DE TEORÍA DE CONTINUOS E HIPERESPACIOS

T E S I S

Que para obtener el título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Presenta:
MARTHA PATRICIA ANDRADE ESPINOZA

Director de Tesis:
CARLOS A. ROBLES CORBALA

HERMOSILLO, SONORA, MÉXICO NOVIEMBRE 2005.

Dedico esta tesis a las personas más importantes en mi vida:

A mi madre Martha Ofelia Espinoza Vega que es la persona que más amor, apoyo y paciencia me a brindado. Que sin su sabiduría no hubiera podido terminar esta tesis.

A mi padre José Angel Andrade Ruíz por todo el amor, apoyo y comprensión que me a dado.

A mi hermana Ana Cecilia Andrade Espinoza

A mi hermano Luis Alejandro Andrade Espinoza

A mi hermano Jorge Alberto Andrade Espinoza

A mi hermano José Angel Andrade Espinoza.

A mi sobrino Jonathan Alejandro Andrade Rodrigues.

AGRADECIMIENTO:

Quiero dar un profundo agradecimiento al MC Carlos Alberto Robles Corbalá por toda su paciencia y asesoramiento para poder realizar este trabajo, gracias a todo su desempeño en su trabajo y conocimiento he podido realizar mi tesis.

Quiero agradecer a los integrantes del comité revisor de tesis:

DRA. MARTHA D. GUZMÁN PARTIDA.

M.C. EDUARDO TELLECHEA ARMENTA

M.C. GUILLERMO DÁVILA RASCÓN

M.C. CARLOS A. ROBLES CORBALÁ

por las observaciones, comentarios y sugerencias que me hicieron en la conclusión de este trabajo.

También agradezco al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora por haberme brindado la oportunidad de hacerme una profesionista y desarrollar mi gusto por las matemáticas.

Índice general

INTRODUCCIÓN

La intención de este trabajo es dar una presentación basica de la teoría de Continuos e Hiperespacios, así como los llamados Continuos Indescomponibles.

Antes se presenta un capítulo de preliminares con el objetivo de poder comprender de forma autocontenida el desarrollo de este trabajo. En dicho capítulo se estudian conceptos y resultados básicos de Espacios Métricos.

Definimos un Espacio Métrico por (X, d), con X un conjunto no vacío, y donde d es una función definida como $d : X \times X \to \mathbb{R}$, la cual llamamos distancia o métrica y satisface los siguientes axiomas:

a) $d(x, y) \geq 0, \quad x, y \in X$

b) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y, \quad x, y \in X$

c) $d(x, y) = d(y, x) \quad x, y \in X$

d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \qquad x, y, z \in X.$

En este primer capítulo también vemos algunos conceptos de Espacios Topológicos, como cerradura, interior y frontera.

Es importante estudiar Conexidad y compacidad. Por lo cual vemos los conceptos y resultados más importantes para el desarrollo de esta tesis.

Un espacio X es conexo si no existen dos conjuntos abiertos A y B en X no vacíos tal que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Un subconjunto A de un espacio métrico es compacto si toda cubierta por abiertos de A contiene una subcubierta finita. Un espacio métrico X es compacto si, como conjunto, X es compacto.

Por ejemplo, el intervalo cerrado $[0, 1]$ considerado como un subconjunto del eje real es compacto. El intervalo abierto $(0, 1)$ no es compacto porque no es cerrado. El eje X, considerado como un subconjunto del plano, no es compacto porque no es acotado, pero el círculo de radio 10^6 sobre el origen es compacto, esto no es sorprendente, pues el mismo teorema de BolzanoWeierstrass establece que en $\mathbb{R}^n$ los subconjuntos compactos quedan caracterizados por ser los conjuntos cerrados y acotados.

En el segundo capítulo definimos el concepto de Continuo y vemos los ejemplos más usuales. Un continuo es un espacio métrico, conexo y compacto, no degenerado.

Una familia $\{U_1, U_2, ...U_n\}$ de subconjuntos de un espacio métrico (X, d) es una cadena simple en X si se tiene que $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ si y sólo si $|j-k| \leq 1$. A cada U_k se le llama un eslabón de la cadena simple. Se dice que una cadena simple $C = \{U_1, U_2, ...U_n\}$ conecta a los puntos a y b en X si $a \in U_1$ y $b \in U_n$, así un continuo X es encadenable si $\forall \varepsilon > 0$ se puede cubrir con una cadena simple, cuyos eslabones tienen diámetro ε, es decir, por una $\varepsilon-$cadena.

Para obtener un hiperespacio, podemos usar cualquier colección de subconjuntos de un continuo X que satisface cierta propiedad topológica. Hay algunos que podemos destacar:

- $2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado}\}$.
- $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$, esto es, $C(X)$ es la familia de subcontinuos de X.
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más n puntos}\}$,con $n \in N$.
- $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$

Una muy natural pregunta teórica sobre hiperespacios que consiste en determinar los hiperespacios $2^X, C(X), F_n(X)$ y $C_n(X)$ del intervalo unitario, el continuo más familiar.

A estos espacios se les da una métrica, la métrica de Hausdorff. La cual esta definida en la sección 2.3

Intuitivamente vemos que dos subconjuntos están **cercanos** con la métrica de Hausdorff si y sólo si están empalmados uno en otro.

Comentan distintos especialistas que:

"Probablemente el primer resultado en la dirección de calcular 2^I fue debido a L. Vietoris cuando demostró (1922)... *que si X es un continuo de Peano*[1], *entonces también lo es el hiperespacio de* 2^X... en uno de sus primeros artículos, Wojdyslawski

[1]Es decir, un espacio métrico compacto, conexo y localmente conexo.

preguntó específicamente si el hiperespacio del intervalo unitario es homeomorfo al cubo de Hilbert. El profesor Kuratowski comenta que la conjetura era bien conocida por topólogos polacos en los 20's.

Esto fue resuelto finalmente por Schori y West y generalizado por Schori y Curtis en 1977, ellos probaron que:

Teorema de Curtis-Schori-West. *Si X es un continuo de Peano, entonces:*

1) 2^X es el cubo de Hilbert

2) $C(X)$ es el cubo de Hilbert si X es un continuo localmente conexo en el que todos sus arcos tienen interior vacío.

3) $C(X) \times I$ es homeomorfo al cubo de Hilbert.

Aunque su prueba y métodos tuvieron éxito, éstos eran bastante complejos.

Las técnicas de la prueba de Curtis-Schori-West involucran el uso delicado de límites inversos, las maniobras sutiles y complicadas con refinamientos de particiones y lo que era, en aquel tiempo, los bastante nuevos resultados acerca de topología en dimensiones infinitas".

Un teorema de identificación para el cubo de Hilbert fue establecido posteriormente por Toruncczyk lo cual hizo la prueba mucho más fácil, ver[1] [9] . Por lo tanto, el problema de identificar el hiperespacio del intervalo unitario (o, de hecho, el problema de identificar muchos hiperespacios) se redujo a mostrar que el hiperespacio tiene las propiedades enlistadas en las hipótesis de dicho teorema y por consiguiente es el cubo de Hilbert.

Para los espacios en el plano, y particular para gráficas simples, los hiperespacios $C(X)$ fueron investigados por R. Duda, quién dio muchas caracterizaciones y métodos. Ver [2] [9] .

Como capítulo 3 presentaremos L-convergencia en 2^X. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de 2^X , definimos el limite inferior de A_n y el limite superior de A_n de la siguiente forma:

- Lim inf $(A_n) = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \ \ , \forall n \geq N\}$
- Lim $\sup(A_n) = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset, \text{ para una infinidad de } n\text{'s}\}$.

Sea X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X entonces el lím inf $A_n \subset$ lím sup A_n,lim inf A_n y el lim sup A_n son conjuntos cerrados, y lim sup $A_n \neq \emptyset$ para toda sucesion $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Todo esto y un poco más es para probar que el hiperespacio 2^X con la métrica de Hausdorff es conexo y compacto, esto es 2^X es un continuo.

Y por último, como capítulo 4 estudiaremos continuos descomponibles e indescomponibles. Será necesario presentar algunos conceptos y propiedades básicas para la construcción de dos continuos indescomponibles, y caracterizar a éstos.

Un continuo X es descomponible si $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de X, en caso contrario diremos que es indescomponible.

Un continuo importantísimo no tan sólo por ser indescomponible es el así llamado **arcoiris de Knaster** que construiremos en este capítulo.

Dos conceptos que nos serán muy importantes para la construcción de continuos indescomponibles son Composantes y Continuo Irreducible.

Si X es un continuo y $p \in X$, la composante de p es el conjunto de todos los puntos x de X tales que existe algún subcontinuo propio de X que contiene a p y x.

Si X es un continuo y $\{p, q\} \subset X$, decimos que X es irreducible con respecto a p y q si no existe ningún subcontinuo propio de X que contiene a tales puntos.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo abordaremos algunas nociones y hechos básicos de topología general y espacios métricos, los cuales serán necerarios para comprender los siguientes capítulos, la intención de hacerlo así, es hacer de esta tesis un trabajo autosuficiente.

Este capítulo consta de 5 secciones, en las cuales estudiaremos definición y propiedades de espacios métricos, bolas abiertas y vecindades, conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, conexidad, espacios localmente conexos, compacidad y por ultimo compacidad sucesional.

1.1. Espacios métricos

Definición 1.1 *Un espacio métrico es una pareja (X, d), donde X es un conjunto no vacío y d una función que está definida como $d : X \times X \to \mathbb{R}$, llamada distancia o métrica y satisface los siguientes axiomas:*

a) $d(x,y) \geq 0, \quad \forall\ x,\ y \in X$

b) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y, \ \forall\ x,\ y \in X.$

c) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall\ x,\ y \in X$

d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \qquad \forall\ x,\ y,\ z \in X.$

Veamos los ejemplos más usuales de espacios métricos, con el primero podemos checar que a todo conjunto se le puede definir al menos una métrica.

Ejemplo 1.1 *Sea* $X \neq \emptyset$, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x=y \\ 1 \text{ si } x \neq y \end{cases}$$

d es llamada métrica discreta, llamada así por que separa igualmente cada par de puntos, y (X,d) es un espacio métrico discreto.

Ejemplo 1.2 *La métrica Usual en* $\mathbb{R}$ *, donde* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* d *es la funcion definida por* $d(x,y) = |x-y|$ *para cada* $x, y \in \mathbb{R}$ *.*

El conjunto de números complejos $\mathbb{C}$ con la función distancia $d(z,w) = |z-w|$ tambien es un espacio métrico.

Ejemplo 1.3 *El espacio Euclidiano n-dimensional* $\mathbb{R}^n$ *es el conjunto de n-adas* $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ *, donde* $x_i \in \mathbb{R}$ *para* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*. Sea* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ *, entonces, d es una métrica en* $\mathbb{R}^n$.

En $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Ejemplo 1.4 *En* $\mathbb{R}^n$*. Sean* $\overline{x} = (x_1, \ldots x_n)$, $\overline{y} = (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Entonces:

a) $d_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que* $d_0(\overline{x}, \overline{y}) = \text{máx} |x_i - y_i|$ *, es una métrica en* $\mathbb{R}^n$.

b) $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que* $d_1(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$*, entonces* d_1 *es una métrica en* $\mathbb{R}^n$.

c) *Para* $p > 1$, $d_p(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ *, es una métrica para* $\mathbb{R}^n$*, (que es el caso del ejemplo 1.3, si p=2)*

Bolas abiertas y vecindades

Definición 1.2 *Sea* (X,d) *un espacio métrico,* $x \in X$ *y* ε *un número real positivo. El conjunto* $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ *es llamado la bola abierta de radio* ε *y con centro en* x.

Definición 1.3 *Sea (X, d) un espacio métrico, denotaremos bola cerrada de centro x y de radio ε al siguiente conjunto:*

$$B_\varepsilon^\wedge(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

Definición 1.4 *Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos la esfera de centro x y de radio ε al siguiente conjunto:*

$$S_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) = \varepsilon\}.$$

Definición 1.5 *Sea (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. Un subconjunto $A \subset X$ es llamado* ***vecindad o entorno*** *de x si hay un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$.*

Lema 1.1 *Sea (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. Para cada $\varepsilon > 0$, la bola abierta $B_\varepsilon(x)$ es vecindad de cada uno de sus puntos.*

Demostración.

Sea $y \in B_\varepsilon(x)$. Vamos a probar que $B_\varepsilon(x)$ es vecindad de y, para esto debemos probar que existe una $\eta > 0$ tal que $B_\eta(y) \subset B\varepsilon(x)$. Como

$$y \in B_\varepsilon(x), d(x, y) < \varepsilon.$$

Elegimos $\eta < \varepsilon - d(x, y)$. Si $x_0 \in B_\eta(y)$ entonces

$$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0) < d(x, y) + \eta < d(x, y) + \varepsilon - d(x, y) = \varepsilon.$$

Por lo tanto $x_0 \in B_\varepsilon(x)$. así $B_\eta(y) \subset B_\varepsilon(x)$ y $B_\varepsilon(x)$ es vecindad de y. ■

En general para espacios topológicos todo conjunto abierto tiene esta propiedad (Teorema 1.5).

Conjuntos abiertos

Definición 1.6 *Un subconjunto A de un espacio métrico X, decimos que A es un conjunto abierto si para cada $a \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $x \in X$ y $d(x, a) < \varepsilon$, entonces $x \in A$. En otras palabras A es un conjunto abierto si es vecindad de cada uno de sus puntos.*

Teorema 1.2 *Sea A un subconjunto de un espacio métrico (X, d). A es un conjunto abierto si y sólo si es unión de bolas abiertas.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que A es abierto. Entonces para cada $a \in A$ existe una $B_{\delta_a}(a) \subset A$, por lo tanto $A = \bigcup_{a \in O} B_{\delta_a}(a)$ es unión de bolas abiertas.

$\Leftarrow$) Si A es unión de bolas abiertas, entonces $A = \bigcup_{a \in I} B_{\delta_a}(a)$,

si $x \in A$, entonces $x \in B_{\delta_a}(a)$ para alguna $a \in I$.

$B_{\delta_a}(a)$ es vecindad de x y como $B_{\delta_a}(a) \subset A$, A es vecindad de x. Así A es vecindad de cada uno de sus puntos y por definición A es abierto. ∎

Teorema 1.3 *Sea (X, d) un espacio métrico.*

a) El vacío es un conjunto abierto

b) X es un conjunto abierto.

c) Si $A_1, A_{2,...,}A_n$ son abiertos, entonces $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ es abierto.

d) Si para cada $\alpha \in I$, A_α es un conjunto abierto, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es abierto.

Ejemplos:

1. Las bolas de $\mathbb{R}$ son los intervalos abiertos de la forma

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : x - \varepsilon < y < x + \varepsilon\}.$$

Cualquier intervalo abierto es una bola cuyo centro está en el punto medio del intervalo y el radio es la mitad de la longitud del mismo.

2. Las bolas de $\mathbb{R}^2$ son círculos (sin la circunferencia) y las de $\mathbb{R}^3$ son esferas.

3. El conjunto $(a, b) \times (c, d)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $(a, b) \times (c, d) \times (e, f)$ es abierto en $\mathbb{R}^3$

4. Un eje de coordenadas en $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ no es un conjunto abierto.

5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$ es un conjunto abierto

Conjuntos cerrados

En esta sección trataremos a los subconjuntos de un espacio métrico a los que llamaremos cerrados.

Definición 1.7 *Sea (X, d) un espacio métrico. $A \subseteq X$ es cerrado si y sólo si su complemento es abierto.*

El siguiente teorema nos proporciona ejemplos de conjuntos cerrados y nos permite construir otros.

Teorema 1.4 *sea (X, d) un espacio métrico.*

1. *X es cerrado*
2. *$\emptyset$ es cerrado*
3. *La unión finita de una colección de conjuntos cerrados es cerrada.*
4. *La intersección de una familia de conjuntos cerrados es cerrada.*

Demostración. 1 y 2 es consecuencias de las propiedades de conjuntos abiertos y cerrados.

3 y 4 se prueban utilizando las leyes de De'Morgan. ■

Ejemplo 1.5 *Los conjuntos finitos en la recta real son cerrados.*

Ejemplo 1.6 *El conjunto total siempre es cerrado y abierto en el conjunto total, por ejemplo el intervalo $[0, 1]$ es cerrado y abierto en el intervalo $[0, 1]$ con la métrica usual de $\mathbb{R}$ relativa al $[0, 1]$ y así tambien lo es el vacío.*

Ejemplo 1.7 *La unión arbitraria de cerrados no necesariamente es cerrada. Por ejemplo si unimos los puntos de la forma $\frac{1}{n}$, es decir el conjunto $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{n}\right\}$ no es cerrado a pesar de ser una unión de cerrados.*

Teorema 1.5 *Sea (X, d) un espacio métrico. Si A,B son cerrados disjuntos en X, entonces existen U, V abiertos tal que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.*

1.2. Espacios topológicos

Definición 1.8 *Una familia τ de subconjuntos de X es llamada una topología en X , si satisface las siguientes propiedades:*

- *$\emptyset, X \in \tau$*
- *Si $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$, entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \tau$*

- *Si* $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$, *entonces* $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$.

Definición 1.9 *A la pareja* (X,τ) , *donde* X *es un conjunto y* τ *es una topología en* X*, la llamamos espacio topológico. A los elementos de* X *los llamamos puntos. A los elementos de* τ *los llamamos subconjuntos abiertos del espacio topológico* (X,τ).

Ejemplo 1.8 *Sea* $X = \{a,b,c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}\}$ *es una topología en* X.

Ejemplo 1.9 *Sea* X *un conjunto cualquiera y sea* τ *la familia de todos los subconjuntos de* X*, i.e.* $\tau = \mathcal{P}(X)$. *Entonces* τ *es una topología en* X*, llamada la* ***topología discreta****. Sea* X *un conjunto cualquiera y sea* $\tau = \{\emptyset, X\}$. *Entonces* τ *es una topología en* X*, llamada la* ***topología indiscreta****.*

Ejemplo 1.10 *Sea* $X = \mathbb{N}$ *y sea* $\tau_n = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{n, n+1\}, \{n, n+1, n+2\}, ...\}$. *Entonces* τ_n *es una topología en* X*, para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.11 *Sea* X *un conjunto cualquiera y sea* $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : X \setminus A$ *es finito* $\}$, *entonces* τ *es una topología en* X*, llamada la* ***topología complemento finito o cofinita****.*

Hemos definido Vecindad, Conjuntos Abiertos y conjuntos Cerrados en un espacio métrico, ahora es importante definirlos en un espacio topológico.

Definición 1.10 *Sea* A *un conjunto en un espacio topológico* (X,τ). *Decimos que* A *es* ***vecindad*** *de un punto* $x \in X \Leftrightarrow \exists\, U \in \tau \ni x \in U \subseteq A$. *Denotaremos* $\varepsilon(x)$ *a la familia de vecindades de* x*, i.e.* $\varepsilon(x) = \{A \subseteq X : A$ *es vecindad de* $X\}$.

Teorema 1.6 *Un conjunto* A *es abierto en* $(X,\tau) \Leftrightarrow$ *es vecindad de cada unos de sus puntos; esto es,* $\forall\, x \in A$*, se tiene que* $A \in \varepsilon(x)$.

Definición 1.11 *Sea* (X,τ) *un espacio topológico y* $A \subseteq X$. *Decimos que* A *es un conjunto cerrado en* $X \Leftrightarrow X \setminus A$ *es un conjunto abierto en* X.

Teorema 1.7 *Sea* (X,τ) *un espacio topológico. Una caracterización para los conjuntos cerrados en* X *es:*

1) $A \subseteq X$ es cerrado en $X \Leftrightarrow$ [para toda $x \in X$ y $\forall\, U \in \tau,\ x \in U \ \wedge\ U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A$].

O bien, $A \subseteq X$ es cerrado en $X \Leftrightarrow [\forall x \in X \;\; y \;\; \forall\, U \in \varepsilon(x) \cap \tau,\; U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A]$.
Demostración.

$$A \subseteq X \text{ es cerrado en } X \Leftrightarrow X \setminus A \text{ es abierto en } X$$

$$\Leftrightarrow \;\; \forall x \in X \setminus A \text{ se tiene que } X \setminus A \in \varepsilon(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X \setminus A \;\Rightarrow\; \exists\, U \in \tau \ni x \in U \subseteq X \setminus A$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X \setminus A \quad \exists\, U \in \tau \ni x \in U \wedge U \cap A = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \forall x \notin A \text{ se tiene que } \exists\, U \in \tau \ni x \in U \;\wedge\; U \cap A = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X \;\; y \;\; \forall U \in \tau \ni(\, x \in U \;\wedge\; U \cap A \neq \emptyset) \text{ se tiene que } x \in A.$$

Por tanto tenemos

$A \subseteq X$ es cerrado en $X \Leftrightarrow [\,\forall\, x \in X$ y $\forall\, U \in \tau,\; x \in U \;\wedge\; U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A]$

esto es:

$A \subseteq X$ es cerrado en $X \Leftrightarrow \forall\, x \in X \;\; y \;\; \forall\, U \in \varepsilon(x) \cap \tau \ni U \cap A \neq \emptyset$ se tiene que $x \in A$.

Es decir :
$A \subseteq X$ es cerrado en $X \Leftrightarrow [\,\forall x \in X \;\; y \;\; \forall\, U \in \varepsilon(x) \cap \tau, U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A]$.
■

Definición 1.12 *Sea X un espacio topológico. Si A y B son subconjuntos de X, decimos que están mutuamente separados si $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$.*

Observación 1.8 *Dos conjuntos son abiertos o cerrados ajenos están mutuamente separados. Por otra parte, si X es un espacio topológico y $X = x_1 \cup x_2$ (x_1 y x_2 mutuamente separados) es claro que $X = \overline{x_1} \cup x_2$ y por lo tanto $x_2 = X - \overline{x_1}$.*

Es decir, x_2 y analogamente x_1 son abiertos. Además $x_1 = X - x_2$ y por tanto tambien son cerrados.

Corolario 1.9 *Si $X = x_1 \cup x_2$, x_1 y x_2 mutuamente separados. Entonces cada uno de los conjuntos x_1 y x_2 es abierto y cerrado en X.*

Por lo tanto, el subespacio $A \subset X$ es abierto o cerrado y $A = A_1 \cup A_2$ (mutuamente separados), el argumento anterior implica que A_1 y A_2 son abiertos o cerrados en X.

Puntos de acumulación

Definición 1.13 *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X y sea $x \in X$. Decimos que x es un* **punto de acumulación** *de A, o punto límite de A, si, y sólo si para todo $U \in \varepsilon(x)$ se cumple que $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$.*

Definición 1.14 *Al* **conjunto de puntos de acumulación** *de A lo llamamos el conjunto derivado de A y lo denotamos con A'. Esto es,*
$A' = \{x \in X : x$ es punto de acumulación de $A\}$.

Teorema 1.10 *Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$. Entonces, para todo $U \in \varepsilon(x)$, se tiene $U \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A'$.*

Demostración. $\Rightarrow$) sea $A \subseteq X$, $x \in X$ y supongamos que $U \cap A \neq \emptyset \quad \forall\, U \in \varepsilon(x)$.
Si $x \in A$ ya terminamos.
Supongamos que $x \notin A$, entonces

$$U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset \; \forall U \in \varepsilon(x).$$

Asi,

$$U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset \; \forall U \in \varepsilon(x).$$

$\Rightarrow x \in A'$. Por lo tanto $x \in A \vee x \in A'$.

$\Leftarrow$) Sea $x \in X$ y supongamos que $x \in A \vee x \in A'$. Probemos que $\forall\, U \in \varepsilon(x)$, se tiene $U \cap A \neq \emptyset$. Para $x \in A'$, tenemos que

$$U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset \; \forall U \in \varepsilon(x).$$

Se sigue que,

$$U \cap A \neq \emptyset \; \forall U \in \varepsilon(x).$$

Para $x \in A$, es evidente que $x \in U \cap A \quad \forall\, U \in \varepsilon(x)$, pues $x \in U$ con $x \in A$. Por tanto, tambien en este caso se cumple que

$$U \cap A \neq \emptyset \; \forall U \in \varepsilon(x).$$

Por lo tanto $\forall\, U \in \varepsilon(x)$, se tiene $U \cap A \neq \emptyset$. ■

Lema 1.11 *Sea A un subconjunto del espacio topológico (X,τ). Entonces A es cerrado $\Leftrightarrow A' \subseteq A$.*

Teorema 1.12 *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Entonces, $A \cup A'$ es un conjunto cerrado.*

Definición 1.15 *Sea (X,τ) un espacio topológico. Una colección $\mathcal{B}$ de conjuntos abiertos de X es una **base** en X para la topología $\tau \Leftrightarrow \forall\ A \in \tau \ni A \neq \emptyset$ se tiene que A es unión de elementos que pertenecen a $\mathcal{B}$.*

Definición 1.16 *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\mathcal{P} \subseteq \tau$. Decimos que $\mathcal{P}$ es una **subbase** para $\tau \Leftrightarrow$ la familia de intersecciones de subcolecciones finitas de $\mathcal{P}$ unida con $\{X\}$ es una base para τ.*

De modo que si (X,τ) es un espacio topológico y $\mathcal{P}$ es una subbase para τ. entonces

$$A \in \tau \Leftrightarrow \bigcup_{j\in J}\left(\bigcap_{i=1}^{n_j} S_i\right) \quad con\ S_i \in \mathcal{P}.$$

Definición 1.17 *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea Y un subconjunto de X. Entonces, la topología en Y, definida por $\tau_Y = \{Y \cap A : A \in \tau\}$, es llamada **topología relativa** por la topología $\tau \in X$. Al espacio topológico (Y,τ_Y) se le llama subespacio topológico de (X,τ). si $A \in \tau_Y$, entonces A es llamado conjunto abierto en Y y $Y \setminus A$ es llamado conjunto cerrado en Y.*

1.3. Cerradura, Interior y Frontera.

En este capítulo abordaremos los conceptos y propiedades más básicas de cerradura, interior y frontera en un espacio topólogico.

Definición 1.18 *Sea (X,τ) un espacio topológico. Definimos la **cerradura o adeherencia** de $A \subseteq X$ como la intersección de todos los miembros de la familia de conjuntos cerrados en X que contienen a A; y lo denotamos $\overline{A}$, esto es, $\overline{A} = \cap\{B \subseteq X : B$ es cerrado en X y $A \subseteq B\}$.*

Observación 1.13 *En seguida se observa que:*

a) $A \subseteq \overline{A}$ y $A' \subseteq \overline{A}$.

b) Si F es un conjunto cerrado que contiene a A, entonces $A \subseteq \overline{A} \subseteq F$. Es decir, $\overline{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A.

c) Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

d) A es cerrado $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

Teorema 1.14 *Para todo conjunto A en un espacio topológico (X, τ) se cumple $\left(\overline{A}\right)' = A'$.*

Demostración. Sabemos que $A \subseteq \overline{A}$, y como al tomar derivados se preserva el sentido de la inclusión:

$$A' \subset \left(\overline{A}\right)' \tag{1}$$

Podemos suponer que $\left(\overline{A}\right)' \neq \emptyset$, ya que de lo contrario, la tesis seria cierta trivialmente.

Tomemos entonces un $x \in \left(\overline{A}\right)'$ cualquiera y veamos que $x \in A'$. En efecto, sea S un entorno de x. S contiene infinitos puntos de $\overline{A}$, es decir, infinitos puntos de $A \cup A'$, y por cada

$$y \in S \cap A',$$

S es tambien entorno de y, pero $y \in A'$, de manera que S contiene infinitos puntos de A'. En resumen, S contiene infinitos puntos de A en todo caso, lo cual implica que $x \in A'$. Hemos demostrado que

$$\left(\overline{A}\right)' \subset A',$$

que tomando junto con (1) demuestra el teorema. ■

Teorema 1.15 *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un subcojunto de X. Entonces, $\overline{A} = A \cup A'$.*

Demostración. Probamos en el teorema 1.12 que $A \cup A'$ es un conjunto cerrado y, claramente, contiene a A. Por tanto,

$$\overline{A} \subseteq A \cup A'.$$

Enseguida mostraremos que tambien se cumple la contención contraria, esto es, $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Observese que

$$A \subseteq \overline{A} \Rightarrow A' \subseteq \left(\overline{A}\right)'.$$

Pero, como $\overline{A}$ es cerrado, por definición, tenemos que $\overline{A}$ contiene al conjunto de sus puntos límite, i.e $\left(\overline{A}\right)' \subseteq \overline{A}$. Por lo tanto,

$$A' \subseteq \left(\overline{A}\right)' \subseteq \overline{A}.$$

Esto muestra que

$$A' \subseteq \overline{A}.$$

Como además

$$A \subseteq \overline{A},$$

Se sigue que

$$A \cup A' \subseteq \overline{A}$$

y, con ello, la igualdad deseada,

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

■

Teorema 1.16 *Sean (X, d) un espacio métrico y $Y \subset X$. Si $Y = A \cup B$, donde A y B son cerrados ajenos relativos a Y entonces $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$.*

Demostración. Como A es cerrado relativo a Y , tenemos que $A = Y \cap \overline{A}$. De donde

$$\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap (Y \cap B) = \left(\overline{A} \cap Y\right) \cap B = A \cap B = \emptyset.$$

Análogamente $A \cap \overline{B} = \emptyset$. ■

Observación 1.17 *Sean A y B conjuntos cualesquiera en un espacio métrico, entonces*

i) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$,
ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Definición 1.19 *Sea X un espacio topológico. Decimos que $x \in A$ es un* ***punto de adeherencia*** *de $A \subseteq X \Leftrightarrow x \in \overline{A}$. O equivalentemente, $\forall U \in \varepsilon(x)$, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$.*

Definición 1.20 *Sea X un espacio topológico. Decimos que $x \in A$ es un* ***punto aislado*** *de $A \subseteq X \Leftrightarrow \exists\ U \in \varepsilon(x)$ tal que $U \cap (A - \{x\}) = \emptyset$.*

Definición 1.21 *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un subconjunto de X. Se dice que $x \in A$ es un punto* ***interior*** *de $A \Leftrightarrow A \in \varepsilon(x)$. Al conjunto de puntos interiores de A lo llamamos interior del conjunto A y lo denotamos $\mathring{A}$. Esto es, $\mathring{A} = \{x \in A : x$ es punto interior de $A\}$*

En consecuencia de la definición tenemos que $\mathring{A} \subset A$. $\mathring{A}$ puede ser vacío sin que lo sea A.

Lema 1.18 *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un subconjunto de X. Entonces, $\mathring{A}$ es un conjunto abierto. Además $\mathring{A}$ es el máximo abierto contenido en A, esto es:*

$$\mathring{A} = \cup\{B \subseteq A : B \text{ abierto en } X\}$$

Teorema 1.19 *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un subconjunto de X. Entonces, A es abierto en $X \Leftrightarrow \mathring{A} = A$.*

Observación 1.20 *Para todo conjunto A de un espacio topológico (X, τ) se verifica:*

$$\overline{X - A} = X - \mathring{A}.$$

Definición 1.22 *Sea A un subconjunto de un espacio topológico (X, τ). Definimos la* ***frontera*** *de A como el conjunto $F_r(A) = \overline{A} \cap \left(\overline{X - A}\right)$.*

Observación 1.21 *La frontera es un conjunto cerrado, pues es intersección de conjuntos cerrados.*

Lema 1.22 *Sea A un subconjunto de un espacio topológico (X, τ). Entonces,*

$$F_r(A) = \left(X - \mathring{A}\right) \cap (X - (X - A)^{\circ}).$$

Demostración.

$$F_r(A) = \overline{A} \cap \left(\overline{X - A}\right) = \overline{(X - (X - A))} \cap \left(\overline{X - A}\right) = (X - (X - A)^{\circ}) \cap \left(X - \mathring{A}\right)$$

■

Teorema 1.23 *Sea A un subconjunto de un espacio topológico (X, τ). Entonces,*

1) $F_r(A) = \overline{A} - \mathring{A}$.

2) $\overline{A} = A \cup F_r(A)$

3) A es cerrado$\Leftrightarrow F_r(A) \subset A$

4) A abierto$\Leftrightarrow A \cap F_r(A) = \emptyset$.

La frontera de un conjunto no vacío puede muy bien resultar vacía. Por ejemplo, sea (X, τ) el espacio topológico discreto. Aquí todo subconjunto de X es abierto y cerrado y, por tanto, igual a su interior y a su cerradura. De ahí que, $\forall\ A \subseteq X$, se tiene que

$$\begin{aligned} F_r(A) &= \left(X - \mathring{A}\right) \cap (X - (X - A)^{\circ}) \\ F_r(A) &= (X - A) \cap (X - (X - A)) \\ F_r(A) &= (X - A) \cap A = \emptyset. \end{aligned}$$

1.4. Continuidad y Homeomorfismos

Definición 1.23 *Una función $f : X \to Y$, donde el dominio X y el rango Y son espacios topológicos, es* ***continua*** *en un punto $x_0 \in X \Leftrightarrow$ para toda $A \in \tau_Y$ con $f(x_0) \in A$ $\exists\ B \in \tau_X$ con $x_0 \in B$ tal que $f(B) \subseteq A$.*

Observación 1.24 *De la definición de base de una topología, resulta que nuestra definición de continuidad no se altera si cambiamos en ella la expresión conjunto abierto por elemento básico.*

En el caso de que X y Y sean espacios métricos, de lo anterior resulta entonces que $f : X \to Y$ es continua en el punto $x_0 \in X \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni$

$$f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Definición 1.24 *Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es continua en X si y sólo si, es continua en cada punto de X.*

Teorema 1.25 *Sea $f : X \to Y$ una función de un espacio topológico X en un espacio topológico Y. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i) f es continua

ii) Para cualquier abierto U de Y, $f^{-1}(U)$ es abierto en X

iii) Para cualquier cerrado F de Y, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

iv) Para todo $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

v) Para todo $B \subseteq Y$, $f^{-1}(\overline{B}) \supseteq \overline{f^{-1}(B)}$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$

Sea U un abierto en Y. Tomemos $x \in f^{-1}(U)$. Por hipótesis, f es continua en X. En particular, f es continua en x. Por definición de continuidad en un punto, existe un abierto V_x que contiene a x tal que $f(V_x) \subseteq U$.

Así,

$$V_x \subseteq f^{-1}(U)$$

y entonces, resulta que

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V_x$$

y, por tanto, $f^{-1}(U)$ es abierto, pues es unión de conjuntos abiertos.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Sea F un conjunto cerrado en Y. Entonces, $Y \setminus F$ es abierto en Y y, por tanto, $f^{-1}(Y \setminus F)$ es abierto en X. Pero,

$$f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F).$$

Así, $X \setminus f^{-1}(F)$ es abierto en X. Por lo tanto, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

$(iii) \Rightarrow (iv)$

Sea $A \subseteq X$. Observemos que $\overline{f(A)}$ es un conjunto cerrado en Y. Por hipótesis, se sigue que $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ es un conjunto cerrado en X. Además claramente, $A \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$, ya que $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$. Pero, $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A; por tanto, $\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$. Y esto implica que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

$(iv) \Rightarrow (v)$

Sea $B \subseteq Y$ y pongamos $A = f^{-1}(B)$. Por hipótesis tenemos que

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f^{-1}\left(\overline{f(B)}\right)} \subseteq \overline{B}$$
$$\Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{B}$$
$$\Rightarrow \overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{B}).$$

$(v) \Rightarrow (i)$:

Sea $x \in X$ cualquiera y sea N un abierto en Y tal que $f(x) \in N$. Entonces, $Y \diagdown N = B$ es cerrado en Y y, por hipótesis, tenemos

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}).$$

Pero, ya que B es cerrado en Y, $(\overline{B} = B)$, esto es lo mismo que

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B).$$

Por tanto, $f^{-1}(B)$ es cerrado en X, de donde $M = X \diagdown f^{-1}(B)$ es abierto en X y contiene a x. Además, $f(M) \subseteq N$. Por lo tanto f es continua en x y como x fue arbitrario, se concluye que f es continua. ■

Definición 1.25 *Sean (X, τ_x) y (Y, τ_Y) espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es llamada un* ***homeomorfismo*** *$\Leftrightarrow$ f es biyectiva y continua y, además, f^{-1} tambien es continua. En tal caso que X y Y son espacios homeomorfos y esto lo denotamos por $X \cong Y$. Esto lo podemos escribir también así:*

$$X \text{ es homeomorfo a } Y \Leftrightarrow \exists f : X \to Y \text{ y } g : Y \to X \text{ continuas,}$$

una inversa de la otra (i.e. $f \circ g = 1_Y$ y $g \circ f = 1_X$).

Ejemplo 1.12 *Tomemos $\mathbb{R}$ con la topología usual. Entonces $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definida como*

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

es continua, biyectiva y su inversa, dada por

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 + |y|}$$

tambien es continua. Así f es un homeomorfismo.

En general, $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a la bola unitaria mediante el homeomorfismo

$$x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}, \text{ donde } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ y } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

1.5. Conexidad.

A continuación, este capítulo está dedicado al concepto de conexidad, el cual definiremos en un espacio métrico con el fin de dar una mejor comprensión en el desarrollo de la teoría de continuos. Se tratará de ver las propiedades más indispensables para temas posteriores.

Definición 1.26 *Sea X un espacio métrico. Diremos que es* ***conexo*** *si, y sólo si, no existe ningún par de conjuntos abiertos no vacíos A y B en X tal que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Si X no es conexo entonces X es disconexo.*

Diremos que un subconjunto $E \subseteq X$ es conexo si (E, d) es un espacio métrico conexo, es decir, no existe ningún par de conjuntos abiertos no vacíos A y B en E tal que $E = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.

A partir de la definición podemos observar que un espacio X es conexo si y sólo si los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez en (X, d) son el conjunto vacío $\emptyset$ y X. Así mismo, la definición de conexidad es equivalente a pedir que los conjuntos A, B sean cerrados en X en vez de abiertos. De la definición los conjuntos A y B pueden ser conjuntos cerrados en X.

Podemos ver que tambien es equivalente a la definición decir que un espacio X es conexo si, y sólo si, $\nexists$ A,$B \subseteq X$ tales que $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = \emptyset$, $X = A \cup B$.

Ejemplo 1.13 *Sea $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual y $Y = [0,1] \cup [2,3]$. Y es disconexo.*

En efecto,

$$[0,1] = Y \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \quad y \quad [2,3] = Y \cap \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right),$$

tanto $[0,1]$ como $[2,3]$ son abiertos relativos de Y, además $[0,1] \cap [2,3] = \emptyset$. Por lo tanto Y es disconexo.

Teorema 1.26 *Si A y B son conjuntos en (X, d) tales que A es conexo y $A \subset B \subset \overline{A}$. Entonces B es conexo.*

Demostración. Supongamos que B es disconexo, entonces $B = S \cup T$, donde S y T son conjuntos abiertos relativos ajenos a B. Como $A \subset B$, tenemos que , $A \subset S$ ó $A \subset T$, digamos que $A \subset S$ por teorema 1.15, $\overline{S} \cap T = \emptyset$, como $A \subset S$, $\overline{A} \subset \overline{S}$ (ver observacion 1.16) , de donde $B \cap T = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto B es conexo. ■

Corolario 1.27 *Si A es un conjunto conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.*

Demostración. $A \subset \overline{A} \subset \overline{A}$ y aplicando el teorema anterior obtenemos lo deseado. ■

Definición 1.27 *Sean (X, d) un espacio métrico y $x, y \in X$. Una trayectoria de x a y es una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Si todo par de puntos de X pueden ser unidos por una trayectoria, entonces X es conexo por trayectorias o arco-conexo.*

Corolario 1.28 *Sea X un espacio de Hausdorff, conexo por arcos, si y sólo si es conexo por trayectorias.*

Recordemos que X es conexo por arcos si para cada $p, q \in X$, $p \neq q$, existe $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = 1$ y $\alpha(1) = q$. Observemos que si X es conexo por arcos, entonces X es conexo por trayectorias, pero el reciproco es falso, por ejemplo si tomamos $X = [0,1) \cup \{y, z\}$ con la topología relativa de $\mathbb{R}$. y, $z \notin [0,1)$, luego X es conexo por trayectorias pero los punto y y z no pueden ser conectados por ningún arco en X. Por tanto X no es conexo por arcos.

Teorema 1.29 *Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y A es arco-conexo. entonces A es conexo.*

Demostración.

Supongamos que A no es conexo.

Entonces, existen $S, T \subseteq A$ ambos abiertos en A, ajenos y no vacíos, tales que $A = S \cup T$.

Sean $s \in S$, $t \in T$. Como A es arco-conexo existe una curva $f : [0,1] \to A \ni f(0) = s$ y $f(1) = t$.

Sea $C = f([0,1]) \subseteq A$.

Observemos que C es conexo, pues $C = C \cap A = (C \cap S) \cup (C \cap T)$, y

$$s = f(0) \in C \cap S, \quad f(1) \in C \cap T.$$

Sabemos que $S = S_1 \cap A$, S_1 abierto de X, y que $T = T_1 \cap A$, T_1 abierto de X. $\Rightarrow$

$$C \cap A = C \cap S_1 \cap A = C \cap S_1 \text{ abierto de } C.$$

Análogamente $C \cap T$ abierto de C.

Por lo tanto C no es conexo, lo cual es imposible. ■

Ejemplo 1.14 *El continuo* $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ *es la cerradura de* F *donde* $F = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$. *Por el corolario anterior* $\overline{F}$ *es conexo. Entonces el continuo* $sen\frac{1}{x} = F \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$. *Ver figura 1.*

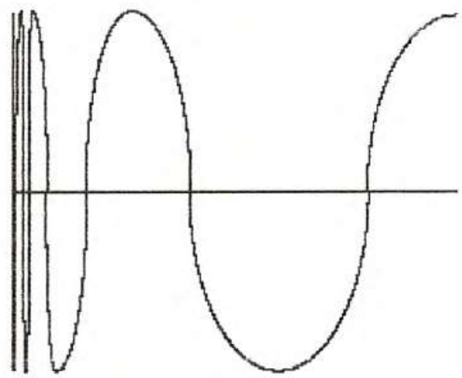


figura 1.

Teorema 1.30 *Sea* Y *una familia de conjuntos conexos en el espacio métrico* (X, d). *Si existe un* $A_0 \in Y$ *tal que* $\forall\ A \in Y,\ A \cap A_0 \neq \emptyset$, *entonces* $B = \bigcup_{A \in Y} A$ *es conexo.*

Demostración. Supongamos que B no es conexo.

Sean S y T conjuntos abiertos en (X, d) tales que

$$B = (S \cap B) \cup (T \cap B) \quad \text{y} \quad (S \cap B) \cap (T \cap B) = \emptyset.$$

Tomemos un $A \in Y$ cualquiera. Como $A \subset B$ tenemos:

$$A = (S \cap A) \cup (T \cap A) \quad \text{y} \quad (S \cap A) \cap (T \cap A) = \emptyset;$$

pero A es conexo y, por lo tanto, no admite disconexión, o sea que

$$T \cap A = \emptyset$$

(o bien $S \cap A = \emptyset$ y las consecuencias serían análogas), de donde

$$A = S \cap A \ (\text{ó } A = T \cap A)$$

es decir,

$$A \subset S \ (\text{ó } A \subset T\ ).$$

En particular, supongamos que

$$A_0 \subset S.$$

Si para algún

$$A \in Y \quad \text{tal que} \quad A \subset T,$$

entonces

$$A \cap A_0 \subset \ (S \cap B) \cap (T \cap B) = \emptyset,$$

lo cual contradice la hipótesis. De manera que

$$\forall A \in Y \quad \text{tal que} \quad A \subset S$$

lo cual implica $B \subset S$, es decir $B = B \cap S$, de donde $T \cap B = \emptyset$ y B es conexo por no admitir disconexión. ■

Corolario 1.31 *Si Y es una familia de conjuntos conexos de (X, d) tal que*

$$\bigcap_{A \in Y} A \neq \emptyset,$$

entonces $\bigcup_{A \in Y} A$ es conexo.

Teorema 1.32 *Si f es una función continua del espacio métrico conexo X sobre el espacio métrico Y, entonces Y es conexo.*

Demostración. Si Y no fuese conexo, entonces habría conjuntos abiertos no vacíos A y B en Y tales que $Y = A \cup B$, y $A \cap B = \emptyset$. Entonces,

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

y

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Además, como f es continua y sobre, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son abiertos en X y no vacíos. Por lo tanto X es disconexo. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto Y es conexo. ■

Proposición 1.33 *Un conjunto no vacío A en $\mathbb{R}$ es conexo si, y sólo si, es un intervalo.*

Demostración. Supongase primero que A no es un intervalo. Entonces, para algunos puntos a y b en A con $a < b$, existe un $x \in (a, b)$ tal que $x \notin A$. Entonces, los conjuntos $X = A \cap (-\infty, x)$ y $Y = A \cap (x, \infty)$ son conjuntos abiertos no vacíos en el subespacio A, tales que $A = X \cup Y$ y $X \cap Y = \emptyset$. Por tanto, si A no es un intervalo, entonces no puede ser conexo.

A continuación, supongase que A no es conexo. Entonces, existen conjuntos abiertos no vacíos X y Y en el subespacio A tales que

$$A = X \cup Y \ y \ X \cap Y = \emptyset.$$

Tomemos $a \in X$ y $b \in Y$. Podemos suponer que $a < b$. Demostraremos $(a, b) \not\subseteq A$ y que, por tanto, A no es un intervalo. Supóngase que $(a, b) \subset A$ y, por consiguiente, que $[a, b] \subset A$. Sea $c = sup(X \cap [a, b])$. Entonces, $c \in [a, b] \subset A$, y como X es cerrado en el subespacio A, $c \in X$. Aprovechando que $b \in Y$, podemos afirmar que $c \in X \cap [a, b)$. Como X es abierto en el subespacio A, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$c + \varepsilon \in X \cap [a, b),$$

lo cual contradice el hecho de que $c = sup(X \cap [a, b])$. ∎

Como una aplicación del teorema anterior:

Proposición 1.34 *(Teorema del valor intermedio.) Sea f una función continua de un espacio métrico (X, τ) en $\mathbb{R}$. Si a y b pertenecen a un conjunto conexo A en X y si $f(a) < f(b)$, entonces, para cualquier $t \in (f(a), f(b))$, existe un punto $c \in A$ tal que $f(c) = t$.*

Demostración. Como $f(A)$ es un conjunto conexo en $\mathbb{R}$, es un intervalo. Luego si $f(a)$ y $f(b)$ pertenecen a $f(A)$, entonces $(f(a), f(b)) \subset f(A)$. ∎

Definición 1.28 *Diremos que un conjunto A es un arco si es un espacio homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.*

Teorema 1.35 *Si A es un arco en un espacio métrico, entonces A es conexo.*

Demostración. Como A es la imagen continua de un conjunto conexo en $\mathbb{R}$, - tambien conexo. ∎

Espacios localmente conexos

Definición 1.29 *Decimos que un espacio métrico (X, d) es* ***localmente conexo*** *si para todo punto $x \in A$ y todo entorno S de x, existe un entorno T de x tal que $T \subset S$ y T es conexo.*

Teorema 1.36 *Si en (X, d) toda bola abierta es un conjunto conexo, entonces (X, d) es un espacio conexo y localmente conexo.*

Demostración. Sea $x \in X$ y S un entorno cualquiera de x. Como S es abierto y $x \in S$, existe un $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset S$; pero $B_r(x)$ es un entorno de x y, por hipótesis, conexo. (X, d) es pues localmente conexo. Para demostrar que X es conexo, tomemos un $x_0 \in X$ cualquiera. Es inmediato que

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(x_0),$$

donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales. Ahora bien, cada una de las $B_n(x_0)$ es conexa y la intersección de todas ellas no es vacía, ya que x_0 está en todas. Concluimos que su unión, o sea X es conexo. ■

Definición 1.30 *Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$ es una **componente** de X si A es conexo y para cualquier subconjunto conexo B de X tal que $A \subset B$ se tiene que $B = A$.*

Teorema 1.37 *Un espacio métrico (X, d) es localmente conexo si y sólo si las componentes de todo conjunto abierto son abiertos.*

Demostración. Supongamos que las componentes de todo conjunto abierto son abiertos. Sea $x \in X$ y S un entorno cualquiera de x. Designemos por T a la componente de S que contiene a x. Entonces T es conexo, $T \subset S$ y T es un entorno de x por ser abierto en virtud de la hipótesis. O sea que (X, d) es localmente conexo.

Recíprocamente, supongamos que (X, d) es localmente conexo y sea A un conjunto abierto. Consideremos una componente C de A y demostremos que es abierto. Tomemos un $x \in C \subseteq A$, de donde $x \in A$ y por ser A abierto, A es entorno de x. Pero existe un entorno S de x tal que $S \subset A$, lo cual implica por ser C una componente, que $A \subset C$.

Ahora bien, C es evidentemente la unión de todos los conjuntos abiertos S correspondientes a cada uno de sus puntos. C es, pues, un conjunto abierto por ser la unión de abiertos. ■

Corolario 1.38 *La recta real es un espacio conexo y localmente conexo.*

Demostración. Una esfera abierta es un intervalo y, en virtud del teorema anterior, un conjunto conexo. Se aplica entonces el Teorema 1.37. ■

1.6. Conjuntos compactos

Definición 1.31 *Sea (X,d) un espacio métrico. Una familia $U = \{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ de subconjuntos de X es una* **cubierta** *de X si $X \subset .\bigcup\limits_{\lambda\in 1} U_\lambda$. Si $U' \subset U$ y U' tambien es una cubierta de X , entonces U' es una subcubierta de X. Si todos los elementos de una cubierta U de X son abiertos de X entonces U es una cubierta abierta de X.*

Definición 1.32 *Un subconjunto A de un espacio métrico es* **compacto** *si toda cubierta por abiertos de A contiene una subcubierta finita. Un espacio métrico X es compacto si, como conjunto, X es compacto.*

Teorema 1.39 *(Heine–Borel). Si Y es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ entonces Y es compacto si y sólo si, Y es cerrado y acotado $\left(\text{esto es,existe } r{>}0 \text{ tal que } Y \subset B_r\overline{(0)}\right)$.*

Proposición 1.40 *Un conjunto compacto en un espacio métrico es cerrado y acotado.*

Demostración.

Sea A un conjunto compacto en el espacio métrico X. Para verificar que A es cerrado, tomemos $x \in X \setminus A$. Para cada $y \in A$ existen vecindades abiertas $N_y(x)$ y $N(y)$ de x y y , respectivamente, con la propiedad de que

$$N(y) \cap N_y(x) = \emptyset.$$

La colección $\{N(y) : y \in A\}$ es una cubierta de A. Como A es compacto, esta cubierta abierta tiene una subcubierta finita

$$\{N(y) : y \in F, \text{ con } F \text{ finito}\}.$$

Entonces, el conjunto $\bigcap\limits_{y\in F} N_y(x)$ es una vecindad abierta de x que no intersecta con A. Luego $X \setminus A$ es abierto y, por ende, A es cerrado. Para ver que A es acotado, consideremos la cubierta abierta de A

$$\{B_1(y) : y \in F, \text{ con } F \text{ finito}\}$$

Por la compacidad también contiene una subcubierta finita que cubre a A. Y por teorema de **Heine-Borel** A es acotado. ■

Proposición 1.41 *Un conjunto cerrado en un espacio métrico compacto es compacto.*

Demostración.

Sea A un conjunto cerrado en el espacio métrico compacto X. Sea $\{U_s : s \in S\}$ una cubierta abierta de A. Si añadimos el conjunto abierto $X \setminus A$ a la coleción $\{U_s : s \in S\}$, obtenemos una cubierta abierta de X. Como X es compacto, esta cubierta abierta contiene una subcubierta finita de$X$. Por tanto, al remover $X \setminus A$ (si está presente) de esta cubierta finita, se produce una subcubierta finita de la cubierta $\{U_s : s \in S\}$ de A. ■

Teorema 1.42 *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos. Si $f : X \to Y$ es una función continua y supráyectiva, y X es compacto, entonces Y es compacto.*

Demostración. Sea $U = \{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ una cubierta abierta de Y. Como f es continua, la familia $\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda \in I}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n \in I$ tales que $X = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_\lambda)$, de donde

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_\lambda)\right) = \bigcup_{k=1}^{n} f\left(f^{-1}(U_\lambda)\right) \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{\lambda_k}.$$

De aquí tenemos que $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n\}$ es una subcubierta finita de Y. ■

Definición 1.33 *Diremos que un espacio X tiene la* ***propiedad de intersección finita****, si para toda familia de cerrados $\{C_i\}_{i \in I}$ tal que cualquier número finito de ellos tiene intersección no vacía, se cumple que $\cap_{i \in I} C_i$ es no vacía.*

Teorema 1.43 *Un espacio X es compacto si, y sólo si, posee la propiedad de intersección finita.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que X es compacto y $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de cerrados tal que cualquier número finito de ellos tienen intersección no vacía. Por contradicción. Si $\cap_{i \in I} C_i = \emptyset$ llegamos a una contradicción. En efecto,

$$X = X - \cap_{i \in I} C_i = \cup_{i \in I} (X - C_i).$$

$\{X - C_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de X, y por lo tanto, existe un subrecubrimiento finito $\{X - C_1, ..., X - C_n\}$. Entonces,

$$X = (X - C_1) \cup ... \cup (X - C_n)$$

y

$$\emptyset = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap ... \cap C_n.$$

Lo cual contradice nuestra hipotesis.

$\Leftarrow$) Supongamos que X tiene la propiedad de intersección finita. Sea $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X. Veamos que si no existiera un subrecubrimiento finito llegaríamos a una contradicción, en efecto, para toda subfamilia finita $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ de $\mathcal{U}$ se tiene

$$X - (U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n) \neq \emptyset.$$

Luego,

$$(X - U_1) \cap (X - U_2) \cap ... \cap (X - U_n) \neq \emptyset,$$

y

$$\cap_{i\in I} (X - U_i) \neq \emptyset,$$

se sigue que $X - \cup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$. ■

Teorema 1.44 *La imagen continua de un espacio compacto es compacta.*

Demostración. Sea X un espacio compacto y definamos f como la función continua de X en un espacio métrico Y. Sea $\{U_s : s \in S\}$ una cubierta abierta de $f(X)$. Entonces,

$$\{f^{-1}(U_s) : s \in S\}$$

es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existe una subcubierta finita

$$\{f^{-1}(U_s) : s \in S' \subseteq S\} \quad \text{de } X.$$

Entonces, $\{U_s : s \in S' \subseteq S\}$ es una subcubierta finita de $f(X)$. Por ende, $f(X)$ es compacto. ■

Definición 1.34 (*Espacio de Hausdorff*). *Para dos puntos diferentes $x, y \in X$ Siempre existen vecindades $V_x \in V(x)$ y $V_y \in V(y)$ que son disjuntas.*

Definición 1.35 (*Espacio regular, espacio normal*). *Un espacio topológico (X, τ) se llama regular, si es de Hausdorff y para cada subconjunto cerrado $A \subset X$ y cada $x \notin A$ existe una vecindad $U_A \in V(A)$ y $V_x \in V(x)$ que cumplen: $U_A \cap V_x = \emptyset$. Y llamaremos normal, si es de Hausdorff y para dos subconjuntos cerrados disjuntos A y B existen siempre vecindades $U_A \in V(A)$ y $V_B \in V(B)$ que son disjuntas.*

Teorema 1.45 *Todo espacio topológico (X,τ) de Hausdorff y compacto. es normal.*

Demostración. Por 1.41. todo subconjunto cerrado de un compacto es compacto. ■

Teorema 1.46 *(de Baire). Sea X un espacio compacto y Hausdorff no vacío. Supongamos que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Entonces $\overset{\circ}{\overline{F_n}} \neq \emptyset$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que $\overset{\circ}{\overline{F_n}} = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Queremos probar que $X \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Para esto, construiremos una sucesión de cerrados no vacíos de X con la propiedad de la intersección finita. Sea G_0 un abierto no vacío de X. Como $\overset{\circ}{\overline{F_1}} = \emptyset$, entonces tenemo $G_0 \diagdown \overline{F_1}$ es abierto y no vacío. Por la regularidad de X, existe un abierto G_1, no vacío tal que $\overline{G_1} \subseteq G_0 \diagdown \overline{F_1}$. De la misma manera, dado G_n construimos un abierto G_{n+1} tal que

$$\overline{G_{n+1}} \subset G_n \diagdown \overline{F_{n+1}} \subset G_n \subset \overline{G_n}.$$

Así que la sucesión de cerrados $\{\overline{G_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de la intesección finita y, por la compacidad de X, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G_n} \neq \emptyset$. De aquí que

$$X \neq X \diagdown \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \diagdown \overline{G_n}) \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{F_n} \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Esto contradice que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ ■

Compacidad secuencial

Definición 1.36 *Un espacio métrico X es* ***secuencialmente compacto*** *si toda sucesión en X posee una subsucesión convergente.*

Teorema 1.47 *Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos compactos tales que $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Si U es un conjunto abierto en A_1 tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_N \subset U$ para cada $n \geq N$.*

Demostración.

Supongamos que tal N no existe, entonces $A_1 \not\subseteq U, A_2 \not\subseteq U$, en general $A_n \not\subseteq U$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego hacemos

$$\mathcal{A} = \{A_n \diagdown U : n \in \mathbb{N}\},$$

que es una colección de cerrados no vacíos tal que cada subcolección finita de $\mathcal{A}$ tiene intersección no vacía, se sigue que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \backslash U \neq \emptyset$ por caracterización de compacidad y además la colección de $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de intersección finita. Sea $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \backslash U$ se tiene que $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ y $p \notin U$. Por lo tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \nsubseteq U$. ■

Teorema 1.48 *Un espacio métrico compacto es secuencialmente compacto.*

Demostración. Sea X un espacio métrico compacto y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Supóngase que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene ninguna subsucesión convergente; es decir, que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ carece de puntos límite. Entonces, para cada $x \in X$, existe una vecindad abierta $N(x)$ que contiene solamente un número finito de términos de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. La colección

$$\{N(x) : x \in X\}$$

es una cubierta abierta de X y por ende, tiene una subcubierta finita. Esto implica que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene sólo un número finito de términos; por tanto, no puede ser verdadera la hipótesis de que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene ninguna subsucesión convergente. ■

Definición 1.37 *Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ es totalemente acotado si para cada $\varepsilon > 0$ existe una colección finita de puntos $\{x_1, x_2, ...x_n\} \subseteq X$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon}(x_i)$.*

Proposición 1.49 *Sea (X, d) un espacio métrico secuencialmente compacto. Entonces X está totalmente acotado.*

Demostración.

Supóngase que X no está totalmente acotado. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que, para cada colección finita $\{x_i : i = 1, ..., k\}$ existe un punto $x \in X$ tal que,

$$d(x, x_i) \geq \varepsilon \text{ para cada } i = 1, ..., k. \quad (*)$$

Por consiguiente podemos construir una sucesión (y_n) con la propiedad de que $d(y_n, y_m) \geq \varepsilon$ para $m \neq n$.

Sea $x \in X$, para $\{x_i : i = 1, ..., k\}$ existe un punto $y \in X$ tal que $d(y, x) \geq \varepsilon$. Sea $y_1 = x$, $y_2 = y$. Ahora, $\{y_1, y_2\}$ por (*) existe $y_3 \in X$ tal que

$$d(y_3, y_1) \geq \varepsilon \text{ y } d(y_3, y_2) \geq \varepsilon$$

procediendo inductivamente podemos hallar (y_n) sucesión en X tal que

$$d(y_n, y_m) \geq \varepsilon \ \forall m \neq n,$$

es decir (y_n) no posee una subsucesión convergente y, por tanto, X no es secuencialmente compacto. ■

Definición 1.38 *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Diremos que A es acotado si $diam(A) < \infty$, donde $diam(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$.*

Lema 1.50 *Sea X un espacio métrico secuencialmente compacto y sea $\{U_s : s \in S\}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in X$, $B_{\frac{1}{n}}(x)$ esta contenido en algún elemento de la cubierta.*

Demostración.

Supongamos por contradicción que,

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X \ni B_{\frac{1}{n}}(x)$$

no está contenida en ningún elemento de la cubierta $\{U_s : s \in S\}$. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posee una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergente, como

$$x_{n_k} \to x \in X = \bigcup_{s \in I} U_s,$$

entonces,

$$\exists \ s_0 \in I \ni x \in U_{s_0}.$$

Luego $\exists \ \delta > 0 \ni B_\delta(x) \subset U_{s_0}$.

Podemos elegir k suficientemente grande, $k > \frac{2}{\delta} \ni x_n \in B_{\frac{1}{\delta}}(x)$, así

$$B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_\delta(x) \subset U_{s_0}.$$

Lo cual es una contradicción, pues estamos suponiendo que $B_{\frac{1}{n}}(x)$ no esta contenida en U_s. ■

Lema 1.51 *Sea X un espacio métrico secuencialmente compacto y $\{U_s : s \in S\}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe $\delta > 0$ tal que todo subconjunto $A \subseteq X$, $diam(A) < \delta$ está contenido en algún $U_{s(x)}$.*

Demostración. Por el lema anterior, existe $n \in \mathbb{N} \ni \forall\ x \in X \quad B_{\frac{1}{n}}(x) \subset U_{s(x)}$, donde $U_{s(x)}$ es un abierto de la cubierta dada. Tomemos $\delta < \frac{1}{n}$ y sea

$$A \subseteq X \ni diam\,(A) < \delta.$$

Sea $x \in A \Rightarrow A \subseteq B_{\delta}(x) \subseteq B_{\frac{1}{n}}(x) \subset U_{s(x)}$. Ahora sea $y \in A \Rightarrow d(x,y) < \delta \Rightarrow y \in B_{\delta}(x)$. ■

Teorema 1.52 *Un espacio métrico secuencialmente compacto es compacto.*

Demostración. Sea X un espacio métrico secuencialmente compacto y sea $\{U_s : s \in S\}$ una cubierta abierta de X . Por el lema anterior existe $\delta > 0$ tal que todo subconjunto $A \subseteq X$, con $diam\,(A) < \delta$ está contenido en algún $U_{s(x)}$. Como X está totalmente acotado, para $r = \frac{\delta}{2^2}$ existe una colección finita de puntos del espacio, $x_1, x_2, ..., x_n \in X \ni X = \bigcup_{j=1}^{m} B_{\frac{\delta}{2^2}}(x_j)$. Pero el $diam\left(B_{\frac{\delta}{2^2}}(x_j)\right) \leq \frac{2\delta}{2^2} < \delta \quad \forall$ $j = 1, 2, ..., m$,entonces existe U_{s_j} en la cubierta dada, tal que $B_{\frac{\delta}{2}}(x_j) \subseteq U_{s_i}$ con $j = 1, 2, ..., m$, entonces $X = \bigcup_{j=1}^{m} U_{s_i}$. Por lo tanto X es compacto. ■

Corolario 1.53 *Un espacio métrico (X, d) es compacto $\Leftrightarrow$ es secuencialmente compacto.*

Capítulo 2

CONTINUOS E HIPERESPACIOS

En el capítulo anterior hemos estudiado algunas propiedades de espacios métricos, compacidad y conexidad, estos conceptos nos ayudará en la comprensión de teoría de continuos, que a continuación abordaremos en este capítulo.

2.1. Definición y ejemplos de Continuos

Daremos la definición de Continuo e hiperespacios y veremos los ejemplos más usuales. Así como tambien presentaremos una de las técnicas más importantes para obtener ejemplos de continuos usando la intersección anidada. Y estudiaremos a los llamados continuos encadenables.

Definición 2.1 *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico, no degenerado, compacto y conexo. Un subcontinuo es un continuo el cual está contenido en un espacio.*

Ejemplo 2.1 *Un arco es un continuo pues es homeomorfo a un intervalo cerrado. Ver figura 2.*

figura 2.

Ejemplo 2.2 *Cualquier espacio que sea homeomorfo a* $S^n = \{x \in R^{n+1} :\| x \|= 1\}$ *es llamado una n-esfera. En particular 1-esfera es llamada curva cerrada simple. Toda n-esfera es un continuo. Ver figura 3. Y* $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. *Ver figura 4. Toda n-esfera es un continuo y* $\mathbb{D}^n$ *son continuos.*

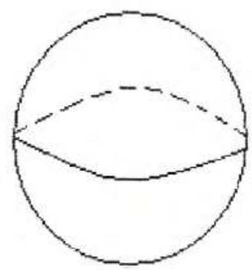


figura 3.

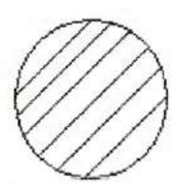


figura 4.

Ejemplo 2.3 *La paleta. Tomemos* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup ([1, 2] \times \{0\})$, *la* *paleta; esto es* $p = S^1 \cup ([1,2] \times \{0\})$. *Es un continuo. Ver figura 5.*

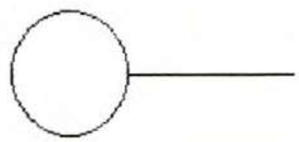


figura 5.

Ejemplo 2.4 *El continuo* $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ *es la cerradura de* F, *donde*
$F = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\}$.
Entonces el continuo $\operatorname{sen}\frac{1}{x} = F \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$. *Ver figura 6.*

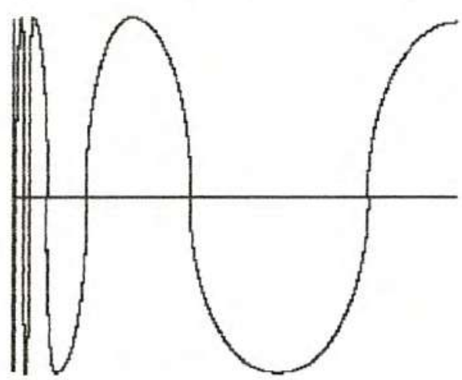


figura 6.

Ejemplo 2.5 *El círculo de Varsovia: Tomemos el continuo* X *de* $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ *y consideremos un arco* Y *del punto* $(0,1)$ *al punto* $(2\pi, 1)$ *de tal forma que*

$$X \cap Y = \{(0,1), (2\pi, 1)\} .$$

Entonces $Z = X \cup Y$ *es llamado el Circulo de Varsovia. Ver figura 7.*

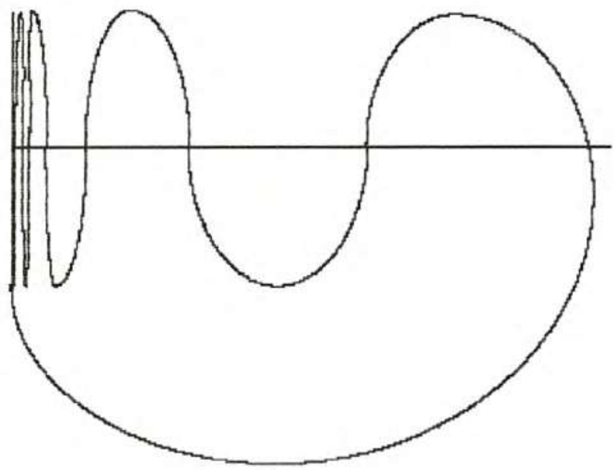


figura 7.

Ejemplo 2.6 *El Triodo Simple T. Es el continuo que formamos con la unión de tres segmentos (arcos) unidos por un punto que es el punto extremo de cada uno de ellos (segmentos). Este lo podemos expresar por* $T = ([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$, *ver figura 8.*

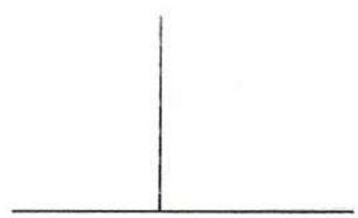


figura 8.

En general el n-odo simple es el continuo que consta de n-segmentos de longitud *uno* pegados en el punto extremo de cada uno de los segmentos.

Ejemplo 2.7 *El Abanico Armónico. Consideremos* $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ *y tomemos el cono de* X*, el cual lo denotamos como* $cono(X)$, *entonces* $cono(X)$ *es un continuo. En otras palabras si consideramos que* $X \subset \mathbb{R}^2$, *sobre el eje de las abscisas* *y* $p = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ *entonces el cono*(X) *es la unión de los egmentos rectilineos que van de* p *a cada uno de los elementos de* X. *Ver figura 9.*

figura 9.

Ejemplo 2.8 *El Abanico de Cantor. Sea* C *el conjunto de Cantor contenido en* $[0,1]$ *y únase los puntos de* C *al punto* $p = (\frac{1}{2}, 1)$ *del mismo modo que se hizo en el ejemplo anterior, ver figura 10.*

figura 10.

A continuación veremos el uso del criterio de intersecciones anidadas para obtener ejemplos interesantes de continuos, par ello observemos que:.

Ejemplo 2.9 *Para cada* $n \in N$, *sea*

$$X_n = [0,1] \times \left[0, \frac{1}{n}\right] \setminus \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \times \{0\} \right\}.$$

observemos que cada X_n *es un subconjunto conexo de* $\mathbb{R}^2$, *pero*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \{0\} \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times \{0\},$$

el cual no es conexo.

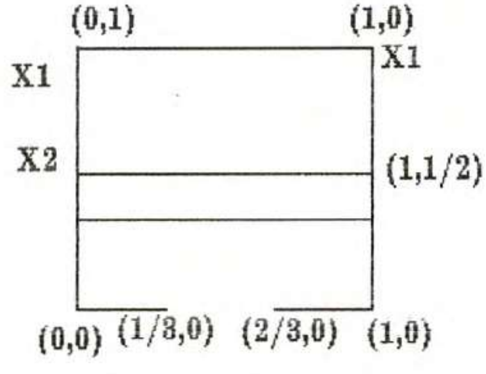


figura 11.

El ejemplo anterior nos dice que la intersección anidada de conjuntos conexos no necesariamente es conexa. Pero si agregamos la hipótesis de compacidad a cada uno de los intersectados se obtienen resultados positivos, lo cual mostrará el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *Si* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de subcontinuos de un espacio métrico* (Y, d) *, tal que para toda* $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$ *entonces* $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ *es un continuo.*

Demostración. Sea $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, cada X_n es un cerrado en Y (por que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ y cada X_n es compacta por lo tanto cada X_n es un cerrado en Y), y como la intersección de cerrados es cerrada, X es cerrado en Y. Por lo tanto X es **compacto**. Ahora como X es compacto entonces cualquier familia de subconjuntos cerrados de Y con la propiedad de intersección finita tiene interección no vacía, por lo que $X \neq \emptyset$.

Así que sólo falta ver que X es conexo.

Supongamos que X no es conexo, entonces

$$X = A \cup B, \text{ donde } A \text{ y } B \text{ son cerrados ajenos de } X,$$

por lo tanto A y B son compactos por teorema 1.41. Podemos encontrar abiertos disjuntos V y W de Y de tal forma que $A \subset V$ y $B \subset W$.

Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subset V \cup W$. De donde

$$X_n = (X_n \cap V) \cup (X_n \cap W).$$

Como $A \cup B = X \subset X_n$, se tiene que

$$X_n \cap V \neq \emptyset \ \ y \ X_n \cap W \neq \emptyset,$$

pero esto implica que X_n no es conexo, esta contradicción muestra que X es conexo.

■

Ejemplo 2.10 *La curva Universal de Sierpinski.*

Empezamos dividiendo el cuadrado $S_0 = [0,1] \times [0,1]$ en nueve cuadrados congruentes y tomamos

$$S_1 = S_0 \diagdown \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Análogamente , dividimos cada uno de los restantes ocho cuadrados en nueve cuadrados congruentes y llamamos S_2 al continuo que se obtiene al quitar el interior de cada uno de los ocho cuadrados centrales. Continuando de esta manera, definimos $S_2, S_3, etc.$ Sea $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$, entonces S es un continuo, llamado la curva de Sierpinski.

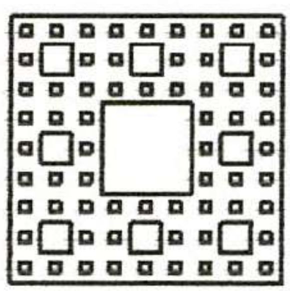


figura 12.

Ejemplo 2.11 *La curva universal de Menger .*

Consideremos primero el cubo $M = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Dividamos cada una de las caras de M en nueve cuadrados congruentes y hagamos un agujero através del interior de cada cuadrado central, esto nos da un continuo M_1. dividamos cada uno de los restantes cuarenta y ocho cuadrados en nueve cuadrados congruentes y haganmos un agujero através del interior de los cuadrados centrales, de esta manera obtenemos un continuo M_2.

Repetimos este proceso para obtener continuos M_n. La curva universal de Menger es, por definición

$$\mathcal{M} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n, \mathcal{M} \text{ es un continuo.}$$

El término universal se refiere en este caso, al hecho de que $\mathcal{M}$ contiene una copia topológica de cualquier espacio métrico separable de dimensión uno.

En el siguiente dibujo se ilustra el tercer paso de la construcción de la curva de Universal de Menger.

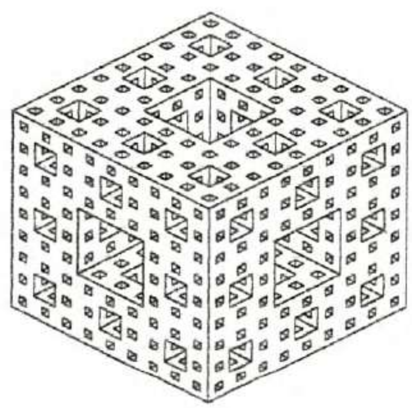


figura 13.

Teorema 2.2 *Sea X un continuo y Z un subcontinuo de X. Si $X - Z = A \cup B$ entonces $Z \cup A$ y $Z \cup B$ son subcontinuos de X.*

Demostración. Sea $X - Z = A \cup B$, donde A y B estan mutuamente separados. Como $X - Z$ es abierto, por corolario 1.8 tenemos que A y B son abiertos. Además $X - A = Z \cup B$, por lo que $Z \cup B$ es cerrado.

Supongamos que $Z \cup B$ no es conexo. Entonces existen dos cerrados no vacíos y ajenos H y K tales que

$$Z \cup B = H \cup K.$$

Como Z es conexo e igual a $(Z \cap H) \cup (Z \cap K)$ y estos son dos cerrados ajenos, tenemos que uno de ellos es vacío. Por lo tanto podemos asumir que $Z = (Z \cap H)$ y por tanto $Z \subset H$. Pero como H y K son ajenos la contención anterior implica que $K \subset B$.

Ahora, sean $x_1 = A \cup H$ y $x_2 = K$. Entonces

$$X = (X - Z) \cup Z \subset (A \cup B) \cup Z = A \cup (Z \cup B) = A \cup (H \cup K) = (A \cup H) \cup K,$$

de donde $X = x_1 \cup x_2$.

Además H y K son no vacíos, por lo que x_1 y x_2 no son vacíos.

Por otra parte, ya sabemos que H y K están mutuamente separados. Y como $\overline{K} \subset \overline{B}$, se tiene que K y A también están mutuamente separados, ya que A y B lo son.

Por lo tanto x_1 y x_2 están mutuamente separados. Pero esto contradice la conexidad de X, por lo que se tiene que $Z \cup B$ es un subcontinuo de X.

Exactamente igual se prueba que $Z \cup A$ es un subcontinuo de X. ■

Lema 2.3 *Sea X un continuo. Si D es un subcontinuo propio de X entonces existe un subcontinuo C de X tal que $C \neq D$ y $D \subset C$.*

Demostración. Como D es propio, existe un punto $y \in X - D$. Dado que X es regular, existe un abierto U tal que $D \subset U \subset \overline{U} \subset X - \{y\}$. Denotemos por C a la componente de $\overline{U}$ que contiene a D.

Por el teorema de los golpes de la frontera tenemos que $C \cap F_r(U) \neq \emptyset$. Como U es abierto y $D \subset U$ es claro que $D \cap F_r(U) \neq \emptyset$, por lo cual $D \neq C$. Por la definición de C es claro que $D \subset C$, por lo cual concluimos que el teorema es cierto. ■

2.2. Continuos Encadenables.

Como una primera caracterización de continuos vamos a estudiar un poco de los llamados continuos encadenables.

Definición 2.2 *Una familia $\{U_1, U_{2,} ... U_n\}$ de subconjuntos de un espacio métrico (X, d) es una **cadena simple** en X si se tiene que $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ si y sólo si $|j - k| \leq 1$. a cada U_k se le llama un **eslabón** de la cadena simple. Se dice que una cadena simple $C = \{U_1, U_{2,} ... U_n\}$ conecta a los puntos a y b en X si $a \in U_1$ y $b \in U_n$.*

Definición 2.3 *Una cadena simple C de conjuntos abiertos en un espacio métrico (X, d) es llamada $\varepsilon -$ cadena si el diámetro de cada eslabón de C es menor que ε.*

Definición 2.4 *Un espacio métrico es* ***encadenable*** *si $\forall \varepsilon > 0$, existe una $\varepsilon -$ cadena que cubre a X. Si $a, b \in X$ entonces X es encadenable de a a b si para cada $\varepsilon > 0$, existe una $\varepsilon -$cadena $C=\{C_1, C_2, ..., C_n\}$ que cubre a X tal que $a \in C_1$ y $b \in C_n$.*

Ejemplo 2.12 *El intervalo $I = [0, 1]$ es encadenable de 0 a 1.*

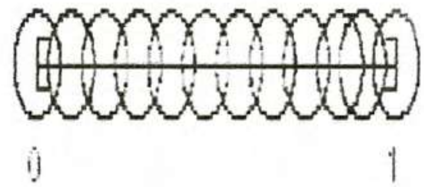


figura 14.

Ejemplo 2.13 *El conjunto de dos puntos $\{0, 1\}$,con la topología relativa no es encadenable.*

figura 15.

Ejemplo 2.14 *El intervalo abierto $(0, 1)$ es encadenable, pero no es encadenable de* $\mathbf{a}$ *a* $\mathbf{b}$ *para cualquiera* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (0, 1)$

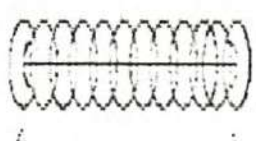


figura 16.

2.3. Hiperespacios de un continuo X

Definición 2.5 *Un **hiperespacio** de un continuo X es una colección de subconjuntos de un continuo X que satisface cierta propiedad topológica.*

Los hiperespacios de un continuo X más estudiados son:

$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado}\}$.

$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$.

$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más n puntos}\}, n \in N$.

$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$.

Dotamos a estos hiperespacios de una métrica a partir de la métrica d de X.

Definición 2.6 *Sea X un continuo, $A \subseteq X$. La **Nube de Radio** ε **y centro en** A, denotada por $N(\varepsilon, A)$ es el siguiente conjunto*

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \exists \ a \in A, \ d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Teorema 2.4 $N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$.

Demostración. Sea $x \in N(\varepsilon, A)$, entonces, $\exists \ a \in A$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$, entonces, $x \in B_\varepsilon(a)$ para algún $a \in A$, entonces,

$$x \in \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a).$$

Si $x \in \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$, entonces $\exists \ a \in A$ tal que $x \in B_\varepsilon(a)$, entonces, $\exists \ a \in A$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$, entonces,

$$x \in N(\varepsilon, A).$$

■

Observación 2.5 *Sea X un continuo y $A \subseteq X$; entonces $N(\varepsilon, A)$ es un conjunto abierto.*

Definición 2.7 *(**La métrica de Hausdorff** para 2^X). $H : 2^X \times 2^X \to R^+$ tal que*

$$H(A,B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B) \wedge B \subseteq N(\varepsilon, A)\}, \quad para \quad A, B \in 2^X.$$

Teorema 2.6 *$H(A,B)$ es una métrica para 2^X, llamada la métrica de Hausdorff.*

Demostración.

a) H esta bien definida:

Sea $A, B \in 2^X$. Como $A \neq \emptyset$ entonces, existe $a_0 \in A$. Como B es cerrado y $B \subseteq X$, con X compacto,entonces B es compacto, por lo que B es acotado, i.e. existe $x_0 \in X$ y $\delta > 0$ tal que $B \subseteq B_\delta(x_0)$. Sea $\varepsilon = d(a_0, x_0) + \delta$, así

$$B \subseteq B_\varepsilon(a_0) \subseteq N(\varepsilon, A),$$

para $b \in B$, tenemos que

$$d(b, a_0) \leq d(a_0, x_0) + d(x_0, b) < d(a_0, x_0) + \delta = \varepsilon.$$

Por tanto

$$B \subseteq N(\varepsilon, A).$$

Analogamente: Sea ε_1 tal que

$$A \subseteq N(\varepsilon_1, B).$$

Sea

$$\varepsilon_2 = \text{máx}\{\varepsilon, \varepsilon_1\} \Rightarrow B \subseteq N(\varepsilon, A) \subseteq N(\varepsilon_2, A) \ \ y \ \ A \subseteq N(\varepsilon, B) \subseteq N(\varepsilon_2, B).$$

Por lo tanto

$$\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B) \wedge B \subseteq N(\varepsilon, A)\} \neq \emptyset,$$

pues ε_2 esta en él y como este conjunto es acotado inferiormente por el cero, exíste el ínfimo;

$$\inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B) \wedge B \subseteq N(\varepsilon, A)\}.$$

acotado inferiormente por el cero). Con esto probamos que $H(A,B)$ está bien definida.

b) Para todo A y $B \in 2^X$, $H(A,B) \geq 0$ pues $H(A,B)$ es el ínfimo de puros términos positivos.

c) Para todo A y $B \in 2^X$ cerrados y no vacíos del continuo X,

se tiene $H(A,B) = H(B,A)$ pues en la definición de H, A y B juegan papeles simétricos.

d) $H(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

$\Leftarrow$) Si $A = B$ entonces

$$H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon,B) \wedge B \subseteq N(\varepsilon,A)\} = 0.$$

$\Rightarrow$) Supongamos $H(A,B) = 0$. Tenemos que demostrar que $B \subset A$ y que $A \subset B$.
"$B \subset A$"

Sea $b \in B$. Como A es cerrado entonces, $A = \bar{A}$, así es suficiente probar que $b \in \bar{A}$. i.e. tomemos $\delta > 0$, tal que $B_\delta(b) \cap A \neq \emptyset$.

$$\delta > 0 = H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon,B) \wedge B \subseteq N(\varepsilon,A)\},$$

$$\delta > \varepsilon, \text{ entonces } A \subseteq N(\varepsilon,B) \subset N(\delta,B) \quad \wedge \quad B \subseteq N(\varepsilon,A) \subset N(\delta,B),$$

$\Rightarrow b \in\subseteq N(\delta,A)$, así existe $a_0 \in A$ tal que $d(b,a_0) < \delta$, es decir, $a_0 \in B_\delta(b)$ por lo tanto

$$B_\delta(b) \cap A \neq \emptyset.$$

Por tanto $b \in \bar{A}$. De manera similar probamos $A \subseteq B$. Por lo tanto

$$H(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

e) $H(A,B) \leq H(A,C) + H(C,B)$

■

Para probar la desigualdad del triángulo, primero probaremos el siguiente teorema.

Teorema 2.7 *Sea X un continuo, A, B y $C \in 2^X$ y $\varepsilon, \delta > 0$. Si $A \subseteq N(\varepsilon,C)$ y $C \subseteq N(\delta,B) \Rightarrow A \subseteq N(\varepsilon+\delta,B)$.*

Demostración. Sea $a \in A$. Por demostrar $A \subseteq N(\varepsilon + \delta)$. Si $a \in A \subseteq N(\varepsilon, C)$, entonces existe $c \in C$ tal que $d(a,c) < \varepsilon$, así mismo, como $c \in C \subseteq N(\delta, B)$, entonces existe $b \in B$ tal que $d(b,c) < \delta$, así tenemos que

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) < \varepsilon + \delta,$$

por lo tanto, para $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \varepsilon + \delta$, entonces

$$A \subseteq N(\varepsilon + \delta, B).$$

Ahora probaremos la desigualdad del triangulo.
Sean $A, B, C \in 2^X$

$$H(A,C) + H(C,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, C) \wedge C \subseteq N(\varepsilon, A)\}$$

$$+ \inf\{\delta > 0 : C \subseteq N(\delta, B) \wedge B \subseteq N(\delta, C)\}$$

$$= \inf\{\varepsilon + \delta > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, C) \ \wedge \ C \subseteq N(\varepsilon, A) \ \wedge \ C \subseteq N(\delta, B) \ \wedge \ B \subseteq N(\delta, C)\}$$

$$\geq \inf\{\varepsilon + \delta > 0 : A \subseteq N(\varepsilon + \delta, B) \ \wedge \ B \subseteq N(\varepsilon + \delta, A)\}$$

$$= \inf\{\lambda > 0 : A \subseteq N(\lambda, B) \ \wedge \ B \subseteq N(\lambda, A)\} = H(A,B).$$

Por lo tanto

$$H(A,C) + H(C,B) \geq H(A,B).$$

■

Teorema 2.8 *Sea X un continuo; $A, B \in 2^X$ y $r > 0$. Entonces $H(A,B) < r$ si y sólo si $A \subseteq N(r,B) \wedge B \subseteq N(r,A)$.*

Demostración. $\Rightarrow$)
Tomemos ε_0 como sigue $\varepsilon_0 = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \ \wedge \ B \subset N(\varepsilon, A)\} < r$, entonces

$$\varepsilon_0 < r \Rightarrow A \subset N(\varepsilon, B) \subset N(r, B) \ \wedge \ B \subset N(\varepsilon, A) \subset N(r, A).$$

$\Leftarrow$)

Tomemos
$$r \in \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \ \wedge \ B \subset N(\varepsilon, A)\},$$
por propiedad de ínfimo, resulta lo siguiente;
$$\inf \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \ \wedge \ B \subset N(\varepsilon, A)\} < r,$$
Por lo tanto
$$H(A, B) < r.$$
■

Acontinuacion mostraremos algunos modelos de hiperespacios de un continuo.

Ejemplo 2.15 *Sea $X = [0,1] = I$, calculemos el hiperespacio*
$$C(X) = \{A \subseteq [0,1] : A \neq \emptyset, \text{ cerrado y conexo }\}.$$
$C(X)$ queda representado por subintervalos de la forma $[a,b]$ tales que
$$0 \leq a \leq b \leq 1,$$
y cada subintervalo $[a,b]$ de $[0,1]$ se puede reconstruir si conocemos su punto medio y su longitud, así definimos la función
$$g : C(X) \to \mathbb{R}^2 \text{ tal que } g([a,b]) = \left(\frac{a+b}{2}, b-a\right).$$
Tenemos que g es un homeomorfismo de $C(X)$ en su imagen. La imagen de g es el triangulo que tiene como vertices a los puntos $(0,0), (1,0), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, la denotamos por $\triangle$, i.e.,
$$\triangle = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x, \ y \geq 0 \ \ y \ \ 2x \leq 2 - y\right\}.$$
Por tanto, $C([0,1]) \cong \mathbb{D}^2$. Vease figura 17.

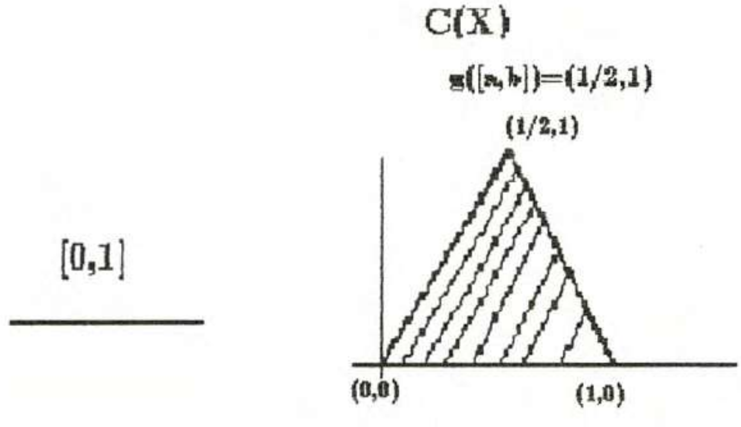


figura 17.

En efecto,

El intervalo $[0,1]$ *queda representado en el triángulo por el punto* $\left(\frac{1}{2},1\right)$,
$g([0,1]) = \left(\frac{1}{2},1\right)$.

Los conjuntos de un sólo punto $[a,a]$ *quedán representados como la recta que es la base del triángulo.*
$g([a,a]) = \left(\frac{a+a}{2}, a-a\right) = (a,0)$.

Los intervalos de la forma $[0,b]$ *quedan representados en la linea recta lateral izquierda del triángulo.*
$g([0,b]) = \left(\frac{0+b}{2}, b-0\right) = \left(\frac{b}{2}, b\right)$, $\quad y = 2x.$

Los intervalos de la forma $[a,1]$ *quedán representados en el triángulo como la linea lateral derecha.*
$g([a,1]) = \left(\frac{a+1}{2}, 1-a\right)$, $\quad y = 1-x.$

Los conjuntos de la forma que contienen al conjunto $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ *quedan representado de la siguiente manera; (vease en la siguiente figura).*

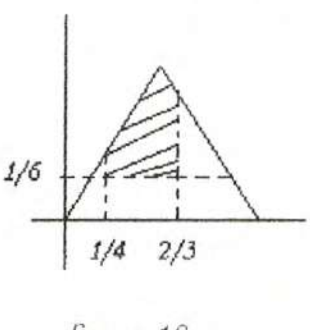


figura 18.

$\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right] \subset [a,b]$, *entonces* $b-a \geq \frac{1}{6}$, *con* $b \geq \frac{1}{2}$ *y* $a \geq 0$, *además*

$$\frac{1}{4} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{2}{3}.$$

Por tanto $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{2}{3}$ *y* $y \geq \frac{1}{6}$.

Los intervalos de la forma que contienen al conjunto $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ *quedan representados en el triángulo de la siguiente manera;*

$[a,b] \subset \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$, *entonces* $a \geq \frac{1}{3}$ *y* $b \leq \frac{1}{2}$, *por lo que* $b-a \leq \frac{1}{6}$.

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Por tanto $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ *y* $y \leq \frac{1}{6}$.

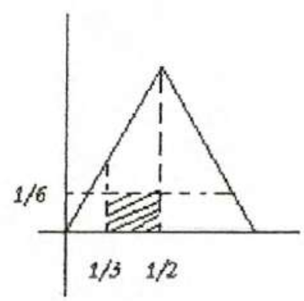


figura 19.

Otra forma de ver un modelo para $C(X)$ sería la siguiente:

Sea $X = [0,1]$.

Observemos que un elemento A de $C(X)$ es un subconjunto conexo, cerrado y no vacío de $[0,1]$, de manera que $A = [a,b]$. Así $C(X) = \{[a,b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$. Definamos la función

$$f : C(x) \to \triangle \text{ talque } f([a,b]) = (a,b),$$

así tenemos que f es un homeomorfismo de $C(x)$ sobre el triangulo $\triangle \subset \mathbb{R}^2$.

Vease figura 20.

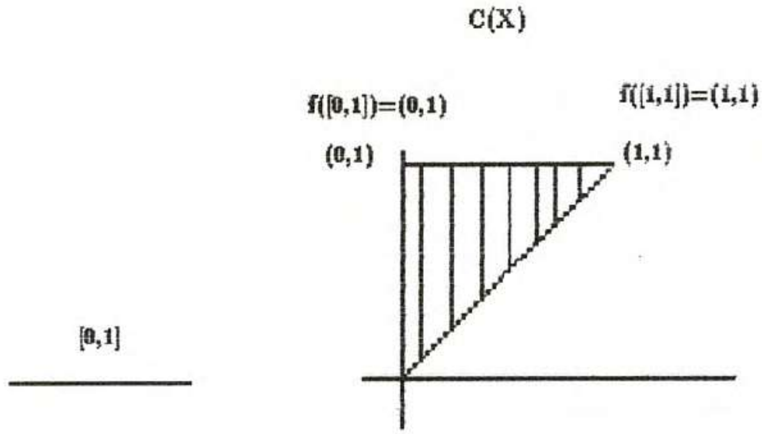


figura 20.

El punto $(0,1)$ representa al conjunto $[0,1]$ y los puntos de la diagonal representan a los conjuntos de un solo punto.

Ejemplo 2.16 *Ahora veamos un modelo de $F_2(X)$. Sea $X = \mathbb{S}^1$ la 1−esfera, encontraremos el hiperespacio $F_2(\mathbb{S}^1)$.*

Los elementos de $F_2(\mathbb{S}^1)$ son subconjuntos de 2^X con a lo más 2 puntos, i.e.

$$F_2(\mathbb{S}^1) = \{\{p,q\} \in 2^X : p, q \in \mathbb{S}^1\}$$

Sean $p, q \in \mathbb{S}^1$, al par $\{p,q\}$ le asociamos el arco menor $J_{\{p,q\}}$ y al punto medio en el arco lo denotaremos por $m_{\{p,q\}}$. Definamos

$$\varphi : F_2(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R}^2 \ \ tal\ que\ \ \varphi(\{p,q\}) = m_{\{p,q\}}\left(1 + long\left(J_{\{p,q\}}\right)\right).$$

La imagen de esta asociación es el conjunto

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|(x,y)\| \leq 1 + \pi\right\}$$

que representa un anillo en el plano. Y seria una representación perfecta para $F_2(\mathbb{S}^1)$ si no fuera por que no es función, pues a las parejas de puntos antipodas se les pueden asociar dos puntos diferentes en B, que tambien son antipodas en el circulo externo de B, es decir, en el siguiente conjunto

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| \leq 1 + \pi\right\}.$$

De manera que para obtener una representación correcta de $F_2(\mathbb{S}^1)$, lo que tenemos que hacer es identificar las parejas de puntos antipodos en el círculo externo de B. Para esto, primero haremos un corte a B, corte que volveremos a pegar después de las misma manera en la que estaba para no alterar las propiedades topológicas de B. Esto se puede hacer siguiendo los pasos ilustrados acontinuación.

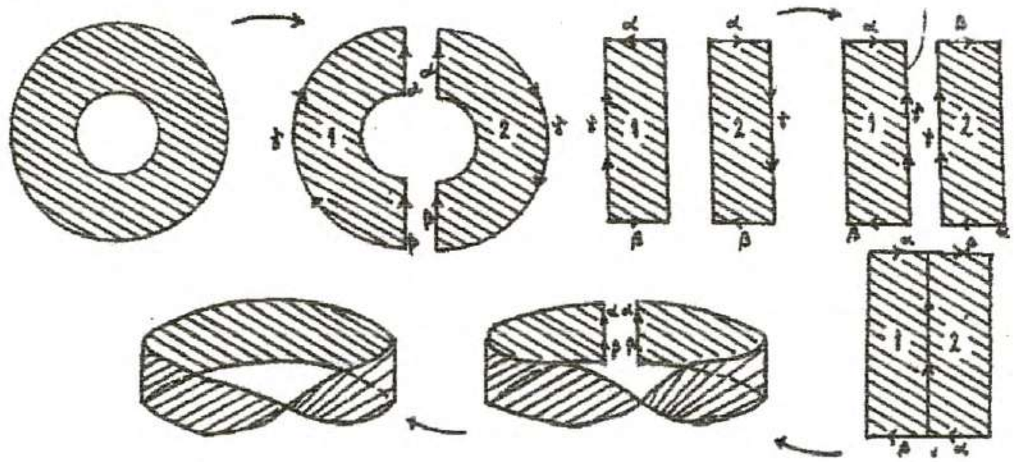


figura 21.

Otros modelos de Hiperespacios que tan solo mensionaremos (Ver [2]) son los siguientes:

Ejemplo 2.17 *Si* $X=[0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$. *Luego para cada* $n \in \mathbb{N}$, X *contiene n-odos. Curtis & Shori probaron en 1977 que*

$$C\left([0,1]^2\right) \cong [0,1] \times [0,1] \times ... = \prod_{n=1}^{\infty} [0,1];$$

el cubo de Hilbert.

Ejemplo 2.18 *Sea* X *el Triodo simple* T*; Se calcula* $C(T)$.

Sea $\theta = (0,0,0)$ *y* $\varrho_1 = (1,0,0)$, $\varrho_2 = (0,1,0)$, $\varrho_3 = (0,0,1)$ *elementos de* $\mathbb{R}^3$. *Un elemento de* $C(T)$ *que contiene a* θ *es de la forma* $A = \theta(a\ \varrho_1) \cup \theta(b\varrho_2) \cup \theta(c\varrho_3)$, *donde a,b,c*$\in [0,1]$ *y,* $\theta(a\ \varrho_1)$ *es el segmento que une a* θ *con a* ϱ_1. *Obsérvese que la función que a cada terna* $(a,b,c) \in [0,1]^3$ *le asocia el subcontinuo* $A = \theta(a\ \varrho_1) \cup$

$\theta(b\varrho_2) \cup \theta(c\varrho_3)$ de $C(T)$ es una función continua e biyectiva. Entonces el cubo $[0,1]^3$ tiene una copia en $C(T)$.

De hecho el hiperespacio $C(T)$ es homeomorfo a la fig siguiente.

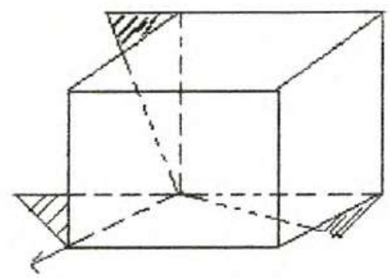


figura 22.

Ejemplo 2.19 *Llamemosle P a la paleta, S a la circunferencia de la paleta, L a su arco y v al punto donde se intersectan S y L.*

Tenemos entonces tres clases de subcontinuos, a saber: los que estan contenidos en S, los que están contenidos en L y los que tienen el punto v.

Las dos primeras clases ya sabemos como representarlas, la primera termina siendo un disco y la segunda un triángulo. Ahora analicemos a un subcontinuo A que tenga a v. Este conjunto está formado por la parte que tiene en S $(A \cap S)$ y la que tiene en L $(A \cap L)$. Notemos que $A \cap S$ es un subcontinuo de S que tiene al punto v. A la colección de todos los subcontinuos de S que contienen a v se representa por una figura en forma de corazón (relleno), ver [2].

Ahora notemos que $A \cap L$ es un subcontinuo de L que contiene a v. A la colección de tales subcontinuos ya sabemos que se le puede representar como un arco. Entonces cada subcontinuo A de P que contenga a v lo podemos representar como una pareja $(A \cap S, A \cap L)$, su primera coordenada se representa como un punto del corazón y la segunda como un punto de un arco. Notemos que los dos conjuntos son independientes en el sentido de que podemos modificar alguno de los dos conjuntos $A \cap S$ o $A \cap L$ sin alterar el otro y seguir teniendo un subcontinuo de P que contiene a v.

De manera que la familia de todos esos subcontinuos A puede representarse como el producto de un corazón y un arco. Es decir, como un cilindro en forma de corazón. A este cilindro hay que añadirle el disco que representa a los subcontinuos de P que están contenidos en S y a los que están contenidos en L. Los primeros forman un disco. Un subcontinuo que pertenezca a este disco y al cilindro en forma de corazón *tiene que ser un subcontinuo de S que contenga a v y, por supuesto, su intersección con L consta sólo de v. Por lo tanto dicho subcontinuo tiene que estar representado en un corazón contenido en el disco y también en una de las bases del cilindro. De manera que para añadirle el disco al cilindro sólo hay que pegárselo en su base.*

Similarmente se puede ver que el triángulo que representa a los subcontinuos contenidos en L debe pegarse al cilindro en la forma en que se representa en la siguiente figura la cual ya contiene a todo el modelo de $C(P)$.

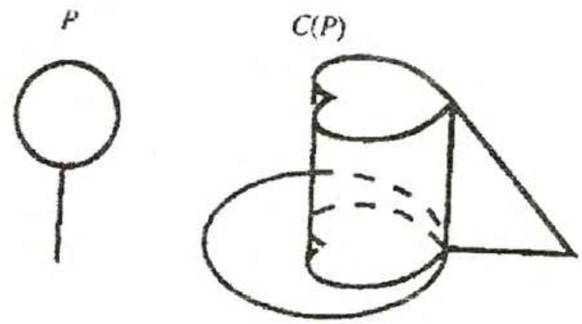
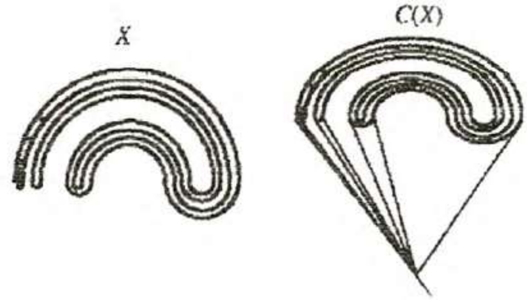


figura 23.

Ejemplo 2.20 *El hiperespacio $C(X)$ del continuo arcoiris de Knaster es homeomorfo a su cono.*



Arcoiris de Knaster

figura 24.

Ejemplo 2.21 *En su tesis doctoral, Ann M. Dilks construyó un modelo para el hiperespacio $C(X)$ del continuo que tiene forma de ocho, es decir, del continuo que se obtiene de unir dos circunferencias por un punto. Ver [2].*

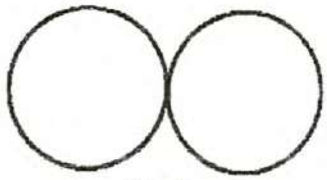


figura 25.

Ejemplo 2.22 *Consideremos el triodo simple Y formado por tres arcos L_1, L_2 y L_3 que se intersectan por pares en el punto v que es un punto extremo de cada uno de ellos. Podemos considerar los arcos $J_1 = L_2 \cup L_3$, $J_2 = L_1 \cup L_3$ y $J_3 = L_1 \cup L_2$. Ya sabemos que $F(J_i)$ es un triángulo. Notemos que si $a, b \in Y$, entonces a pertenece a algún L_j y b pertenece a algún L_k (podria ser que $j = k$).*

De modo que $\{a, b\}$ pertenece a algún J_i. Esto muestra que

$$F_2(Y) = F_2(J_1) \cup F_2(J_2) \cup F_2(J_3).$$

De manera que si sabemos cómo pegar los conjuntos $F_2(J_i)$, tendremos un mo-delo para $F_2(Y)$. Notemos que

$$\{a, b\} \in F_2(J_1) \cap F_2(J_2)$$

si y sólo si $\{a, b\} \subset J_1$ y $\{a, b\} \subset J_2$, es decir, si

$$\{a, b\} \subset J_1 \cap J_2 = L_3.$$

Esto muestra que

$$F_2(J_1) \cap F_2(J_2) = F_2(J_3).$$

Ahora observemos que $F_2(L_3)$ es un subtriángulo de $F_2(J_1)$ y de $F_2(J_2)$. De manera que tenemos que pegar $F_2(J_1)$ y $F_2(J_2)$ por ese subtriángulo. En la siguiente figura se ilustra cómo se deben pegar $F_2(J_1)$, $F_2(J_2)$ y $F_2(J_3)$ y el resultado de como se pegan.

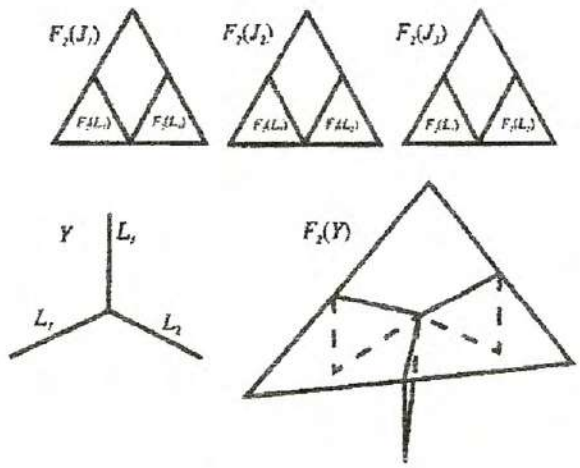


figura 26.

Capítulo 3

L–CONVERGENCIA EN 2^X

Anteriormente hemos expresado la métrica de **Hausdorff** para 2^X en términos de conjuntos abiertos en X. Ahora vamos a dar una descripción apropiada de convergencia con respecto a la métrica de **Hausdorff.**

3.1. Definición y ejemplos de límites superiores e inferiores

Definición 3.1 *Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de 2^X. Se define el* ***límite inferior*** *de A_n y el* ***límite superior*** *de A_n de la siguiente forma:*

a) $Lim\ inf\,(A_n) = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \textit{tal que}\ B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset\ \ , \forall n \geq N\}$

b) $Lim\ sup\,(A_n) = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset\quad \textit{para una infinidad de } n's\}$.

Mientras que el $Lim\ inf\ (A_n)$ satisface la propiedad en cuestión, para toda la cola de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, es suficiente que para el $Lim\ sup\,(A_n)$ la satisfaga para una infinidad de $n's$.

Ejemplo 3.1 *Sea el continuo $X = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3\ y\ 0 \leq y \leq 1\}$. Definamos la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in 2^X\quad \forall n \in \mathbb{N}$ por:*

$$A_n = \begin{cases} [1,3]\times\left\{\frac{1}{n}\right\} \text{ si n es impar} \\ [0,2]\times\left\{\frac{1}{n}\right\} \text{ si n es par} \end{cases}$$

$Lim\ inf\ A_n = [1,2] \times \{0\}$
$Lim\ sup\ A_n = [0,3] \times \{0\}$
Como lo muestra la figura 27.

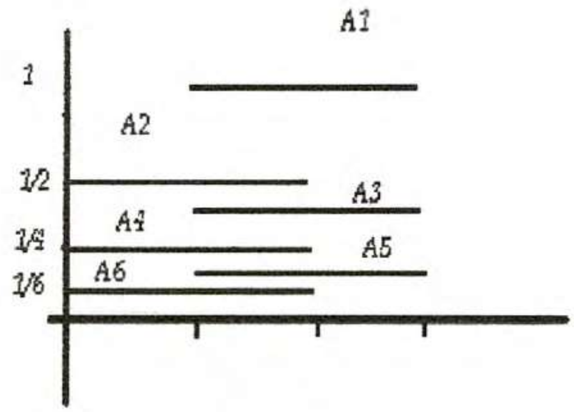


figura 27.

Ejemplo 3.2 *Sea* $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 3\ ,\ 0 \le y \le 1\}$, *Definimos* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in 2^X \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

Como

$$A_n = \begin{cases} [2,3]\times\left\{\frac{1}{n}\right\} \text{ si n es impar} \\ [0,1]\times\left\{\frac{1}{n}\right\} \text{ si n es par} \end{cases}$$

Entonces por definición,
$Lim\ inf\ \ A_n = \emptyset$, y
$Lim\ sup\ A_n = [0,1] \cup [2,3] \times \{0\}$
Veamos su comportamiento en la figura 28.

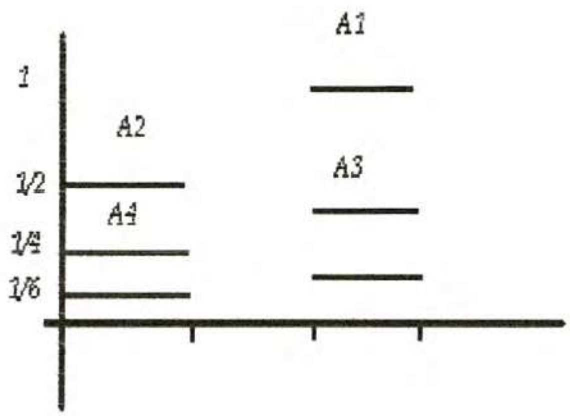


figura 28.

Ejemplo 3.3 *Para* $n \in \mathbb{N}$, *Definimos la sucesión* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in 2^X \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *por:*

$$A_n = [0,1] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\}.$$

lim inf A_n=*lim sup* $A_n = [0,1] \times \{0\}$.

Vease la figura 29.

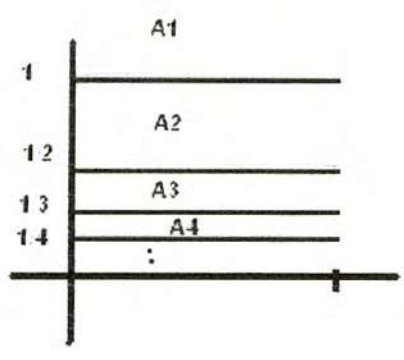


figura 29.

3.2. Propiedades de límite superior e inferior.

Proposición 3.1 *Sea X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X entonces:*

a) $lim\ inf\ A_n \subset lim\ sup A_n$

b) $lim\ inf\ A_n$ y el $lim\ sup\ A_n$ son conjuntos cerrados.

c) $lim\ sup\ A_n \neq \emptyset$ para toda sucesiónn $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Demostración.

a) Sea $x \in\ lim\ inf\ A_n$. Por demostrar que $x \in lim\ sup\ A_n$. Por definición tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_{\varepsilon}(x) \cap A_n \neq \emptyset \quad \forall\, n \geq N,$$

por lo tanto,

$$B_{\varepsilon}(x) \cap A_n \neq \emptyset \quad \text{para una infinidad de } n's.$$

Por tanto $x \in lim\ sup\ A_n$.

b) Por demostrar $\overline{lim\ sup\ A_n} \subseteq lim\ sup\ A_n$. Sea $x \in \overline{lim\ sup\ A_n}$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$lim\ sup\ A_n \cap B_{\varepsilon}(x) \neq \emptyset,$$

de modo que existe $z \in lim\ sup\ A_n \cap B_{\varepsilon}(x)\, X$,entonces $z \in B_{\varepsilon}(x)$ *i.e.* existe $\delta > 0$ tal que

$$B_{\delta}(z) \subseteq B_{\varepsilon}(x)\ , \qquad ((\text{I}))$$

Ahora como $z \in lim\ sup\ A_n$ implica que $B_{\delta}(z) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$. De aquí que $B_{\delta}(z) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$. Por lo tanto $x \in lim\ sup\ A_n$. Y por tanto $lim\ sup\ A_n$ es un conjunto cerrado en X.

La demostración de que el $lim\ inf\ A_n$ es un conjunto cerrado en X es analog.. a la anterior.

c) Por demostrar que $lim\ sup\ A_n\ A_n \neq \emptyset \quad \forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$, así $A_n \neq \emptyset \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, A_n es cerrado en $X \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Elegimos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como X es compacto, entonces, existe una subsucesión $\{a_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $a_{nk} \to x$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_{nk} \in B_{\varepsilon}(x) \quad \forall\, k \in K$. De aquí que $B_{\varepsilon}(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de n's. Por tanto $x \in lim\ sup\ A_n$. Con esto probamos que $lim\ sup\ A_n \neq \emptyset$. ■

Proposición 3.2 *Sea* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$.

a) $x \in lim\ inf\ A_n$ *si y sólo si existe una sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de* X *talque* $x_n \to x$ *y* $x_n \in A_n$*, para toda* $n \in N$.

b) $x \in lim\ sup\ A_n$ *si y sólo si existe una sucesión de numeros naturales* $n_1 < n_2 < ...$ *y existen puntos* $x_{n_k} \in A_{n_k}$ *(paratodak) tales que* $x_{n_k} \to x$.

Demostración. a)

$\Leftarrow$) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tal que $x_n \to x$ y $x_n \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto para todo $\varepsilon > 0$ $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) < \varepsilon \ \forall\ n \in \mathbb{N},$$

$$x_n \in B_\varepsilon(x) \ \ y \ \ \forall\ n \in \mathbb{N}, \ \ x_n \in A_n \ \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

De manera que

$$x_n \in B_\varepsilon(x) \cap A_n \ \ \forall\ n > N.$$

Así que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ $\forall\ n > N$, por lo tanto $x \in lim\ inf\ A_n$.

$\Rightarrow$) Sea $x \in lim\ inf\ A_n$, ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in A_n$ de tal forma que

$$d(x_n, x) = min\ \{d(x,y) : y \in A_n\},$$

donde d es la métrica en X.

Observemos que $x_{n's}$ estan bien definidas $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in X$ fijo, y $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(y) = d(x,y)$ es continua y $A_n \in 2^X$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, por lo tanto A_n es compacto en X, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Entonces f alcanza un mínimo en A_n para cada $n \in \mathbb{N}$, i.e. existe $x_n \in A_n$ tal que

$$f(x_n) = min\ \{d(x,y) : y \in A_n\}.$$

Ahora vamos a probar que $x_n \to x$.

Sea $\varepsilon > 0$, como $x \in lim\ inf\ A_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ $\forall\ n > N$. De manera que para cada $n \geq N$, existe $a_n \in A_n$ tal que $d(x, a_n) < \varepsilon$, pero

$$d(x_n, x) = min\{d(x,y) : y \in A_n\} \leq d(x, a_n) < \varepsilon, \ \forall n > N.$$

De manera que $d(x_n, x) < \varepsilon$, $\forall n > N$, por lo tanto $x_n \to x$.

b) $\Leftarrow$) Supongamos que existe una sucesión de número naturales $n_1 < n_2 < ...$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \to x$. para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x \in$

lim sup A_n. Sea $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ si $k > K$, esto implica que

$$x_{n_k} \in B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \quad \text{para } k > K,$$

de manera que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de n's, por lo tanto $x \in$ *lim sup*A_n.

$\Rightarrow$) Supongamos que $x \in$ *lim sup*A_n, entonces para todo $\varepsilon > 0$,

$$B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \quad \text{para una infinidad de } n\text{'s}.$$

Así tomemos $\varepsilon = 1$,

$$B_1(x) \cap A_n \neq \emptyset \quad \text{para una infinidad de } n\text{'s}.$$

Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{n_1} \in B_1(x) \cap A_{n_1}, \text{ entonces } d(x_{n_1}, x) < 1 \quad y \quad x_{n_1} \in A_{n_1}.$$

Para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, entonces

$$B_{\frac{1}{2}}(x) \cap A \neq \emptyset \quad \text{para una infinidad de } n\text{'s}.$$

Entonces podemos elegir $n_2 > n_1$ tal que

$$B_{\frac{1}{2}}(x) \cap A_{n_2} \neq \emptyset.$$

Escogemos $x_{n_2} \in B_{\frac{1}{2}}(x) \cap A_{n_2}$, entonces

$$d(x_{n_2}, x) < \frac{1}{2} \quad y \quad x_{n_2} \in A_{n_2}$$

Continuando este proceso inductivamente:
$\exists$ naturales $n_1 < n_2 < ...$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ tales que

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k},$$

por lo tanto $x_{n_k} \to x$. ∎

Teorema 3.3 *Sea* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$, *entonces* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge con la métrica de Hausdorff a un punto* $A \in 2^X$ *si y sólo si lim inf* $A_n =$ *lim sup* A_n.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que A_n converge con la métrica de con la métrica de Hausdorff a un $A \in 2^X$. Demostraremos que $lim\ inf\ A_n = A = lim\ sup\ A_n$, para lo cual es suficiente mostrar que :

1. $A \subseteq lim\ inf\ A_n$.

2. $lim\ sup\ A_n \subseteq A$.

1. Sea $a \in A$. Sea $\varepsilon > 0$, como por hipótesis $\lim A_n = A \in 2^X$con la métrica de Hausdorff, entonces

$$\text{Para } \varepsilon > 0 \ \ \exists\ N \in \mathbb{N} \quad tal\ que \quad H(A_n, A) < \varepsilon \quad n \geq N.$$

Por teorema 2.8 tenemos que $A \subseteq N(\varepsilon, A_n) \ \ y \ \ A_n \subseteq N(\varepsilon, A)$. Sea $n \geq N \Rightarrow a \in N(\varepsilon, A_n)$. Esto implica que existe $x_n \in A_n$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$. De manera que $x_n \in A_n \cap B_\varepsilon(a)$, por tanto

$$A_n \cap B_\varepsilon(a) \neq \emptyset \quad \forall n \geq N,$$

Por lo tanto $a \in lim\ inf\ A_n$.

2. b)Supongamos que $lim\ sup\ A_n$ no está contenido en A, entonces existe $x \in X$ tal que $x \in lim\ sup\ A_n$ y $x \notin A$, como $A \in 2^X$, A es cerrado en X, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Ahora bien, como $x \in lim\ sup\ A_n$, entonces existe $\varepsilon > 0$ de se cumplira que $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$. Dado que A_n converge a A con la métrica de Hausdorff, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A) \wedge A_n \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A) \ \text{ para toda } \ n \geq N.$$

Entonces podemos elegir $M \geq N$ tal que

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_M \neq \emptyset,$$

entonces, sea $z \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_M$, entonces

$$d(z, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad y \qquad z \in A_M \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A),$$

De aquí que $d(z, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ y existe $a \in A$ tal que $d(a, z) < \frac{\varepsilon}{2}$, por lo tanto

$$d(x, a) < d(x, z) + d(z, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

entonces

$$d(x,a) < \varepsilon \quad \text{con } a \in A,$$

Por tanto $B_\varepsilon(x)$ intersecta a A, lo que contradice la elección de ε. Por lo tanto concluimos que;

$$lim\ A_n = A \Rightarrow lim\ inf\ A_n = A \quad y \quad lim\ supA_n = A.$$

$\Leftarrow$) Supongamos $lim\ inf\ A_n = lim\ sup\ A_n$, por demostrar $lim\ A_n = A$ con la métrica de Hausdorff. Sea $A = lim\ sup\ A_n$, así $A \neq \emptyset$ y A es cerrado, i.e. $A \in 2^X$. Sea $\varepsilon > 0$, probemos que:

a) Existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$ $\forall n \geq M_1$ y,

b) Existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subseteq N(\varepsilon, A)$ $\forall n \geq M_2$

Dem:

a) observemos que la familia $\{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta para A, y como A es cerrado no vacío contenido en el compacto $X \Rightarrow A$ es compacto, entonces existe un cubrimiento finito, esto es, existe $m \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, a_3, ..., a_m \in A$ tal que

$$A \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_1) \cup B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_2) \cup ... \cup B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_m),$$

i.e.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i).$$

como

$$A = lim\ inf\ (A_n) = \{x \in x : \forall\ \varepsilon > 0, \ \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \quad \forall\ n \geq N\}$$

y $a_i \in A\ \forall\ i = 1, 2, ...m$, luego dado $\lambda > 0$ tal que $B_\lambda(a_i) \cap A_n \neq \emptyset$ $\forall\ n \geq N$, así para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{si } n \geq N_i \Rightarrow B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \cap A_n \neq \emptyset,$$

sea $M_1 = Max\{N_1, N_2, ..., N_m\}$, asi dada $n \geq M_1$ & $i \in \{1, 2, ..., m\}$, entonces $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \cap A_n \neq \emptyset$. Afirmación: $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$ $\forall\ n \geq M_1$. En efecto, Sea $n \geq M_1$ y $a \in \bigcup_{i=1}^{m} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \Rightarrow \exists\ i \in \{1, 2, ..., m\}$ tal que $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i)$, *i.e.*

$$d(a, a_i) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad ((*))$$

Además para las $n \geq M_1$ existe $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \cap A_n$, luego

$$d(a,x) \leq d(a,a_i) + d(a_i,x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

por lo tanto

$$d(a,x) < \varepsilon \Rightarrow a \in N(\varepsilon, A_n) \quad \text{para} \quad n \geq M_1$$

lo que prueba a).

b) Supongamos que b) es falsa, esto es $\forall\ N \in \mathbb{N},\ \exists\ n's \geq N \ \ni A_n \nsubseteq N(\varepsilon, A)$, asi para

$$N = 1 \quad \exists\ n_1 \geq 1 \ \text{ tal que } \ A_{n_1} \nsubseteq N(\varepsilon, A),$$

para

$$N = n_1 + 1 \ \ \exists\ \ n_2 > n_1 \ \text{ tal que } A_{n_2} \nsubseteq N(\varepsilon, A).$$

Así de manera inductiva, existe una sucesión de numeros naturales $n_1 < n_2 < ...$ tal que

$$A_{n_k} \nsubseteq N(\varepsilon, A) \ \ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

luego para cada $k \in \mathbb{N}$ tomemos $x_{n_k} \in A_{n_k} - N(\varepsilon, A) \subseteq X$. Como X es compacto, existe $x_0 \in X$ y una subsucesión $\left\{x_{n_{k_i}}\right\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_{k_i}} \to x_0$. Observemos que

$$\forall\ i \in \mathbb{N},\ x_{n_{k_i}} \in X - N(\varepsilon, A) \ \ y \ \ X - N(\varepsilon, A)$$

es un conjunto cerrado en X, entonces

$$lim\ x_{n_{k_i}} = x_0 \in X - N(\varepsilon, A) \Rightarrow x_0 \notin A.$$

Ahora, $lim\ x_{n_{k_i}} = x_0$ y $\left\{A_{n_{k_i}}\right\}_{i=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$,entonces por la caracterización de $lim\ sup\ A_n$ que dimos en el teorema anterior se tiene:

$$x_0 \in lim\ sup\ A_n = A \Rightarrow x_0 \in A,$$

lo cual es una contradicción.

Por lo tanto b) es verdadera i.e.

$$\text{existe } \ M_2 \in \mathbb{N} \ \text{ talque } \ \ A_n \subseteq N(\varepsilon, A) \ \ \forall\ n \geq M_2.$$

Ya probamos a) y b) con lo cual hacemos

$$N = Max\{M_1, M_2\}$$

entonces para $n \geq N$, tenemos

$$A \subseteq N(\varepsilon, A_n) \;\;\&\;\; A_n \subseteq N(\varepsilon, A) \Rightarrow H(A,\; A_n) < \varepsilon \;\text{ si }\; n \geq N.$$

Por lo tanto $lim\ A_n = A \in 2^X$ con la métrica de **Hausdorff.** ■

Teorema 3.4 *Sean* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ *son sucesiones en* $C(X)$ *tal que* $lim\ A_n = A$ *y* $lim\ B_n = B$. *Entonces* $lim(A_n \cup B_n) = A \cup B$.

3.3. Compacidad y Conexidad de 2^X.

Definición 3.2 *Sea* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* (X, d) *diremos que es de Cauchy, si y sólo si,* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} \ni$ *si* $n, m \geq N$, *entonces* $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Teorema 3.5 *Sea* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$ *una sucesion de Cauchy en el hiperespacio* 2^X *del continuo* X , *entonces* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge con la métrica de Hausdorff a un* $A_0 \in 2^X$.

Demostración. Por el teorema anterior, el único candidato a ser $lim\ A_n$ es A_0, y $A_0 \in 2^X$. Ahora,

$$lim\ A_n = A_0 \Leftrightarrow lim\ inf\ A_n = lim\ sup\ A_n = A_0,$$

así para ver que $\lim A_n = A_0$ con la métrica de **Hausdorff** es suficiente ver que

$$lim\ sup\ A_n \subseteq lim\ inf\ A_n$$

ya que la otra contención siempre es verdadera. Sea $x \in lim\ sup\ A_n$. Por demostrar que:

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \quad \forall n \geq N.$$

i.e. $x \in lim\ inf\ A_n$.

Como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$ es una sucesión de Cauchy, entonces dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

$$\exists\ N \in \mathbb{N}\ \ni\ H(A_n, A_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\ n, m \geq N.$$

Ahora, como $x \in \limsup A_n \Rightarrow B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de n's. Sea $M_0 \in \mathbb{N} \ni M_0 \geq N$ ya que satisfaga que $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_{M_0} \neq \emptyset$, así dado $n \geq N$

tenemos $H(A_{m_0}, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $M_0, n \geq N$. Entonces $A_{M_0} \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$. Ahora bien: Sea $y \in M_0 \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$,entonces

$$y \in A_{M_0} \subseteq N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n),$$

y

$$y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x), \quad i.e.\ d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2},$$

entonces, existe $z \in A_n \ni d(z,y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Entonces $z \in B_\varepsilon(x)$. Hemos probado entonces que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \quad \forall\, n \geq N$,esto prueba que $x \in lim\ inf\ A_n$. ■

Teorema 3.6 *Dado $\varepsilon > 0$, y un subconjunto $J \subseteq \mathbb{N}$, J infinito, entonces existe otro subconjunto infinito $J_1 \subseteq J$ tal que $H(A_n, A_r) \leq \varepsilon \quad \forall n, r \in J_1$*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, $J \subseteq \mathbb{N}$, J infinito. Como X es compacto existe $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in X$ tales que $\{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)\}_{i=1}^n$ cubre a X. ($X = \bigcup_{x \in X} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$).

$$X = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1) \cup B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_2) \cup ... \cup B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_m) = \bigcup_{i=1}^{m} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i).$$

Ahora bien: Para cada $n \in J$ (J es numerable) definimos

$$k_1 = \{i \in \{1,2,3,...,m\} : A_1 \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \neq \emptyset\}$$

$$k_2 = \{i \in \{1,2,3,...,m\} : A_2 \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \neq \emptyset\}$$

En general

$$k_n = \{i \in \{1,2,3,...,m\} : A_n \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \neq \emptyset\}.$$

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$, $A_n \subseteq X$ y no no vacío, cerrado en $X \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de X

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$$

los $k_{n's}$ estan bien definidas, pues $A_n \subseteq X$ por compacidad $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Luego por compacidad $n \in \mathbb{N} \quad \exists\, i_1, i_2, i_3, ..., i_m \ni A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_{i_j})$. Ahora, sea $H = \{F : F \subseteq \{1,2,3,...,m\}\}$, así H tiene 2^m elementos. Consideremos la función f :

$J \to H \ni f(n) = k_n$. f esta bien definida por la compacidad de X, pues los $k_{n's}$ estan bien definidos. Observemos que $J = \cup \{f^{-1}(\{k\}) \subseteq J : k \in H\}$, es decir,

$$J = \bigcup_{k \in H} f^{-1}(\{k\}) \; con \quad f^{-1}(k) \subseteq J \qquad \forall\, k \in H.$$

Así como J es infinito y J es una unión finita de conjuntos $f^{-1}(\{k\})$, con $k \in H$, eso quiere decir que

$$\exists\, k \in H \ni \quad f^{-1}(\{k\}) \text{ es infinito y } \quad f^{-1}(\{k\}) \subseteq J.$$

Definamos $J_1 = f^{-1}(\{k\})$, así J_1 es infinito y esta en H.

$$J_1 = f^{-1}(\{k\}) \subseteq \bigcup_{k \in H} f^{-1}(\{k\}) = J \Rightarrow J_1 \subseteq J.$$

Afirmación:

$$H(A_n, A_r) \leq \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n, r \in J_1.$$

En efecto: Sea $G = \{x_i \in X : i \in k\}$, luego $G \neq \emptyset$ y G es cerrado, es decir, $G \in 2^X$. Sea $n \in J_1 = f^{-1}(\{k\})$ con $k \in H$, entonces,

$$H(A_n, G) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $n \in J_1 = f^{-1}(\{k\}) \Rightarrow f(n) = k$, pero $f(n) = k_n = k$. Es decir que

$$k = \left\{i \in \{1, 2, 3, ..., m\} : A_n \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \neq \emptyset\right\} \qquad y \quad G = \{x_i : i \in k\}.$$

Por lo tanto

$$G = \left\{x_i \in X : A_n \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \neq \emptyset\right\},$$

así para

$$x_i \in G \Rightarrow A_n \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \neq \emptyset,$$

entonces

$$\exists\, a \in A_n \ni d(A, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esto quiere decir que $x_i \in N\left(\frac{\varepsilon}{2}, A_n\right)$, por lo tanto

$$G \subseteq N\left(\frac{\varepsilon}{2}, A_n\right) \text{ de donde } \quad n \in J_1 \tag{1}$$

Ahora:

Sea $x \in A_n \subseteq X = \bigcup_{i=1}^{m} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \Rightarrow \exists\ i_0 \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ tal que

$$x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_{i_0}), \quad i.e.\ d(x, x_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto, para $x \in A_n \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_{i_0}) \neq \emptyset$,entonces

$$x_{i_0} \in G \quad y \quad d(x, x_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces

$$\text{para cualquier } x \in A_n,\ \exists\ i_0 \in \{1, 2, 3, ..., m\} \ni x \in A_n \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_{i_0}) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto

$$A_n \subseteq N\left(\frac{\varepsilon}{2}, G\right) \tag{2}$$

Resulta que,

$$H(A_n, G) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\ n \in J_1.$$

Como G es un conjunto fijo, entonces,

$$H(A_n, A_r) \leq \varepsilon \quad \forall\ n, r \in J_1.$$

■

Teorema 3.7 2^X *es compacto.*

Demostración. Para probar este teorema es suficiente por el teorema anterior que: toda sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$ contiene una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ de **Cauchy.** por el teorema 3.5, para $\varepsilon = 1$ existe $J_1 \subseteq \mathbb{N}$, J_1 infinito tal que

$$H(A_n, A_r) \leq 1 \quad \forall\ n, r \in J_1.$$

Como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $n \in J_1$ es a su vez una sucesión, para $\epsilon = \frac{1}{2}$ existe $J_2 \subseteq J_1 \subseteq \mathbb{N}$, J_2 infinito tal que

$$H(A_n, A_r) \leq \frac{1}{2} \quad \forall\ n, r \in J_2.$$

Procediendo inductivamente, podemos elegir $n_1 \in J_1$, $n_2 \in J_2$, tal que $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ Aseguramos que $\{A_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, ya que si tenemos que $\varepsilon > 0$, sea $k \in \mathbb{N} \ni \frac{1}{k} < \varepsilon$. Si $K < L$ entonces, por construcción $J_L \subset J_k$ y como $n_1 \in J_1$ entonces $n_1 \in J_k$ y así $H(A_{n_L}, A_{n_K}) < \frac{1}{k} < \varepsilon$ para $L > k$. Por lo tanto 2^X es **compacto.** ■

Acontinuación probaremos que 2^X es conexo por arcos.

Definición 3.3 *Dado un espacio topológico Y y un punto $p \in Y$, se define la componente $C(p)$ de p en Y de la siguiente manera:*

$$C(p) = \cup \{D \subset Y : D \text{ es conexo y } p \in D\}.$$

Y se define la casi componente $Q(p)$ de p en Y como

$$Q(p) = \cap \{E \subset Y : E \text{ abierto y cerrado en } Y \text{ y } p \in E\}.$$

Si E es abierto y cerrado en Y, $p \in E$ y D es un conexo que contiene a p, entonces E y $Y - E$ constituyen una separación del espacio Y por lo que cualquier subconjunto coneo de Y debe estar contenido ya sea en E o en su complemento. Como $p \in E \cap D$, entonces podemos concluir que $D \subset E$. De aqui que $C(p) \subset Q(p)$.

Teorema 3.8 *Si Y es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, entonces para cada punto $p \in Y$, la componente $C(p)$ de p en Y coincide con la casi componente $Q(p)$ de p en Y.*

Demostración. Como ya hemos visto, $C(p) \subset Q(p)$. Sólo falta probar la otra contención. Basta con mostrar que $Q(p)$ es conexo pues $C(p)$ contiene a todos los conexos que contienen al punto p. Supongamos que $Q(p)$ no es conexo.

Tenemos que $Q(p)$ es cerrado pues es intersección de cerrados. Entonces existen dos subconjuntos$K$ y L de Y no vacíos cerrados y ajenos tales que

$$Q(p) = K \cup L.$$

Ahora, como los espacios compactos y de Hausdorff son normales, tenemos que existen dos abiertos y ajenos U y V en Y tales que $K \subset U$ y $L \subset V$. Como $p \in Q(p)$, podemos suponer que $p \in K$. El conjunto

$$Z = Y - (U \cup V)$$

es compacto y

$$Z = Y - (U \cup V) \subset Y - (K \cup L) = Y - Q(p) =$$

$$Y - \cap (\{E \subset Y : E \text{ abierto y cerrado en } Y \text{ y } p \in E\})$$
$$= \cup \{Y - E : E \text{ abierto y cerrado en } Y \text{ y } p \in E\}.$$

De manera que la familia

$$\{Y - E : E \text{ abierto y cerrado en } Y \text{ y } p \in E\}$$

es una cubierta abierta del compacto Z, por lo que existen $m \in \mathbb{N}$ y subconjuntos abiertos y cerrados $E_1, E_2, ..., E_m$ de Y tales que $p \in E_i$ para cada $i \in \{1, ..., m\}$ y

$$Y - (U \cup V) \subset (Y - E_1) \cup ... \cup (Y - E_m) = Y - (E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_m).$$

Por lo que

$$E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_m \subset U \cup V.$$

Sea $E = E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_m$. Entonces E es abierto y cerrado en Y y $p \in E \subset U \cup V$. Es claro que $E \cap U = E \cap (Y - V)$por lo cual $E \cap U$ es abierto y cerrado en Y. Y como

$$p \in E \cap K \subset E \cap U,$$

por la definición de $Q(p)$ obtenemos que

$$Q(p) \subset E \cap U.$$

Pero entonces

$$L \subset (E \cap U) \cap V = \emptyset.$$

Lo cual es una contradicción por que $L \neq \emptyset$. Hemos obtenido que $Q(p)$ es conexo, y esto es suficiente para concluir que $C(p) = Q(p)$. ∎

Teorema 3.9 *Sea Y un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Sean K una componente de Y y F un subconjunto cerrado de Y tales que $F \cap K = \emptyset$. Entonces existe un subconjunto L de Y abierto y cerrado tal que $K \subset L$ y $L \cap F = \emptyset$.*

Demostración. Tomemos un punto $p \in K$, entonces

$$K = C(p) = Q(p).$$

Para cada $x \in F$, $x \notin Q(p)$, de manera que existe un subconjunto abierto y cerrado V_x de Y tal que

$$p \in V_x \ \ y \ \ x \notin V_x.$$

Definimos $Y_x = Y - V_x$. Entonces Y_x es un conjunto abierto y cerrado en de Y tal que $x \in Y_x$ y $p \notin Y_x$. K es un conjunto conexo y V_x, Y_x constituyen una separación de Y, K tiene que estar contenido en uno de ellos, ya que $p \in V_x \cap K$, concluimos que $K \subset V_x$. entonces

$$K \cap Y_x = \emptyset.$$

Ahora, como la familia $\{Y_x : x \in F\}$ es una cubierta abierta del conjunto compacto F, tenemos que existen $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, ..., x_m \in F$ tales que

$$F \subset Y_{x_1} \cup Y_{x_2} \cup ... \cup Y_{x_n}.$$

Hacemos

$$L = Y - (Y_{x_1} \cup Y_{x_2} \cup ... \cup Y_{x_m}) = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap ... \cap V_{x_m},$$

entonces L es abierto y cerrado en Y. Notemos que $K \subset L$ *y* que $L \cap F = \emptyset$. ■

Teorema 3.10 *(De los golpen en la Frontera). Sea Z un espacio conexo, compacto y de Hausdorff y sea U un subconjunto propio, abierto y no vacío de Z. Si K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que

$$K \cap Fr(U) = \emptyset. \tag{3.1}$$

Aplicando el teorema anterior al espacio $Y = \overline{U}$, a la componente K de Y y al cerrado $Fr(U)$ de Y tal que

$$K \subset L \quad y \quad Fr(U) \cap L = \emptyset.$$

De manera que L es cerrado en Z (pues es un cerrado de un cerrado), $L \neq \emptyset$ y

$$L \subset \overline{U} - Fr(U) = U.$$

Como L es un abierto de $\overline{U}$, existe un abierto W de Z tal que

$$W \cap \overline{U} = L.$$

Pero $L \subset U$, así que $W \cap U = L$, esto muestra que L tambien es abierto en Z. Ya que Z es conexo, se sigue que $L = Z$. Pero $L \subset U$, así que $U = Z$, lo cual contradice (1) nuestra hipótesis. Por lo tanto

$$K \cap Fr(U) \neq \emptyset.$$

■

Teorema 3.11 *Sea Z un espacio conexo, compacto y de Hausdorff y sean A y B subconjuntos no vacíos, conexos y cerrados de Z tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe un subconjunto conexo y cerrado C de Z tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$.*

Demostración. Elegimos un punto $p \in B - A$. Como B es un espacio normal, existe un subconjunto abierto U de B tal que

$$A \subset U \subset U^{-B} \subset B - \{p\}$$

(U^{-B} es la cerradura de U en el espacio B).

Sea C la componente de U^{-B} que contiene a A. Notemos que C es conexo y cerrado en Z. Como $p \notin C$, tenemos que $C \subsetneq B$. Sólo nos falta ver que $A \neq C$. Llamaremos $Fr_B(U) = \emptyset$ a la frontera de U en B. Como U es abierto en B, tenemos que $A \cap Fr_B(U) = \emptyset$. Ya que $A \subset U$, tenemos que

$$A \cap Fr_B(U) = \emptyset.$$

Por el teorema 3.9,

$$C \cap Fr_B(U) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto $A \neq C$. ∎

Definición 3.4 *Un mapeo de Whitney es una función continua* $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ *tal que*

a) $\mu(\{x\}) = 0$ *para toda* $x \in X$ *y,*
b) Si $A \subset B \neq A$, *entonces* $\mu(A) < \mu(B)$.

Se puede convencer de que la función diámetro definida por diámetro$(A) =$ máx $\{d(a,b) : a, b \in A\}$ es casi un mapeo de whitney, lo único que le falla es que en $b)$ sólo se puede obtener $\leq$ en lugar de $<$.

Teorema 3.12 *Existen mapeos de Whitney para* 2^X.

Demostración. Como X es compacto, podemos elegir un subconjunto denso y numerable $D = \{a_1, a_2, ...\}$ de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\mu_n : 2^X \to \mathbb{R}$ como

$$\mu_n(A) = \text{máx}\{d(a,b) : a, b \in A\} - \text{mín}\{d(a,b) : a, b \in A\}.$$

Finalmente definimos $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ por $\mu(A) = \sum \frac{\mu_n(A)}{2^n}$. ∎

Teorema 3.13 *Si* A *y* B *son subcontinuos de* X *tales que* $A \subsetneq B$, $\mu : C(X) \to [0,1]$ *es una función de Whitney y* $t \in [\mu(A), \mu(B)]$, *entonces existe* $C \in C(X)$ *tal que* $A \subset C \subset B$ *y* $\mu(C) = t$.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}([t,1]) \cap \{D \in C(X) : A \subset D \subset B\}$. El conjunto $\mathcal{A}$ es cerrado en $C(X)$ y, por tanto, compacto; además es diferente del vacío pues B pertenece a él. De manera que μ alcanza su mínimo en $\mathcal{A}$, es decir,

$$\text{existe } E \in \mathcal{A} \text{ tal que } \mu(E) \leq \mu(D) \text{ para toda } D \in \mathcal{A}.$$

Hacemos

$$\mathcal{B} = \mu^{-1}([t,1]) \cap \{D \in C(X) : A \subset D \subset E\}.$$

De nuevo, al igual que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ es compacto y, como A pertenece a $\mathcal{B}$ (y entonces $\mathcal{B} \neq \emptyset$), tenemos que μ alcanza su máximo en $\mathcal{B}$. Es decir existe un elemento $F \in \mathcal{B}$ tal que

$$\mu(D) \leq \mu(F) \quad \text{para toda} \quad D \in \mathcal{B}.$$

Si ocurriera que $\mu(E) = t$ o $\mu(F) = t$, ya podríamos porponer al conjunto C. Por tanto, podemos suponer que $\mu(F) < t < \mu(E)$. Como $F \subset E$, tenemos que $F \subsetneq E$. Por el teorema 3.10 existe $G \in C(X)$ tal que $A \subset F \subsetneq G \subsetneq E \subset B$. Entonces $\mu(F) < \mu(G) < \mu(E)$. Si $t \leq \mu(G)$, entonces $G \in \mathcal{A}$ y su valor bajo μ es menor que el de E, esto contradice la elección de E. Si por el contrario $\mu(G) \leq t$, entonces $G \in B$ y su valor bajo μ es mayor que el de F, y esto contradice la elección de F. Esta doble contradicción termina la prueba de que $\mu(E) = t$ o $\mu(F) = t$ y tambien la demostración del teorema. ■

Definición 3.5 *Dados $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$, diremos que una función continua $\alpha : [0,1] \to C(X)$ es un* ***arco ordenado*** *de A a B en $C(X)$, Si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$, cuando $0 \leq s < t \leq 1$.*

Los resultados anteriores sirven para probar la existencia de arcos ordenados en $C(X)$.

Teorema 3.14 *Dados $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$, existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.*

La demostración de este teorema es extensa , la misma se puede ver en los libros [3] [13]

Corolario 3.15 *El hiperespacio $C(X)$ es conexo por arcos.*

Demostración. Tomemos $A \in C(X) - \{X\}$, por el teorema anterior, existe un arco en $C(X)$ que conecta a A con X. Como todos los elementos se pueden conectar por arcos con X, entonces $C(X)$ es conexo por arcos. ■

Hemos estado hablando de conexidad por arcos. Recordemos que un arco es un espacio que homeomorfo al intervalo $[0,1]$. Por otra parte, el espacio Y es conexo por trayectorias si para cada dos elementos $p, q \in Y$, existe una función continua $\gamma : [0,1] \to Y$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$.

Claramente los espacio conexos por arcos también son conexos por trayectorias.

Corolario 3.16 *El hiperespacio 2^X es conexo por arcos.*

Demostración. Como hemos observado los espacios conexos por arcos también son conexos por trayectorias, por lo cual es suficiente probar que 2^X es conexo por trayectorias.

Esto es, cualquier elemento $A \in 2^X$ puede ser conectado con el elemento X por una trayectoria dentro de 2^X .

Sea pues $A \in 2^X$ y elijamos un punto $a \in A$. Por el teorema 3.14 tenemos que existe un arco ordenado en $C(X)$ de $\{a\}$ a X. En particular existe una función continua $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = \{a\}$ y $\alpha(1) = X$. Definamos

$$\beta : [0,1] \to 2^X \quad \text{por} \quad \beta(t) = A \cup \alpha(t).$$

Observemos que

$$\beta(0) = A \cup \alpha(0) = A \cup \{a\} = A \qquad y \qquad \beta(1) = A \cup \alpha(1) = A \cup X = X.$$

Sólo nos falta probar que probar que β es continua para concluir que β es una trayectoria de A a X en 2^X (es claro que todo elemento de la forma $\beta(t)$ pertenece a 2^X). Tomemos una sucesión de números $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $[0,1]$ convergente a un número $t \in [0,1]$. Por la continuidad de α, tenemos que $lim\ \alpha(t_n) = \alpha(t)$, y es claro ver que

$$lim\,(A \cup \alpha(t_n)) = A \cup \alpha(t).$$

Por tanto

$$lim \beta(t_n) = \beta(t).$$

Por lo tanto β es continua y con ésto terminamos la demostración del corolario. ■

Corolario 3.17 2^X *es un continuo con la métrica de Hausdorff.*

Capítulo 4

DESCOMPONIBLES E INDESCOMPONIBLES.

En este capítulo presentamos propiedades y conceptos básicos de continuos descomponibles y para la construcción de dos contnuos indescomponibles estudiaremos conceptos de Composante e irreducibilidad.

4.1. Definición y Propiedades de continuos descomponibles e indescomponibles.

Definición 4.1 *Un continuo X es* ***descomponible*** *si $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de X.*

Y diremos que un continuo X es ***indescomponible*** *si no es descomponible.*

A simple vista este concepto nos confunde pensando que todos los continuos son descomponibles, pero en realidad existen muchos continuos indescomponibles. Por lo que a continuación nos enfocaremos en presentar algunas propiedades, conceptos y dos ejemplos de continuos indescomponibles.

Ejemplo 4.1 *Un arco es un continuo descomponible.*

Ejemplo 4.2 *La paleta. Tomemos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup ([1, 2] \times \{0\})$, la paleta; esto es $p = S^1 \cup ([1, 2] \times \{0\})$ .Es un continuo descomponible.*

Ejemplo 4.3 *1-esfera es llamada curva cerrada simple. S^1 es un continuo descomponible.*

Ejemplo 4.4 *El continuo* $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ *es la cerradura de* F *donde* $F = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$. *Entonces el continuo* $sen\frac{1}{x} = F \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$, *es un continuo descomponible.*

Ejemplo 4.5 *El círculo de Varsovia: Tomemos el continuo* X *de* $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ *y consideremos un arco* Y *del punto* $(0, 1)$ *al punto* $(2\pi, 1)$ *de tal forma que,*

$$X \cap Y = \{(0, 1), (2\pi, 1)\}.$$

Entonces $Z = X \cup Y$ *es llamado el Circulo de Varsovia. Este continuo es un continuo descomponible.*

El siguiente teorema nos ayudará en la construcción de nuestro primer ejemplo de continuos indescomponibles.

Teorema 4.1 *Un continuo* X *es indescomponible si y sólo si todos sus subcontinuos propios tienen interior vacío.*

Demostración.

Primero supongamos por contradicción que X es descomponible, entonces existe algún subcontinuo que tiene interior no vacío.

Sean A y B subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$. Entonces $X - B \subset A$, pero como B es cerrado y propio tenemos que

$$\emptyset \neq X - B \subset \mathring{A}$$

por lo que

$$\mathring{A} \neq \emptyset.$$

Ahora probaremos el otro sentido del teorema. Tambien por contradicción. Supongamos que A es un subcontinuo de X tal que

$$\mathring{A} \neq \emptyset$$

entonces, X es un continuo descomponible.

Existen dos posibles casos respecto a la conexidad de $X - A$:

- $X - A$ es conexo.

  entonces $\overline{(X - A)}$ es un subcontinuo de X. Como $\mathring{A}$ es abierto, no vacío y esta contenido en A, es claro que $\mathring{A} \cap \overline{(X - A)} = \emptyset$. Por lo tanto $\overline{(X - A)}$ es subcontinuo propio de X y $X = A \cup \overline{(X - A)}$.

- $X - A$ es disconexo.

  Existen dos conjuntos mutuamente separados y no vacíos H y K tales que $X - A = H \cup K$. Por teorema 2.2 tenemos que $A \cup H$ y $A \cup K$ son subcontinuos propios de X, y además

$$X = (X - A) \cup A = (H \cup K) \cup A = (A \cup H) \cup (A \cup K).$$

En cada caso se tiene que X es la union de dos subcontinuos propios, por lo tanto X es descomponible. ■

El siguiente es un ejemplo de un continuo indescomponible.

Ejemplo 4.6 *Este continuo indescomponible es conocido como arcoiris de Knaster.*

Se construye de la siguiente manera:

Sea C es el conjunto de cantor de tercios intermedios, consideremos el subconjunto $C_0 = C \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$. Ahora construiremos todas las semicircunferencias en $\mathbb{R}^2$ con centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y que pasa por alguno de los puntos de C_0 , entonces a la unión de tale circunferencias llamémosle X_0.

Ahora consideremos todas las semicircunferencias en $\mathbb{R}^2$ con coordenadas no positivas con centro en el punto $\left(\frac{5}{6}, 0\right)$ y por extremo puntos de C_0, denotemos por X_1 a la unión de estas semicircunferencias. Seguimos el proceso inductivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, a X_n como la unión de las semicircunferencias en $\mathbb{R}^2$ con coordenadas no positivas que tienen por extremo pares de puntos de C_0 y centro a $\left(\frac{5}{2(3)^n}, 0\right)$.

Entonces, el arcoiris de Knaster se define como $X = X_0 \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Tenemos que todo subcontinuo propio de X es un arco cuyo interior en X es vacío. Por el teorema anterior resulta que X es indescomponible.

En la siguiente figura 30 se muestran los primeros pasos en su construcción.

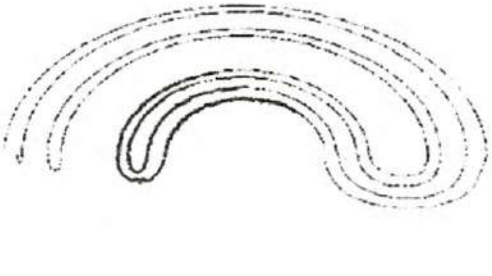


figura 30.

4.2. Composantes

Acontinuación estudiaremos el concepto de composante, que está relacionado con las propiedades que estamos trabajando.

Definición 4.2 *Si X es un continuo y $p \in X$, la* ***composante*** *de p es el conjunto de todos los puntos x de X tales que existe algún subcontinuo propio de X que contiene a p y x.*

Observación 4.2 *Si tomamos un conjunto K composante, no quiere decir que todos los puntos que le pertenecen lo sean.*

Por ejemplo, si $X = [0,1]$, la composante de 0 es el subconjunto $[0,1)$, la composante de 1 es $(0,1]$ y la de cualquier punto distinto de 0 y 1 es el intervalo $[0,1]$.

Por otra parte la composante de p es la unión de los subcontinuos propios de X que contienen a p. Por ser unión de conexos con un punto en común, tenmos que las composantes son conexas.

Teorema 4.3 *Si K es alguna composante del continuo X, el conjunto K es denso y conexo.*

Demostración. Sea $p \in X$ y K la composante de p. Por la observación anterior, tenemos que K es conexa. Ahora supongamos que $\overline{K} \neq X$. Entonces, ya que K es conexo tenemos que $\overline{K}$ es un subcontinuo propio y no vacío (contiene a p) de X. Por lema 2.3 existe un subcontinuo propio H de X tal que $\overline{K} \subset H$ y $\overline{K} \neq H$. Pero entonces H es un subcontinuo propio de X que contiene a p, por lo que por definición de K debemos tener que $H \subset K$, lo cual implica que $H = K$, que es una contradicción. Por tanto $\overline{K} = X$, esto quiere decir que K es denso. ■

Teorema 4.4 *Si X es descomponible, X es composante de alguno de sus puntos.*

Demostración. Sean A y B dos subcontinuos propios, no vacíos de X, tal que $X = A \cup B$. Entonces tenemos que

$$A \cap B \neq \emptyset,$$

de lo contrario tendríamos que si

$$A \cap B = \emptyset,$$

X sería disconexo. Tomemos $x \in A \cap B$ y K la composante de x. Como A y B son subcontinuos propios de X que contiene a x, tenemos que

$$A \subset K \ \ y \ \ B \subset K,$$

de donde

$$X = A \cup B \subset K$$

y por lo tanto $K = X$. ■

4.3. Irreducibilidad.

En esta sección estudiaremos un concepto que está muy relacionado con el concepto de composante y con la propiedad que estamos estudiando.

Definición 4.3 *Si X es un continuo y $\{p, q\} \subset X$, decimos que X es* ***irreducible*** *con respecto a p y q si no existe ningún subcontinuo propio de X que contiene a tales puntos.*

Ejemplo 4.7 *El intervalo es irreducible entre* 0 *y* 1.

Ejemplo 4.8 *El continuo* $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ *es irreducible entre* $\{0\}\times[-1,1]$ *y el punto* $(2\pi, 1)$.

Teorema 4.5 *Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces X es irreducible respecto a p y algún otro elemento de X si y sólo si la composante de p es un subconjunto propio.*

Igualmente, si X es irreducible respecto a p y q, cada uno de esos puntos no pertenece a la composante del otro:

Corolario 4.6 *Si el continuo X es irreducible respecto a $\{p, q\}$, entonces las composantes de p y de q son subconjuntos propios de X y distintos entre sí.*

Veamos ahora que los continuos descomponibles y no irreducibles tienen exactamente una composante.

Proposición 4.7 *Sea X un continuo descomponible y no es irreducible, entonces X posee exactamente una composante. (que es X mismo).*

Demostración. Por el teorema 4.4, X es composante de alguno de sus puntos. Y por el teorema 4.5 X no tiene composantes propias. Por lo tanto X es su única composante. ∎

Ahora veamos la propiedad para los irreducibles.

Proposición 4.8 *Si X es un continuo descomponible e irreducible, entonces X posee exactamente tres composantes.*

Demostración. Sea X un continuos descomponible e irreducible respecto a $\{p, q\}$. Aplicando el teorema 4.4, resulta que X es composante, y por el corolario 4.6 tenemos que las composantes de p y de q son subcontinuos propios de X y son distintos entre sí.

Ya tenemos 3 composantes de X distintas entre sí. Vamos a probar que estas 3 son todas sus composantes.

Sea r un elemento de X y sea K la composante de r. Veremos que K es uno de los subconjuntos que acabamos de mensionar. Supongamos que $K \neq X$. Entonces existe

$$y \in X - K.$$

Como X es descomponible, posee subcontinuos propios A y B tales que

$$X = A \cup B.$$

A y B no pueden contener a ambos puntos p y q, ya que X es irreducible respecto a este par, por lo que resulta que $p \in A$ y $q \in B$. Asumamos que $r \in A$.

Dado que A es subcontinuos propio de X y contiene a r, $A \subset K$, de donde se sigue que $p \in K$. Supongamos que $q \in K$. Entonces existe un subcontinuo propio D tal que

$$\{r, q\} \subset D.$$

Recordemos que $\{p, r\} \subset A$. Como $y \notin K$, ningún subcontinuo propio contiene a $\{r, y\}$, por tanto tenemos que $y \notin A$ y $y \notin D$. Entonces

$$r \in A \cap D, \quad y \notin A \cup D \quad y \quad \{p, q\} \subset A \cup D,$$

lo cual quiere decir que $A \cup D$ es un subcontinuo propio de X que contiene a p y q, lo cual es una contradicción, pues X es irreducible respecto a tal par de puntos. Entonces resulta que $q \notin K$.

Ahora demostraremos que K es composante de p.

($\subset$) Sea $x \in K$. Entonces existe un subcontinuo propio F de X tal que

$$\{r, x\} \subset F.$$

En particular, $q \notin K$ tenemos que $q \notin F$. Entonces

$$r \in A \cap F, \; q \notin A \cup F$$

y

$$\{x, p\} \subset A \cup F,$$

por lo cual $A \cup F$ es subcontinuo propio de X que contiene a x y p. Por lo tanto x pertenece a la composante de p.

($\supset$) Sea x un elemento de la composante de p. Entonces existe un subcontinuo propio H de X tal que

$$\{x, p\} \subset H.$$

Como X es irreducible respecto a $\{p, q\}$ tenemos que $q \notin H$. Por lo tanto

$$p \in H \cap A, \quad q \notin H \cup A \quad y \quad \{x, r\} \subset H \cup A,$$

lo cual quiere decir que $H \cup A$ es subcontinuo propio de X que contiene a x y r, lo cual implica que $x \in K$.

Por lo tanto de las dos contenciones concluimos que K es precisamente la **composante** de p. Hemos probado que si una composante no es X mismo, entonces debe ser composante de alguno de los puntos respecto a los cuales X es irreducible. Por lo tanto no existen más composantes de las tres que teniamos y entonces X tiene exactamente 3 composantes. ■

A continuación veremos que en realidad basta la unión numerable de subcontinuos para formar la composante.

Teorema 4.9 *Sea $p \in X$ y K es la composante de p, entonces existe una colección numerable $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subcontinuos propios de x tales que $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.*

Demostración. Sabemos que X posee una base numerable $B_0 = \{V_1, V_2, ...\}$, con $V_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definamos

$$U_n = V_n - \{p\}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Sea F_n la componente de $X - U_n$ que contiene a p, es claro que F_n es un subcontinuos propio de X que contiene a p para cada $n \in \mathbb{N}$, y por último sea

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Como cada $X - U$ es cerrado y contiene a p, es claro que F_n es un subcontinuo de X que contiene a p para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $F \subset K$. Ahora veamos que

$K \subset F$. Sea $x \in K$. Entonces existe un subcontinuo propio H de X que contiene a $\{x, p\}$. Como $X - H$ es abierto y no vacío existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$V_m \subset X - H.$$

Entonces $p \notin V_m$ y por tanto

$$V_m = U_m.$$

Es claro que $H \subset X - U_m$, y dado que H es conexo y contiene a p, se sigue que $H \subset F_m$. Por lo tanto

$$x \in F_m \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Por lo tanto $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. ■

Teorema 4.10 *Si X es un continuo indescomponible, entonces la colección de composantes de X es más que numerable.*

Demostración. El teorema afirma que todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío, y por el teorema anterior tenemos que cada composante de X es unión numerable de tales subconjuntos.

Es claro que X es la unión de todas sus composantes, por lo que si X tuviera una cantidad numerable de composantes, tendríamos que X es la unión numerable de conjuntos con interior vacío, lo cual por el teorema de Baire es un absurdo (ver teorema 1.46).

Por lo tanto X posee una cantidad más que numerable de composantes. ■

Teorema 4.11 *Sean X un continuo indescomponible y K una composante, entonces K es composante de cada uno de sus elementos.*

Demostración. Tomemos K composante de p y $x \in K$. Demostraremos que K también es composante de x. Como $x \in K$ tenemos que existe un subcontinuo propio de H_0 de X que contiene a p y x. Ahora, si y pertenece a la composante de x, existe un subcontinuo propio H de X que contiene a $\{x, y\}$, entonces $x \in H \cap H_0$, y como X es indescomponible, entonces $H \cup H_0$ es un subcontinuo propio que contiene a p, por lo cual está contenido en K. Por lo tanto $y \in H \subset K$. *i.e.* la composante de x está contenida en K.

Por otra parte, si $y \in K$, existe H_y subcontinuo propio que contiene a p y y. Entonces de manera similar tenemos que $H_y \cup H_0$ es subcontinuo propio de X, y es claro que contiene a x y y. Esto implica que y está contenida en la composante de x. Por lo tanto se sigue fácilmente que K es composante de x. ■

Teorema 4.12 *Sea X un continuo indescomponible, entonces sus composante son ajenas dos a dos.*

Demostración. Tomemos K_1 composante de p_1 y K_2 composante de p_2 tales que $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Entonces existe $y \in K_1 \cap K_2$, y por el lema anterior resulta que cada uno de los conjuntos K_1 y K_2 es la composante de y. Por lo tanto $K_1 = K_2$. ■

Teorema 4.13 *Un continuo X es indescomponible si, y sólo si, posee un subconjunto $\{x, y, z\}$ tal que X es irreducible respecto a cada par de elementos de tal conjunto.*

Demostración. $\Leftarrow$) Sea $\{x, y, z\}$ tal que X es irreducible respecto a cada par de elementos de tal conjunto. Supongamos que existen subcontinuos propios de X tales que

$$X = A \cup B.$$

Ahora, como

$$\{x, y, z\} \subset A \cup B,$$

uno de los dos subcontinuos contiene a dos de los tres elementos. Por lo cual significa que X no es irreducible respecto a tal par de elementos, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto X es indescomponible.

$\Rightarrow$) Supongamos que X es un continuo indescomponible. Por el teorema 4.10 y 4.12 nos permite tomar tres composantes K_1, K_2 y K_3 de X, las cuales son ajenas dos a dos. Sean x, y y z tales que K_1 es composante de x, K_2 es composante de y y K_3 es composante de z. Como son ajenas, por definición de composante se tiene que ningún subcontinuo propio contiene a dos de tales tres elementos, por lo que tenemos que X es **irreducible** respecto a cada par de elementos de $\{x, y, z\}$. ■

A continuación, mostraremos un continuo indescomponible, con el cual utilizaremos la última caracterización mencionada.

Ejemplo 4.9 *Continuo indescomponible.*

A continuación daremos la descripción de la construcción de este continuo indescomponible. Su indescomponibilidad se desprende del teorema anterior. (En la figura 31 se presentan los primeros tres pasos de su construcción).

Sean a, b y c tres puntos en $\mathbb{R}^2$. Entonces existe una cadena simple $\mathcal{U}_1$ en $\mathbb{R}^2$ de a hasta c cuyos eslabones son bolas cerradas con diámetro menor que $\frac{1}{2}$ y tal que alguno de ellos contiene a b, es decir $\mathcal{U}_1$ pasa por b.

Ahora, existe una cadena simple $\mathcal{U}_2$ que va de b hasta c pasando por a, cuyos eslabones son bolas cerradas con diámetro menor a $\frac{1}{4}$ contenidas en la unión de $\mathcal{U}_1$.

También existe una cadena simple $\mathcal{U}_3$ que va de a hasta b y que pasa por c, cuyos eslabones son bolas cerradas con diámetro menor que $\frac{1}{8}$ contenidas en la unión de $\mathcal{U}_2$.

Seguimos el proceso de manera inductiva, encontrando una sucesión de cadenas $\mathcal{U}_n$ encajadas tales que cada eslabón de $\mathcal{U}_n$ tiene un diámetro menor que 2^{-n} y de forma que para cada $n \in \mathbb{N}$, la cadena $\mathcal{U}_{3n-2}$ va de a hacia c y pasa por b, la cadena $\mathcal{U}_{3n-1}$ va de b a c y pasa por a y por último la cadena $\mathcal{U}_{3n}$ va de a hasta b pasando por c.

Definimos X como la intersección de las cadenas $\mathcal{U}_n$. Por el teorema 2.1 tenemos que X es un continuo.

Ahora vamos a probar que es un continuo indescomponible.

Supongamos que existe un algún subcontinuo propio Z de X tal que $\{a, c\} \subset Z$. Sea $y \in X - Z$ y sea ε tal que $B_\varepsilon(y) \subset X - Z$. De la definición de X es claro que $X = \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_{3n-2}$. Si tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-3k+2} < \varepsilon$, es claro que los eslabones de $\mathcal{U}_{3n-2}$ contienen a a y están contenidos en $B_\varepsilon(y)$ y por lo tanto no intersectan a Z.

Ahora, como $\{a, c\} \subset Z \subset X \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_{3n-2}$, y dado que $\mathcal{U}_{3n-2}$ va de a hacia c es claro que tomando por una parte los eslabones de tal cadena anteriores a los que contienen a y, y por otra parte los posteriores, creamos una separación de Z, contradiciendo su conexidad.

Por lo tanto X es irreducible respecto a a y c.

De igual manera de puede probar que X es irreducible respecto a las parejas $\{a, b\}$ y $\{b, c\}$, por lo que el teorema anterior implica que X es indescomponible.

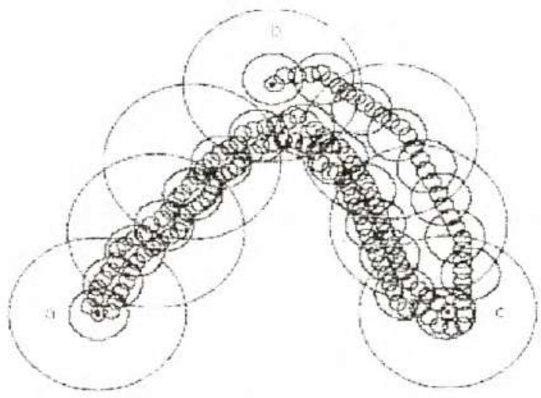


figura 31.

Bibliografía

[1] **Continuum Theory An Introducción.** Sam B. Nadler, Jr. West Virginia University. Morgantown, West Virginia.

[2] **Continuum Theory.** Sam B, Nadler, Jr. Math.481. Fal semester,1999, wvu.

[3] **Hiperespacios de continuos.** Alejandro Illanes Mejía. Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[4] **Hyperespaces of Sets.** A Text With Research Questions. Sam B, Nadler, Jr. Marcel Dekker, inc. New York and Basel.

[5] **Historia y Desarrollo de la Teoría de los Continuos Indescomponibles.** Francis Leon Jones. Aportaciones Matemáticas.Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[6] **Propiedades Topologicas de Continuos.** Tesis de Lic. en Matemáticas Aplicadas. Presenta: Alberto Carlos Mercado Saucedo. Director: Dr. Alejandro Illanes Mejía. Saltillo, Coahuila, Junio de 1998.

[7] **Teoria de Continuos.** Alejandro Illanes Mejía. Notas de Clase.

[8] **Topologia,** 2ª. edición. James R. Munkres. Massachusetts Institute of Technology. Prentice Hall.

[9] **Topologia General.** John L. Kelley. New York, 1991. Springer-Verlag.

[10] **Topologia de Espacios Métricos.** Ignacio L. Iribarrent. Director de la División de Ciencias Fisicas y Matemáticas. Universidad Simón Bolívar. Caracas. Editorial Limusa.

[11] **Introductory Functional Analysis With Applications.** Erwin Kreyszing. University of Windsor. Wiley Classics Library Edition Published 1989.

[12] **Functional Analysis.** Albert Wilansky. Lehijh University. Blaisdell Publishing Company.

[13] **Notas de Curso de Hiperespacios.** Alejandro Illanes Mejía. I escuela de verano de teoría de continuos. Julio 2002. Facultad Fisica y Matemáticas de la B. Universidad Autonoma de Puebla.

[14] **Introducción a la Teoría de Continuos.** Sergio Macías Alvarez. Instituto de Matemáticas, UNAM.

[15] Topología General. Carlos Alberto Robles corbala y Julio Cecar Avila Romero. Material didactico N.9. Agosto 2005. Departamento de Matemáticas. D.E.C.E.N. Universidad de Sonora.