



---

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Clasificación de Superficies Hiperbólicas

## T E S I S

Que para obtener el título de:

**Licenciado en Matemáticas**

Presenta:

Dulce María Guerrero Tánori

Director de tesis: Dr. Genaro Hernández Mada

Hermosillo, Sonora, México,      18 de junio de 2018

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

DA685  
e.683

R. 180196

## SINODALES

Dr. Guillermo Dávila Rascón.

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Misael Avendaño Camacho.

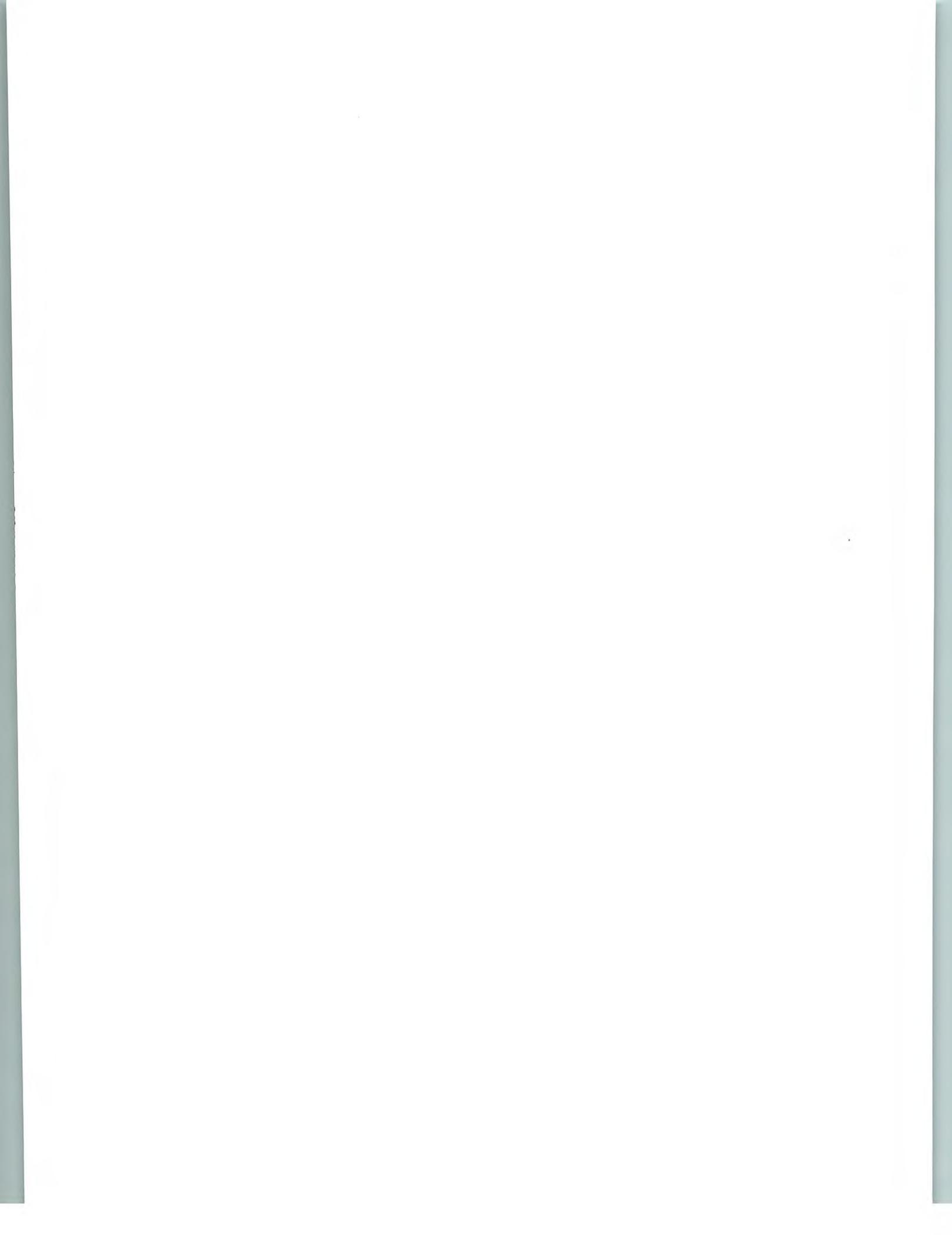
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M.C. Eduardo Velasco Barreras.

Universidad de Sonora, Hermosillo, México

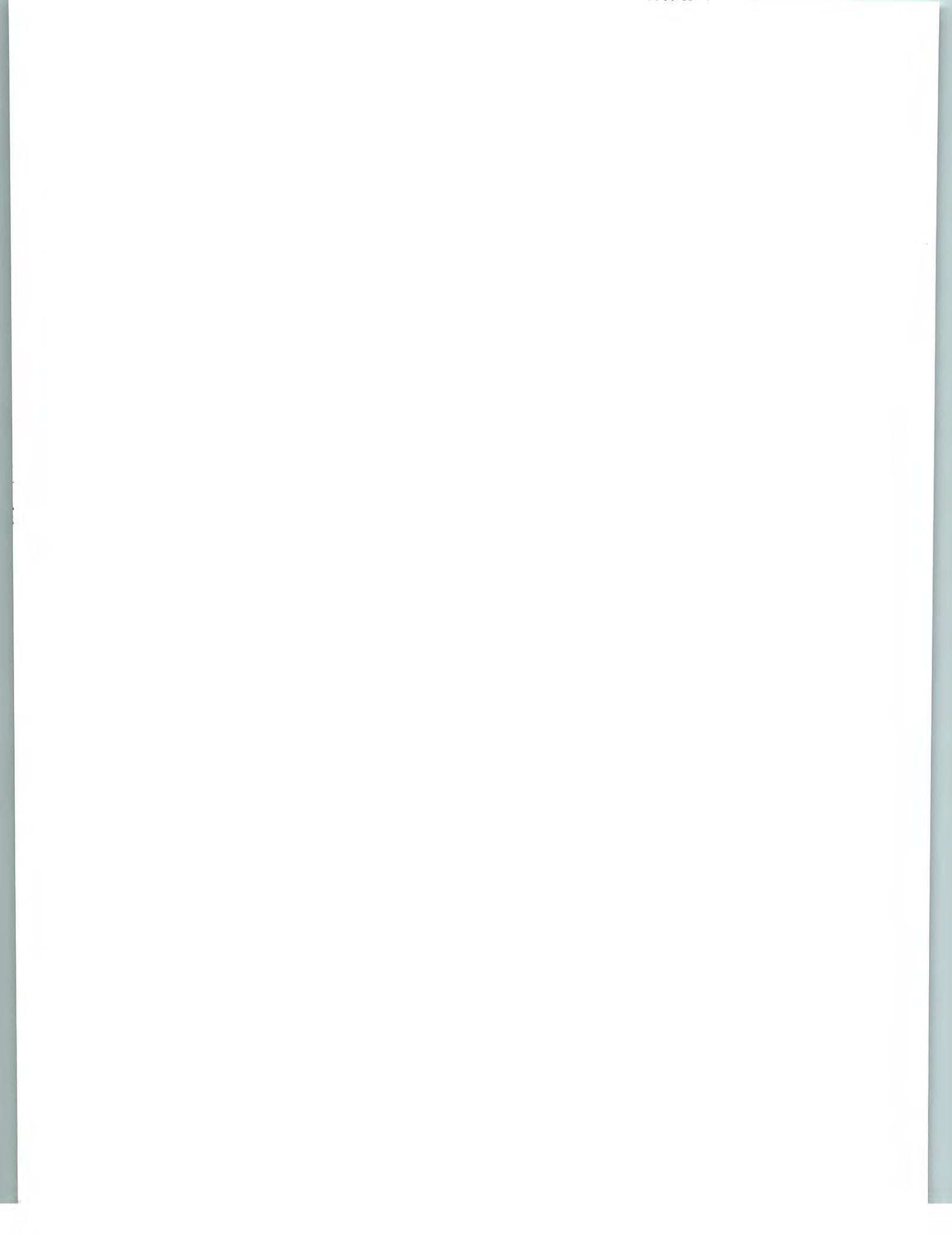
Dr. Genaro Hernández Mada.

Universidad de Sonora, Hermosillo, México



A mis padres, Carmen y Rafael.

A mi hermana Estrella.



# *Agradecimientos*

Hay cosas que nunca se terminan de agradecer y un ejemplo de esto es todo el apoyo que ha dado mi familia durante la carrera. Mamá, gracias por todo lo que has hecho durante estos años. Gracias por creer siempre en mí y por apoyarme. Gracias por preocuparte, por darme siempre amor y comprensión, por escucharme cada que lo necesitaba y por darme fortaleza cuando te lo pedía. Papá, gracias por preocuparte, por estar orgulloso de mí y por apoyarme, gracias por hacerme reír siempre que lo necesitaba. Estrella, gracias por ser la alegría de mi vida, por quererme de la manera en que lo haces, por ayudarme, por preocuparte y por sentirte orgullosa de mí. Los amo muchísimo y les agradezco todo lo que hacen por mí. Son lo mejor que me pudo haber pasado. A mi abuelo José, gracias por todo el amor que me ha dado, por tener una sonrisa para mí y no juzgarme, por apoyarme y sentirse orgulloso de mí, lo quiero muchísimo. Nana Carmen, gracias por preocuparse por mí, la quiero. A mi prima Olimpia.

Daniel Esteban Andrade Ocejo, gracias por tu apoyo a lo largo de estos años, por impulsarme a mejorar como estudiante, por ayudarme cuando lo necesité. Me da un gran gusto el haberte conocido. Te agradezco las palabras de aliento, la paciencia y el cariño brindado.

Agradezco al Departamento de Matemáticas por su apoyo académico y económico durante mi estancia en la Universidad de Sonora. Le doy gracias a todos los profesores que me impartieron conocimiento pues ellos han contribuido a mi formación. Especialmente a los profesores Carolina Espinoza Villalva, Silvia Ibarra Olmos y Martín Gildardo García Alvarado. A la profesora Carolina por su constante apoyo, ánimo y comprensión, nunca olvidaré sus palabras después del último examen de análisis complejo II. A la profesora Silvia por su constante apoyo y sus consejos. Al profesor Gildardo por su apoyo y disponibilidad. Gracias por las enseñanzas más allá de las matemáticas.

Quiero agradecer a mi tutora, Paulina Danae López Ceballos. Gracias por su inmenso apoyo, por su siempre disponibilidad y por su valiosa guía.

A mi director de tesis Genaro Hernández Mada. Por todo el conocimiento impartido, por su paciencia, comprensión y apoyo, muchísimas gracias por el tiempo dedicado a este trabajo. Gracias por despertar en mí el interés hacia la geometría, por enseñarme que las matemáticas pueden ser emocionantes y muy interesantes. Fue un honor trabajar con usted.

A mis sinodales por dedicar tiempo a la revisión de este trabajo, gracias por las sugerencias que enriquecieron este trabajo. A mis compañeros por la ayuda y por las tardes de estudio.

Por último, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por apoyarme para la realización de esta tesis como becaria del proyecto “Geometría de Poisson y sus aplicaciones en la teoría Hamiltoniana de perturbaciones” con clave 219631, de la convocatoria 2013-1 del fondo sectorial SEP-CONACYT Ciencia Básica.

# Índice general

Agradecimientos	III
Índice general	v
Índice de figuras	vi
Introducción	1
<b>1. Conceptos Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Grupos . . . . .	3
1.2. Acciones de grupo . . . . .	4
1.3. Nociones Topológicas . . . . .	6
<b>2. Grupo Fundamental y Espacios Cubrientes</b>	<b>9</b>
2.1. Homotopías por trayectorias . . . . .	9
2.2. El Grupo Fundamental . . . . .	16
2.3. Espacios Cubrientes . . . . .	19
<b>3. Conceptos de Geometría Hiperbólica</b>	<b>26</b>
3.1. Plano Hiperbólico y Algunos Modelos . . . . .	26
3.1.1. Modelos del Plano Hiperbólico . . . . .	28
3.2. Métrica Hiperbólica . . . . .	30
3.3. Transformaciones de Möbius . . . . .	32
3.4. Isometrías Hiperbólicas . . . . .	36
<b>4. Teorema de Killing-Hopf para Superficies Hiperbólicas</b>	<b>41</b>
4.1. Generalidades de Superficies Hiperbólicas . . . . .	41
4.2. Construcción de Superficies Hiperbólicas . . . . .	51
4.3. Teorema Principal . . . . .	54
4.4. El Caso de la Esfera Agujerada . . . . .	58

# Índice de figuras

1.1. Acción por traslación . . . . .	5
1.2. Seno del Topólogo. . . . .	8
2.1. Homotopía por trayectorias. . . . .	10
2.2. Levantamiento de $f$ . . . . .	20
3.1. Modelo del Disco de Poincaré. . . . .	29
3.2. Modelo del Hiperboloide o de Lorentz. . . . .	29
3.3. Modelo del Semiplano. . . . .	30
3.4. Comportamiento de $R(z)$ . . . . .	37
3.5. Las geodésicas $f$ y $g$ son las iniciales y las geodésicas $T(f(z))$ y $T(g(z))$ son las resultantes de la traslación. . . . .	38
3.6. La geodésica $f(z)$ es la inicial y la geodésica $R(f(z))$ es la resultante de la reflexión con respecto al eje imaginario. . . . .	39
3.7. Geodésica $\xi$ con centro en el origen, y $T_\rho(\xi(z))$ es la geodésica resultante de aplicar $T_\rho$ . . . . .	40
4.1. Semiplano Hiperbólico. . . . .	41
4.2. Cuadrante Hiperbólico. . . . .	42
4.3. Hexágono con ángulos rectos. . . . .	42
4.4. Distintos puntos hiperbólicos. . . . .	43
4.5. Concatenación de $\gamma _{[0,T]}$ y $\eta$ . . . . .	50
4.6. Bosquejo de la función lápiz. . . . .	54
4.7. Isometrías Cubrientes. . . . .	57
4.8. Region $R$ . . . . .	58
4.9. $R$ con las identificaciones. . . . .	58
4.10. $R$ bajo la acción de $\Gamma$ . . . . .	59

# Introducción

Dada una superficie  $S$  con una métrica euclidiana, completa y conexa por trayectorias, puede mostrarse que  $S$  se obtiene mediante la acción propiamente discontinua de un grupo de isometrías sin puntos fijos de  $\mathbb{R}^2$ . Más aun, se puede demostrar que las únicas superficies que cumplen con estas condiciones, salvo homeomorfismos, son el cilindro, botella de Klein, banda de Möbius, y obviamente el plano euclidiano. Esto lleva a un teorema de clasificación de todas las superficies de este tipo llamado teorema de Killing-Hopf.

Se ha probado un teorema análogo para superficies de curvatura constante donde podemos distinguir tres casos: positiva, negativa o nula. Sin embargo es escasa la información sobre la demostración explícita de este resultado en el caso de curvatura distinta de cero alegando que ésta es análoga al caso euclidiano. Más precisamente, el teorema nos dice que si  $S$  es una superficie hiperbólica completa y conexa por trayectorias, entonces debe ser de la forma  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un grupo que actúa de manera propiamente discontinuamente por medio de isometrías hiperbólicas de  $\mathbb{H}^2$ .

El objetivo de esta tesis es presentar una demostración del teorema en superficies hiperbólicas. Más aun, demostraremos que el grupo  $\Gamma$  es isomorfo al grupo fundamental del cociente  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ .

En el capítulo 1 definiremos conceptos que utilizaremos a lo largo del trabajo. Primero definiremos conceptos de teoría de grupos para después presentar acciones de grupos. Aquí daremos la definición de acción propiamente discontinua. Posteriormente, daremos conceptos de carácter topológico.

Durante el capítulo 2 de grupo fundamental y espacios recubridores. Empezaremos hablando de homotopías y trayectorias. Después definiremos un producto sobre las trayectorias y gracias a éste podremos considerar un grupo asociado a un espacio que nos dará información sobre éste mediante clases de homotopías, este grupo es el grupo fundamental. Enseguida presentaremos las funciones recubridoras y cómo se relacionan con el concepto de levantamiento de trayectorias.

En este capítulo también se demostrará el resultado que permite calcular el grupo fundamental de superficies de la forma  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ .

En el capítulo 3 iniciamos con parte de los objetivos de este trabajo. En la primera sección definiremos al plano hiperbólico por medio de axiomas y presentaremos algunos modelos de él. Después nos centraremos en el modelo del semiplano y estudiaremos en él la distancia hiperbólica, lo cual nos permitirá mostrar que  $\mathbb{H}^2$  es un espacio métrico. Luego veremos transformaciones de Möbius y probaremos algunas de sus propiedades. Esto nos llevará a definir isometrías hiperbólicas.

En el último capítulo presentaremos nuestro teorema principal. Comenzaremos definiendo una superficie hiperbólica. Después estudiaremos el concepto de longitud de una curva en una superficie y esto nos permitirá hablar del concepto de geodésica, y a su vez nos permitirá dar la noción de completez por medio de geodésicas.

En la segunda parte de este capítulo consideraremos un cociente hiperbólico  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un grupo de isometrías que actúe de manera propiamente discontinuamente sobre  $\mathbb{H}^2$  que dotaremos con cierta distancia entre sus órbitas y demostraremos que es una superficie hiperbólica.

En la tercera parte, definiremos una función cubriente del plano hiperbólico a una superficie completa y conexa por trayectorias  $S$ . Esto nos permitirá definir grupo de isometrías recubridoras. Concluiremos que nuestra superficie debe ser de la forma  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ .

Por último se exhibe un ejemplo de un cociente construido a partir de cierto grupo  $\Gamma$ . Sin embargo, mostraremos que en este caso no podremos aplicar el teorema de Killing-Hopf, viendo así algunas diferencias entre el caso euclidiano con el caso hiperbólico.

# Capítulo 1

## Conceptos Preliminares

En este capítulo estudiaremos resultados que son necesarios para el desarrollo de este trabajo.

### 1.1. Grupos

**Definición 1.1.1.** Sea  $G$  un conjunto no vacío. Diremos que el conjunto  $G$  es un grupo si en él existe una operación binaria  $\cdot$  llamada producto y ésta cumple con las siguientes características:

- 1) Cerradura: Si  $a, b \in G$ , entonces  $a \cdot b \in G$ .
- 2) Existencia de un elemento neutro: Existe un elemento  $e \in G$  llamado el elemento neutro, tal que para todo  $g \in G$  se cumple que  $g \cdot e = e \cdot g = g$ .
- 3) Asociatividad: Si  $f, g, h \in G$ , entonces  $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ .
- 4) Existencia de inversos: Para todo  $g \in G$  existe  $g^{-1} \in G$  tal que  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ .

Un ejemplo de grupo es el conjunto de los enteros  $\mathbb{Z}$  bajo la operación suma  $+$ , donde  $e = 0$ . Otro ejemplo de grupo es el grupo trivial  $\{e\}$  bajo la operación  $e \cdot e = e$ .

Si  $H$  es un subconjunto de un grupo  $G$  y  $H$  es de nuevo un grupo con la operación definida en  $G$ , se dice que  $H$  es un subgrupo de  $G$ . En particular, cada grupo  $G$  es un subgrupo de él mismo y  $\{e\}$  es un subgrupo de cualquier grupo.

A continuación definiremos transformaciones entre grupos.

**Definición 1.1.2.** Sean  $G$  y  $G'$  grupos con las operaciones  $\star$  y  $*$ , respectivamente. Un homomorfismo es una función  $f : G \rightarrow G'$  tal que  $f(x \star y) = f(x) * f(y)$  para todos  $x, y \in G$ .

**Definición 1.1.3.** Sea  $X, Y$  espacios topológicos y  $f$  una función continua. Decimos que  $f$  es un homeomorfismo local si para cada punto  $x \in X$  existe una vecindad abierta  $U$  de  $x$  tal que  $f(U)$  es un abierto de  $Y$  y  $f|_U$  es un homeomorfismo.

## 1.2. Acciones de grupo

**Definición 1.2.1.** Sean  $G$  un grupo y  $A \neq \emptyset$  un conjunto. Una acción por la izquierda de  $G$  sobre  $A$  es una función  $\phi : G \times A \rightarrow A$ , donde la imagen de  $(g, a)$  se denota  $g \circ a$ , para toda  $g \in G$  y  $a \in A$ , tal que

- 1)  $(g_1 \cdot g_2) \circ a = g_1 \circ (g_2 \circ a)$ , para todo  $g_1, g_2 \in G$ ,  $a \in A$ .
- 2) Si  $e$  es el neutro de  $G$ ,  $e \cdot a = a$ , para todo  $a \in A$ .

Denotaremos la acción  $g \circ a$  simplemente como  $ga$ , siempre que no haya lugar a confusión.

Un ejemplo es la acción de un grupo  $G$  de isometrías del plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$  sobre el plano actuando de manera natural:  $\sigma \cdot x = \sigma(x)$  para todo  $\sigma \in G$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ .

A continuación se define una relación de equivalencia que será útil más adelante. Si  $G$  actúa sobre  $A$ , se puede definir  $a \sim b$  si existe  $g \in G$  tal que  $b = ga$ . Esto define una relación de equivalencia. En efecto, verificamos las propiedades:

- 1) *Reflexiva:*  $a \sim a$ , para todo  $a \in A$  pues  $a = ea$ .
- 2) *Simétrica:* Si  $a \sim b$ , entonces existe  $g \in G$  tal que  $b = ga$ , luego  $g^{-1}b = g^{-1}(ga) = (g^{-1}g)a = ea = a$ , por lo tanto  $b \sim a$ .
- 3) *Transitiva:* Si  $a \sim b$  y  $b \sim c$ , entonces existen  $g_1, g_2$  tales que  $b = g_1a$  y  $c = g_2b$ , así  $c = g_2(g_1a) = (g_2g_1)a$ , por lo tanto  $a \sim c$ .

La clase de equivalencia de un elemento  $a \in A$  se denota por  $G \cdot a = \{g \cdot a : g \in G\}$  y se llama la *órbita de a* o la órbita de  $G$  que contiene a  $a$ . Ejemplificaremos lo anterior.

**Ejemplo 1.2.2.** Sea  $t$  la traslación en el vector  $(1,1)$  en el plano  $\mathbb{R}^2$  y sea  $G = \langle t_{(1,1)} \rangle$ . Se define la acción de  $G$  en  $\mathbb{R}^2$  como  $t_{(1,1)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y+1 \end{bmatrix}$ . En la siguiente figura se observa una porción de la órbita de  $(0,0)$ .

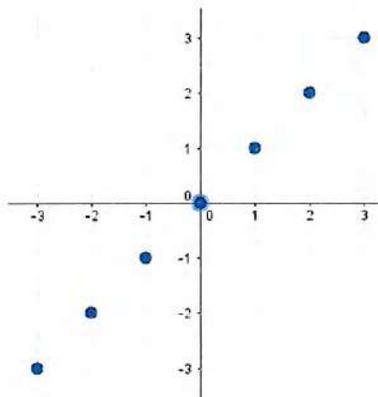


FIGURA 1.1: Acción por traslación

A continuación se presentan algunos tipos de acciones de grupos y resultados con respecto a éstas.

**Definición 1.2.3.** Si  $X$  es un espacio topológico y  $G$  es un grupo de homeomorfismos de  $X$ , la acción de  $G$  sobre  $X$  se dice que es *propriadamente discontinua* si para cada  $x \in X$  existe una vecindad abierta  $U$  de  $x$  tal que  $gU \cap U = \emptyset$  siempre que  $g \neq e$ , donde  $e$  es el elemento neutro de  $G$ .

En este texto trabajaremos únicamente en espacios métricos así que daremos una caracterización para la definición de acción propriadamente discontinua para éstos. Recordemos las siguientes definiciones.

**Definición 1.2.4.** Sea  $X \neq \emptyset$  un conjunto. Decimos que  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  define una *distancia* (o *métrica*) en  $X$  si cumple con:

- (a)  $d(x, y) \geq 0$  con igualdad si y sólo si  $x = y$ .
- (b)  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- (c)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , llamada la *desigualdad del triángulo*.

Decimos que  $(X, d)$  es un *espacio métrico*.

**Definición 1.2.5.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Decimos que  $T$  es una *isometría* de  $X$  si es una función biyectiva  $T : X \rightarrow X$  tal que para todo  $x, y \in X$ , se cumple que  $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$ .

**Proposición 1.2.6.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $G$  un grupo actuando por isometrías en  $X$ , entonces la acción es propiamente discontinua si y sólo si para toda  $x \in X$  existe  $r > 0$  tal que  $\{g \in G : d(x, gx) < r\} = \{e\}$ .*

*Demostración:* Supongamos que la acción de  $G$  por isometrías es propiamente discontinua. Sea  $x \in X$  y sea  $U$  vecindad abierta de  $x$  tal que  $gU \cap U = \emptyset$ , para toda  $g \neq e$ . Sea  $r > 0$  tal que  $B_r(x) \subseteq U$ . Si  $d(x, gx) < r$ , entonces  $gx \in B_r(x)$ , así  $gx \in gU \cap U$ . En particular,  $gU \cap U \neq \emptyset$ , y por la propiedad de propiamente discontinua, tenemos que  $g = e$ , entonces  $\{g \in G : d(x, gx) < r\} = \{e\}$ .

Inversamente, sea  $x \in X$ . Tomemos  $r > 0$  tal que  $\{g \in G : d(x, gx) < r\} = \{e\}$  y sea  $U = B_{\frac{r}{2}}(x)$ . Como  $G$  actúa por isometrías,  $gU = B_{\frac{r}{2}}(gx)$ . Sea  $g \in G$  tal que  $gU \cap U \neq \emptyset$ , entonces existe  $z \in gU \cap U$ , con  $z \in U$  y  $z = gy$ ,  $y \in U$ . Por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$d(x, gx) \leq d(x, z) + d(z, gx) < \frac{r}{2} + d(gy, gx) = \frac{r}{2} + d(y, x) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Por tanto,  $g = e$ , y la acción es propiamente discontinua.

□

### 1.3. Nociones Topológicas

Al abordar esta sección suponemos que el lector está familiarizado con conceptos básicos de topología general, tales como continuidad, conjuntos compactos, topología producto, topología relativa, entre otros. Si el lector está interesado en conocer con formalidad lo antes mencionado, se recomienda la referencia [Mu02].

Daremos a continuación un resultado que nos habla de la continuidad de funciones definidas en subespacios cerrados.

**Lema 1.3.1** (del Pegado). *Sea  $X = A \cup B$  donde  $A$  y  $B$  son cerrados en  $X$ , sean  $f : A \rightarrow Y$  y  $g : B \rightarrow Y$  funciones continuas tales que  $f(x) = g(x)$  para cada  $x \in A \cap B$ . Entonces  $h : X \rightarrow Y$ , definida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

*es continua.*

*Demostración:* Notemos que  $h$  está bien definida, pues  $f(x) = g(x)$  para toda  $x \in A \cap B$ . Supongamos que  $C$  es un conjunto cerrado en  $Y$ , entonces

$$\begin{aligned} h^{-1}(C) &= h^{-1}(C) \cap X \\ &= h^{-1}(C) \cap (A \cup B) \\ &= (h^{-1}(C) \cap A) \cup (h^{-1}(C) \cap B) \\ &= f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C). \end{aligned}$$

Como  $f : A \rightarrow Y$  y  $g : B \rightarrow Y$  son funciones continuas, tenemos que  $f^{-1}(C)$  es cerrado en  $A$  y como  $A$  es cerrado en  $X$ , entonces  $f^{-1}(C)$  es cerrado en  $X$ .

Análogamente,  $g^{-1}(C)$  es cerrado en  $X$ . Así,  $h^{-1}(C)$  es cerrado en  $X$  pues es unión de dos cerrados, y por lo tanto  $h : X \rightarrow Y$  es continua.

□

Ahora definiremos el concepto de conexidad de un espacio topológico. Lo que este concepto nos dice, intuitivamente, es que un espacio está compuesto por una sola pieza. Vamos a definir espacio conexo en términos de espacio desconexo.

**Definición 1.3.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Diremos que  $X$  es un espacio desconexo si existen  $U, V$  abiertos ajenos no vacíos tales que su unión es todo  $X$ .*

*Diremos que  $X$  es un espacio conexo si no es desconexo.*

Equivalentemente, un espacio topológico  $X$  es conexo si los únicos subconjuntos de  $X$  que son abiertos y cerrados a la vez son  $\emptyset$  y  $X$ . Además, si dos puntos cualesquiera de  $X$  pueden ser unidos por una trayectoria diremos que  $X$  es conexo por trayectorias. Formalizaremos esta noción.

**Definición 1.3.2.** *Dados dos puntos  $x, y \in X$ , diremos que una función continua  $f : [a, b] \rightarrow X$  tal que  $f(a) = x$  y  $f(b) = y$ , es una trayectoria en  $X$  que une a  $x$  con  $y$ .*

*Un espacio  $X$  es conexo por trayectorias si para cada par de puntos de  $X$  existe una trayectoria en  $X$  que los une.*

**Ejemplo 1.3.3** (Conexidad por trayectorias). *Definimos la bola  $\mathbf{B}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  como  $\mathbf{B}^n = \{x : \|x\| \leq 1\}$  donde  $\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ . La bola  $\mathbf{B}^n$  es conexa por trayectorias pues dados dos puntos cualesquiera  $x, y \in \mathbf{B}^n$ , el segmento de línea recta  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definido por  $f(t) = (1-t)x + ty$  está totalmente contenido en  $\mathbf{B}^n$  ya que  $\|f(t)\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\| \leq 1$ .*

Todo espacio  $X$  conexo por trayectorias es un espacio conexo, sin embargo el recíproco es falso. Un espacio conexo no necesariamente es conexo por trayectorias. Ilustramos lo anterior con un ejemplo y para ello necesitamos los dos siguientes resultados. La demostración de estos puede encontrarse en [Mu02].

**Proposición 1.3.4.** *Si  $A$  es conexo y  $f : A \rightarrow X$  una función continua, entonces  $f(A)$  es conexo.*

**Proposición 1.3.5.** *Si  $A$  es un conjunto conexo, entonces la cerradura de  $A$  también es un conjunto conexo.*

**Ejemplo 1.3.6.** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  el conjunto dado por la unión de  $\{0\} \times [-1, 1]$  y la imagen  $f((0, 1])$  de  $f(t) = (t, \sin(1/t))$ . Notemos que  $A$  es conexo pues es la cerradura de  $f((0, 1])$ , el cual es conexo ya que  $f$  es continua y  $(0, 1]$  es un conjunto conexo. Sin embargo, no es conexo por trayectorias pues no existe una trayectoria que una los puntos  $(1, \sin(1))$  y  $(0, 0)$ .*

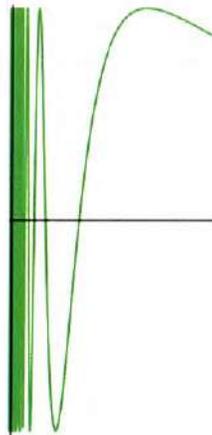


FIGURA 1.2: Seno del Topólogo.

A veces no necesitaremos que nuestro espacio  $X$  sea conexo en su totalidad, sino que lo necesitaremos en alguna vecindad de cierto punto. Definiremos esta propiedad local:

**Definición 1.3.7.** *Diremos que un espacio  $X$  es localmente conexo en  $x$  si para cada vecindad  $U$  de  $x$  existe una vecindad conexa de  $x$  contenida en  $U$ . Diremos que  $X$  es localmente conexo si lo es en cada uno de sus puntos. Análogamente para localmente conexo por trayectorias.*

**Ejemplo 1.3.8.** *Cada intervalo de  $\mathbb{R}$  es localmente conexo y también es conexo.*

**Ejemplo 1.3.9.** *El conjunto  $[-1, 0) \cup (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  es localmente conexo, pero no es conexo.*

## Capítulo 2

# Grupo Fundamental y Espacios Cubrientes

Los conceptos de este capítulo tienen como objetivo general el problema de saber cuándo dos espacios son homeomorfos. Para este problema estudiaremos el grupo fundamental de un espacio, también llamado primer grupo de homotopía. Para estudiarlo introduciremos a las homotopías. Después estudiaremos los espacios cubrientes que serán de gran ayuda cuando nuestro grupo fundamental no resulte trivial.

En todo este capítulo supondremos que el lector está familiarizado con la topología y los conceptos relacionados a  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.1. Homotopías por trayectorias

**Definición 2.1.1.** Sean  $X, Y$  espacios topológicos e  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Si  $f$  y  $f'$  son funciones continuas del espacio  $X$  en el espacio  $Y$ , decimos que  $f$  es homotópica a  $f'$  si existe una función continua  $F : X \times I \rightarrow Y$  tal que

$$F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = f'(x)$$

para toda  $x \in X$ . Entonces,  $F$  es llamada homotopía entre  $f$  y  $f'$ .

Si  $f$  es homotópica a  $f'$ , escribimos  $f \simeq f'$ . Si  $f$  es homotópica a una función constante, diremos que  $f$  es homotópicamente nula.

Se puede pensar que una homotopía es como una familia paramétrica continua de funciones de  $X$  a  $Y$  y la segunda componente de  $X \times I$  es un representante del tiempo y así la homotopía  $F$  describe una “deformación” continua de la función  $f$  en la función  $f'$ , cuando este parámetro varía de 0 a 1.

**Definición 2.1.2.** *Dos trayectorias  $f, f' : I \rightarrow X$  son homotópicas por trayectorias si tienen el mismo punto inicial  $x_0$  y el mismo punto final  $x_1$ , y si existe una función  $F$  continua  $F : I \times I \rightarrow X$  tal que*

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= f(s), \quad F(s, 1) = f'(s) \\ F(0, t) &= x_0, \quad F(1, t) = x_1 \end{aligned}$$

para cada  $s \in I$  y cada  $t \in I$ . A la función  $F$  se le llama homotopía por trayectorias entre  $f$  y  $f'$ . Si  $f$  es homotópico por trayectorias a  $f'$ , escribimos  $f \simeq_p f'$ .

La primera condición dice que  $F$  puede deformar continuamente a la trayectoria  $f$  en la trayectoria  $f'$ . La segunda condición dice que los puntos extremos de la trayectoria permanecen fijos durante la deformación. Podemos ilustrar lo anterior con la figura siguiente.

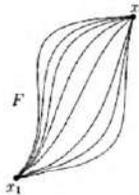


FIGURA 2.1: Homotopía por trayectorias.

**Lema 2.1.1.** *La homotopía en el espacio de funciones continuas  $C(X, Y)$  define una relación de equivalencia.*

*Demostración:* Reflexiva: Dada  $f$ , se tiene que  $f \simeq f$  pues la función  $F(x, t) = f(x)$  es la homotopía requerida. Si  $f$  es una trayectoria,  $F$  es una homotopía por trayectorias. Simetría: Supongamos que  $f \simeq f'$ . Sea  $F$  una homotopía entre  $f$  y  $f'$ , entonces  $G(x, t) = F(x, 1 - t)$  es una homotopía entre  $f'$  y  $f$ . Si  $F$  es una homotopía por trayectorias,  $G$  también lo es. Transitividad: Supongamos que  $f \simeq f'$  y  $f' \simeq f''$ . Sea  $F$  una homotopía entre  $f$  y  $f'$  y  $F'$  una homotopía entre  $f'$  y  $f''$ . Definamos  $G : X \times I \rightarrow Y$  por

$$G(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & \text{para } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F'(x, 2t - 1), & \text{para } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La función  $G$  está bien definida, ya que, para  $t = \frac{1}{2}$ , tenemos que  $F(x, 2t) = f'(x) = F'(x, 2t - 1)$ . Dado que  $G$  es continua en los dos subconjuntos cerrados  $X \times [0, \frac{1}{2}]$  y  $X \times [\frac{1}{2}, 1]$  de  $X \times I$ , por el lema 1.3.1,  $G$  es continua en todo  $X \times I$ . Así,  $F$  es la homotopía requerida entre  $f$  y  $f''$ .

Ahora debemos comprobar que si  $F$  y  $F'$  son homotopías por trayectorias, entonces  $G$  también lo es. En efecto, supongamos que  $F'$  es una homotopía por trayectorias entre  $f'$  y  $f''$ . Sea  $f(0) = x_0 = f'(0)$  y sea  $f'(1) = x_1 = f''(1)$ . Debemos ver que  $G(0, t) = x_0$  y  $G(1, t) = x_1$  para toda  $t \in I$ . Notemos que  $G(0, t) = F(0, 2t) = f(0) = x_0$  para toda  $t \in I$ , además  $G(1, t) = F'(1, 2t - 1) = f'(1) = x_1$  para toda  $t \in I$ .

Por tanto,  $G$  es una homotopía por trayectorias y además  $G$  es una homotopía por trayectorias entre  $f$  y  $f''$ . En consecuencia,  $f \simeq_p f''$ .

□

Si  $f$  es una trayectoria, se denota su clase de equivalencia de homotopías por trayectorias por  $[f]$ . A continuación se define una operación sobre las clases de homotopía por trayectorias.

**Definición 2.1.3.** Si  $f$  es una trayectoria en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$  y  $g$  es una trayectoria en  $X$  de  $x_1$  a  $x_2$ , definimos el producto  $f * g$  de  $f$  y  $g$  como la trayectoria  $h$  dada por las ecuaciones

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2s - 1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La función  $h$  está bien definida y, por el lema 1.3.1, es continua. Además es una trayectoria en  $X$  de  $x_0$  a  $x_2$ . Observemos que  $h$  es la trayectoria cuya primera mitad es  $f$  y la segunda mitad es  $g$ .

**Lema 2.1.2.** La operación producto sobre trayectorias induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de trayectorias, dada por  $[f] * [g] := [f * g]$ .

*Demostración:* Sea  $F$  una homotopía por trayectorias entre  $f$  y  $f'$  y sea  $G$  una homotopía por trayectorias entre  $g$  y  $g'$  donde el punto final de  $f$  y  $f'$  es el punto inicial de  $g$  y  $g'$ . Definimos

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ G(2s - 1, t) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

- Como  $F(1, t) = x_1 = G(0, t)$  para toda  $t$ , pues  $F$  y  $G$  son homotopías por trayectorias, tenemos que  $H$  está bien definida y es continua por el lema 1.3.1. Ahora, debemos comprobar que  $H$  es la homotopía requerida entre  $f * g$  y  $f' * g'$ .

Notemos que

$$H(s, 0) = \begin{cases} f(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2s - 1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Por tanto,  $H(s, 0) = (f * g)(s)$ . Análogamente, notemos que

$$H(s, 1) = \begin{cases} f'(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g'(2s - 1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Por tanto,  $H(s, 1) = (f' * g')(s)$ .

Ahora veremos que  $H(s, t)$  es una homotopía por trayectorias. Sea  $f(0) = x_0 = f'(0)$  y  $g(1) = x_1 = g'(1)$ . Debemos ver que  $H(0, t) = x_0$  y  $H(1, t) = x_1$ . Notemos que  $H(0, t) = F(0, t) = f(0) = x_0$  y  $H(1, t) = G(1, t) = g'(1) = x_1$ . Por lo tanto, la operación producto sobre trayectorias induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de trayectorias.

□

A diferencia de un grupo, la operación  $[f] * [g]$  no está definida para cualquier par de clases, sino para aquellos pares  $[f], [g]$  tales que  $f(1) = g(0)$ .

Utilizaremos las proposiciones 2.1.4 y 2.1.5 para probar propiedades de la operación  $*$ .

**Proposición 2.1.4.** *Sea  $\kappa : X \rightarrow Y$  una función continua y  $F$  es una homotopía por trayectorias en  $X$  entre las trayectorias  $f$  y  $f'$ , entonces  $\kappa \circ F$  es una homotopía por trayectorias en  $Y$  entre las trayectorias  $\kappa \circ f$  y  $\kappa \circ f'$ .*

*Demostración:* Notemos que  $\kappa \circ F$  es continua. Como

$$\kappa \circ F(s, 0) = k \circ f(s), \quad \kappa \circ F(s, 1) = \kappa \circ f'(s),$$

$$k \circ F(0, t) = k(x_0), \quad \kappa \circ F(0, t) = \kappa(x_1),$$

entonces  $\kappa \circ F$  es una homotopía por trayectorias de  $\kappa \circ f$  a  $\kappa \circ f'$ .

□

**Proposición 2.1.5.** *Si  $k : X \rightarrow Y$  es una función continua y si  $f$  y  $g$  son trayectorias en  $X$  con  $f(1) = g(0)$ , entonces  $k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g)$ .*

*Demostración:* Por la propiedad de la operación  $*$ :

$$(\kappa \circ f) * (\kappa \circ g)(s) = \begin{cases} \kappa \circ f(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \kappa \circ g(2s - 1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ahora, si  $s \in [0, \frac{1}{2}]$  tenemos

$$\kappa \circ (f * g)(s) = \kappa((f * g)(s)) = \kappa(f(2s)),$$

y si  $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ ,

$$\kappa \circ (f * g)(s) = \kappa((f * g)(s)) = \kappa(g(2s - 1)).$$

Por tanto  $k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g)$ .

□

**Teorema 2.1.6.** *La operación  $*$  tiene las siguientes propiedades:*

- 1) *Asociatividad.* Si  $[f] * ([g] * [h])$  está definida, entonces  $([f] * [g]) * [h]$  también lo está y son iguales.
- 2) *Existencia de neutro por la izquierda y por la derecha.* Para cada  $x \in X$ , denotamos por  $e_x$  la trayectoria constante  $e_x : I \rightarrow X$  que lleva todo el intervalo  $I$  al punto  $x$ , es decir,  $e_x(t) = x$ . Si  $f$  es una trayectoria en  $X$  desde  $x_0$  hasta  $x_1$ , entonces

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \quad \text{y} \quad [e_{x_0}] * [f] = [f].$$

- 3) *Existencia de inversos.* Dada la trayectoria  $f$  en  $X$  desde  $x_0$  hasta  $x_1$ , sea  $\bar{f}$  la trayectoria definida por  $\bar{f}(s) = f(1 - s)$ , el cual se conoce como inverso de  $f$ , entonces

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad y \quad [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}].$$

*Demostración:* Probaremos 2). Denotamos por  $e_0 : I \rightarrow I$  la trayectoria constante igual a cero y denotamos por  $i : I \rightarrow I$  la función identidad, entonces  $e_0 * i$  es también una trayectoria de 0 a 1.

Como  $I$  es convexo, existe una homotopía por trayectorias  $G : I \times I \rightarrow I$  entre  $i$  y  $e_0 * i$ . Por ejemplo,

$$G(s, t) = \begin{cases} 0 & \text{para } s \in [0, \frac{t}{2}], \\ \frac{2s-t}{2-t} & \text{para } s \in [\frac{t}{2}, 1]. \end{cases}$$

Luego,  $f \circ G$  es una homotopía por trayectorias en  $X$  entre  $f \circ i$  y  $f \circ (e_0 * i)$ , pero por la proposición 2.1.5,

$$\begin{aligned} f \circ i &= f, \\ f \circ (e_0 * i) &= (f \circ e_0) * (f \circ i) = e_{x_0} * f. \end{aligned}$$

Así, las trayectorias  $f$  y  $e_{x_0} * f$  son homotópicas, y por la proposición 2.1.4 tenemos  $[f] = [e_{x_0}] * [f]$ .

Ahora, sea  $i$  la función identidad y  $e_1$  la trayectoria constante igual a 1 en  $I$ . Como  $I$  es convexo, existe una homotopía por trayectorias  $G'$  en  $I$  entre  $i$  e  $i * e_1$ , entonces  $f \circ G'$  es una homotopía por trayectorias entre  $f \circ i$  y  $f \circ (i * e_1)$ , pero

$$\begin{aligned} f \circ i &= f, \\ f \circ (i * e_1) &= (f \circ i) * (f \circ e_1) = f * e_{x_1}. \end{aligned}$$

Así, las trayectorias  $f$  y  $f * e_1$  son homotópicas, entonces  $[f] = [f] * [e_{x_1}]$ .

Para probar 3), notemos que el inverso de  $i$  está dado por  $\bar{i}(s) = 1 - s$ , entonces  $i * \bar{i}$  es una trayectoria en  $I$  empezando y terminando en 0, al igual que  $e_0$ .

Como  $I$  es convexo, existe una homotopía por trayectorias  $H$  en  $I$  entre  $e_0$  y  $i * \bar{i}$ . Entonces  $f \circ H$  es una homotopía entre  $f \circ e_0$  y  $f \circ (i * \bar{i})$ .

Como  $f \circ e_0 = e_{x_0}$  y  $f \circ (i * \bar{i}) = (f \circ i) * (f \circ \bar{i})$ , entonces existe una trayectoria  $\bar{f} = f \circ \bar{i}$  tal que  $f * \bar{f}$  es homotópica a  $e_{x_0}$ . Así,  $f \circ (i * \bar{i}) = (f \circ i) * (f \circ \bar{i}) = f * \bar{f}$ , entonces  $[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}]$ . Análogamente,  $[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$ .

Ahora, probaremos 1). Usando la definición de producto,

$$((f * g) * h)(s) = \begin{cases} f(4s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{4}], \\ g(4s - 1) & \text{para } s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ h(2s - 1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

$$(f * (g * h))(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(4s - 2) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ h(4s - 3) & \text{para } s \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Encontraremos una homotopía  $F$  entre  $((f * g) * h)$  y  $(f * (g * h))$ .

Sea

$$F(s, t) = \begin{cases} f(\frac{4s}{t+1}) & \text{para } s \in [0, \frac{t+1}{4}], \\ g(4s - t - 1) & \text{para } s \in [\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}], \\ h(1 - \frac{4(s-1)}{t-2}) & \text{para } s \in [\frac{t+2}{4}, 1]. \end{cases}$$

Como

$$F(s, 0) = \begin{cases} f(4s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{4}], \\ g(4s - 1) & \text{para } s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ h(2s - 1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

$$F(s, 1) = \begin{cases} f(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(4s - 2) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ h(4s - 3) & \text{para } s \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

$$F(0, t) = f(0),$$

$$F(1, t) = h(1),$$

podemos concluir que  $((f * g) * h)(s)$  es homotópico por trayectorias a  $(f * (g * h))(s)$ .

□

## 2.2. El Grupo Fundamental

El conjunto de las clases de homotopía de trayectorias en un espacio topológico  $X$  no es un grupo con la operación  $*$  pues el producto de dos clases de homotopía de trayectorias no siempre está definido; sin embargo, si tomamos un punto  $x_0 \in X$  que sea nuestro “punto base” y sólo nos centramos en las trayectorias que empiezan y terminan en  $x_0$ , entonces el conjunto de las clases de homotopía de dichas trayectorias sí es un grupo con la operación  $*$ .

Se sigue del teorema 2.1.6 que la operación  $*$  en este conjunto satisface los axiomas de grupo.

**Definición 2.2.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $x_0 \in X$ . Una trayectoria en  $X$  que empieza y termina en  $x_0$  es llamada lazo basado en  $x_0$ . El conjunto de las clases de homotopía por trayectorias de lazos basados en  $x_0$ , bajo la operación  $*$  es llamado el grupo fundamental de  $X$  relativo al punto base  $x_0$ , y se denota por  $\pi_1(X, x_0)$ .*

**Definición 2.2.2.** *Sea  $\alpha$  una trayectoria en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$  y  $\bar{\alpha}$  otra trayectoria en  $X$  de  $x_1$  a  $x_0$ . Definimos la función*

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

por la ecuación

$$\hat{\alpha}([f]) := [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha].$$

Notemos que  $\hat{\alpha}$  está bien definida ya que la operación  $*$  está bien definida. Además si  $f$  es un lazo basado en  $x_0$ , entonces  $\bar{\alpha} * (f * \alpha)$  es un lazo basado en  $x_1$ .

**Teorema 2.2.3.** *La función  $\hat{\alpha}$  es un isomorfismo de grupos.*

*Demostración:* Por cálculo directo, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) &= ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= ([\bar{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha]) \\ &= \hat{\alpha}([f] * [g]). \end{aligned}$$

Así  $\hat{\alpha}$  es un homomorfismo. Veamos que  $\hat{\alpha}$  es un isomorfismo, probaremos que si  $\beta = \bar{\alpha}$  que es el inverso de  $\alpha$ , entonces  $\hat{\beta}$  es el inverso para  $\hat{\alpha}$ .

Calcularemos para cada elemento  $[h]$  de  $\pi_1(X, x_1)$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}([h]) &= [\bar{\beta}] * [h] * [\beta] \\ &= [\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}], \\ \hat{\alpha}(\hat{\beta}([h])) &= [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] \\ &= [h].\end{aligned}$$

Ahora, para cada elemento  $[f]$  de  $\pi_1(X, x_0)$  tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) &= [\alpha] * ([\alpha]^{-1} * [f] * [\alpha]) * [\bar{\alpha}] \\ &= [f].\end{aligned}$$

Así,  $\hat{\beta}$  es la función inversa de  $\hat{\alpha}$ , entonces  $\hat{\alpha}$  es biyectiva y por tanto es un isomorfismo.

□

**Corolario 2.2.1.** *Si  $X$  es conexo por trayectorias y  $x_0$  y  $x_1$  son dos puntos de  $X$ , entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es isomorfo a  $\pi_1(X, x_1)$ .*

Es decir, si  $X$  es conexo por trayectorias, el grupo fundamental depende sólo de  $X$ .

**Definición 2.2.4.** *Un espacio  $X$  se dice que es simplemente conexo si es conexo por trayectorias y  $\pi_1(X, x_0)$  es el grupo trivial para algún  $x_0 \in X$ .*

*Si  $\pi_1(X, x_0)$  es el grupo trivial escribimos  $\pi_1(X, x_0) = 0$ .*

**Lema 2.2.1.** *En un espacio simplemente conexo  $X$ , dos trayectorias cualesquiera con los mismos puntos inicial y final son homotópicas por trayectorias.*

*Demostración:* Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos trayectorias de  $x_0$  a  $x_1$ , entonces  $\alpha * \bar{\beta}$  está definido y es un lazo basado en  $x_0$ . Como  $X$  es simplemente conexo, este lazo es homotópico por trayectorias al lazo constante en  $x_0$ . Por tanto,

$$[\alpha] = [\alpha] * [e_{x_0}] = [\alpha] * ([\bar{\beta}] * [\beta]) = ([\alpha] * [\bar{\beta}]) * [\beta] = [\alpha * \bar{\beta}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta] = [\beta],$$

lo que quiere decir que  $\alpha$  y  $\beta$  son homotópicas por caminos.

□

El grupo fundamental es un invariante topológico, es decir, que espacios homeomorfos tendrán grupos fundamentales isomorfos. Para probar este hecho, veamos que una función continua entre espacios topológicos induce un homomorfismo entre sus grupos fundamentales.

**Definición 2.2.5.** Sea  $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  una función continua, es decir,  $h$  va de  $X$  en  $Y$  y manda a  $x_0$  en  $y_0$ . Definimos

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

por la ecuación

$$h_*([f]) = [h \circ f].$$

La función  $h_*$  se denomina homomorfismo inducido por  $h$ , relativo al punto base  $x_0$ .

Notemos que  $h_*$  está bien definida, pues si  $F$  es una homotopía por trayectorias entre  $f$  y  $f'$ , entonces  $h \circ F$  es una homotopía por trayectorias entre las trayectorias  $h \circ f$  y  $h \circ f'$ . El hecho de que  $h_*$  sea un homomorfismo se deduce de

$$(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g).$$

El homomorfismo definido anteriormente depende de  $h : X \rightarrow Y$  y de la elección del punto base.

**Teorema 2.2.6.** Si  $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  y  $k : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  son continuas, entonces  $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$ . Si  $i : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  es la función identidad, entonces  $i_*$  es el homomorfismo identidad.

*Demostración:* Se sigue directamente de la definición que

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f],$$

$$(k_* \circ h_*)([f]) = k_*(h_*([f])) = k_*([h \circ f]) = [k \circ (h \circ f)].$$

Análogamente

$$i_*([f]) = [i \circ f] = [f].$$

□

**Corolario 2.2.2.** Si  $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  es un homeomorfismo entre  $X$  y  $Y$ , entonces  $h_*$  es un isomorfismo entre  $\pi_1(X, x_0)$  y  $\pi_1(Y, y_0)$ .

*Demostración:* Sea  $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  y sea  $k : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  su inversa. Entonces,  $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$ , con  $i$  la función identidad de  $(X, x_0)$  y  $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*$ , con  $j$  la función identidad de  $(Y, y_0)$ . Como  $i_*$  es el homomorfismo identidad de  $\pi_1(X, x_0)$  y  $j_*$  es el homomorfismo identidad de  $\pi_1(Y, y_0)$ , entonces  $k_*$  es la inversa de  $h_*$ . Así,  $h_*$  es biyectiva y, por tanto,  $h_*$  es un isomorfismo entre  $\pi_1(X, x_0)$  y  $\pi_1(Y, y_0)$ .

□

## 2.3. Espacios Cubrientes

**Definición 2.3.1.** Sea  $p : E \rightarrow B$  una función continua y sobreyectiva. Un conjunto abierto  $U$  de  $B$  se dice que está regularmente cubierto por  $p$  si

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$$

con  $\Lambda$  un conjunto de índices y  $V_\alpha$  conjuntos abiertos de  $E$ , tales que para cada  $\alpha \in \Lambda$ ,  $p|_{V_\alpha}$  es un homeomorfismo de  $V_\alpha$  en  $U$ .

La colección  $\{V_\alpha\}$  será denominada una partición de  $p^{-1}(U)$  en rebanadas.

Notemos que si  $U$  está regularmente cubierto por  $p$  y  $W$  es un conjunto abierto conteniendo a  $U$ , entonces  $W$  también está regularmente cubierto por  $p$ .

**Definición 2.3.2.** Sea  $p : E \rightarrow B$  una función continua y sobreyectiva. Si todo punto  $b \in B$  tiene una vecindad  $U$  que está regularmente cubierta por  $p$ , entonces  $p$  es una función cubriente y  $E$  es un espacio cubriente de  $B$ .

**Lema 2.3.1.** Si  $p : E \rightarrow B$  es una función cubriente, entonces  $p$  es un homeomorfismo local entre  $E$  y  $B$ .

*Demostración:* Sea  $p : E \rightarrow B$  una función cubriente y sea  $e \in E$ . Sea  $U$  una vecindad de  $b = p(e)$  tal que  $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$ , con  $V_\alpha$  un conjunto abierto de  $E$  y  $p|_{V_\alpha}$  es un homeomorfismo de  $V_\alpha$  en  $U$ . Sea  $\alpha' \in \Lambda$  tal que  $V_{\alpha'}$  contiene a  $e$ , entonces  $p|_{V_{\alpha'}}$  es un homeomorfismo de  $V_{\alpha'}$  en  $U$ .

□

El siguiente teorema afirma que al aplicar el producto cartesiano a dos funciones cubrientes el resultado es una función cubriente.

**Teorema 2.3.3.** *Si  $p : E \rightarrow B$  y  $p' : E' \rightarrow B'$  son funciones cubrientes, entonces la función*

$$p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$$

*es una función cubriente.*

*Demostración:* Dados  $b \in B$  y  $b' \in B'$ , sea  $U$  una vecindad de  $b$  y sea  $U'$  vecindad de  $b'$  regularmente cubiertas por  $p$  y  $p'$  respectivamente. Sean  $\{V_\alpha\}$  y  $\{V_{\beta'}\}$  particiones en rebanadas de  $p^{-1}(U)$  y  $(p')^{-1}(U')$  respectivamente, entonces

$$(p \times p')^{-1}(U \times U') = p^{-1}(U) \times (p')^{-1}(U') = \sqcup V_\alpha \times U_{\beta'} = \sqcup (V_\alpha \times V_{\beta'}),$$

y éstos son conjuntos abiertos y ajenos de  $E \times E'$ , y cada uno de ellos se aplica de manera homeomorfa sobre  $U \times U'$  vía  $p \times p'$ .

□

**Definición 2.3.4.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  una función. Si  $f$  es una función continua de algún espacio  $X$  en  $B$ , un levantamiento de  $f$  es una función  $\tilde{f} : X \rightarrow E$  tal que  $p \circ \tilde{f} = f$ .*

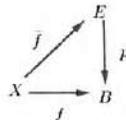


FIGURA 2.2: Levantamiento de  $f$ .

La existencia de levantamientos de funciones cuando  $p$  es una función cubriente es útil en el estudio de los espacios cubrientes y el grupo fundamental. Vamos a probar que las trayectorias pueden ser levantadas si nuestro espacio es espacio cubriente, también probaremos que este resultado se vale para homotopías por trayectorias. Para esto necesitamos del lema del número de Lebesgue.

**Lema 2.3.2** (Número de Lebesgue). *Sea  $\mathbb{A}$  un recubrimiento abierto del espacio métrico  $(X, d)$ . Si  $X$  es compacto, existe  $\delta > 0$  tal que para cada subconjunto  $X$  con diámetro menor que  $\delta$ , existe un elemento de  $\mathbb{A}$  conteniéndolo.*

*El número  $\delta$  es llamado número de Lebesgue para el recubrimiento  $\mathbb{A}$ .*

*Demostración:* La demostración puede ser encontrada en la referencia [Mu02].

**Lema 2.3.3.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  una función cubriente con  $p(e_0) = b_0$ . Cualquier trayectoria  $f : [0, 1] \rightarrow B$  empezando en  $b_0$  tiene un único levantamiento a una trayectoria  $\tilde{f}$  en  $E$  que empieza en  $e_0$ .*

*Demostración:* Para cada  $b \in B$ , sea  $U_b$  la vecindad de  $b$  que esté regularmente cubierta por  $p$ . Consideremos las cubiertas abiertas de  $\{U_b\}_{b \in B}$  de  $B$  y de  $\{f^{-1}(U_b)\}_{b \in B}$  de  $[0, 1]$ . Como  $[0, 1]$  es compacto, extraemos una subcubierta finita  $\{f^{-1}(U_{b_i})\}_{i=1}^n$ . Por el lema del número de Lebesgue existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $b \in B$ ,  $i = 1, \dots, n$ , existe una bola abierta  $B_\delta(x)$  totalmente contenido en  $f^{-1}(U_{b_i})$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Por tanto podemos encontrar una partición  $\{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1\}$  tal que  $f([s_i, s_{i+1}])$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , está contenido en algún  $U_b$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad,  $x_1 < \dots < x_n$ , entonces  $B_\delta(x_i) \cap B_\delta(x_{i+1}) \neq \emptyset$  y tomamos  $s_i \in B_\delta(x_i) \cap B_\delta(x_{i+1})$  para  $i = 1, \dots, n-1$ . Claramente,  $[s_i, s_{i+1}] \subseteq B_\delta(x_{i+1})$  para  $i = 1, \dots, n-1$ , y como  $B_\delta(x_{i+1}) \subseteq f^{-1}(U_{b_i})$ , tenemos la partición deseada.

Vamos a definir el levantamiento de  $\tilde{f}$  de  $f$ . Definamos  $\tilde{f}(0) := e_0$ . Supongamos que  $\tilde{f}(s)$  está definida para  $s \in [0, s_i]$ . Definamos  $\tilde{f}(s)$  en  $[s_i, s_{i+1}]$  tomando  $U$  abierto que esté regularmente cubierto por  $p$  y  $f([s_i, s_{i+1}])$  que esté contenido en  $U$ . Sea  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$  la cubierta abierta de  $p^{-1}(U)$ , tal que cada  $V_\alpha$  es transformado por  $p$  de manera homeomorfa sobre  $U$ . Sea  $0 \in I$  tal que  $V_0 \in \{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$  y que  $\tilde{f}(s_i) \in V_0$ .

Definamos  $\tilde{f}(s)$  para  $s \in [s_i, s_{i+1}]$  por la ecuación

$$\tilde{f}(s) = (p|_{V_0})^{-1}(f(s)).$$

Como  $p|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$  es un homeomorfismo,  $\tilde{f}$  es continua en el intervalo  $[s_i, s_{i+1}]$ . Continuando con este procedimiento, como ya definimos  $\tilde{f}(0)$ , podemos definir a  $\tilde{f}$  en todo el intervalo  $[0, 1]$ . Como  $\tilde{f}$  es continua en cada intervalo de la forma  $[s_i, s_{i+1}]$ ,  $\tilde{f}$  es continua en  $[0, 1]$  por el lema 1.3.1.

De la construcción de  $\tilde{f}$ , es claro que  $p \circ \tilde{f} = f$ , por tanto  $\tilde{f}$  es un levantamiento de  $f$ . Ahora probaremos la unicidad de  $\tilde{f}$ , es decir, probaremos que  $\tilde{f}$  es el único levantamiento con punto inicial  $e_0$ . Supongamos que  $\tilde{f}'$  es otro levantamiento de  $f$  y es tal que  $\tilde{f}'(0) = e_0$ . Supongamos que  $\tilde{f}'(s) = \tilde{f}(s)$  para toda  $s \in [0, s_i]$ . Sea  $V_0$  como la definimos anteriormente.

Dado que  $\tilde{f}'$  es un levantamiento de  $f$ , debe llevar el intervalo  $[s_i, s_{i+1}]$  en el subconjunto  $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$ , donde los  $V_\alpha$  son abiertos y ajenos. Como  $\tilde{f}'([s_i, s_{i+1}])$  es conexo debe estar totalmente contenido en algún  $V_\alpha$ . Además,  $\tilde{f}'(s_i) = \tilde{f}(s_i) \in V_0$ , entonces

$\tilde{f}'([s_i, s_{i+1}]) \subset V_0$ . Por tanto, para  $s \in [s_i, s_{i+1}]$ ,  $\tilde{f}'(s)$  debe ser igual algún  $y$  de  $V_0$  que esté en  $p^{-1}(f(s))$ , pero por ser  $\tilde{f}'$  inyectiva, sólo hay un punto  $y$  que cumpla estas condiciones, que es  $(p|_{V_0})^{-1}(f(s))$ . Como  $\tilde{f}'(0) = e_0$ , entonces  $\tilde{f}'(0) = \tilde{f}(0)$ .

Por tanto,  $\tilde{f}'(s) = \tilde{f}(s)$  para toda  $s \in [s_i, s_{i+1}]$  y procediendo inductivamente, concluimos que  $\tilde{f}'(s) = \tilde{f}(s)$  para toda  $s \in [0, 1]$ .

□

**Lema 2.3.4.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  una función cubriente con  $p(e_0) = b_0$  y sea  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$  una función continua con  $F(0, 0) = b_0$ , entonces existe un único levantamiento de  $F$  a una función continua*

$$\tilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E,$$

tal que  $\tilde{F}(0, 0) = e_0$ .

Si  $F$  es una homotopía por trayectorias, entonces  $\tilde{F}$  también es una homotopía por trayectorias.

*Demostración:* Dada  $F$ , definimos  $\tilde{F}(0, 0) = e_0$ . Definimos  $\tilde{F}$  en  $0 \times I$  como el único levantamiento de  $F|_{\{0\} \times I}$  empezando en  $e_0$ , análogamente definimos  $\tilde{F}$  en  $I \times 0$  como el único levantamiento de  $F|_{I \times \{0\}}$  empezando en  $e_0$ . Tomamos una cubierta  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Sigma}$  de  $B$  tal que cada  $U_\alpha$  está regularmente cubierta y sea  $\delta > 0$  el número de Lebesgue asociado a la cubierta  $\{F^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Sigma}$ . De manera similar, tomamos particiones

$$\begin{aligned} \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1\} \\ \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\} \end{aligned}$$

tal que  $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$  tiene diámetro menor que  $\delta$ , entonces  $F([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]) \subseteq U$ , donde  $U \in \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Sigma}$ .

Sea  $I_i = [s_{i-1}, s_i]$  y  $J_j = [t_{j-1}, t_j]$ . Definimos el levantamiento  $\tilde{F}$  comenzando con el rectángulo  $I_1 \times J_1$ , continuando con los otros rectángulos  $I_i \times J_1$  de la "fila anterior", después con los rectángulos  $I_i \times J_2$  de la siguiente fila y así sucesivamente.

En general, dados  $i_0$  y  $j_0$ , supongamos que  $\tilde{F}$  está definida en el conjunto  $A$  determinado por la unión de  $0 \times I$ ,  $I \times 0$  y todos los rectángulos "previos" a  $I_{i_0} \times J_{j_0}$ , que son aquellos rectángulos  $I_i \times J_j$  con  $j < j_0$  y aquellos con  $j = j_0$  e  $i < i_0$ .

Supongamos también que  $\tilde{F}$  es un levantamiento continuo de  $F|_A$  y procedamos a definir  $\tilde{F}$  en  $I_{i_0} \times J_{j_0}$ . Escojamos un conjunto abierto  $U$  de  $B$  que esté regularmente cubierto por  $p$  y que contenga al conjunto  $F(I_{i_0} \times J_{j_0})$ .

Sea  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  una partición en rebanadas de  $p^{-1}(U)$  tal que cada conjunto  $V_\alpha$  se transforma de manera homeomorfa vía  $p$  sobre  $U$ . Así,  $\tilde{F}$  ya está definida en el conjunto  $C := A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0})$  y el cual es la unión del lado izquierdo e inferior del rectángulo  $I_{i_0} \times J_{j_0}$ , por lo cual  $C$  es conexo. Por tanto,  $\tilde{F}(C)$  es conexo y debe estar totalmente contenido dentro de uno de los conjuntos  $V_\alpha$ . Sea  $0 \in \Lambda$  tal que  $V_0 \in \{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  y  $\tilde{F}(C) \subset V_0$ .

Denotamos por  $p_0 : V_0 \rightarrow U$  la restricción de  $p$  a  $V_0$ . Dado que  $\tilde{F}$  es un levantamiento de  $F|_A$ , para  $x \in C$

$$p_0(\tilde{F}(x)) = p(\tilde{F}(x)) = F(x)$$

de manera que  $\tilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$ . Por tanto, podemos extender  $\tilde{F}$  definiendo

$$\tilde{F}(x) := p_0^{-1}(F(x))$$

para  $x \in I_{i_0} \times J_{j_0}$ . Por el lema 1.3.1,  $\tilde{F}$  es continua en  $A \cup (I_{i_0} \times J_{j_0})$ . Continuando con este proceso, extendemos a  $\tilde{F}$  en  $I \times I$ .

Ahora supongamos que  $F$  es una homotopía por trayectorias. La función  $F$  lleva todo el lado izquierdo  $0 \times I$  de  $I \times I$  a un sólo punto  $b_0 \in B$ . Como  $\tilde{F}$  es un levantamiento de  $F$ , lleva  $0 \times I$  a  $p^{-1}(b_0)$ , que tiene la topología discreta como subespacio de  $E$ . Como  $0 \times I$  es conexo, y  $\tilde{F}$  es continua,  $\tilde{F}(0 \times I)$  también es conexo, y por lo tanto debe ser igual a un conjunto unipuntual.

Análogamente,  $\tilde{F}(1 \times I)$  debe ser un conjunto unipuntual. Por tanto  $\tilde{F}$  es una homotopía por trayectorias.

Ahora, para comprobar la unicidad, sólo debemos observar la construcción de  $\tilde{F}$  pues extendimos a  $\tilde{F}$  rectángulo por rectángulo de manera continua y en cada uno de ellos la unicidad es clara, así que una vez que establecemos  $\tilde{F}(0,0)$ ,  $\tilde{F}$  está completamente determinada.

□

**Teorema 2.3.5.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  una función cubriente con  $p(e_0) = b_0$ . Sean  $f$  y  $g$  dos trayectorias en  $B$  de  $b_0$  a  $b_1$  y sean  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  sus respectivos levantamientos a trayectorias en  $E$  comenzando en  $e_0$ . Si  $f$  y  $g$  son homotópicos por trayectorias, entonces  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  terminan en el mismo punto de  $E$  y son homotópicas por trayectorias.*

*Demostración:* Sea  $F : I \times I \rightarrow B$  una homotopía por trayectorias entre  $f$  y  $g$ , entonces  $F(0,0) = b_0$ . Sea  $\tilde{F} : I \times I \rightarrow E$  el levantamiento de  $F$  a  $E$  tal que  $\tilde{F}(0,0) = e_0$ . Por el

lema anterior,  $\tilde{F}$  es una homotopía por trayectorias de manera que  $\tilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}$ , y por el mismo argumento,  $\tilde{F}(1 \times I) = \{e_1\}$ .

La restricción  $\tilde{F}|_{I \times 0}$  es una trayectoria en  $E$  comenzando en  $e_0$  y es un levantamiento de  $F|_{I \times 0}$ . Por la unicidad de los levantamientos de trayectorias, debemos tener que  $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s)$ .

Análogamente,  $\tilde{F}|_{I \times 1}$  es una trayectoria en  $E$ , que es un levantamiento de  $F|_{I \times 1}$  y comienza en  $e_0$  pues  $\tilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}$ . Por la unicidad de los levantamientos de trayectorias,  $\tilde{F}(s, 1) = \tilde{g}(s)$ .

Por lo tanto,  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  terminan en  $e_1$  y  $\tilde{F}$  es una homotopía por trayectorias entre ellos.

□

El siguiente teorema nos habla de cómo calcular grupos fundamentales de espacios cuando actúa sobre él un grupo de manera propiamente discontinua.

**Teorema 2.3.6.** *Sea  $X$  un conjunto simplemente conexo y  $\Gamma$  un grupo de homeomorfismos de  $X$  que actúa de manera propiamente discontinua en  $X$ . Entonces,  $\pi_1(X/\Gamma)$  es isomorfo a  $\Gamma$ .*

*Demostración:* Notemos que el grupo fundamental de  $X/\Gamma$  no depende de la elección del punto base. Sea  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ . Dados dos puntos  $\pi(x), \pi(y) \in X/\Gamma$  existe una trayectoria  $\gamma$  que tiene como punto inicial a  $x$  y como punto final a  $y$ . Notemos que  $\pi \circ \gamma$  es una trayectoria en  $X/\Gamma$  pues  $\pi$  es continua, y tiene como punto inicial  $\pi(x)$  y como punto final a  $\pi(y)$ . Entonces  $X/\Gamma$  es conexo por trayectorias y su grupo fundamental no depende de la elección del punto base.

Tomemos  $x_0 \in X$  y consideremos un lazo  $\gamma_1$  en  $X/\Gamma$  con punto base  $y_0 := \pi(x_0)$ . Por el lema 2.3.3 sabemos que existe un único levantamiento de  $\gamma_1$  en  $X$  cuyo punto inicial es  $x_0$ . Sea  $x_1$  el punto final de dicho levantamiento, y notemos que  $\pi(x_0) = \pi(x_1)$ , así existe  $g_1 \in \Gamma$  tal que  $x_1 = g_1(x_0)$ . Además  $g_1$  es único pues  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua.

Definimos la función  $\phi : \pi_1(X/\Gamma, y_0) \rightarrow \Gamma$  como  $\phi([\gamma_1]) = g_1$ . Como  $g_1$  es único,  $\phi$  está bien definida. Notemos  $\phi$  es sobreyectiva pues dado  $h \in \Gamma$  existe una trayectoria  $f$  que inicia en el punto  $x_0$  y finaliza en el punto  $hx_0$ . Observemos que la trayectoria  $\pi \circ f$  es un lazo con base en  $y_0$  y es tal que  $\phi([\pi \circ f]) = h$ .

Veamos que  $\phi$  es un homomorfismo de grupos. En efecto, sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  lazos en  $X/\Gamma$  con base en  $y_0$ . Tomamos  $f_1, f_2$  sus levantamientos en  $X$ , respectivamente, ambos con

punto inicial  $x_0$  y sean  $g_1 = \phi([\gamma_1])$ ,  $g_2 = \phi([\gamma_2])$ .

Ahora, definimos la función  $g_1 f_2 : [0, 1] \rightarrow X$  por medio de

$$(g_1 f_2)(t) = g_1(f_2(t)).$$

Notemos que  $g_1 f_2$  es una trayectoria en  $X$  con punto inicial  $g_1 x_0$  que es el punto final de  $f_1$ . También notemos que  $g_1 f_2$  es un levantamiento de  $\gamma_2$  con punto inicial  $g_1 x_0$  y su punto final es  $g_1(f_2(1)) = g_1(g_2 x_0) = (g_1 g_2)x_0$ .

Definamos la siguiente función

$$f(t) = \begin{cases} f_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 f_2(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y observamos que es un levantamiento para  $\gamma_1 * \gamma_2$  con punto inicial  $x_0$ . Como el punto final de  $g_1 f_2$  es  $(g_1 g_2)x_0$ , entonces  $\phi([\gamma_1] * [\gamma_2]) = \phi([\gamma_1 * \gamma_2]) = g_1 g_2 = \phi(\gamma_1)\phi(\gamma_2)$ . Por lo tanto,  $\phi$  es un homomorfismo de grupos.

Veamos que  $\phi$  es inyectivo. Supongamos que  $\gamma$  es un lazo con base en  $y_0$  y es tal que  $\phi([\gamma]) = e$ , es decir, que el levantamiento de  $\gamma$  con punto base en  $x_0$  es un lazo en  $X$ . Como  $X$  es simplemente conexo, entonces la clase de  $\gamma$  es la clase del lazo identidad, lo cual implica que  $\phi$  es inyectiva.

Como ya habíamos dicho que es sobreyectiva,  $\phi$  es un isomorfismo de grupos.

□

# Capítulo 3

## Conceptos de Geometría Hiperbólica

La geometría hiperbólica nace negando la unicidad de la que habla el quinto postulado de Euclides y asumiendo que dados una recta y un punto que no pasa por ella hay una infinidad de rectas que pasan por el punto y que son paralelas a la recta.

Probaremos algunos resultados con respecto a esta geometría que utilizaremos para nuestro teorema principal, por lo que para el lector interesado en continuar el estudio de las propiedades y elementos hiperbólicos se recomienda las referencias [St92], [RR95], [Iv92].

### 3.1. Plano Hiperbólico y Algunos Modelos

Daremos una definición axiomática del plano hiperbólico. Un plano hiperbólico es un conjunto  $\mathbb{P} \neq \emptyset$  cuyos elementos llamamos puntos y a las colecciones de subconjuntos geodésicas que satisfacen los siguientes axiomas:

**Axioma 1:** Si  $A$  y  $B$  son puntos distintos, entonces existe una y sólo una geodésica que contiene a  $A$  y  $B$ .

**Axioma 2:** Existe una función  $|\cdot| : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}_+$  que para cada par de puntos  $P, Q$  es tal que  $|PQ| = 0$  si  $P$  y  $Q$  son el mismo punto y  $|PQ| > 0$  cuando  $P \neq Q$ .

Además,  $|PQ| = |QP|$  y cumple la desigualdad del triángulo, es decir,

$$|PQ| \leq |PR| + |RQ|$$

para toda terna de puntos  $P, Q, R$ .

Este axioma hace que el plano hiperbólico sea un espacio métrico. El número  $|PQ|$  es llamado la distancia entre  $P$  y  $Q$ .

**Axioma 3:** Para cada geodésica  $\ell$  existe una función inyectiva  $f$  que manda el conjunto  $\ell$  al conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ , tal que si  $A, B \in \ell$  son cualesquiera dos puntos, entonces  $|AB| = |f(A) - f(B)|$ .

Este axioma hace que las geodésicas sean isométricas a  $\mathbb{R}$ .

Para los siguientes axiomas necesitamos los siguientes conceptos:

*Segmento.* Segmento  $\overline{PQ} = \{X \in \ell : |PX| + |XQ| = |PQ|\}$ .

*Rayo.* Sea  $P$  un punto y un segmento que empieza en  $P$ . Decimos que  $\vec{h} = \{x \in \ell : x \in \overline{PQ} \text{ o } |xP| > |xQ|\}$  es un rayo.

*Rayos opuestos.* Diremos que rayos opuestos son dos rayos tales que su unión es una geodésica.

**Axioma 4:** Si  $\ell$  es cualquier geodésica, existen dos subconjuntos  $HP_1$  y  $HP_2$  llamados semiplanos acotados por  $\ell$  tales que los conjuntos  $\ell, HP_1, HP_2$  son disjuntos, su unión es  $\mathbb{P}$  y tales que

- (a) Si  $P$  y  $Q$  son puntos que están en el mismo semiplano, el segmento de geodésica que los une no contiene ningún punto de  $\ell$ .
- (b) Si  $P$  y  $Q$  están en semiplanos opuestos, el segmento de geodésica que los une contiene un sólo punto de  $\ell$ .

**Axioma 5:** Para cada ángulo existe un número  $\alpha \in [0, \pi]$  llamado la medida del ángulo y cumple con:

- (a) Si  $\vec{h}$  y  $\vec{k}$  son el mismo rayo, la medida del ángulo es 0. Si  $\vec{h}$  y  $\vec{k}$  son rayos tales que su unión es una geodésica, la medida es  $\pi$ . Diremos que estos rayos son opuestos.
- (b) La suma de la medida de un ángulo y su ángulo suplementario es  $\pi$ .
- (c) Si  $\vec{j}$  está en el área comprendida entre los rayos  $\vec{h}, \vec{k}$  y  $\vec{j}, \vec{h}, \vec{k}$  empiezan en el mismo punto, entonces  $\alpha + \beta = \gamma$ , donde  $\alpha$  es el ángulo formado por  $\vec{h}, \vec{j}$ ,  $\beta$  el formado por  $\vec{j}, \vec{k}$ , y  $\gamma$  el formado por  $\vec{h}, \vec{k}$ .

- (d) Si un rayo  $\vec{k}$  que comienza en un punto  $Z$  está sobre una geodésica  $\ell$ , entonces en cada semiplano acotado por  $\ell$ , el conjunto de todos los rayos  $\vec{j}$  desde  $Z$  está en correspondencia uno a uno con el conjunto de los números reales  $\alpha \in (0, \pi)$  de manera que  $\alpha$  es igual a la medida del ángulo que forman los rayos. Es decir, para cada rayo existe un ángulo  $\alpha \in (0, \pi)$ , e inversamente cada ángulo determina un rayo.
- (e) Consideremos las condiciones del inciso anterior. Si el rayo  $\vec{j}$  empieza en  $Z$  y  $P \in \vec{j}$  cualquiera, entonces el ángulo  $\alpha$  depende continuamente de  $P$ , esto es, si  $P'$  es un punto variable en  $\mathbb{P}$  y  $\alpha'$  el ángulo correspondiente, entonces  $\alpha - \alpha' \rightarrow 0$  cuando  $|PP'| \rightarrow 0$ . Es decir, entre más pequeño es el ángulo, más cercanos son los rayos.

Para el siguiente axioma consideremos que un *triángulo* es la intersección de tres ángulos. Dos segmentos serán congruentes si son de la misma longitud y dos ángulos serán congruentes si son de la misma medida.

**Axioma 6:** Dos triángulos son congruentes si todos sus ángulos son congruentes y todos sus lados son de la misma longitud.

**Axioma 7:** Dada una geodésica  $\ell$  y un punto exterior a  $\ell$  existen al menos dos geodésicas que pasan por el punto  $P$  y no se intersectan con  $\ell$ .

### 3.1.1. Modelos del Plano Hiperbólico

Ahora daremos algunos modelos de plano hiperbólico, es decir, que satisfacen la definición axiomática. No lo haremos con todo detalle, pero se puede verificar que todos los modelos presentados satisfacen los axiomas. Cabe señalar que las distancias no se miden de la misma manera en los modelos y podemos pasar de un modelo a otro mediante una transformación.

#### Modelo del disco o disco de Poincaré

Denotaremos  $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , y su frontera es  $\partial\mathbb{D}^2 = \{z : |z| = 1\}$ . Entonces  $\mathbb{D}^2$  es un disco euclidiano de radio 1 sin su frontera.

Las geodésicas son diámetros y arcos que intersectan a  $\partial\mathbb{D}^2$  en un ángulo recto.

La distancia entre sus puntos se define por  $d(z_1, z_2) = \tanh^{-1} \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$ . Este modelo es conocido como el disco de Poincaré.

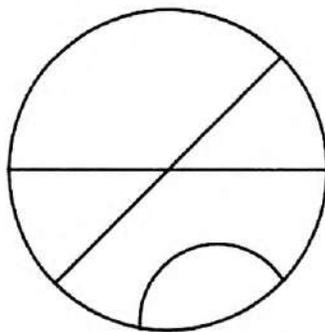


FIGURA 3.1: Modelo del Disco de Poincaré.

### Modelo del Hiperboloide

Es también llamado el *Modelo de Lorentz* y se utiliza un hiperboloide de revolución  $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Denotaremos el modelo por  $\mathbb{L}^2$  y es tal que

$$\mathbb{L}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : q(x, y, z) = -1, \quad z > 0\},$$

Como lo indica su nombre, consiste en la hoja superior de un hiperboloide de dos hojas y sus geodésicas consisten en intersecciones de planos que pasan por el origen con la hoja superior.

Para medir la distancia entre los puntos  $u = (x_0, x_1, x_2)$  y  $v = (y_0, y_1, y_2)$  con  $x_0 = 1 + x_0^2 + x_1^2$ ,  $y_0 = 1 + y_0^2 + y_1^2$ , utilizamos  $d(u, v) = \cosh^{-1} B(u, v)$ , donde  $B(u, v) = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2$ .



FIGURA 3.2: Modelo del Hiperboloide o de Lorentz.

### Modelo del Semiplano

Denotamos  $\mathbb{H}^2 = \{z : z \in \mathbb{C}, \text{Im } z > 0\}$  y su frontera es  $\partial\mathbb{H}^2 = \{z : z \in \mathbb{C}, \text{Im } z = 0\}$ .

En este modelo, las geodésicas son semi-rectas verticales y arcos de círculos que intersectan

a  $\partial\mathbb{H}^2$  en un ángulo recto. Llamaremos a  $\mathbb{H}^2$  modelo del semiplano y daremos más detalles de él en la siguiente sección.

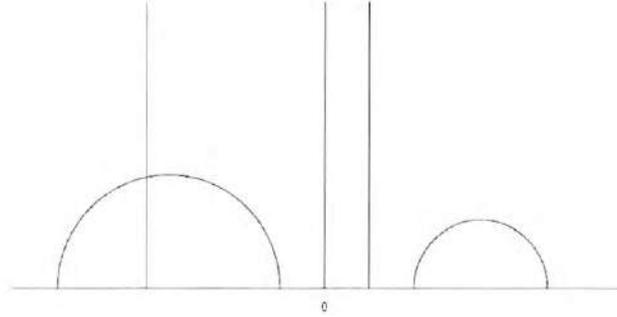


FIGURA 3.3: Modelo del Semiplano.

Tanto el modelo del disco, del hiperboloide o del semiplano pueden ser extendidos a dimensión  $n \in \mathbb{N}$ . Para los lectores interesados en conocer más sobre estos modelos se recomiendan las referencias [Ra94], [Be05], [CNS12].

## 3.2. Métrica Hiperbólica

A partir de este punto, estudiaremos el plano hiperbólico basándonos en el modelo del semiplano, por lo que si mencionamos el plano, nos referimos a  $\mathbb{H}^2$ .

**Definición 3.2.1.** Sean  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  con  $t_1 \leq t_2$ . Si  $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{H}^2$  es una curva  $C^1$  a pedazos definida en  $\mathbb{H}^2$ , definimos la longitud hiperbólica de  $\gamma$  como

$$\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt,$$

donde  $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ .

La longitud de una curva no depende de la parametrización, por lo que podemos suponer que nuestro intervalo es  $[0, 1]$ . Como consecuencia de lo anterior, la longitud de la curva es la suma de las longitudes de cada curva concatenada.

Con la noción de longitud podemos definir una distancia que hará de  $\mathbb{H}^2$  un espacio métrico.

**Definición 3.2.2.** Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ . Definiremos la distancia hiperbólica entre  $z_1$  y  $z_2$  como

$$d(z_1, z_2) = \inf\{\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2, \quad \gamma(a) = z_1, \quad \gamma(b) = z_2\}.$$

**Proposición 3.2.3.** El plano hiperbólico es un espacio métrico con la distancia  $d(z_1, z_2)$ .

*Demostración:* Notemos que  $d(z_1, z_2) \geq 0$  pues  $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \geq 0$  y  $y(t) > 0$ . Para ver que  $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ , sea  $\gamma(t)$  una curva  $C^1$  a pedazos de  $z_1$  a  $z_2$ . Consideramos la curva  $\bar{\gamma} = \gamma(1-t)$  y notemos que con esta curva empezaremos en el punto  $z_2$  y llegaremos al punto  $z_1$ .

Ahora supongamos que  $d(z_1, z_2) = 0$  con  $z_1 = (a_1, a_2)$ ,  $z_2 = (b_1, b_2)$ ,  $z_1 \neq z_2$ . Sin pérdida de generalidad consideremos  $a_1 \neq b_1$ . Entonces para cualquier trayectoria  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  de  $z_1$  a  $z_2$ ,  $x(t)$  no es constante (pues si lo fuera necesariamente  $a_1 = b_1$ ), por lo tanto  $\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) > 0$ , lo cual es una contradicción dada la definición de  $d(z_1, z_2)$ . Por lo tanto  $z_1 = z_2$ . Recíprocamente, supongamos que  $z_1 = z_2$ , entonces una trayectoria que va desde  $z_1$  a  $z_2$  es  $\gamma(t) = z_1$ , pero  $\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) = 0$ , entonces  $d(z_1, z_2) \leq 0$  pues  $d(z_1, z_2)$  se define por medio del ínfimo. Como acabamos de probar que  $d(z_1, z_2) \geq 0$  necesariamente, concluimos que  $d(z_1, z_2) = 0$ .

Por último debemos verificar la desigualdad del triángulo. Debemos mostrar que  $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$ , para todos  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}^2$ . Procederemos por reducción al absurdo.

Supongamos que existen  $z_1, z_2, z_3$  tales que  $d(z_1, z_3) > d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$ . Entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que  $d(z_1, z_3) = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) + \epsilon$ . Luego, existe una trayectoria  $\gamma_1$  desde  $z_1$  a  $z_2$  y  $\gamma_2$  desde  $z_2$  a  $z_3$  tal que  $\ell_{\mathbb{H}}(\gamma_1) < d(z_1, z_2) + \frac{\epsilon}{2}$  y  $\ell_{\mathbb{H}}(\gamma_2) < d(z_2, z_3) + \frac{\epsilon}{2}$ , por lo que podemos construir una trayectoria  $\tilde{\gamma}$  desde  $z_1$  hasta  $z_3$  concatenando las trayectorias  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . Por tanto,

$$d(z_1, z_3) < \ell_{\mathbb{H}}(\tilde{\gamma}) = \ell_{\mathbb{H}}(\gamma_1) + \ell_{\mathbb{H}}(\gamma_2) < d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) + \epsilon = d(z_1, z_3),$$

lo cual es absurdo. Por tanto  $d$  es una métrica. □

En caso de que dos puntos estén sobre el eje imaginario, es posible derivar una fórmula explícita para calcular la distancia entre ellos.

**Teorema 3.2.4.** Sean  $z_1 = ia$  y  $z_2 = ib$ , con  $a, b > 0$  reales. Entonces

$$d(z_1, z_2) = \left| \log \frac{b}{a} \right|.$$

*Demostración:* Supongamos que  $a < b$ . Sea  $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{H}^2$  una trayectoria que une  $ia$  con  $ib$ . Así,

$$\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \log \left( \frac{\gamma(t_2)}{\gamma(t_1)} \right) = \log \left( \frac{b}{a} \right).$$

Por tanto,  $\ell_{\mathbb{H}}(\gamma)$  está acotada por abajo por  $\log \frac{b}{a}$ . Si  $\alpha(t) = it$ , con  $a \leq t \leq b$ , entonces  $\alpha$  es una trayectoria que une  $ia$  con  $ib$ . Notemos que

$$\ell_{\mathbb{H}}(\alpha) = \int_a^b \frac{dt}{t} = \log \left( \frac{b}{a} \right).$$

Por lo anterior, tenemos que  $d(z_1, z_2) = d(ia, ib) = \log \left( \frac{b}{a} \right)$ .

□

Como podemos darnos cuenta, es fácil calcular la distancia entre dos puntos si son de la forma  $ia$  con  $a \in \mathbb{R}^+$ , por lo que una pregunta natural sería qué pasa con los puntos de la forma  $a + ib$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $a \neq 0$ . En general, podemos reducirnos al caso de puntos sobre el eje imaginario usando transformaciones de Möbius, que son transformaciones que preservan la distancia y que estudiaremos en la siguiente sección.

### 3.3. Transformaciones de Möbius

Las transformaciones de Möbius son funciones que dejan invariantes propiedades como la longitud, los ángulos, la orientación, entre otras. Estudiaremos sus propiedades y veremos algunos ejemplos de estas transformaciones.

**Definición 3.3.1.** Sea  $z \in \mathbb{C}$  y  $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Decimos que

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0$$

es una transformación de Möbius, donde, si  $c \neq 0$ , definimos  $T(-\frac{d}{c}) = \infty$ ,  $T(\infty) = \frac{a}{c}$  y si  $c = 0$  entonces  $T(\infty) = \infty$ .

Como  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , tomaremos a las transformaciones de Möbius de  $\mathbb{H}^2$  en  $\mathbb{H}^2$ . De aquí en adelante, tomaremos la restricción  $ad - bc = 1$  en vez de  $ad - bc \neq 0$ .

Las transformaciones de Möbius son funciones biyectivas y conformes. Además, la composición y la inversa de una transformación de Möbius es de nuevo una transformación de Möbius. En particular, forman un grupo bajo la composición.

**Lema 3.3.1.** *Si  $T(z)$  es una transformación de Möbius, entonces  $T(z)$  es biyectiva.*

*Demostración:* Vamos a probar que para cada transformación de Möbius  $T$ , existe su inversa  $T^{-1}$  y que también es transformación de Möbius. Sea  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  y definamos  $T^{-1} = \frac{dz-b}{-cz+a}$ . Por cálculo directo

$$T^{-1}(T(z)) = \frac{d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - b}{-c\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + a} = \frac{(ad - bc)z}{ad - bc} = id(z),$$

$$T(T^{-1}(z)) = \frac{a\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right) + b}{c\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right) + d} = \frac{(ad - bc)z}{ad - bc} = id(z).$$

Por tanto  $T$  es biyectiva.

□

**Lema 3.3.2.** *Las transformaciones de Möbius forman un grupo  $\text{Mob}(\mathbb{H}^2)$  bajo la composición de funciones.*

*Demostración:*

■ Asociatividad

Sabemos que la composición de funciones es asociativa.

■ Identidad

La identidad está dada por  $id(z) = \frac{z}{1}$ . Primero, notemos que  $(1)(1) - (0)(0) = 1$ .

Sea  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Veamos que  $T(id(z)) = T(z)$ .

$$T(id(z)) = \frac{a\left(\frac{z}{1}\right) + b}{c\left(\frac{z}{1}\right) + d} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

■ Cerradura

Sean  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  y  $\tilde{T}(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$ . Veamos que la composición es cerrada.

$$T(\tilde{T}(z)) = \frac{a\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) + b}{c\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) + d} = \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)},$$

Es fácil ver que  $(ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) = 1$ .

□

Al aplicar una transformación de Möbius a dos curvas que se intersecten con un ángulo  $\theta$ , éste permanece invariante. Esto nos dice que estas transformaciones son conformes, y para verificar esto primero debemos definir qué es ser una función conforme.

**Definición 3.3.2.** Sean  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\beta : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\alpha(a) = \beta(a) = z_0$ ,  $\alpha'(a), \beta'(a) \neq 0$ . Decimos que  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  es una transformación conforme en  $z_0$  si

$$\arg \left[ \frac{(f \circ \alpha)'(a)}{(f \circ \beta)'(a)} \right] = \arg \left[ \frac{\alpha'(a)}{\beta'(a)} \right].$$

Si  $f$  es conforme en todo punto de  $A$ , entonces decimos que  $f$  es conforme.

**Lema 3.3.3.** Si  $f$  es holomorfa en  $z_0$  y  $f'(z_0) \neq 0$ , entonces  $f$  es conforme en  $z_0$ .

*Demostración:* Por la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{(f \circ \alpha)'(a)}{(f \circ \beta)'(a)} = \frac{f'(\alpha(a))\alpha'(a)}{f'(\beta(a))\beta'(a)} = \frac{f'(z_0)\alpha'(a)}{f'(z_0)\beta'(a)} = \frac{\alpha'(a)}{\beta'(a)}.$$

□

**Corolario 3.3.1.** Las transformaciones de Möbius son funciones conformes.

*Demostración:* se sigue del lema 3.3.3.

□

Después de estudiar el comportamiento de las geodésicas bajo ciertas operaciones, podemos contestar la pregunta de la sección anterior: ¿cómo calcular la distancia entre los puntos de la forma  $a + ib$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $a \neq 0$ ?

**Teorema 3.3.3.** Si  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ , entonces existe  $T \in \text{Mob}(\mathbb{H}^2)$  tal que  $T(z_1) = ia$  y  $T(z_2) = ib$ , con  $a, b > 0$ .

*Demostración: Caso 1:* Si  $z_1, z_2$  son imaginarios puros tomamos  $T = id$  y terminamos.

*Caso 2:* Si  $z_1 = ia + c$ ,  $z_2 = ib + c$ , entonces aplicamos la transformación  $z \mapsto z - c$ .

Caso 3: Sean  $z_1, z_2$  puntos que determinan una geodésica tipo semicircunferencia con extremos  $\alpha$  y  $\beta$ . Consideremos la transformación

$$T(z) = \frac{\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)z - \left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha} + 1\right)}{z - \alpha}.$$

Notemos que  $T \in \text{Mob}(\mathbb{H}^2)$  y que transforma el semicírculo en el eje imaginario.

□

El teorema anterior nos dice que sin importar cuál sea la forma de los puntos en  $\mathbb{H}^2$  siempre podremos utilizar la fórmula dada en el teorema 3.2.4.

La demostración de que las transformaciones de Möbius forman un grupo sugiere una forma de calcular la composición de manera más sencilla. Veamos que existe un isomorfismo entre  $\text{Mob}(\mathbb{H}^2)$  y  $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \text{SL}(2, \mathbb{R})/\{id, -id\}$ .

Asociado a cada elemento  $\pm \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  existe una transformación de Möbius

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d},$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc = 1$ .

Recíprocamente, dada una transformación de Möbius

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

podemos asociarle una matriz  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  tal que  $ad - bc = 1$  y  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

**Lema 3.3.4.** *El grupo  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  es isomorfo al grupo  $\text{Mob}(\mathbb{H}^2)$  vía la asociación anterior.*

*Demostración:* Sea  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  y  $g(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$  con  $a, b, c, d, A, B, C, D \in \mathbb{R}$ . Así

$$\begin{aligned} g(f(z)) &= \frac{A(f(z)) + B}{C(f(z)) + D} \\ &= \frac{Aaz + Ab + Bcz + Bd}{cz + d} \cdot \frac{cz + d}{Caz + Cb + Dcz + Dd} \\ &= \frac{(Aa + Bc)z + (Ab + Bd)}{(Ca + Dc)z + (Cb + Dd)} \end{aligned}$$

El producto de sus matrices asociadas es

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{bmatrix}.$$

Notemos que los coeficientes en las operaciones son equivalentes.

□

El lema anterior nos dice que es equivalente multiplicar dos matrices asociadas a dos transformaciones de Möbius que componerlas como funciones. Hay otras propiedades que no son presentadas pues no las utilizaremos, al lector interesado puede buscar en la referencia [BEG12].

### 3.4. Isometrías Hiperbólicas

Para nuestros propósitos, las isometrías serán de  $\mathbb{H}^2$  a  $\mathbb{H}^2$  y dejarán invariantes la longitud de las curvas, como mostramos a continuación.

**Teorema 3.4.1.** *Las transformaciones de Möbius preservan las isometrías hiperbólicas.*

*Demostración:* Sea  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  es una trayectoria desde  $z_1$  hasta  $z_2$ , y  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Debemos mostrar que  $\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) = \ell_{\mathbb{H}}(T(\gamma))$ . Usaremos

$$\operatorname{Im}(\gamma(t)) = \frac{y(t)}{|c\gamma(t) + d|^2}, \quad |\gamma'(t)| = \frac{1}{|c\gamma(t) + d|^2}.$$

Por la regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbb{H}}(T(\gamma)) &= \int_a^b \frac{|(T(\gamma))'(t)|}{\operatorname{Im}(T(\gamma))} dt = \int_a^b \frac{|T'(\gamma(t))| |\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(T(\gamma))} dt \\ &= \int_a^b \frac{ad - bc}{|c\gamma(t) + d|^2} |\gamma'(t)| \frac{|c\gamma(t) + d|^2}{ad - bc} \frac{1}{\operatorname{Im}\gamma(t)} dt \\ &= \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt \\ &= \ell_{\mathbb{H}}(\gamma). \end{aligned}$$

□

Como hemos probado, cada elemento  $T \in \text{Mob}(\mathbb{H}^2)$  es una isometría, pero no toda isometría es elemento de  $\text{Mob}(\mathbb{H}^2)$ .

**Ejemplo 3.4.2.** Sea  $R(z) = -\bar{z}$ . Notemos que  $R$  manda a cada  $z \in \mathbb{C}$  a su conjugado, lo que quiere decir que  $R$  es una reflexión con respecto al eje  $y$ . Como los elementos de  $\text{Mob}(\mathbb{H}^2)$  preservaban la orientación, concluimos que  $R \notin \text{Mob}(\mathbb{H}^2)$ .

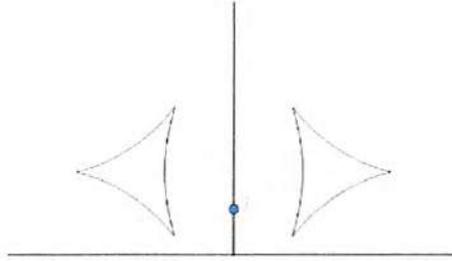


FIGURA 3.4: Comportamiento de  $R(z)$ .

Ahora mostraremos un resultado que nos dice que elementos en la frontera son transformados en elementos del eje imaginario. Utilizaremos el concepto de colinealidad como en el sentido euclidiano, cambiando recta por geodésica.

**Lema 3.4.1.** *Dados  $x_1, x_2, x_3 \in \partial\mathbb{H}^2$  distintos, existe una única isometría  $T$  tal que*

$$x_1 \mapsto 0, \quad x_2 \mapsto 1, \quad x_3 \mapsto \infty.$$

*Demostración:* Sea  $T_1(z) := \frac{1}{z-x_3}$ . Entonces  $T_1(x_3) = \infty$ . Ahora consideremos  $w_1 = T_1(x_1)$  y  $w_2 = T_1(x_2)$ , y notemos que  $T$  manda la terna  $(x_1, x_2, x_3)$  en la terna  $(w_1, w_2, \infty)$ . Supongamos que  $T_2(z) := z - w_1$ , por tanto  $T_2(\infty) = \infty$  y  $T_2(w_1) = 0$ . Sea  $u_2 = w_2 - w_1$ , y notemos que  $T_2$  manda la terna  $(w_1, w_2, \infty)$  en la terna  $(0, u_2, \infty)$ . Consideremos  $T_3(z) := \frac{z}{u_2}$ , y en consecuencia  $T_3(\infty) = \infty$ ,  $T_3(u_2) = 1$  y  $T_3(0) = 0$ . Notemos que  $T_3$  manda la terna  $(0, u_2, \infty)$  en la terna  $(0, 1, \infty)$ .  $T := T_3 \circ T_2 \circ T_1$ , entonces  $T$  manda la terna  $(x_1, x_2, x_3)$  en la terna  $(0, 1, \infty)$ . La unicidad se sigue de la definición de transformación de Möbius. Por lo tanto,  $T$  es la isometría buscada.

□

Notemos que en la demostración anterior hemos utilizado solamente tres puntos, por lo que uno podría pensar que la unicidad de una isometría solamente depende de tres elementos de  $\mathbb{H}^2$ . Formalizaremos esto.

**Proposición 3.4.3.** Sean  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}^2$  puntos no colineales y  $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{H}^2$  tales que  $d(z_1, z_2) = d(Z_1, Z_2)$ ,  $d(z_2, z_3) = d(Z_2, Z_3)$  y  $d(z_1, z_3) = d(Z_1, Z_3)$ , entonces existe una única isometría  $T$  tal que  $T(z_1) = Z_1$ ,  $T(z_2) = Z_2$ ,  $T(z_3) = Z_3$ .

*Demostración:* Sea  $\gamma_1$  la geodésica que pasa por  $z_1$  y  $z_2$  con extremos  $x_1, x_2$ ,  $\gamma_2$  la geodésica que pasa por  $z_1$  y  $z_3$  con extremos  $x_1, x_3$ . Por el lema anterior, sabemos que existe una única  $T \in G$  tal que  $x_1 \mapsto 0$ ,  $x_2 \mapsto \infty$ ,  $x_3 \mapsto 1$ .

Análogamente,  $\gamma'_1$  la geodésica que pasa por  $Z_1$  y  $Z_2$  con extremos  $X_1, X_2$ , sea  $\gamma'_2$  la geodésica que pasa por  $Z_1$  y  $Z_3$  con extremos  $X_1, X_3$ . Por el lema anterior, sabemos que existe una única  $\hat{T} \in G$  tal que  $X_1 \mapsto 0$ ,  $X_2 \mapsto \infty$ ,  $X_3 \mapsto 1$ . Notemos que  $T = (\hat{T})^{-1} \circ \hat{T}$  es la isometría buscada.

□

Ahora, así como en el caso euclidiano, en el plano hiperbólico también existe una clasificación de isometrías. Las siguientes isometrías generan todas en el modelo del semiplano.

(a) **Rotaciones límite**

$$T(z) = z + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esta isometría hiperbólica se ve como una traslación euclidiana. Esta isometría modifica la parte real de los puntos que conforman las geodésicas. Aquí solamente existe un punto fijo que es  $\infty$ . También es conocida como rotación límite.

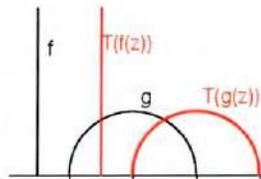


FIGURA 3.5: Las geodésicas  $f$  y  $g$  son las iniciales y las geodésicas  $T(f(z))$  y  $T(g(z))$  son las resultantes de la traslación.

(b) **Rotación**

Las rotaciones en el plano hiperbólico se pueden visualizar en el modelo  $\mathbb{D}^2$ . Pasaremos

de  $\mathbb{H}^2$  a  $\mathbb{D}^2$  mediante  $J(z) = \frac{iz+1}{z+i}$  y luego aplicamos la transformación

$$R_\theta(z) = e^{i\theta} z, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

en  $\mathbb{D}^2$ . Después, transformamos lo que resultó mediante  $J^{-1}(z) = \frac{-iz+1}{z-i}$ .

En  $\mathbb{D}^2$ , esta isometría modifica la geodésica girando un ángulo  $\theta$ . Aquí sólo hay un punto fijo que es el punto de rotación  $i$ . Si queremos otro punto de rotación, podemos hacer una traslación al punto deseado y después aplicamos  $J^{-1} \circ R_\theta \circ J$ .

(c) **Reflexión con respecto al eje imaginario**

$$R(z) = -\bar{z}.$$

Esta isometría se ve como una isometría euclidiana pues es la reflexión con el eje imaginario. Los puntos fijos son los imaginarios puros.

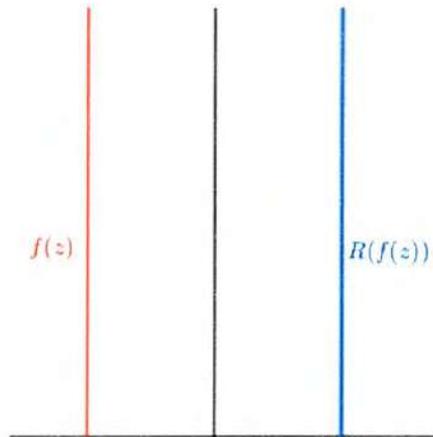


FIGURA 3.6: La geodésica  $f(z)$  es la inicial y la geodésica  $R(f(z))$  es la resultante de la reflexión con respecto al eje imaginario.

(d) **Homotecia**

$$T_\rho(z) = \rho z, \quad \text{donde } \rho > 0.$$

Al aplicar esta isometría en las geodésicas verticales que parten del origen, éstas no parecen cambiar pues aumentan su longitud por lo que, visualmente, no hay ningún cambio y tampoco puntos fijos. En las geodésicas semicírculos con centro en el origen modifica “el radio” haciéndola más grandes. El único punto fijo es el centro.

En las geodésicas que no parten del origen o no lo tienen como centro, la geodésica inicial se desplazaría  $\rho$  unidades. En tal caso no habrían puntos fijos.

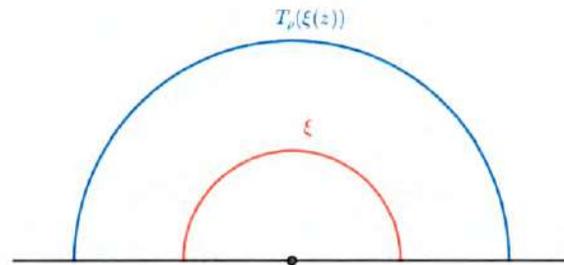


FIGURA 3.7: Geodésica  $\xi$  con centro en el origen, y  $T_\rho(\xi(z))$  es la geodésica resultante de aplicar  $T_\rho$ .

En el siguiente capítulo hablaremos sobre superficies hiperbólicas y supondremos válidos los resultados de esta sección. Generalizaremos algunos resultados vistos en este capítulo.

# Capítulo 4

## Teorema de Killing-Hopf para Superficies Hiperbólicas

### 4.1. Generalidades de Superficies Hiperbólicas

Definiremos algunas regiones que forman parte de  $\mathbb{H}^2$ . Estas regiones serán de utilidad para definir superficies hiperbólicas.

#### Segundo Semiplano Hiperbólico

Denotamos  $\mathbb{S} = \{z : z \in \mathbb{H}^2, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ . Notemos que el segundo semiplano hiperbólico es parte del semiplano hiperbólico, es decir,  $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{H}^2$ .

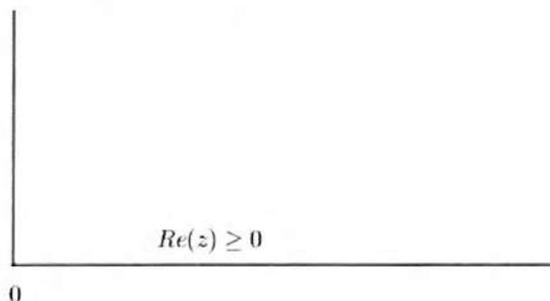


FIGURA 4.1: Semiplano Hiperbólico.

#### Cuadrante Hiperbólico

Denotamos  $Q = \{z : z \in \mathbb{S}, |z| \geq 1\}$ . Notemos que  $Q \subseteq \mathbb{S}$ .

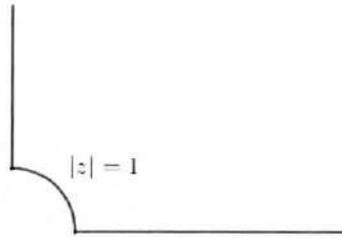


FIGURA 4.2: Cuadrante Hiperbólico.

Definiremos qué es una superficie hiperbólica.

**Definición 4.1.1.** *Una superficie hiperbólica con frontera geodésica y esquinas rectas es un espacio métrico  $S$  tal que cada punto en  $S$  tiene una vecindad isométrica a algún conjunto abierto en el plano hiperbólico, en el segundo semiplano hiperbólico o en el cuadrante hiperbólico.*

**Ejemplo 4.1.2.** *Un ejemplo de superficie hiperbólica es el llamado hexágono con ángulos rectos, el cual es un hexágono con geodésicas como sus lados y la medida de todos sus ángulos es  $\frac{\pi}{2}$ .*

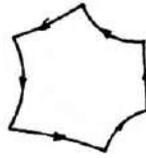


FIGURA 4.3: Hexágono con ángulos rectos.

De la definición 4.1.1 se sigue que una superficie hiperbólica tiene tres tipos distintos de puntos.

- 1) Tiene una vecindad localmente isométrica al plano hiperbólico.
- 2) Tiene una vecindad localmente isométrica a un disco con centro en el eje real de  $\mathbb{H}^2$ .
- 3) Tiene una vecindad localmente isométrica a un disco con centro en el vértice de  $Q$ .

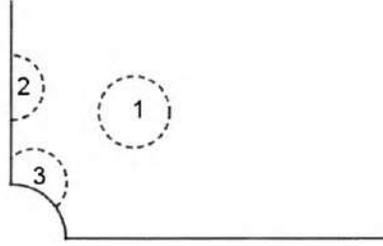


FIGURA 4.4: Distintos puntos hiperbólicos.

En el resto de esta sección, nuestras superficies serán hiperbólicas con frontera geodésica y esquinas rectas.

Ahora definiremos la noción de curvas geodésicas en superficies hiperbólicas. Consideremos una curva  $\gamma$  en una superficie hiperbólica y definamos su longitud. Para ello nos auxiliaremos de la longitud hiperbólica, definida en el capítulo anterior para geodésicas en el plano hiperbólico. Como necesitaremos que  $\gamma$  sea  $C^1$  a pedazos, definiremos esta propiedad.

**Definición 4.1.3.** Una curva  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  se dice ser  $C^1$  por pedazos si existe una partición del intervalo  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tal que  $\gamma|_{(t_{i-1}, t_i)}$  es  $C^1$  para toda  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Sea  $S$  una superficie hiperbólica con frontera geodésica y esquinas rectas,  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $\gamma : I \rightarrow S$  una función continua. Como  $S$  es hiperbólica, para toda  $x \in \gamma(I)$  podemos tomar una  $\epsilon$ -bola alrededor de  $x$ , isométrica a una  $\epsilon$ -bola en el cuadrante hiperbólico  $Q$ . En particular, existe una colección  $\mathbb{A} := (\{I_i\}_{i \in A}, \{(B_i, \phi_i)\}_{i \in A})$  de subintervalos de  $I$  tal que  $I = \bigsqcup_{i \in A} I_i$  y tal que  $\gamma(I_i)$  está contenida en la bola  $B_i$  de  $S$  isométrica a una bola en  $Q$  vía la isometría  $\phi_i$ .

Para cada  $i \in A$ , denotamos  $B_i$  a dicha bola en  $S$  y a  $\phi_i : B_i \rightarrow Q$  isometría sobre una bola de  $Q$ . Supondremos que podemos tomar  $A$  a lo más numerable. Suponemos  $(\phi_i \circ \gamma|_{I_i})$  a  $C^1$  a pedazos para toda  $i$ .

Definimos

$$\ell_{\mathbb{A}}(\gamma) := \sum_{i \in A} \ell_{\mathbb{H}}(\phi_i \circ \gamma|_{I_i}).$$

En principio, la definición anterior depende de la partición del intervalo  $I$  y las isometrías  $\phi_i$ . El siguiente teorema nos dice que  $\ell_{\mathbb{A}}$  es independiente de ambas cosas.

**Teorema 4.1.4.** La cantidad  $\ell_{\mathbb{A}}(\gamma)$  no depende de  $\mathbb{A}$ .

*Demostración:* Sean  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{B}$  dos colecciones distintas definidas como se sigue:

$$\mathbb{A} = (\{I_i\}_{i \in A}, \{(B_i, \phi_i)\}_{i \in A}), \quad \mathbb{B} = (\{I_j\}_{j \in B}, \{(\tilde{B}_j, \Psi_j)\}_{j \in B}).$$

Dividiremos en tres casos nuestra prueba: Caso 1: Supongamos que  $\{I_i\}_{i \in A} = \{J_i\}_{j \in B}$  con  $A = B$ ,  $I_i = J_i$ , para todo  $i \in A$ . Por nuestra definición, tenemos que

$$\ell_{\mathbb{A}}(\gamma) = \sum_{i \in A} \ell_{\mathbb{H}}(\phi_i \circ \gamma|_{I_i}),$$

$$\ell_{\mathbb{B}}(\gamma) = \sum_{i \in B} \ell_{\mathbb{H}}(\Psi_i \circ \gamma|_{I_i}).$$

Basta demostrar que  $\ell_{\mathbb{H}}(\phi_i \circ \gamma|_{I_i}) = \ell_{\mathbb{H}}(\Psi_i \circ \gamma|_{I_i})$  para toda  $i \in A$ . En efecto,  $\Psi_i \circ \gamma|_{J_i} = (\Psi_i \circ \phi_i^{-1})(\phi_i \circ \gamma|_{I_i})$  y  $\Psi_i \circ \phi_i^{-1}$  es una isometría de un conjunto abierto en  $Q$  a un conjunto abierto en  $Q$ . Como  $\Psi \circ \phi^{-1}$  es una isometría, entonces es una transformación de Möbius o su composición con  $-\bar{z}$ . Luego, como estas transformaciones preservan la longitud de curvas, se sigue la igualdad deseada.

Caso 2: La colección  $\{I_i\}_{i \in A}$  es un refinamiento de  $\{J_j\}_{j \in B}$  para toda  $i \in A_j$ , es decir, para toda  $j \in B$  existe  $A_j \subseteq A$  y una colección de intervalos  $\{I_i\}_{i \in A_j}$  tal que para toda  $i \in A_j$  pasa que  $I_i \subseteq J_j$ . Debemos mostrar que

$$\sum_{i \in A_j} \ell_{\mathbb{H}}(\phi_i \circ \gamma|_{I_i}) = \ell_{\mathbb{H}}(\Psi_j \circ \gamma|_{J_j}).$$

En efecto ya que usamos el mismo razonamiento del caso anterior. Además,

$$\sum_{i \in A_j} \ell_{\mathbb{H}}(\phi_i \circ \gamma|_{I_i}) = \sum_{i \in A_j} \ell_{\mathbb{H}}(\Psi_j \circ \gamma|_{I_i}) = \ell_{\mathbb{H}}(\Psi_j \circ \gamma|_{J_j}).$$

Entonces

$$\sum_{j \in B} \ell_{\mathbb{H}}(\Psi_j \circ \gamma|_{J_j}) = \sum_{j \in B} \sum_{i \in A_j} \ell_{\mathbb{H}}(\phi_i \circ \gamma|_{I_i}) = \sum_{i \in A} \ell_{\mathbb{H}}(\phi_i \circ \gamma|_{I_i}).$$

Caso general: Consideremos  $\{I_i\}_{i \in A}$  y  $\{J_j\}_{j \in B}$ . Construimos una nueva partición  $\{K_k\}_{k \in C}$  que es un refinamiento de ambas colecciones  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{B}$ <sup>1</sup> y usamos  $\phi_i$  para construir una colección  $\mathbb{C}$ . Por el caso anterior, tenemos  $\ell_{\mathbb{A}}(\gamma) = \ell_{\mathbb{C}}(\gamma)$  y  $\ell_{\mathbb{B}}(\gamma) = \ell_{\mathbb{C}}(\gamma)$ . Por lo tanto,  $\ell_{\mathbb{A}}(\gamma) = \ell_{\mathbb{B}}(\gamma)$ .

<sup>1</sup>Este refinamiento puede construirse tomando intersecciones no vacías de los intervalos  $I_i$  y  $J_j$ .

□

Lo anterior muestra que la cantidad  $\ell_{\mathbb{A}}(\gamma)$  es independiente de la colección  $\mathbb{A}$  que tomemos por lo que no será necesario escribirla explícitamente.

**Definición 4.1.5.** Sea  $\gamma$  una curva  $C^1$  a pedazos. La longitud de la curva  $\gamma : I \rightarrow S$  es la cantidad  $\ell_{\mathbb{A}}(\gamma)$  para cualquier colección  $\mathbb{A} = (\{I_i\}_{i \in A}, \{(B_i, \phi_i)\}_{i \in A})$  y la denotaremos por  $\ell(\gamma)$ .

Ahora definiremos el concepto de geodésica. Para esto necesitaremos introducir la noción de curva diferenciable.

**Definición 4.1.6.** Sea  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  una curva y  $t \in I$ . Supongamos que  $B_r(\gamma(t))$  es una bola isométrica a un abierto  $U$  de  $\mathbb{H}^2$  y que  $f : B_r(\gamma(t)) \rightarrow U$  es una isometría. Se dice que  $\gamma$  es  $C^1$  en  $t$  si  $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$  es  $C^1$  en  $t$ . Diremos que  $\gamma$  es  $C^1$  en  $I$  si lo es en todo  $t \in I$ .

**Definición 4.1.7.** Una curva  $C^1$  a pedazos  $\gamma : I \rightarrow S$  en una superficie hiperbólica dice ser una geodésica si para toda  $x \in I$  existe una vecindad abierta  $J \subseteq I$  de  $x$  tal que para todos  $s, t \in J$  tenemos que

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = \ell(\gamma|_{[t,s]}) = |s - t|.$$

Notemos que las geodésicas siempre existen localmente pues  $S$  es localmente isométrica a  $\mathbb{H}^2$ . Sin embargo, las geodésicas se pueden construir entre cualesquiera dos puntos, como veremos en el teorema 4.1.12.

**Proposición 4.1.8.** Sea  $\gamma : I \rightarrow S$  una geodésica. Entonces

- a)  $d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq |s - t|$  para toda  $s, t \in I$ .
- b)  $\ell(\gamma|_{[t,s]}) = |s - t|$  para toda  $s, t \in I$ .

*Demostración:* a) Sean  $I = \sqcup_{i \in A} I_i$  una partición a lo más numerable del intervalo  $I$  tal que para toda  $i \in A$  y para toda  $s, t \in I_i$ , tenemos que  $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|$ . Por la desigualdad del triángulo en  $S$ , tenemos que

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq \sum_{i \in A} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})), \quad \text{para cada } t \in I,$$

donde  $t_{i-1}, t_i$  son los extremos del intervalo  $I_i$ . Así,

$$\sum_{i \in A} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) = \sum_{i \in A} |t_i - t_{i-1}| = |s - t|.$$

b) Basta demostrar que para toda  $x \in I$ , existe una vecindad abierta  $U$  de  $x$  tal que para toda  $s, t \in U$  pasa que  $\ell(\gamma|_{[t,s]}) = |s - t|$  por la aditividad de la longitud.

Sea  $\tilde{U}$  una bola con centro en  $\gamma(x)$  que sea isométrica a una bola en  $Q$  vía la isometría  $\phi : \tilde{U} \rightarrow Q$ . Notemos que para toda  $s, t \in \gamma^{-1}(\tilde{U})$  tenemos  $\ell(\gamma|_{[t,s]}) = \ell_{\mathbb{H}}(\phi \circ \gamma|_{[t,s]})$ , lo que quiere decir que  $\phi \circ \gamma|_{[t,s]}$  es geodésica en  $Q$ .

Entonces

$$d_{\mathbb{H}}(\phi(\gamma(t)), \phi(\gamma(s))) = |s - t| = d(\gamma(s), \gamma(t)).$$

Por tanto,

$$\ell(\gamma|_{[t,s]}) = |s - t|.$$

□

En la anterior proposición utilizamos la propiedad de aditividad de la longitud de curvas que nos dice que si concatenamos dos curvas, la longitud de la curva resultante es la suma de la longitudes de cada curva concatenada.

La noción de longitud de curvas en  $S$  nos permite definir una nueva distancia  $d_R$  en  $S$ . Dados  $x, y \in S$ , definimos el conjunto

$$C(x, y) := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow S \mid \gamma(0) = x, \gamma(1) = y, \gamma \text{ es } C^1 \text{ a pedazos}\}.$$

Notemos que el conjunto  $\mathbb{L}(x, y) = \{\ell(\gamma) : \gamma \in C(x, y)\}$  tiene una cota inferior, y por tanto  $\mathbb{L}(x, y)$  tiene un ínfimo.

**Definición 4.1.9.** Sean  $x, y \in S$ . Definimos la distancia riemanniana  $d_R(x, y)$  de  $x$  a  $y$  como  $d_R(x, y) = \inf \mathbb{L}(x, y)$ .

Es natural preguntarse si  $d_R$  inducirá una métrica en  $S$  que coincida la que ya está definida en  $S$ , o al menos determinar cómo están relacionadas. Para ver lo anterior, usaremos algunos resultados técnicos.

**Lema 4.1.1.** Sea  $x \in S$  y  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $\overline{B_{\epsilon_0}(x)}$  es una bola cerrada isométrica a una bola en  $Q$ . Si  $0 < \alpha < \epsilon_0$ ,  $z \in B_{\alpha}(x)$ ,  $y \notin B_{\epsilon_0}(x)$  y  $\gamma$  es una curva de  $z$  a  $y$ , entonces  $\ell(\gamma) > \epsilon_0 - \alpha$ .

*Demostración:* Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  una curva que une a  $z$  con  $y$  y  $\phi : B_{\epsilon_0} \rightarrow Q$  una isometría, y  $t \in [0, 1]$ . Consideremos la función continua

$$t \mapsto d(x, \gamma(t)) \in \mathbb{R}.$$

Notemos que

$$0 \mapsto d(x, z) < \alpha,$$

$$1 \mapsto d(x, y) \geq \epsilon_0.$$

Entonces  $d(x, z) < \alpha < \epsilon_0 \leq d(x, y)$ . Por tanto,  $d(x, z) < d(x, y)$ . Por el teorema del valor intermedio sabemos que existe  $u \in [0, 1]$  tal que

a)  $\gamma([0, u]) \subseteq B_{\epsilon_0}(x)$ .

b)  $d(x, \gamma(u)) = \epsilon_0$ .

Luego,

$$\ell(\gamma) \geq \ell(\gamma|_{[0, u]}) = \ell_{\mathbb{H}}(\phi \circ \gamma|_{[0, u]}) \geq d_{\mathbb{H}}(\phi(\gamma(0)), \phi(\gamma(u))) = d(z, \gamma(u)). \quad (4.1)$$

Ahora, por la desigualdad del triángulo tenemos  $d(x, \gamma(u)) \leq d(x, z) + d(z, \gamma(u))$ .

Por tanto,

$$d(z, \gamma(u)) \geq d(x, \gamma(u)) - d(x, z) = \epsilon_0 - d(x, z) > \epsilon_0 - \alpha. \quad (4.2)$$

Por (4.1) y (4.2) tenemos la desigualdad deseada.

□

**Proposición 4.1.10.** *Sea  $x \in S$ . Entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que*

- 1) *Si  $d(x, y) \geq \epsilon$ , entonces  $d_R(x, y) \geq \epsilon$ .*
- 2) *Si  $z, w \in B_{\epsilon}(x)$ , entonces  $d(z, w) = d_R(z, w)$ .*

*Demostración:* Sabemos que existe  $\epsilon_0$  tal que  $B_{\epsilon_0}(x)$  es isométrica vía  $\phi$  a una bola en  $Q$ . Sea  $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{4} < \epsilon_0$ .

1) Supongamos que  $d(x, y) \geq \epsilon$ . Por el lema 4.1.1, sabemos que para toda curva  $\gamma$  de  $x$  a  $y$ , tenemos que  $\ell(\gamma) > \epsilon - \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Si  $\alpha = 0$  y  $\gamma$  es una curva que va desde  $x$  hasta  $y$ , entonces  $d_R(x, y) = \inf \ell(\gamma) \geq \epsilon$ .

2) Si  $z, w \in B_{\epsilon}(x)$  y  $\gamma$  es una curva desde  $z$  hasta  $w$ , entonces tenemos dos casos:

- Caso 1: Si  $\gamma([0, 1]) \subseteq B_{\epsilon_0}(x)$ , entonces

$$\ell(\gamma) = \ell_{\mathbb{H}}(\phi \circ \gamma) \geq d_{\mathbb{H}}(\phi(\gamma(0)), \phi(\gamma(1))) = d(\gamma(0), \gamma(1)) = d(z, w).$$

• Caso 2: Si  $\gamma([0, 1]) \not\subseteq B_\epsilon(x)$ . Aplicamos el lema anterior con  $\alpha = \frac{\epsilon_0}{4} = \epsilon$ . Sea  $u \in [0, 1]$  tal que  $\gamma(u) \notin B_{\epsilon_0}(x)$ , entonces

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &\geq \ell\left(\gamma|_{[0,u]}\right) + \ell\left(\gamma|_{[u,1]}\right) \geq (\epsilon_0 - \epsilon) + (\epsilon_0 - \epsilon) = \\ &8\epsilon - 2\epsilon = 6\epsilon \geq 2\epsilon > d(z, x) + d(x, w) \geq d(z, w). \end{aligned}$$

Por tanto,  $\ell(\gamma) > d(z, w)$ . Así,  $d_R(z, w) \geq d(z, w)$ .

Ahora basta demostrar que  $d_R(z, w) \leq d(z, w)$ . Sea  $\tilde{\gamma}$  el arco de geodésica en  $Q$  de  $\phi(z)$  a  $\phi(w)$ . Entonces  $\ell_{\mathbb{H}}(\tilde{\gamma}) = d_{\mathbb{H}}(\phi(z), \phi(w))$  y  $\gamma_0 := \phi^{-1} \circ \tilde{\gamma}$ . Notemos que  $\gamma$  es una curva en  $S$  de  $z$  a  $w$  y  $\ell(\gamma) = \ell_{\mathbb{H}}(\tilde{\gamma}) = d_{\mathbb{H}}(\phi(z), \phi(w)) = d(z, w)$ . Si  $\gamma$  es una curva desde  $z$  hasta  $w$ , entonces  $d_R(z, w) = \inf \ell(\gamma) \leq d(z, w)$ .

Por lo tanto,  $d_R(z, w) = d(z, w)$ .

□

Como hemos demostrado que  $d_R(x, y) = d(x, y)$  para  $x, y$  contenidos en una bola isométrica a otra en  $Q$ , entonces  $d_R$  coincide localmente con la misma métrica que  $d$ . En conclusión, dada  $(S, d)$  una superficie hiperbólica, podemos definir una nueva superficie  $(S, d_R)$  que es localmente isométrica a  $(S, d)$ . Por ello, de aquí en adelante supondremos que nuestras superficies están dotadas de la distancia riemanniana.

Ahora podremos precisar la definición de completez de una superficie.

**Definición 4.1.11.** Diremos que  $S$  es una superficie hiperbólica completa si para cualquier geodésica  $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow S$ , existe una geodésica  $\tilde{\gamma} : [0, \infty) \rightarrow S$  tal que  $\tilde{\gamma}|_{[0, \epsilon)} = \gamma$ .

Intuitivamente, la definición anterior dice que a una superficie completa no le faltan puntos, por lo que podemos extender geodésicas indefinidamente.

Un ejemplo de superficie completa es  $\mathbb{H}^2$ . Por el contrario, notemos que, si  $p$  es un punto, entonces  $\mathbb{H}^2 \setminus \{p\}$  es una superficie no completa ya que una geodésica no podrá ser extendida en una vecindad cerca de  $p$ .

Ahora demostraremos que en una superficie completa, cualquiera dos puntos pueden ser unidos por una geodésica. notemos que si  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$  una geodésica y  $[c, d] \subset [a, b]$ , entonces  $\gamma|_{[c, d]}$  es también una geodésica.

A partir de esta parte, supondremos que las superficies hiperbólicas  $S$  son completas, a menos que se indique lo contrario.

**Lema 4.1.2.** *Sea  $S$  una superficie hiperbólica conexa por trayectorias. Dados  $x, y \in S$ , entonces existe  $z \in S$  tal que*

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y).$$

*Demostración:* Primero, para  $0 < \delta < d(x, y)$ , consideremos la bola cerrada  $\overline{B_\delta(x)}$ . Como  $\overline{B_\delta(x)}$  es cerrada, existe  $z \in \overline{B_\delta(x)}$  tal que  $d(y, \overline{B_\delta(x)}) = d(y, z)$ . Sea  $\gamma$  una curva definida en  $[a, b]$  que une  $x$  con  $y$ . Como  $\delta < d(x, y)$ ,  $\gamma$  se intersecta con  $\partial B_\delta(x)$  en  $\gamma(t)$ ,

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \ell(\gamma|_{[a,t]}) + \ell(\gamma|_{[t,b]}) \\ &\geq d(x, \gamma(t)) + d(\gamma(t), y) \\ &\geq d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Dado lo anterior,  $d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y)$ . Además,  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  por la desigualdad del triángulo. Entonces  $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$

□

**Teorema 4.1.12.** *Sea  $S$  una superficie completa y conexa por trayectorias. Para cualesquiera dos puntos  $x, y \in S$  existe una geodésica que los une.*

*Demostración:* Definimos  $\gamma$  como la geodésica que une a  $x$  con  $z$ , donde  $z$  cumple con las hipótesis del lema anterior y está en una bola centrada en  $x$  isométrica a una bola en  $\mathbb{H}^2$ .

Notemos que por la definición de completitud de  $S$ , podemos extender a  $\gamma$ , y definimos  $I = \{t \in \mathbb{R} : d(x, y) = t + d(\gamma(t), y)\}$ . Es fácil ver que  $I$  es no vacío pues  $0 \in I$ , además  $I$  es cerrado. En efecto, sea  $s$  un punto de acumulación de  $I$ . Entonces existe una sucesión  $(t_n)_{n=1}^\infty \subset I$  tal que  $t_n \rightarrow s$ . Observemos que  $d(x, y) = t_n + d(\gamma(t_n), y)$ , pues  $t_n \in I$ . Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s,$$

por continuidad de  $\gamma$  y  $d$  tenemos que  $d(x, y) = s + d(\gamma(s), y)$ . Por tanto  $s \in I$ .

Ahora, como  $I$  es acotado podemos tomar  $T = \sup I$  y notemos que  $T \in I$  pues  $I$  es cerrado. Debemos probar  $T = d(x, y)$  ya que implicaría que  $\gamma$  es una geodésica que une a  $x$  con  $y$  definida en el intervalo  $[0, T]$ . Notemos que  $T > d(x, y)$  no es posible por la restricción de  $I$ .

Supongamos que  $T < d(x, y)$ . Por el lema 4.1.2, para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, existe  $x_0$  tal que

$$d(x, x_0) = \epsilon \quad \text{y} \quad d(x, x_0) + d(x_0, y) = d(x, y).$$

y aplicamos el mismo lema a los puntos  $\gamma(T)$  y  $y$  para encontrar  $\delta > 0$  y  $y_0 \in S$  tal que

$$d(\gamma(T), y_0) = \delta \quad \text{y} \quad d(\gamma(T), y_0) + d(y_0, y) = d(\gamma(T), y).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} d(x, y_0) &\geq d(x, y) - d(y_0, y) \\ &= d(x, y) - (d(\gamma(T), y) - d(\gamma(T), y_0)) \\ &= (d(x, y) - d(\gamma(T), y)) + d(\gamma(T), y_0) \\ &= T + \delta, \end{aligned}$$

ya que  $T \in I$ .

Sea  $\eta$  la geodésica que une  $\gamma(T)$  con  $y_0$ . Dado que la concatenación  $L$  de  $\gamma|_{[0, T]}$  y  $\eta$  es una curva  $C^1$  a pedazos de longitud  $T + \delta$  que unen  $x$  con  $y_0$ , se sigue de los cálculos anteriores que  $d(x, y_0) = T + \delta$ .

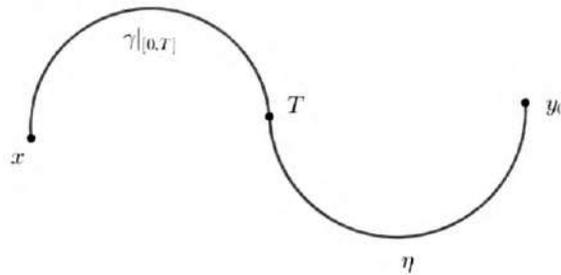


FIGURA 4.5: Concatenación de  $\gamma|_{[0, T]}$  y  $\eta$ .

Hemos probado que  $L$  es una geodésica. Por definición de  $L$  tenemos  $L|_{[0, T]} = \gamma|_{[0, T]}$ . Además en el intervalo  $[0, T + \delta]$  las geodésicas  $L$  y  $\gamma$  coinciden. Por tanto  $\gamma(T + \delta) = L(T + \delta) = y_0$ .

Entonces

$$\begin{aligned} d(y, \gamma(T + \delta)) + T + \delta &= d(y, y_0) + T + \delta = d(y, \gamma(T)) - d(\gamma(T), y_0) + T + \delta = d(y, \gamma(T)) + T \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Pero esto es una contradicción pues habíamos supuesto que  $T$  era el supremo de  $I$ . Por lo tanto,  $T = d(x, y)$ .

□

## 4.2. Construcción de Superficies Hiperbólicas

En esta sección vamos a considerar un grupo  $\Gamma$  de isometrías que actúa propiamente discontinuamente sobre  $\mathbb{H}^2$ . Para medir la distancia entre las órbitas de esta acción, consideraremos la función  $D : \mathbb{H}^2/\Gamma \times \mathbb{H}^2/\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$D(\Gamma x, \Gamma y) = \min\{d(u, v) : u \in \Gamma x, v \in \Gamma y\},$$

para toda  $x, y \in \mathbb{H}^2$  y  $d$  es la distancia hiperbólica de  $\mathbb{H}^2$ . Una definición equivalente es

$$\tilde{D}(\Gamma x, \Gamma y) = \min\{d(x, gy) : g \in \Gamma\}.$$

Para ver la equivalencia de estas dos definiciones, la siguiente proposición será de gran ayuda.

**Proposición 4.2.1.** *Sea  $\Gamma \subseteq Iso(\mathbb{H}^2)$  actuando propiamente discontinuamente, y  $x \in \mathbb{H}^2$ , entonces  $\Gamma x$  no tiene puntos de acumulación.*

*Demostración:* Procederemos por contradicción. Sea  $x_0 \in \mathbb{H}^2$  tal que  $\Gamma x_0$  tiene un punto de acumulación  $y$  y para toda  $r > 0$  existe  $g \in \Gamma$  tal que  $d(y, gx_0) < r$ , entonces existe  $(g_n x_0) \subseteq \mathbb{H}^2$  tal que  $g_n x_0 \rightarrow y$ . Como la acción es propiamente discontinua, para  $r$  suficientemente pequeño tenemos

$$d(g_1 x_0, g_2 x_0) < r \Leftrightarrow d(x_0, g_1^{-1} g_2 x_0) < r \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 = \{id\} \Leftrightarrow g_1 = g_2.$$

En particular,  $d(g_m x_0, g_n x_0) \geq r$  con  $g_m \neq g_n$ . Lo cual es una contradicción pues la sucesión es de Cauchy, es decir, para  $m, n$  muy grandes,  $d(g_m x_0, g_n x_0) < r$ .

□

**Lema 4.2.1.** *Las funciones  $D(\Gamma x, \Gamma y) = \min\{d(u, v) : u \in \Gamma x, v \in \Gamma y\}$  y  $\tilde{D}(\Gamma x, \Gamma y) = \min\{d(x, gy) : g \in \Gamma\}$  son iguales.*

*Además,  $\min\{d(x, gy) : g \in \Gamma\}$  no depende de la elección del representante de  $\Gamma x$ .*

*Demostración:* Notemos que  $\{d(x, gy) : g \in \Gamma\} \subseteq \{d(u, v) : u \in \Gamma x, v \in \Gamma y\}$ , por lo que sólo demostraremos la otra contención.

Sea  $u = gx$  y  $v = hy$ . Entonces

$$d(u, v) = d(gx, hy) = d(g^{-1}gx, g^{-1}hy) = d(x, g^{-1}hy) = d(x, g'y).$$

Ahora veamos que el mínimo del conjunto anterior siempre existe. Procederemos por contradicción. Supongamos que  $\min\{d(x, gy) : g \in \Gamma\}$  no existe, es decir, para cada  $g \in \Gamma$ , existe  $g' \in \Gamma$  tal que  $d(x, g'y) < d(x, gy)$ . Entonces existe una sucesión  $(d(x, g_n y))_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$  estrictamente decreciente por lo que debe converger a algún número, digamos  $r \geq 0$ .

Así, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe un  $z \in \mathbb{H}^2$  que es punto de acumulación de  $(g_n y)_{n=1}^{\infty}$  (pues la sucesión está acotada), lo cual es una contradicción con la proposición 4.2.1.

A continuación veremos que la definición equivalente de  $D$  tampoco depende de la elección del representante de  $\Gamma x$ . En efecto, sea  $x' \in \Gamma x$ , así existe  $h \in \Gamma$  tal que  $x' = hx$ . Luego

$$\min_{g \in \Gamma} d(x', gy) = \min_{g \in \Gamma} d(hx, h(h^{-1}gy)) = \min_{g \in \Gamma} d(x, h^{-1}gy) = \min_{g' \in \Gamma} d(x, g'y).$$

□

**Lema 4.2.2.** *La función  $D$  es una métrica en el espacio  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ .*

*Demostración:* Sean  $x, y, z \in \mathbb{H}^2$

1)  $D(\Gamma x, \Gamma y) \geq 0$ , pues  $d$  es la distancia hiperbólica.

2) Es claro que  $D(\Gamma x, \Gamma y) = D(\Gamma y, \Gamma x)$ .

3) Sea  $\Gamma x = \Gamma y$ . Entonces existe  $g \in \Gamma$  tal que  $x = gy$ , y por lo tanto  $D(\Gamma x, \Gamma y) = \min\{d(x, gy) : g \in \Gamma\} = 0$

Ahora, si  $D(\Gamma x, \Gamma y) = 0$ , existe  $g, h \in \Gamma$  tal que  $d(gx, hy) = 0$ . En consecuencia,  $gx = hy$ , y  $\Gamma x = \Gamma y$ .

4) Sean  $X \in \Gamma x, Y \in \Gamma y, Z \in \Gamma z$  tales que  $d(X, Y) = D(\Gamma x, \Gamma y)$ ,  $d(Y, Z) = D(\Gamma y, \Gamma z)$ . Así,  $D(\Gamma x, \Gamma z) = \min\{d(x, gz) : g \in \Gamma\} \leq d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z) = D(\Gamma x, \Gamma y) + D(\Gamma y, \Gamma z)$ .

□

Por todo lo anterior, concluimos que  $(\mathbb{H}^2/\Gamma, D)$  es un espacio métrico. De hecho, demostraremos que  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  es una superficie hiperbólica. Para ello probaremos que la proyección natural  $\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$  es una isometría local.

**Lema 4.2.3.** Si

$$r = \min_{g \in \Gamma, g \neq id} d(x, gx) > 0 \quad (4.3)$$

entonces en  $B_{\frac{r}{6}}(x)$  no hay dos puntos que estén en la misma órbita.

*Demostración:* Supongamos que  $y, gy \in B_{\frac{r}{6}}(x)$  con  $g \neq id$ . Como hemos demostrado que  $\mathbb{H}^2$  es un espacio métrico, podemos usar la desigualdad del triángulo:

$$d(x, gx) \leq d(x, y) + d(y, gy) + d(gy, gx) < \frac{r}{6} + \frac{r}{3} + \frac{r}{6} < r.$$

Lo cual es una contradicción con la definición de  $r$ , y esto implica que no hay dos representantes de la misma órbita en una bola con radio  $\frac{r}{6}$ .

□

**Lema 4.2.4.** Sea  $x \in \mathbb{H}^2$  y sea  $r$  dado por (4.3). Si  $\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$  es la proyección natural, entonces  $\pi|_{B_{\frac{r}{6}}(x)}$  es isometría.

*Demostración:* Sean  $y \neq z$ ,  $y, z \in B_{\frac{r}{6}}(x)$ . Sabemos que existe  $g \in \Gamma$  tal que  $d(y, gz) = D(\Gamma y, \Gamma z)$ .

Así,

$$d(x, gz) \leq d(x, y) + d(y, gz) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{r}{2}.$$

Además,

$$d(x, gx) \leq d(x, gz) + d(gz, gx) = d(x, gz) + d(x, z) < \frac{r}{2} + \frac{r}{6} = \frac{2r}{3} < r$$

Por tanto,  $g = id$  y

$$d(y, z) = \min_{g \in \Gamma} d(z, gy) = D(\Gamma y, \Gamma z).$$

□

Con el lema 4.2.4 mostramos que para cada punto en  $x \in \mathbb{H}^2$ , la bola  $B_{\frac{r}{6}}(x)$  con  $r$  dado por (4.3) es isométrica a la bola  $B_r(\Gamma x)$  en  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ . Entonces, concluimos que  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  es una superficie hiperbólica.

### 4.3. Teorema Principal

En la sección anterior concluimos con el hecho de que el espacio cociente  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  es una superficie hiperbólica. Surge de manera natural la siguiente pregunta: ¿bajo que condiciones una superficie hiperbólica  $S$  es el cociente de  $\mathbb{H}^2$  bajo la acción de un grupo que actúe de manera propiamente discontinua. Supongamos ahora que  $S$  es una superficie hiperbólica completa y conexa por trayectorias. Probaremos que  $S$  debe ser un cociente del plano hiperbólico. Para esta sección, consideraremos a las superficies hiperbólicas como aquellas que cada uno de sus puntos tiene una vecindad isométrica al plano hiperbólico.

La clave para representar a la superficie hiperbólica  $S$  como un cociente, es construir una función cubriente  $\mathbb{H}^2 \rightarrow S$  llamada función lápiz que “envuelva”  $\mathbb{H}^2$  alrededor de  $S$  por medio de pedazos pequeños a la vez. Sea  $O = i \in \mathbb{H}^2$ ,  $x \in S$ . Como  $S$  es una superficie hiperbólica, existe  $r > 0$  tal que la bola  $B_r(O) \in \mathbb{H}^2$  es isométrica a la bola  $B_r(x) \in S$  y sea  $f : B_r(O) \rightarrow B_r(x)$  una isometría. La función lápiz  $p : \mathbb{H}^2 \rightarrow S$  se define como una extensión natural de  $f$ .

Sea  $X \in \mathbb{H}^2$  tal que  $d(X, O) \geq r$ . Para definir  $p(X)$ , consideramos un punto  $X_1$  tal que  $d(X_1, O) < r$  en el segmento geodésico  $OX$ . Como  $S$  es una superficie completa, podemos extender  $f(OX_1)$  a un segmento geodésico de longitud igual a  $d(O, X)$  con punto final  $p(X)$ .

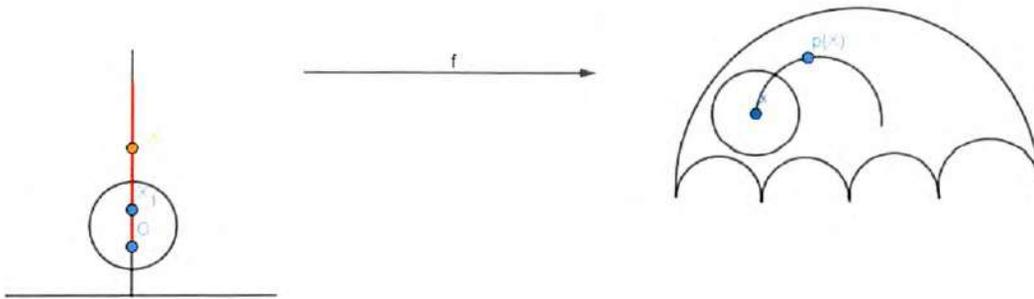


FIGURA 4.6: Bosquejo de la función lápiz.

**Teorema 4.3.1.** *La función lápiz  $p : \mathbb{H}^2 \rightarrow S$  tiene las siguientes propiedades:*

- i) Para cada  $X \in \mathbb{H}^2$ , existe  $p|_{B_r(X)}$  tal que  $p$  es isometría,*
- ii)  $p$  es suprayectiva.*

*Demostración:* Parte *i*). Procederemos por contradicción. Supongamos que existe  $P \in \mathbb{H}^2$  tal que para todo  $r > 0$ ,  $p$  no es isometría en  $B_r(P)$ , y denotamos por  $A$  al conjunto de

todos los puntos con esta propiedad. Notemos que  $A$  es cerrado pues si  $W \in \mathbb{H}^2 - A$ , entonces existe  $r_W > 0$  tal que  $p$  es isometría en  $B_{r_W}(W)$ .

Como  $A$  es cerrado, entonces  $A \cap OP$  es compacto, por tanto, debe haber un elemento  $X \in A \cap OP$  que sea el más cercano a  $O$ . Luego,  $p(X) \in S$  y  $S$  es hiperbólica, entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(p(X))$  es isométrica a un disco en  $\mathbb{H}^2$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que es el que tiene centro en  $X$ . Así, tenemos una isometría  $h : B_\epsilon(X) \rightarrow B_\epsilon(p(X))$ . Vamos a probar que si  $h$  no coincide con  $p$  en  $OX \cap B_\epsilon(X)$ , entonces debe existir una rotación hiperbólica  $r$  tal que  $hr$  sí coincida.

Notemos que para cualquier ángulo  $\theta$ , existen dos rayos hiperbólicos que parten de  $X$  y que forman un ángulo  $\theta$  con  $OX$ . Si las imágenes de estos rayos bajo  $p$  no coinciden con su respectiva imagen bajo  $hr$ , entonces debe existir una reflexión hiperbólica  $\bar{r}$  respecto a la geodésica  $OX$  tal que sí coincidan. Así, la isometría  $f = h\bar{r}$  coincide con  $p$  en cada una de las bolas con centro en algún punto de  $OX \cap B_\epsilon(X)$  y radio suficientemente pequeño para que esté en el interior de  $B_\epsilon(X)$ .

Por nuestra hipótesis,  $p$  es una isometría en una vecindad lo suficientemente pequeña de cada punto  $Y \in OX \cap B_\epsilon(X)$  distinto de  $X$ . Sea  $Y$  uno de esos puntos y supongamos que  $p$  y  $f$  coinciden en  $B_\delta(Y)$  con  $\delta > 0$ . Por la definición de  $p$ , notamos que  $f$  y  $p$  deben coincidir en la prolongación de los rayos hiperbólicos que parten de  $O$  y que pasan por  $B_\delta(Y)$  ya que  $f$  preserva longitudes y ángulos.

Notemos que la unión de todos estos segmentos contiene un disco alrededor de  $X$ , por lo que  $p$  es isometría en un disco alrededor de  $X$  lo cual es una contradicción pues habíamos supuesto que  $p$  no era isometría alrededor de  $X$ .

Parte ii). Sea  $v \neq p(O)$  en  $S$ . Existe una geodésica  $\tilde{\gamma} : [0, d(p(O), v)] \rightarrow S$  tal que  $\tilde{\gamma}(0) = p(O)$ ,  $\tilde{\gamma}(d(p(O), v)) = v$ . Sea  $r > 0$  tal que  $p : B_r(O) \rightarrow B_r(p(O))$  es isometría. Entonces  $p^{-1}(\tilde{\gamma}([0, \frac{r}{2}])) \cap B_r(O)$  es un segmento de geodésica en  $\mathbb{H}^2$  que tiene a  $O$  como uno de sus extremos. Extendemos esta geodésica a  $\gamma : [0, d(p(O), v)] \rightarrow \mathbb{H}^2$ , con  $\gamma(0) = O$ . Sea  $x = \gamma(d(p(O), v))$ , entonces la extensión de  $p|_{B_r(O)}$  ( $\gamma$ ) debe coincidir con  $\tilde{\gamma}$  en  $[0, d(p(O), v)]$ . En particular,  $p(x) = \tilde{\gamma}(d(p(O), v)) = v$ .

□

El teorema anterior nos dice que  $\mathbb{H}^2$  puede cubrir a  $S$  vía la función lápiz. Ahora veremos que  $S$  se identifica con  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  para algún grupo  $\Gamma \subseteq Iso(\mathbb{H}^2)$ .

**Definición 4.3.2.** Una isometría  $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  se dice una isometría cubriente para la función lápiz  $p$  si  $(p \circ g)(P) = p(P)$  para toda  $P \in \mathbb{H}^2$ .

De hecho podemos observar que  $P$  y  $g(P)$  cubren al mismo punto en  $S$  vía  $p$ , para cualquier isometría cubriente  $g$ .

**Lema 4.3.1.** *Las isometrías cubrientes para  $p$  forman un grupo.*

*Demostración:* Como las isometrías cubrientes son isometrías, es suficiente probar la cerradura.

• Cerradura. Sean  $g_1, g_2$  isometrías cubrientes y  $P$  un punto. Así,  $p \circ (g_1 \circ g_2)(P) = p(g_1(g_2(P))) = (p \circ g_2)(P) = p(P)$ . Entonces  $g_1 \circ g_2$  es una isometría cubriente.

□

A continuación probaremos que si  $\Gamma$  es el grupo de isometrías cubrientes para  $p$ , entonces  $S$  se identifica con  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ .

**Teorema 4.3.3.** *Si  $p(P) = p(W)$ , entonces  $W = g(P)$  para alguna isometría cubriente  $g$ .*

*Demostración:* Por la propiedad de isometría local de  $p$  demostrada en el teorema 4.3.1, existen discos  $D(P)$  alrededor de  $P$  y  $D(W)$  alrededor de  $W$  que son transformados isométricamente por  $p$  a un disco  $p(D(P)) = p(D(W))$  de  $S$ . Observemos que  $D(P) \xrightarrow{p} p(D(P)) \xrightarrow{p^{-1}} D(W)$ , por lo que tenemos una isometría  $g : D(P) \rightarrow D(W)$ . Como  $D(P)$  contiene tres puntos no colineales, por el lema 3.4.3, existe una única isometría  $g$  que coincide con  $(p|_{D(W)})^{-1} \circ p|_{D(P)}$ . Probaremos que  $g$  es una isometría cubriente para  $p$ , es decir,  $p(R) = (p \circ g)(R)$  para todo  $R \in \mathbb{H}^2$ .

Supongamos lo contrario, es decir, que existe un punto  $R \in \mathbb{H}^2$  tal que  $p(R) \neq (p \circ g)(R)$ . Definimos el conjunto  $A$  como el que contiene todos los puntos con esta propiedad, y notemos que  $A$  es cerrado pues su complemento  $A^c$  es abierto. En efecto, sea  $P' \in A^c$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $p|_{B_r(P')}$  es una isometría.

Como  $A$  es cerrado, si  $PT$  es un segmento de geodésica con  $T \in A$ , entonces  $A \cap PT$  es un compacto, por lo que existe un punto más cercano a  $P$ , diremos  $R \in A \cap PT$  tal que  $p(R) \neq (p \circ g)(R)$ . Consideremos una sucesión  $R_1, R_2, R_3, \dots$  de puntos entre  $P$  y  $R$ ,  $(R_k)_{k=1}^\infty \subset (PR)^\circ$  tal que  $(R_k)_{k=1}^\infty \rightarrow R$ . Por hipótesis,  $p(R_k) = (p \circ g)(R_k)$ , para toda  $k \in \mathbb{N}$ . Por la continuidad de  $p$  y  $g$ , tenemos que

$$p\left(\lim_{i \rightarrow \infty} R_i\right) = (p \circ g)\left(\lim_{i \rightarrow \infty} R_i\right),$$

es decir,  $p(R) = (p \circ g)(R)$ , lo cual es una contradicción.

Por tanto,  $p(R) = (p \circ g)(R)$  para todo  $R \in \mathbb{H}^2$ , entonces  $g$  es una isometría cubriente.

□

El bosquejo de la demostración del teorema es representado en la figura 4.3.

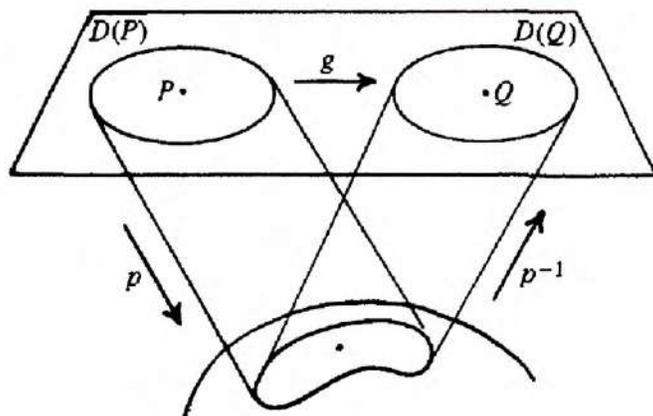


FIGURA 4.7: Isometrías Cubrientes.

Gracias a lo anterior es fácil ver que  $p$  es una función cubriente y que el grupo de isometrías cubrientes actúa de manera propiamente discontinua. Como consecuencia, hemos podido demostrar nuestro teorema principal.

**Teorema de Killing-Hopf 4.3.1.** *Si  $S$  es una superficie hiperbólica completa y conexa por trayectorias, entonces debe ser de la forma  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es un grupo que actúa propiamente discontinuamente por medio de isometrías hiperbólicas de  $\mathbb{H}^2$ . Más aún,  $\pi_1(\mathbb{H}^2/\Gamma) \cong \Gamma$ .*

Por tanto, tenemos una clasificación de superficies hiperbólicas vía el teorema de Killing-Hopf, y una manera de calcular su grupo fundamental.

### 4.4. El Caso de la Esfera Agujerada

En la introducción hablamos un poco sobre el caso euclidiano. Mencionamos que el grupo  $\Gamma$  no podía tener rotaciones pues no debía tener puntos fijos, sin embargo en el caso hiperbólico sí podemos tenerlas, y serán las rotaciones límite de las que hablamos en la sección 3.4.

Consideremos la región  $R \subset \mathbb{H}^2$  acotada por  $Re(z) = \pm 1$  y los semicírculos  $|z \pm \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ . Hacemos topológicamente a  $R$  una esfera menos tres puntos identificando a  $Re(z) = 1$  con  $Re(z) = -1$  y  $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$  con  $|z + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$  mediante las isometrías hiperbólicas  $g(z) = z + 2$  y  $h(z) = \frac{z}{2z+1}$ , respectivamente. Llamaremos al cociente resultante como  $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$ , donde  $\Gamma = \langle g, h \rangle$ .

Ambos casos se muestran en las figuras.

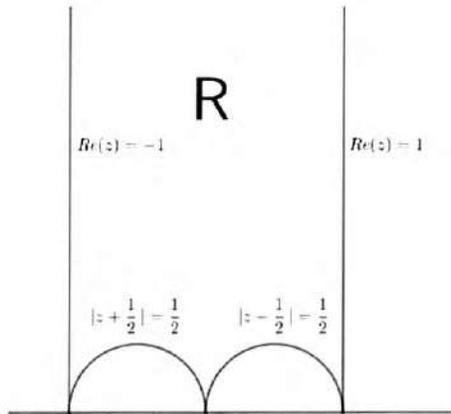


FIGURA 4.8: Region  $R$ .

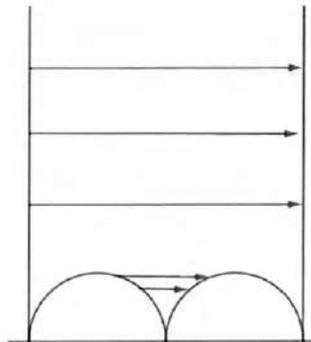


FIGURA 4.9:  $R$  con las identificaciones.

Cada punto  $z \in R$  tiene una vecindad hiperbólica  $D$  a su alrededor y cada  $z$  en la frontera de  $R$  está en dos discos, un disco es la imagen de otro bajo  $g$  o  $h$  según en la parte de la frontera de dónde se encuentre  $z$ . Notemos que  $S$  no es una superficie completa por lo que no podremos utilizar el Teorema de Killing-Hopf. No obstante, demostraremos que  $S$  es de la forma  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ .

**Teorema 4.4.1.** *La región  $R$  es una región fundamental para  $\Gamma = \langle g, h \rangle$ .*

*Demostración:* Demostraremos que las regiones  $wR$  de  $R$ ,  $w \in \langle g, h \rangle$  llenan  $\mathbb{H}^2$  y solamente se intersectan en los bordes. Para probar lo primero, utilizaremos la siguiente notación. Si  $R_1, R_2, R_3$  son cualesquiera  $wR$  regiones, escribimos

$$R_1|R_2|R_3$$

para denotar que  $R_2$  separa a  $R_1$  de  $R_3$ . En particular,  $R_1 \cap R_3 = \emptyset$ . Más aun, si  $R_1|R_2|R_3$  y  $R_2|R_3|R_4$ , entonces  $R_1|R_2|R_4$  y  $R_1|R_3|R_4$ .

Si  $\Gamma$  actúa sobre  $R$ , entonces nos quedará la región como en la figura de abajo. Nos damos cuenta de que  $wR$  tiene a su alrededor áreas de la forma  $wg^{\pm 1}R$  y  $wh^{\pm 1}R$  que sólo se intersectan en sus bordes.

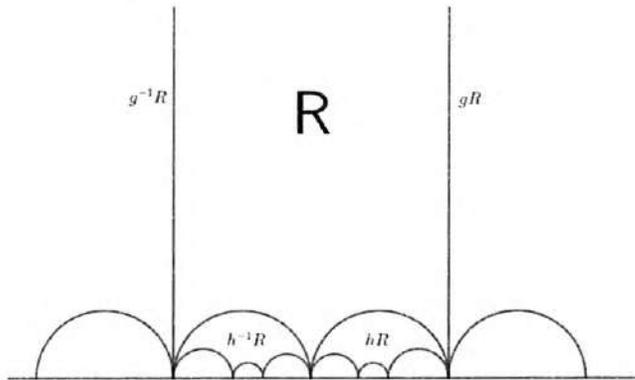


FIGURA 4.10:  $R$  bajo la acción de  $\Gamma$ .

Para cada  $\ell, \ell' \in \{g, g^{-1}, h, h^{-1}\}$ ,  $wR$  separa a  $w\ell R$  de  $w\ell' R$ . En términos de la anterior notación, tenemos

$$w\ell R|wR|w\ell' R.$$

Ahora probaremos que si  $w = \ell_k \dots \ell_1$  es un producto reducido de al menos dos términos  $g^{\pm 1}$  y  $h^{\pm 1}$ , entonces  $wR$  es disjunto de  $R$ .

Consideremos la región  $\ell_k \dots \ell_1 R = \ell_k \dots \ell_2 \cdot \ell_1 R$ . Ya que  $w$  es reducido,  $\ell_2^{-1} \neq \ell_1$ , concluimos que

$$\ell_k \dots \ell_2 \cdot \ell_1 R | \ell_k \dots \ell_2 R | \ell_k \dots \ell_2 \cdot \ell_2^{-1} R,$$

es decir,

$$\ell_k \dots \ell_2 \ell_1 R | \ell_k \dots \ell_2 R | \ell_k \dots \ell_3 R.$$

Procediendo de manera similar tenemos

$$\ell_k \dots \ell_2 R | \ell_k \dots \ell_3 R | \ell_k \dots \ell_4 R,$$

y finalmente

$$\ell_k \ell_{k-1} R | \ell_k R | R.$$

Por tanto,

$$\ell_k \dots \ell_1 R | \ell_k \dots \ell_2 R | R,$$

lo que quiere decir que  $wR = \ell_k \dots \ell_1 R$  es disjunto de  $R$ .

Como ya sabemos, las regiones  $wR$  sólo se intersectan en los bordes cuando  $w \in \{g, g^{-1}, h, h^{-1}\}$ , por tanto  $wR$  sólo se traslapa con  $R$  si  $w = 1$ .

Ahora mostraremos que las regiones  $wR$  llenan  $\mathbb{H}^2$ . Primero notemos que la unión de ellas es un área  $\mathbb{H}^2$ -convexa, es decir, si la unión contiene dos puntos  $P$  y  $Q$  también debe contener a la geodésica que los una. Si  $P \in R$  y  $Q \in \ell_k \dots \ell_2 \ell_1 R$ , entonces las celdas adyacentes sucesivas  $\ell_k \dots \ell_2 \ell_1 R, \ell_k \dots \ell_2 R, \dots, R$  es un  $\mathbb{H}^2$ -polígono con todos sus vértices en  $\partial\mathbb{H}^2$ . Por ello, dicho polígono es convexo en  $\mathbb{H}^2$  y la geodésica que une a  $P$  con  $Q$  está contenida en él.

Finalmente, es suficiente mostrar que hay regiones  $wR$  arbitrariamente cercanas a cualquier punto de  $\partial\mathbb{H}^2$ , y para esto veremos que los vértices de las regiones son densos en  $\partial\mathbb{H}^2$  pues cada punto sería separado por pequeños bordes de regiones. Probaremos que todo número racional en  $\partial\mathbb{H}^2$  es vértice de alguna región  $wR$ .

Consideremos un número racional  $\frac{m}{n}$  y veamos cómo es transformado por  $g, g^{-1}, h, h^{-1}$ :

$$g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m+2n}{n}, \quad g^{-1}\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m-2n}{n},$$

$$h\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{2m+n}, \quad h^{-1}\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{-2m+n}.$$

Si representamos el número  $\frac{m}{n}$  por  $(m, n)$ , podremos formar a los pares

$$(m', n') = (m \pm 2n, n), (m, \pm 2m + n)$$

mediante  $g^{\pm 1}$  y  $h^{\pm 1}$ .

Si  $0 \neq |m| < |n|$ , tenemos  $|2m + n| < |n|$  o  $|-2m + n| < |n|$ . Si  $0 \neq |n| < |m|$  tenemos  $|m + 2n| < |m|$  o  $|m - 2n| < |m|$ .

Por tanto, para  $|m| \neq |n|$ , con  $|m|, |n| > 0$ , tendremos que al menos unos de los pares  $(m', n')$  satisface que:

$$|m'| + |n'| < |m| + |n|.$$

Aplicando continuamente  $g^{\pm 1}$  y  $h^{\pm 1}$  obtendremos ya sea  $m' = 0, n' = 0$  o  $|m'| = |n'|$ . En consecuencia tendremos algunas de las siguientes posibilidades:  $\frac{m'}{n'} = 0, \frac{m'}{n'} = \infty$  o  $\frac{m'}{n'} \pm 1$ . Como  $0, \infty, 1$  son vértices de  $R$ , se sigue que aplicando de manera inversa las isometrías  $g^{\pm 1}$  y  $h^{\pm 1}$  que  $\frac{m}{n}$  es un vértice para alguna región  $wR$ .

□

**Corolario 4.4.1.** *El grupo  $\Gamma = \langle g, h \rangle$  actúa en  $\mathbb{H}^2$  sin puntos fijos.*

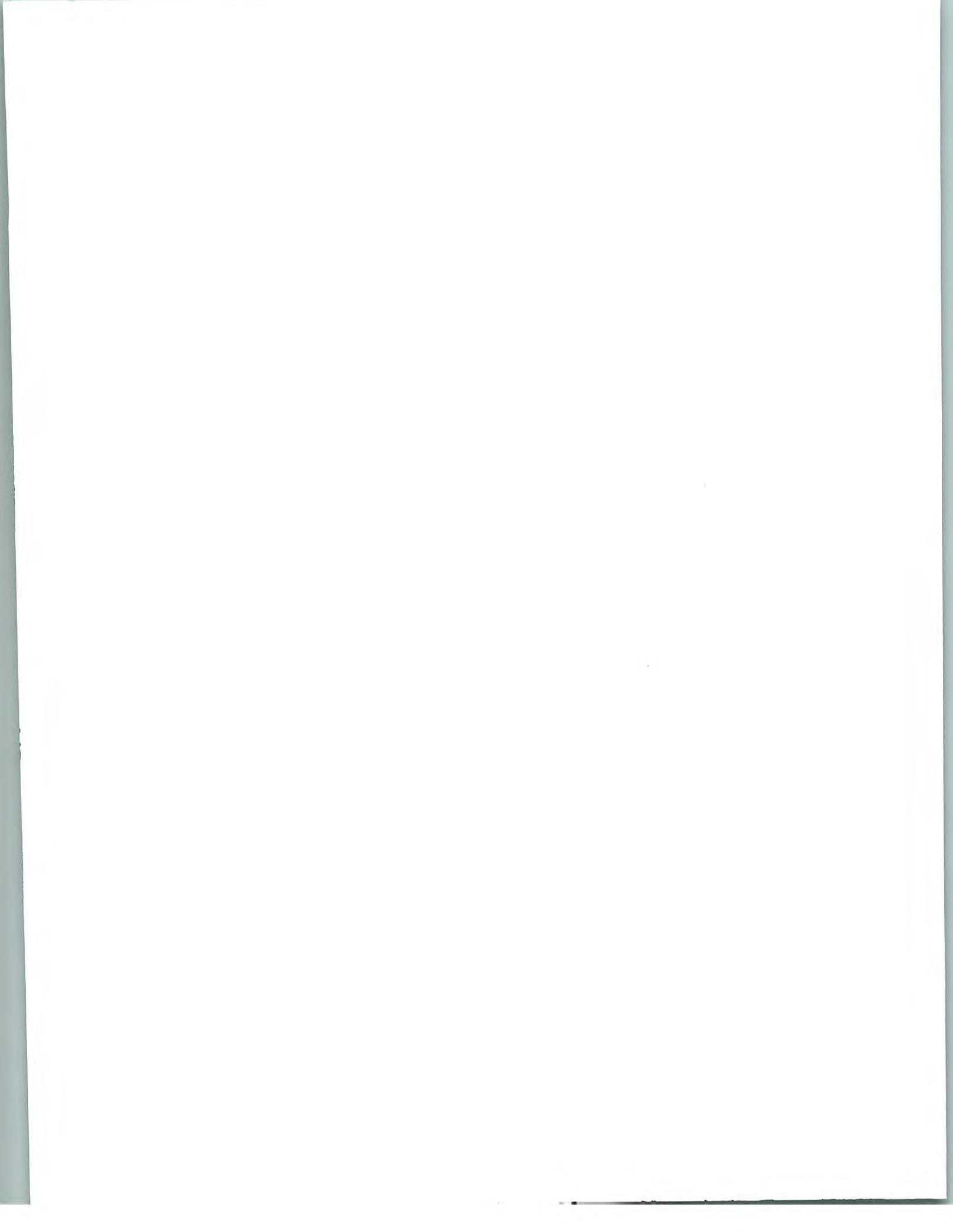
*Demostración:* Será suficiente probar que no hay punto en  $R$  que sea fijado por algún elemento  $w \in \langle g, h \rangle$  distinto de la identidad porque  $R$  es región fundamental. Recordemos que  $w \neq g^{\pm 1}, h^{\pm 1}$  no deja ningún punto fijo ya que las regiones  $g^{\pm 1}R, h^{\pm 1}R$  son las únicas que tocan a  $R$ . Puesto que las transformaciones  $g$  y  $h$  sólo dejan fijos a  $\infty$  y a  $0$ , respectivamente, se sigue el resultado deseado.

□

El teorema 4.4.1 junto con el corolario 4.4.1 asegura que  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  es un espacio topológico homeomorfo a la esfera con tres agujeros, pues  $R$  resultó ser una región fundamental.

Más aun,  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  es una superficie hiperbólica. Para probarlo, necesitamos que la acción del grupo  $\Gamma$  sea propiamente discontinua y en el ejemplo anterior solamente hemos demostrado que  $R$  es una región fundamental. De hecho una acción propiamente discontinua implica la existencia de una región fundamental al menos en el caso de que el grupo  $\Gamma$  sea generado por isometrías.

Es fácil ver del teorema 4.4.1 que el grupo  $\Gamma = \langle g, h \rangle$  actúa de manera propiamente discontinuamente, pues sólo cuatro elementos de  $\Gamma$  transforman una región fundamental en otra que la intersecte.



# Bibliografía

- [Be05] Beardon, A. *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag New York. (2005)
- [BEG12] Brannan, D., Esplen, M., Gray, J. *Geometry. Second Edition*. Cambridge University Press. (2012)
- [CNS12] Cano, A. Navarrete, J., Seade, J. *Complex Kleinian Groups*. Monografía. (2012)
- [Iv92] Iversen, B. *Hyperbolic Geometry*. Cambridge University Press. (1992)
- [Ma80] Massey, W. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer-Verlag. (1980)
- [Mu02] Munkres, J. *Topología*. Pearson-Educación, S.A. Madrid. (2002)
- [Ra94] Ratcliffe, J. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Springer Science+ Business Media. (1994)
- [Rot88] Rotman, J. *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag New York. (1988)
- [RR95] Ramsay, A., Richtmyer, R. *Introduction to Hyperbolic Geometry*. Springer-Verlag New York. (1995)
- [Sch11] Schwartz, R. *Mostly Surfaces*. American Mathematical Society. (2011)
- [Sp66] Spanier, E. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill. (1966)
- [St92] Stillwell, J. *Geometry of Surfaces*. Springer-Verlag New York. (1992)

