

UNIVERSIDAD DE SONORA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**Sistemas Dinámicos Discretos
Caóticos**

Tesis para obtener el Grado de
Licenciado en Matemáticas

Juan Enrique Palomares Ruiz

Junio, 2001

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess



Introducción.

El presente trabajo tiene como objetivo presentar un estudio de los principales conceptos relacionados con la teoría de sistemas dinámicos discretos, de los métodos para detectar y analizar propiedades relevantes de los mismos y de revisar algunos casos en los que esta teoría es aplicable.

En el **Capítulo I**, introduciremos el concepto de “sistema dinámico discreto” y revisamos algunos de los comportamientos dinámicos que se presentan en estos. Además de introducir los teoremas y conceptos básicos, estudiamos familias parametrizadas de sistemas dinámicos y categorizaremos los distintos tipos de fenómenos que se presentan.

En el **Capítulo II** desarrollaremos una de las definiciones de caos. Esta definición es motivada por el estudio detallado del comportamiento en la dinámica de dos funciones en particular: la función logística y el mapeo corrimiento. Una vez conocida la definición de caos, observaremos algunos resultados que en ciertas ocasiones nos facilitarían el determinar cuando el sistema es caótico. Finalizando este capítulo con el importante resultado, que nos asegura que la función logística es caótica, sobre un conjunto de Cantor.

En el **Capítulo III**, obtendremos una manera “distinta” de observar si un sistema es caótico y desarrollaremos algunos importantes resultados acerca de esto. También veremos, como son los conjuntos donde los sistemas discretos son caóticos, llegando a unos sorprendentes e interesantes resultados, que embrionariamente se han desar-

rollado en los anteriores capítulos. Trataremos de ver cuál es la estructura y medida de tales conjuntos y veremos que la medida convencional (es decir, la medida de Lebesgue) no se adaptan a éstos, al no diferenciarlos de otros conjuntos totalmente distintos. Esto da pie para desarrollar una medida que resulta ser la indicada para estos.

La idea básica del **Capítulo IV** es la de extender los conceptos básicos que hemos desarrollado para sistemas dinámicos discretos en dimensión uno a sistemas en dimensión mayor, además de tener una definición de cuándo el sistema en dimensión mayor será caótico.

Por último en el **Capítulo V** revisamos algunos modelos de comportamientos biológicos en los que es posible aplicar las ideas desarrolladas en los capítulos anteriores para su estudio.



Dedicatoria.

A mi *madre*, que siempre me ha apoyado de manera incondicional. Y a quien dedico este trabajo con todo mi cariño.

A mi *padre y a mis hermanos*, quienes siempre han estado a mi lado.

A mi *tia Martha Paulina*, quien ha sido un ejemplo a seguir.

A mi *abuela*, a quien quiero mucho.

A mi novia *Angelica*, quien le ha dado una nueva luz a mi vida, y le ha llenado de alegría.

Agradecimientos.

Antes que nada quiero agradecer a Dios, por darme el tiempo y entendimiento suficiente para terminar este trabajo. También quiero agradecer especialmente a mi asesor de tesis Martín Gildardo García A. por aceptar el dirigir este trabajo y darme tiempo para ésto, gracias por sus consejos y observaciones. A los miembros del comité revisor, por sus útiles sugerencias y observaciones. A todos mis compañeros de carrera y por supuesto compañeras, a mis amigos de la Vanka, que siempre se han preocupado por mí. A los miembros del comité revisor, por sus útiles sugerencias y observaciones.

Contenido

Introducción.	i
Dedicatoria.	iii
Agradecimientos.	iv
1 Sistemas Dinámicos Discretos.	3
1.1 Concepto De Sistema Dinámico Discreto.	4
1.2 Diferenciabilidad.	13
1.3 Familias Parametrizadas de Funciones y Bifurcaciones.	19
2 El Concepto de Caos.	27
2.1 La Función Logística.	28
2.2 Dinámica Simbólica.	35
2.3 Una Definición De Caos.	39
2.4 El Caos En La Función Logística.	45
3 Caos, Fractales y Medidas.	53
3.1 Exponentes De Lyapunov.	54
3.1.1 Orbitas Caóticas.	60
3.2 Fractales.	62
3.3 Medidas de Hausdorff.	63
3.3.1 Otros Ejemplos de Fractales	68

<i>CONTENIDO</i>	1
3.3.2 Conjuntos De Julia.	70
4 Sistemas Dinámicos En Dimensión Mayor.	75
4.1 Mapeos Lineales.	75
4.2 Mapeos No Lineales y la Matriz Jacobiana.	80
4.3 Caos En Los Mapeos Dos Dimensionales.	81
4.3.1 Exponentes De Lyapunov En \mathbb{R}^m	81
5 Aplicaciones.	87
5.1 Aplicación 1	87
5.2 Aplicación 2.	93
5.3 Aplicación 3.	95
Bibliografía	103

Capítulo 1

Sistemas Dinámicos Discretos.

En este capítulo presentamos los primeros conceptos y resultados relacionados con la teoría de sistemas dinámicos discretos. Desafortunadamente, el concepto central, que es el de "sistema dinámico discreto" pertenece a esa categoría de conceptos que son difíciles de definir de manera precisa, pero que, no obstante, son muy sencillos de comprender. En general, entenderemos por "sistema dinámico discreto" a una función, f , a la que, para algún punto x en el dominio de f , iteramos repetidamente, para generar una sucesión infinita $x, f(x), f(f(x)) = f^2(x), \dots$. Empezamos este primer capítulo planteando la pregunta central de este tema, que tiene que ver con el comportamiento de la sucesión de iteradas de cada x en el dominio de f y procedemos a describir algunas posibles respuestas a esta pregunta, en términos de puntos fijos y órbitas periódicas o eventualmente periódicas. Los puntos fijos y órbitas periódicas generalmente tiene la propiedad de atraer o repeler a las órbitas de otros puntos. Estas ideas, entre otras, se formalizan en la sección 1.1. La función f que interviene en el concepto de sistema dinámico discreto es, en principio, una función continua por pedazos. Si f es, además, continuamente diferenciable, entonces pueden precisarse las afirmaciones concernientes a la existencia de puntos fijos y al carácter de éstos como atractores o repulsores. Esto se discute en la sección 1.2. En la sección 1.3 se estudia el interesante caso en el que la función que describe al sistema dinámico depende de un parámetro, teniéndose así de hecho, una familia (parametrizada)

de sistemas dinámicos. Se describe también cómo construir el correspondiente diagrama de bifurcación, que es una representación de los puntos fijos de las funciones de la familia, en términos de los valores del parámetro

1.1 Concepto De Sistema Dinámico Discreto.

Un sistema dinámico discreto puede ser descrito, de manera intuitiva, como un proceso mediante el cual una función se compone consigo misma, una y otra vez. La pregunta central que nos interesa estudiar puede formularse de manera informal de la siguiente forma: dado un número real x , ¿Que propiedades tendrá la sucesión $x, f(x), f^2(x), \dots$?¹ Más explícitamente, ¿converge esta sucesión hacia algún punto? Si es así, ¿cómo lo hace? ¿De manera monótona? ¿O de manera oscilante? Si no converge, ¿será divergente? Si no es ni convergente ni divergente, ¿puede decirse algo de ella?

Llamaremos al comportamiento de estos puntos bajo las iteradas de la función, *la dinámica de la función*. Para el análisis de la dinámica de los sistemas discretos, comenzaremos por definir y categorizar los mas simples tipos de comportamiento que se presentan en éstos. En este Capítulo presentaremos los principales conceptos asociados con sistemas dinámicos reales, es decir con sistemas caracterizados por funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Estaremos interesados en funciones f tales que el rango de f está contenido en el dominio de f , para poder realizar las composiciones.

Existen muchos objetos importantes desde el punto de vista dinámico asociados con una función. El primer tipo de objetos son los llamados puntos fijos.

Definición 1.1.1 Si f es una función y además $f(c) = c$, entonces c es un punto fijo de f .

¹Aquí, $f^n(x)$ denota la composición de $f(x)$ con ella misma n veces; es decir, $f^n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ veces}}(x)$.

Una función real de variable real f tiene un punto fijo en c , si y solo si el punto (c, c) está en la gráfica de f . Así que una función tiene un punto fijo en c , si y solo si, la gráfica intersecta la línea $y = x$ en el punto (c, c) . El siguiente teorema nos ayudará a decidir cuándo una función f tiene puntos fijos.

Teorema 1.1.1 *Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y sea f una función continua tal que $f : I \rightarrow I$. Entonces, f tiene un punto fijo en I .*

Demostración: Si $f(a) = a$ ó $f(b) = b$, entonces a ó b sería el punto fijo y habríamos terminado. Así que supongamos $f(a) \neq a$ y $f(b) \neq b$. Además sea $g(x) = f(x) - x$. Como $g(x)$ es la diferencia de dos funciones continuas, ésta es una función continua. Además como $f(a) \neq a$ y $f(a)$ está en $[a, b]$ entonces $f(a) > a$. De esta misma manera se obtiene que $f(b) < b$. Así que $g(a) = f(a) - a > 0$ y $g(b) = f(b) - b < 0$. Como g es continua, el Teorema del Valor Intermedio implica que existe c en $[a, b]$ tal que $g(c) = 0$. Pero $g(c) = f(c) - c$, así que $f(c) = c$. \square

En el Teorema 1.1.1, hemos probado que si la imagen de un intervalo cerrado bajo un mapeo continuo está contenido en el intervalo, entonces el mapeo tiene un punto fijo en el intervalo. A continuación mostraremos que existe un punto fijo cuando la contención se da en el sentido opuesto.

Teorema 1.1.2 *Sea I un intervalo cerrado y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $f(I) \supset I$, entonces f tiene un punto fijo en I .*

Demostración: Sea $I = [a, b]$, como $f(I) \supset I$ entonces existen c y d en I tal que $f(c) = a$ y $f(d) = b$. Si $c = a$ ó $d = b$ habremos terminado. Si no, entonces $a < c < b$ y $a < d < b$. Si definimos $g(x) = f(x) - x$, entonces $g(c) = f(c) - c = a - c < 0$ y $g(d) = f(d) - d = b - d > 0$. Como $g(c) < 0$ y $g(d) > 0$, y además g es continua, el Teorema del Valor Intermedio implica que existe e , entre c y d (y, por tanto, en I) que satisface $g(e) = 0$ y por lo tanto $f(e) = e$. \square

Otra categoría importante de puntos asociados con f son los puntos periódicos.

Definición 1.1.2 *El punto x es un punto periódico de f con período primo k si $f^k(x) = x$ y además $f^n(x) \neq x$ para $0 < n < k$.*

En otras palabras, x es un punto periódico de f con período k si x es un punto fijo de f^k . Esto es, x tiene período primo k_0 si x regresa a su lugar de inicio, exactamente después de k_0 iteraciones.

Definición 1.1.3 *El conjunto $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ de todas las iteradas del punto x es llamado la órbita ² de x y si x es un punto periódico de período primo k_0 , entonces el conjunto $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{k_0-1}(x)\}$ se llama órbita periódica o ciclo periódico de f .*

Otros dos tipos de puntos son eventualmente fijos y eventualmente periódicos, los cuales definiremos a continuación.

Definición 1.1.4 *x es un punto eventualmente fijo de la función f si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n+1}(x) = f^n(x)$ siempre que $n \geq N$. El punto x es eventualmente periódico con período k , si existe algún N tal que $f^{n+k}(x) = f^n(x)$ siempre que $n \geq N$.*

Definición 1.1.5 *Sea f una función y p un punto periódico de f con período primo k . Entonces diremos que x converge asintóticamente a p si la sucesión $\{x, f^k(x), f^{2k}(x), f^{3k}(x), \dots\}$ converge a p .*

En otras palabras, si el $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(x) = p$ diremos que la sucesión que inicia en x converge asintóticamente a p .

Definición 1.1.6 *El conjunto estable de p , denotado por $W^s(p)$, consiste en todos los puntos que son convergentes asintóticamente a p . Si la sucesión $\{|x|, |f(x)|,$*

²Se entiende que $f^0(x) = x$.

$\{|f^2(x)|, |f^3(x)|, \dots\}$ crece sin cota, entonces la sucesión que inicia en el punto x diverge asintóticamente a ∞ . El conjunto estable de ∞ denotado por $W^s(\infty)$, consiste en todos los puntos que son divergentes asintóticamente a ∞ .

Como nos sugiere el teorema 1.1.3, los conjuntos estables de dos distintos puntos fijos, no pueden tener puntos en común, *i.e.*, no se intersectan.

Teorema 1.1.3 *Si p y q son dos puntos periódicos distintos, entonces*

$$W^s(p) \cap W^s(q) = \emptyset.$$

Demostración: Sean p_1 y p_2 puntos periódicos de período k_1 y k_2 , respectivamente. Mostraremos que si $W^s(p_1) \cap W^s(p_2) \neq \emptyset$, entonces $p_1 = p_2$. Sea x en $W^s(p_1) \cap W^s(p_2)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existen N_1 y N_2 tales que $n \geq N_1$ implica $|p_1 - f^{nk_1}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $n \geq N_2$ implica $|p_2 - f^{nk_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Si M es mayor que N_1 y N_2 entonces $n \geq M$ implica ambas $|p_1 - f^{nk_1}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|p_2 - f^{nk_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por la desigualdad del triángulo tenemos

$$\begin{aligned} |p_1 - p_2| &= |p_1 - f^{nk_1 k_2}(x) + f^{nk_1 k_2}(x) - p_2| \\ |p_1 - p_2| &\leq |p_1 - f^{nk_1 k_2}(x)| + |f^{nk_1 k_2}(x) - p_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así hemos demostrado que la distancia entre p_1 y p_2 es menor que ε para cualquier $\varepsilon > 0$; esto implica $p_1 = p_2$. \square

A continuación veremos uno de los primeros resultados importantes en la teoría de los sistemas dinámicos discretos.

Teorema 1.1.4 *Si una función continua de números reales, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tiene un punto periódico de período primo tres, entonces tiene puntos periódicos de todos los períodos primos.*

Demostración: Sea $\{a, b, c\}$ una órbita periódica de período tres, de la función continua f . Sin pérdida de generalidad, tomaremos $a < b < c$. Así que solo hay dos

casos, $f(a) = b$ ó $f(a) = c$. Supongamos $f(a) = b$. Esto implica $f(b) = c$ y $f(c) = a$ (la prueba para el caso $f(a) = c$ es muy similar y por lo tanto no se desarrolla).

Sea $I_0 = [a, b]$ y sea $I_1 = [b, c]$. El Teorema del Valor Intermedio implica que $f(I_0) \supset I_1$, $f(I_1) \supset I_1$ y $f(I_1) \supset I_0$. Como, $f(I_1) \supset I_1$, el Teorema 1.1.2 implica que f tiene un punto fijo en I_1 . Ahora, sea n un número natural mayor que 1. Supongamos que existe una sucesión encajada de intervalos cerrados, $I_1 = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n$, con las siguientes propiedades.

$$(1) A_0 = I_1.$$

$$(2) f(A_k) = A_{k+1} \text{ para } k = 1, 2, \dots, n-2.$$

$$(3) f^k(A_k) = I_1 \text{ para } k = 1, 2, \dots, n-2.$$

$$(4) f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0.$$

$$(5) f^n(A_n) = I_1.$$

Como $A_n \subset I_1$, la propiedad (5) y el teorema 1.1.2 implican que f^n tiene un punto fijo en A_n . Por supuesto esto es lo mismo que decir que f tiene un punto periódico p con período primo n en A_n . A continuación usaremos las cuatro condiciones para mostrar que p tiene período primo n .

Si p es un punto periódico de período n en A_n , entonces las propiedades (1) y (3) implican que, el conjunto $\{p, f(p), f^2(p), \dots, f^{n-2}(p)\}$ está en $I_1 = [b, c]$ y además la propiedad (4) implica que $f^{n-1}(p)$ está en $I_0 = [a, b]$. Si $p = c$, entonces $f(p) = a$ la cual no está en I_1 . Como la única de las primeras n iteradas de p que no está en I_1 es f^{n-1} , esto nos daría como resultado $n = 2$. Así que, esto contradice el hecho de que el período primo de c es tres. Por lo tanto, p debe de estar en el intervalo semi-abierto $[b, c)$. Si $p = b$, entonces, $n = 3$, como $f^2(p) = a$, el cual no está en I_1 y la única de las primeras n iteradas de p la cual no está en I_1 es $f^{n-1}(p)$. Daremos por hecho que n no es tres. De aquí se sigue que p debe de estar en el intervalo abierto (b, c) . Como $f^{n-1}(p)$ está en $I_0 = [a, b]$, $f^{n-1}(p)$ no es igual a p y así es que p no puede tener período primo $n - 1$. Si el período primo de p fuera menor que $n - 1$,

entonces la propiedad (3) y el hecho de que p no es b ni c implican que la órbita de p está contenida en (b, c) y esto contradiría la condición (4). Como $f^{n-1}(p)$ no es un elemento de (b, c) , esto nos muestra que p deberá tener período primo n .

Para completar la prueba, demostraremos la existencia de la sucesión de intervalos cerrados, usada anteriormente, para cada número mayor que 1.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Obviamente podemos elegir A_0 tal que $A_0 = I_1$ y la propiedad (1) es satisfecha. Las siguientes propiedades usan el hecho de que si f es una función continua y además J y K son intervalos cerrados tales que $f(J) \supset K$, entonces existe un intervalo J_0 tal que $J_0 \subset J$ y $f(J_0) = K$. Este es un resultado claramente intuitivo, que se demuestra apelando de la continuidad de la función f . Ahora, como $A_0 = I_1$ y $f(I_1) \supset I_1$, tenemos que $f(A_0) \supset A_0$ y así es que A_1 está contenido en A_0 de tal manera que $f(A_1) = A_0$. Como $A_1 \subset A_0$ esto implica $f(A_1) \supset A_1$. Consecuentemente, existe un $A_2 \subset A_1$, tal que $f(A_2) = A_1$. Continuemos de esta manera y construyamos A_k para $k = 1, 2, \dots, n-2$. Como es requerido en cada caso, encontraremos A_k contenido en A_{k-1} tal que $f(A_k) = A_{k-1}$ para $k = 1, 2, \dots, n-2$ como es requerido por la propiedad (2). Aún más, $f(A_k) \supset A_k$ para cada k , así que el proceso de definir intervalos A_k puede continuarse indefinidamente. Entonces $f(A_k) = A_{k-1}$ implica

$$f^2(A_k) = f(f(A_k)) = f(A_{k-1}) = A_{k-2}$$

$$f^3(A_k) = f(f^2(A_k)) = f(A_{k-2}) = A_{k-3}$$

$$f^4(A_k) = f(f^3(A_k)) = f(A_{k-3}) = A_{k-4}$$

y así sucesivamente, hasta llegar a $f^k(A_k) = A_0 = I_1$, para cada $k = 1, 2, \dots, n-2$ como es requerido en la propiedad (3). Para definir A_{n-1} de tal manera que satisfaga la propiedad (4) notemos que

$$f^{n-1}(A_{n-2}) = f(f^{n-2}(A_{n-2})) = f(I_1) \supset I_0$$

entonces, existe un $A_{n-1} \subset A_{n-2}$ tal que

$$f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$$

Y así finalmente, de

$$f^n(A_{n-1}) = f(f^{n-1}(A_{n-1})) = f(I_0) \supset I_1$$

se sigue que existe un $A_n \subset A_{n-1}$ tal que $f^n(A_n) = I_1$ como es requerido por la propiedad (5). \square

El Teorema 1.1.4, no obstante lo sorprendente que pudiera parecer, es sólo un caso especial del teorema general de A. N. Sarkovskii probado en 1964. Este interesante resultado, tiene además la propiedad de que sólo depende de la continuidad de la función f en cuestión.

En su teorema Sarkovskii considera un orden en los enteros, el cual es necesario definir a continuación.

Definición 1.1.7 (Orden de Sarkovskii) . *El orden de Sarkovskii de los números naturales es el siguiente.*

$$\begin{aligned} & 3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \\ & \dots 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \succ 2^n \cdot 3 \succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 7 \succ \dots \\ & \dots \succ 2^4 \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1 \end{aligned}$$

$a \succ b$ indica que el número a precede al número b en el orden.

Cada número natural puede ser encontrado exactamente una sola vez en el orden de Sarkovskii.

Teorema 1.1.5 [Sarkovskii, 1964] *Supongamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y que f tiene un punto periódico, con período primo n . Si $n \succ m$ en el orden de Sarkovskii, entonces f tiene también puntos periódicos con período primo m .*

Demostración: Presentaremos una prueba al teorema de Sarkovskii propuesta por Block, Guckenheimer, Misiurewicz y Young. La prueba depende principalmente en

dos observaciones que usaremos comunmente. Para dos intervalos cerrados, I_1 e I_2 introduciremos la notación $I_1 \rightarrow I_2$ para indicar que $f(I_1)$ cubre a I_2 . Si encontramos una sucesión de intervalos $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \rightarrow I_1$, entonces por nuestras observaciones previas estará demostrado que existe un punto fijo de f^n en I_1 . Primero asumiremos que f tiene un punto periódico x de período n con n impar y $n > 1$. Supongamos que f no tiene un punto periódico de período primo impar y menor que n . Sean x_1, \dots, x_n los puntos en la órbita de x , enumerados de izquierda a derecha. Notemos que f permuta al elemento x_i . Claramente, $f(x_n) < x_n$. Escojamos la mayor i para la cuál $f(x_i) > x_i$. Sea I_1 el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Como $f(x_{i+1}) < x_{i+1}$, se sigue que $f(x_{i+1}) \leq x_i$ y así tenemos que $f(I_1) \supset I_1$. Por lo tanto, $I_1 \rightarrow I_1$. Como x no tiene período 2, no puede ser que $f(x_{i+1}) = x_i$ y $f(x_i) = x_{i+1}$, así que $f(I_1)$ contiene al menos algún otro intervalo de la forma $[x_j, x_{j+1}]$ al cuál llamaremos I_2 . Por lo tanto $I_1 \rightarrow I_2$.

Elijamos ahora los intervalos I_3, \dots, I_k tales que $f(I_j) \supset I_{j+1}$. Como n es impar, existen más x_i 's de un lado de I_1 que del otro, así que algunas x_i 's deben de cambiar de lado bajo la acción de f y algunas no. Consecuentemente, $f(I_k) \supset I_1$ para alguna k . Entonces $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$. Tomemos la más pequeña de las k para la cuál esto pasa, *i.e.*, $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ el camino más corto de I_1 a I_1 , por supuesto exceptuando $I_1 \rightarrow I_1$. Esta construcción está representada esquemáticamente en el siguiente diagrama.

Ahora, si $k < n - 1$, entonces alguna de las vueltas $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ ó $I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow \dots \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$ nos da un punto fijo de f^m con m impar y $m < k$. Este punto debe tener período primo menor que k , pues $I_1 \cap I_2$ consiste de un solo punto, y este punto tiene período primo mayor que m . Así que $k = n - 1$. Como k es el menor entero que funciona, no podemos tener $I_l \rightarrow I_j$ para cualquier $j > l + 1$. Se sigue que la órbita de x debe de estar ordenada en \mathbb{R} en una de dos posibles formas, como es descrito en la figura 1.2.

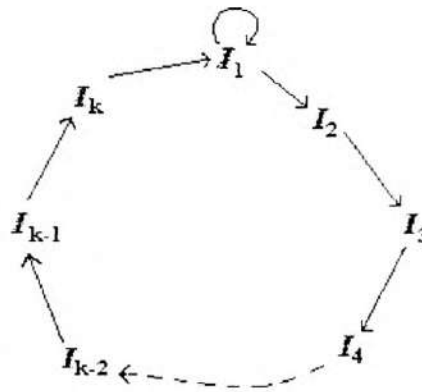
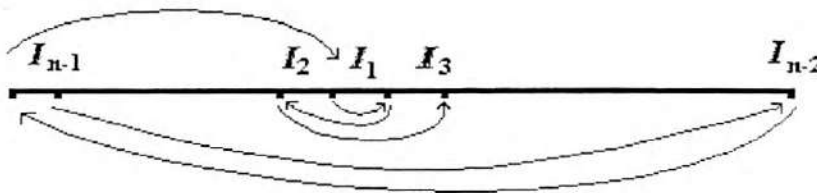
Figura 1.1: Un posible ordenamiento de los I_j .

Figura 1.2: Otro de los posibles ordenamientos

Se sigue que podemos extender el diagrama descrito en la figura 1.1 al mostrado en la figura 1.3.

El teorema de Sarkovskii para el caso especial en el que n es impar es ahora inmediato. Periodos más grandes que n están dados por ciclos de la forma $I_1 \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1$ y los periodos pares más pequeños están dados por ciclos de la forma $I_1 \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_1$ y así sucesivamente.

Para el caso de n par, primero notemos que f debe tener un punto periódico de período 2. Esto se sigue de los anteriores argumentos si es que podemos garantizar que algunas x_i cambian de lados bajo f y algunas no. (Usemos el hecho de que $I_{n-1} \leftarrow I_{n-2}$ y $I_{n-1} \rightarrow I_{n-2}$). Si este no es el caso, entonces todas las x_i deben de

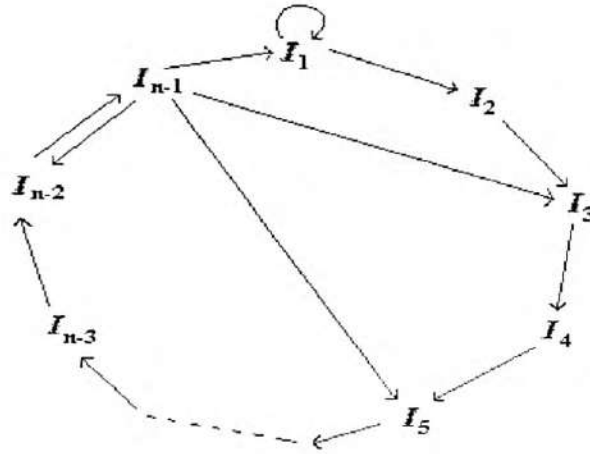


Figura 1.3:

cambiar de lado y así

$$f[x_1, x_i] \supset [x_{i+1}, x_n] \quad \text{y} \quad f[x_{i+1}, x_n] \supset [x_1, x_i].$$

Pero entonces, nuestras anteriores observaciones producen un punto periódico de período 2 en $[x_1, x_i]$.

El teorema ahora debera ser probado para $n = 2^m$ como sigue. Sea $k = 2^l$ con $l < m$. Consideremos $g = f^{k/2}$. Por suposición, g tiene un punto periódico de período 2^{m-l+1} . Por tanto, g tiene un punto de período 2^l para f . El caso final es ahora $m = p \cdot 2^m$ donde p es impar. Este caso puede ser deducido de los dos anteriores y así hemos terminado. \square

1.2 Diferenciabilidad.

Todos los resultados que se han presentado anteriormente en este trabajo han sido validados bajo la única suposición de que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que caracteriza al

sistema dinámico en consideración, es continua. Veremos ahora cómo la discusión se enriquece al considerar que f es diferenciable.

El Teorema 1.1.1 nos dice que cualquier función continua que mapea un intervalo cerrado de nuevo en sí mismo, tiene por lo menos un punto fijo. Si además la función es diferenciable en el intervalo cerrado y el valor de la derivada en valor absoluto es menor que 1, obtenemos un resultado mucho más fuerte.

Teorema 1.2.1 *Sea I un intervalo cerrado y $f : I \rightarrow I$ una función diferenciable que satisface $|f'(x)| < 1 \forall x \in I$. Entonces f tiene un único punto fijo en I . Aun más si x e y son dos puntos cualesquiera en I y $x \neq y$, entonces $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.*

En la hipótesis del Teorema 1.2.1 hemos tomado f como diferenciable en I . En consecuencia, f debe ser continua en I . El teorema 1.1.1 nos garantiza que f tiene un punto fijo. La condición adicional de diferenciabilidad nos garantiza que f tiene un único punto fijo en I . Además los puntos en I se acercan entre sí a medida que iteramos la función. De hecho podemos demostrar que I está contenido en el conjunto estable del único punto fijo. Demostración: Comenzaremos demostrando la segunda parte del teorema. Sean x y y cualesquiera dos puntos en I que satisfacen $x \neq y$. Sin pérdida de generalidad asumiremos $x < y$. Por el teorema del valor medio, existe c en $[x, y]$ tal que

$$|f'(c)| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

Como c está contenida en $[x, y] \subset I$, vemos que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ (pues $|f'(c)| < 1$), como era deseado. Sólo nos falta mostrar que el punto fijo de f (que existe, en virtud del Teorema 1.1.1) es único. Sea p un punto fijo y sea x cualquier otro punto en I . Hemos mostrado que

$$|p - f(x)| = |f(p) - f(x)| < |p - x|.$$

Así se sigue que $f(x) \neq x$ y x no es un punto fijo de f . Así que, p es el único punto fijo de f en I . \square

Con la hipótesis de que f es diferenciable es posible hacer conclusiones mucho más específicas acerca de la dinámica de la función. Si suponemos además que la derivada es continua, es decir, si suponemos que $f \in \mathcal{C}^1(I)$, podremos extraer aún más información sobre la dinámica de la función. Ilustramos ésta afirmación por medio de los siguientes ejemplos.

a) Sea $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Resolviendo $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = x$ encontramos que 3 es el único punto fijo de f . Notemos además que $f'(x) = \frac{1}{2} \forall x$. Así que, si x es cualesquier número real distinto de 3, entonces el teorema del valor medio implica que existen números reales c_1, c_2 y c_3 tal que

$$|f(x) - f(3)| = |f'(c_1)| |x - 3| = \frac{1}{2} |x - 3|$$

$$|f^2(x) - f^2(3)| = |f'(c_2)| |f(x) - f(3)| = \frac{1}{2^2} |x - 3|$$

y

$$|f^3(x) - f^3(3)| = |f'(c_3)| |f^2(x) - f^2(3)| = \frac{1}{2^3} |x - 3|.$$

Generalizando, encontramos que

$$|f^n(x) - f^n(3)| = \frac{1}{2^n} |x - 3|$$

Como $f^n(3) = 3$, concluimos que $f^n(x)$ converge a 3 y x está en $W^s(3)$. En consecuencia, tenemos que $W^s(3) = \mathbb{R}$.

b) Ahora sea $r(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$. Una vez más, 3 es el único punto fijo, pero esta vez $r'(x) = -\frac{1}{2}$. Usando el Teorema del Valor Medio, como en la parte a), podemos mostrar que $W^s(3) = \mathbb{R}$. Notemos la relación entre el signo de la derivada y el comportamiento de x bajo la iteración de la función. En f la derivada es positiva y x se aproxima a 3 por un solo lado. En r la derivada es negativa y las iteradas de x se aproximan a 3 oscilando de un lado a otro.

c) Sea $g(x) = 2x - 3$. De nuevo, 3 es un punto fijo, pero la derivada es positiva y mayor que uno en valor absoluto. Antes de continuar, consideraremos la siguiente

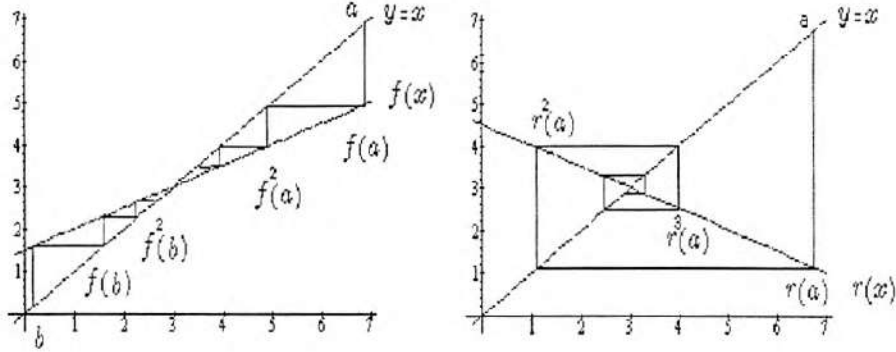


Figura 1.4: Análisis gráfico de $f(x)$ y $r(x)$.

pregunta: ¿Qué implicaciones tiene el valor de la derivada en el comportamiento de las órbitas?

Como $g'(x) = 2$ para todo x , el teorema del valor medio implica que existen c_1, c_2, \dots tal que

$$\begin{aligned} |g(x) - g(3)| &= |g'(c_1)| |x - 3| = 2|x - 3| \\ |g^2(x) - g^2(3)| &= |g'(c_2)| |g(x) - g(3)| = 2^2|x - 3| \\ &\vdots \\ |g^n(x) - g^n(3)| &= |g'(c_n)| |g^{n-1}(x) - g^{n-1}(3)| = 2^n|x - 3| \end{aligned}$$

Como $g^n(3) = 3$, la distancia de $g^n(x)$ a 3 crece sin cota, cuando n tiende a ∞ . Por lo tanto, x está en $W^s(\infty)$ y el $W^s(\infty) = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

d) Consideraremos sólo un ejemplo más, $k(x) = -2x + 9$. Una vez más 3 es un punto fijo. Esta vez el valor de la derivada es -2 , la cual es negativa y mayor que uno en valor absoluto. Como podemos ver, el conjunto estable de infinito, $W^s(\infty) = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ y las iteradas de x se alternan de un lado a otro de 3, alejándose del mismo.

Los ejemplos anteriores sugieren el siguiente resultado.

Teorema 1.2.2 *Sea f una función de clase C^1 y p un punto fijo de f . Entonces $|f'(p)| < 1$ implica que existe una vecindad de p que está totalmente contenida en*

$W^s(p)$; $|f'(p)| > 1$ implica que existe una vecindad de p tal que todos sus puntos dejan (es decir, se salen de) la vecindad bajo las iteraciones de f .

Demostración: Sea f una función diferenciable con derivada continua, supongamos que p es un punto fijo de f , y supongamos $|f'(p)| < 1$. Deseamos encontrar una vecindad de p que esté contenida en $W^s(p)$. Nuestra estrategia consistirá en encontrar $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que $|f'(x)| < 1 - \varepsilon$ para toda $x \in (p - \delta, p + \delta)$. Entonces aplicaremos el Teorema del Valor Medio para probar que $(p - \delta, p + \delta) \subset W^s(p)$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|)$. Como $|f'(p)| < 1$, $\varepsilon > 0$. Para encontrar δ usaremos la continuidad de f' . Como, por hipótesis, f' es continua, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|f'(x) - f'(p)| < \varepsilon$ siempre que $|p - x| < \delta$. Equivalentemente, $|f'(x) - f'(p)| < \varepsilon$ cuando $x \in (p - \delta, p + \delta)$, entonces

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |f'(x) - f'(p) + f'(p)| \\ &\leq |f'(x) - f'(p)| + |f'(p)| \\ &< \varepsilon + |f'(p)| \\ &= \frac{1}{2}(1 - |f'(p)|) + |f'(p)| \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|f'(p)| = 1 - \left[\frac{1}{2}(1 - |f'(p)|)\right] = 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

Así que si x está en $(p - \delta, p + \delta)$, entonces $|f'(x)| < 1 - \varepsilon$. Esto nos recuerda que $f^n(x)$ converge a p cuando x está en $(p - \delta, p + \delta)$.

Sea $x \in (p - \delta, p + \delta)$, $x \neq p$. Por el Teorema del Valor Intermedio, existe una c entre x y p tal que $|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(c)| |x - p|$. Como c debe de estar en el intervalo $(p - \delta, p + \delta)$, esto implica que

$$|f(x) - f(p)| < (1 - \varepsilon) |x - p|.$$

Iterando el proceso tenemos que

$$|f^2(x) - p| < (1 - \varepsilon)^2 |x - p|$$

y por inducción tenemos que

$$|f^n(x) - p| < (1 - \varepsilon)^n |x - p|.$$

Ahora, como $(1 - \varepsilon) < 1$, se sigue que $(1 - \varepsilon)^n$ converge a 0 cuando n tiende a ∞ . Entonces, podemos concluir que $|f^n(x) - p|$ se aproxima a 0 y $f^n(x)$ converge a p cuando $n \rightarrow \infty$. La prueba para el caso $|f'(p)| > 1$ es similar. \square

Los puntos fijos en los que la derivada de f , en valor absoluto, es distinta de uno son lo suficientemente importantes como para tener su propio nombre.

Definición 1.2.1 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f(p) = p$ y $|f'(p)| \neq 1$ entonces p es llamado punto hiperbólico. Si $|f'(p)| < 1$ p es un atractor; si $|f'(p)| > 1$ p es repulsor.

Pero, nos hemos preguntado ¿qué pasa cuando un punto tiene derivada igual a 1 ó -1? Estos puntos fijos son llamados puntos fijos no-hiperbólicos. La dinámica en una vecindad de un punto no hiperbólico es generalmante impredecible.

Recordemos que un punto periódico con período n de la función f es aquel el cual es un punto fijo de f^n . De este hecho se deriva la siguiente definición.

Definición 1.2.2 Sea p un punto periódico de la función diferenciable f con período primo k . Entonces p es un punto periódico hiperbólico si $|(f^k)'(p)| \neq 1$. Si $|(f^k)'(p)| = 1$, entonces p es un punto periódico no-hiperbólico.

Y de la misma manera, que en el caso anterior, de la definición 1.2.2 se deduce el siguiente resultado.

Teorema 1.2.3 Sea f una función de clase C^1 y p un punto periódico de f con período primo k . Si $|(f^k)'(p)| < 1$, entonces existirá un intervalo abierto que contiene a p que a su vez está contenido en el conjunto estable de p . Si $|(f^k)'(p)| > 1$, entonces existirá un intervalo abierto que contiene a p tal que todo punto en el intervalo debiera dejarlo, a excepción de p , bajo la iteración de f^k .

La demostración del Teorema 1.2.3 es una extensión de la prueba del Teorema 1.2.2, por lo tanto no será desarrollada en el presente trabajo.

Hemos observado que cuando p es un punto periódico de f con período primo k , y la derivada de f^k en p es menor que uno en valor absoluto, los puntos cercanos a p son atraídos a p bajo la iteración de f^k . De otro modo, si p es un punto periódico de f con período primo k y la derivada de f^k en p es mayor que 1 en valor absoluto, entonces los puntos cercanos a p se van alejando de p bajo la iteración de f^k . Así que introduciremos la siguiente definición.

Definición 1.2.3 Sea p un punto periódico de f con período primo k . Si $|(f^k)'(p)| < 1$, entonces p es un punto periódico atractor de f . Si $|(f^k)'(p)| > 1$, entonces p es un punto periódico repelente de f .

1.3 Familias Parametrizadas de Funciones y Bifurcaciones.

Un importante tópico en el área de sistemas dinámicos es el análisis de familias parametrizadas de funciones. Por una familia de funciones nos referiremos a una colección de funciones del mismo tipo general. Consideremos, por ejemplo, la familia de funciones lineales de la forma $f_m(x) = mx$ donde m varía en los números reales. La variable m es llamada *parámetro* y la familia representada por $f_m(x) = mx$ es llamada *la familia parametrizada*.

Estamos interesados en entender cómo cambia la dinámica de las funciones de una familia, cuando lo hace el parámetro que de la familia. Para ilustrar esto veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.1 Consideremos la familia parametrizada $f_m(x) = mx$. Para todos los valores de m , excepto 1, está claro que el único punto fijo de f_m es 0.

Si $m < -1$, entonces la Definición 1.2.1 implica que 0 es un punto fijo hiperbólico repelente y todos los otros puntos están en el conjunto estable de infinito, $W^s(\infty)$.

Si $m = -1$, entonces todos los puntos, excepto 0, son puntos periódicos con período primo dos.

Cuando $-1 < m < 1$, 0 es un punto fijo atractor y $W^s(0) = \mathbb{R}$.

Si $m = 1$, entonces todos los puntos son fijos.

Finalmente, cuando $m > 1$, 0 es un punto fijo repelente y todos los otros puntos están en el conjunto estable del infinito.

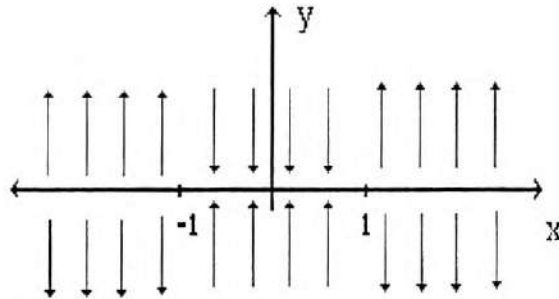


Figura 1.5: Diagrama de bifurcación, para la familia de funciones $f_m(x) = mx$ notemos que la dinámica de la función cambia cuando el parámetro pasa por -1 y 1 .

Notemos que la dinámica de la familia $f_m(x) = mx$ no cambia para grandes intervalos de valores del parámetro. Entonces para un valor de parámetro particular (*i.e.*, -1 y 1), la dinámica del sistema cambia de una manera repentina, después de esto, de nuevo permanece constante por un intervalo prolongado. Llamaremos a estos cambios repentinos en la dinámica, bifurcaciones. Notemos también que cero es un punto fijo y que $|f'(0)| = 1$ cuando $m = 1$ ó -1 . La presencia de puntos fijos no-hiperbólicos para valores de parámetros en los cuales se presenta una bifurcación son típicos.

Definición 1.3.1 Sea $f_c(x)$ una familia parametrizada de funciones. Entonces existe una bifurcación en c_0 si existe $\varepsilon > 0$, tal que para a y b que satisfagan $c_0 - \varepsilon < a < c_0$ y $c_0 < b < c_0 + \varepsilon$, la dinámica de $f_a(x)$ es distinta de la dinámica de $f_b(x)$. El número c_0 se llama valor crítico del parámetro c .

En otras palabras, si la dinámica del sistema correspondiente al valor del parámetro a , con $c_0 - \varepsilon < a < c_0$ es distinta de la del correspondiente al valor b , con $c_0 < b < c_0 + \varepsilon$ entonces se dice que ha ocurrido una bifurcación en c_0 la dinámica de la función cambia cuando el valor del parámetro cruza a través del punto c_0 . Que la dinámica cambie significa que, por ejemplo, un punto fijo cambia su tipo de estabilidad (atractor/repulsor), o que se generan o desaparecen puntos periodicos, etcétera.

En los siguientes ejemplos, veremos algunos de los distintos tipos de bifurcaciones que se presentan en las familias parametrizadas de funciones.

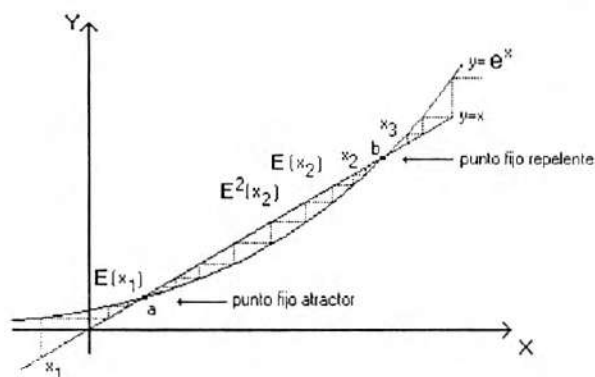
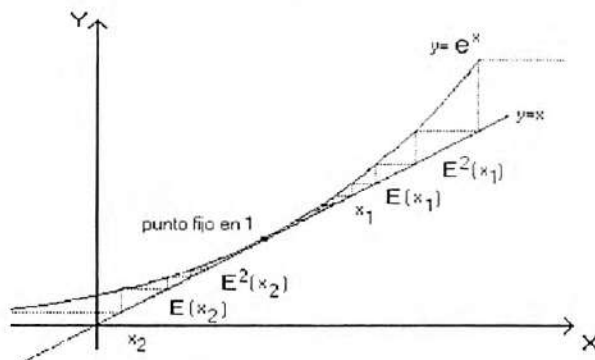
Ejemplo 1.3.2 Consideremos la familia de funciones $E_c = e^{x+c}$. Examinemos la dinámica de esta familia usando análisis gráfico. Notemos que mientras el valor del parámetro crece, la forma de la gráfica permanece igual, pero esta se mueve a la izquierda.

Un cuidadoso examen, nos revela que existen tres casos: La gráfica de $E(x)$ y $y = x$ se intersectan en exactamente dos puntos, la gráfica de $E(x)$ y $y = x$ tienen un solo punto de tangencia y finalmente el caso donde las gráficas no se intersectan.

Si $c < -1$, entonces las gráficas de $E(x)$ y de $y = x$ se intersectan en dos puntos como se muestra en la figura 1.6.

Denotemos estos dos puntos de intersección a y b , con $a < b$. Notemos que ambos a y b son puntos fijos y que $0 < E'(a) < 1$, y $E'(b) > 1$. Así que, a es un punto fijo hiperbólico atractor y b es un punto fijo hiperbólico repelente, además $W^s(a) = (-\infty, b)$ y $W^s(\infty) = (b, \infty)$.

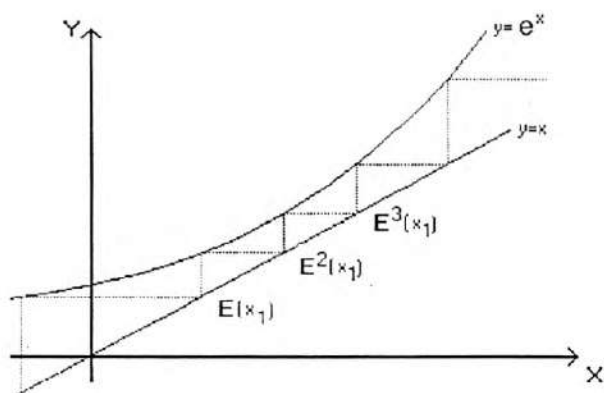
Cuando $c = -1$, los dos puntos fijos se funden en uno solo, localizado en $x = 1$.

Figura 1.6: Caso en que $c < -1$ Figura 1.7: Caso en el que $c = -1$

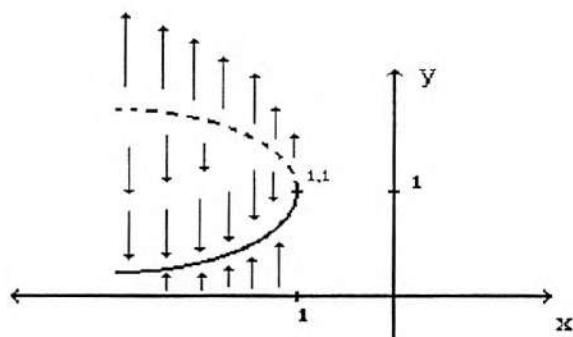
Este punto fijo es no-hiperbólico ya que $E_{-1}'(1) = 1$. El análisis gráfico nos muestra que $W^s(1) = (-\infty, 1]$ y $W^u(1) = (1, \infty)$. Este caso está también ilustrado en la figura 1.7.

Finalmente, si $c > -1$, entonces las gráficas de $E(x)$ y $y = x$ no se intersectan y en consecuencia, $E(x)$ no tiene puntos fijos. Como $E(x)$ es continuo, el teorema de Sarkovskii implica que $E(x)$ no puede tener puntos periódicos cuando $c > -1$ y además $W(\infty) = \mathbb{R}$. Esto se muestra en la figura 1.8

Antes de continuar con otro ejemplo, queremos hacer notar algunas características de este ejemplo. Primero, cuando el parámetro crece y se acerca a -1 , los dos puntos

Figura 1.8: Caso final $c > -1$

fijos a y b se aproximan uno al otro hasta que, $c = -1$, entonces se unen para formar un único punto fijo. Inmediatamente después, ellos desaparecen. Este tipo de bifurcación es llamada *de punto silla* (*saddle-node bifurcation*). El surgimiento y desaparición de puntos fijos varía con respecto al parámetro; esto es un tema común en la dinámica. Segundo, notemos que al momento de la bifurcación, el punto fijo es no-hiperbólico. Esta es otra característica común de las bifurcaciones.

Figura 1.9: Diagrama de bifurcación para la familia de funciones $E_c(x)$.

Ejemplo 1.3.3 La función $h_r(x) = rx(1-x)$ exhibe otro tipo distinto de bifurcación, cuando $r = 1$: Se presenta una *bifurcación transcritical*. Cuando $0 < r < 1$, $h(x)$ tiene dos puntos fijos, uno de ellos el cual es menor que uno y repelente, y otro en 0,

el cual es atractor. Cuando $r = 1$, estos dos puntos se convierten en un solo punto fijo en 0 el cual repele puntos menores de cero y atrae a mayores. Finalmente, si $1 < r < 3$, observamos que cero se convierte en un punto fijo repelente y de nuevo emerge un nuevo punto fijo mayor que cero el cuál es atractor. La gráfica 1.10 nos ilustra estos tres distintos casos.

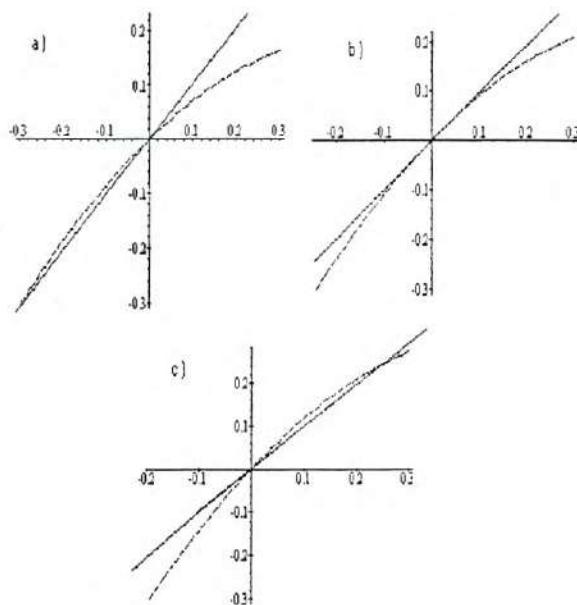


Figura 1.10: La gráfica de $h_r(x) = rx(1-x)$ para valores de tres parámetros cercanos a 1. En a) $r = 0.78$, en b) $r = 1$ y en c) $r = 1.3$. Notemos que $h'_1(0) = 1$ cuando $r = 1$. Así que el punto fijo es no hiperbólico cuando ocurre la bifurcación.

Ejemplo 1.3.4 Continuando con la investigación de $h_r(x) = rx(1-x)$ que comenzamos en el ejemplo anterior, encontramos que en h_r surge una bifurcación cuando $r = 3$. Hemos visto que h_r tiene un punto fijo repelente en cero y un punto fijo atractor mayor que cero cuando $1 < r < 3$. Una rápida observación a la gráfica de h_r^2 nos muestra que h_r no tiene otros puntos periódicos cuando r está en este rango. En $r = 3$ el mayor de los puntos fijos está en 0.75 y es débilmente atractor: *i.e.*, ya no es más un punto fijo hiperbólico, ya que $h'(.75) = -1$. Cuando $r > 3$ el punto fijo es

repelente. El análisis gráfico cuando $r = 3.1$ nos indica que la mayoría de los puntos en $(0, 1)$ son atraídos, a una órbita periódica de período dos, la cual esta a los lados del mayor de los puntos fijos.

Para entender mejor esto, veamos la gráfica de h_r^2 en la vecindad del punto fijo $p_r = \frac{r-1}{r}$ para valores del parámetro poco menores de tres, igual a tres y un poco mayores. Algunos ejemplos se muestran en la figura 1.11. Notemos que cuando el valor del parámetro pasa de 3, el valor de $(h_r^2)'(p_r)$ pasa de ser menor que uno a mayor que uno. Así que, el punto fijo cambia de atractor a repelente. En adición, la continuidad de h_r requiere que cuando esto pasa, una órbita atractora de período dos deba ser agregada. Esta órbita es conocida como una *bifurcación de período doble* ya que emerge una órbita periódica cuyo período es el doble del período de los puntos periódicos anteriores.

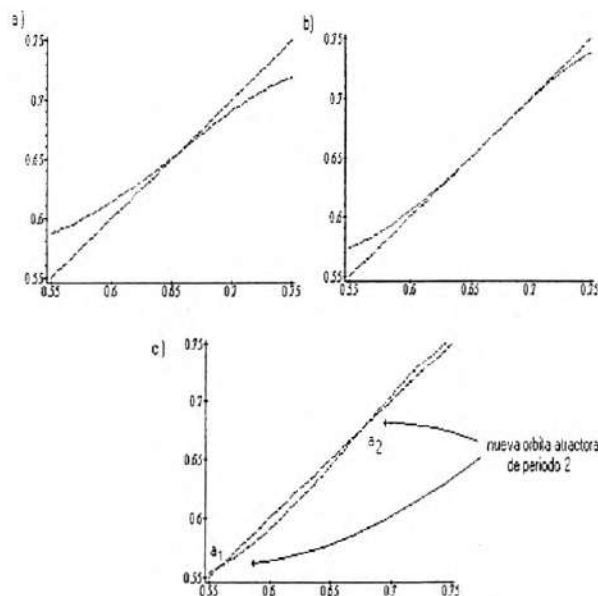


Figura 1.11: La gráfica de h_r^2 donde $h_r(x) = rx(1-x)$ para tres distintos parámetros. En (a) $r = 2.9$, en (b) $r = 3$ y en (c) $r = 3.1$. Notemos que el punto fijo atractor evoluciona en una órbita atractora de período dos, con un punto fijo repelente entre los dos puntos de la órbita.

Capítulo 2

El Concepto de Caos.

Este es el capítulo más importante de este trabajo. Una vez que hemos presentado los conceptos generales básicos para sistemas discretos (de dimensión uno), nuestro objetivo es ahora describir cuándo un sistema es caótico. Es conveniente hacer un comentario con respecto a la organización de este capítulo. Al final del capítulo uno, en el contexto de familias parametrizadas de funciones, hicimos nuestro primer encuentro con la función logística, o más precisamente, con la familia de funciones logísticas. La función logística se usa con mucha frecuencia (es decir, por muchos autores) para discutir el concepto de caos. La idea, en principio, es sencilla; ya en los ejemplos 1.3.3 y 1.3.4 veíamos que la función logística tiene un único punto fijo (positivo) atractor si $0 < r < 1$, y que si $1 < r < 3$ este punto fijo se convierte en repelente y aparece una órbita periódica de período dos. Si se continúan las exploraciones (numéricas) de la dinámica de la función logística para valores de r mayores que 3, se ve que la dinámica de algunas órbitas es "muy complicada", lo que empieza a dar las primeras indicaciones de la presencia de comportamientos caóticos. Sin embargo, dar una definición de caos basándonos en las observaciones que se pueden hacer sobre la función logística es *muy complicado*. Por tal razón, para proponer un concepto de caos y para demostrar que la función logística es de hecho caótica, normalmente se sigue (como lo hacemos aquí) un procedimiento indirecto. En la sección 2.1 se discuten algunas propiedades de la dinámica de la función logística; en

particular se demuestra que el conjunto de puntos en intervalo $[0,1]$ cuyas órbitas, para un cierto rango de valores del parámetro r , permanecen en $[0,1]$ es un conjunto de Cantor. La sección 2.2 aparentemente rompe con la secuencia que se viene siguiendo en el trabajo. En ésta se discute un peculiar sistema dinámico abstracto: el mapeo corrimiento actuando sobre el espacio (métrico) de símbolos 0's y 1's. Este es un sistema cuyas propiedades se estudian con mucha facilidad, y de hecho, entre tales propiedades aparecen tres, que son los ingredientes centrales de una de las definiciones más aceptadas de caos. La definición formal de sistema caótico se da en la sección 2.3 y se hace el comentario (obvio) de que el mapeo corrimiento es nuestro primer ejemplo de sistema caótico. Finalmente, en la sección 2.4 se establece una conexión entre la función logística y el mapeo corrimiento que permite concluir (indirectamente, como decíamos) que, para ciertos valores del parámetro r , la función logística es caótica en un conjunto de Cantor

2.1 La Función Logística.

Retomaremos el análisis de la familia de funciones, $h_r(x) = rx(1 - x)$ donde r es mayor que cero. Esta familia, es un modelo razonable de crecimiento poblacional. Notemos que la forma de la gráfica de h_r , es una parábola abriéndose hacia abajo con intercepciones en el eje x en 0 y 1 además abre en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{r}{4})$. Las siguientes afirmaciones se deducen fácilmente a partir de las ideas desarrolladas en el capítulo anterior.

1.- Resolviendo la ecuación $rx(1 - x) = x$ se deduce que h_r tiene puntos fijos en 0 y en $p_r = \frac{r-1}{r}$. También, 1 y $\frac{1}{r}$ son puntos eventualmente fijos dado que $h_r(1) = 0$ y $h_r(\frac{1}{r}) = p_r$.

2.- Si $0 < r < 1$, entonces $p_r < 0$. p_r es un punto fijo repelente, y 0 es un punto fijo atractor. El conjunto estable de 0 es $(p_r, \frac{1}{r})$, el conjunto estable de p_r es $\{p_r, \frac{1}{r}\}$, y el conjunto estable de infinito es $(-\infty, p_r) \cup (\frac{1}{r}, \infty)$.

3.- Cuando $r = 1$, ocurre una bifurcación transcítica, $p_1 = 0$ y es no-hiperbólico. El conjunto estable de 0 es $[0, 1]$, y el conjunto estable de infinito es $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. En general, si $r \geq 1$, entonces el conjunto estable de infinito incluye los intervalos $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

4.- Si $1 < r < 3$, entonces 0 es un punto fijo repelente, p_r es un punto fijo atractor, el conjunto estable de 0 es $\{0, 1\}$, y el conjunto estable de p_r es $(0, 1)$.

5.- Cuando $r = 3$ ocurre una bifurcación de *período doble*. (es decir, el punto fijo atractor pierde su estabilidad y aparece una órbita periódica de período dos atractor) 0 aún es repelente y p_r es solo débilmente atractor (es decir, $|f'(p)| = 1$) El conjunto estable de p_r es $(0, 1)$.

6.- Si $3 < r < 3.4$, entonces ambos 0 y p_r son puntos fijos repelentes. Notemos que el conjunto estable de 0 es aún $\{0, 1\}$, pero el conjunto estable de p_r contiene un número infinito de puntos. De cualquier forma, ahora hay una órbita periódica atractor de período dos y “muchos” de los puntos en $(0, 1)$ convergen asintóticamente hacia uno de los dos puntos en la órbita.

7.- Cuando $r \approx 3.45$ ocurre otra bifurcación de período doble y la órbita atractor de período dos se parte en una órbita atractor de período cuatro y una órbita repelente de período dos.

8.- En el intervalo $3.44 < r \leq 4$ el comportamiento dinámico cambia rápidamente. Existe una órbita periódica de período tres si $r > 3.6$, así que por el Teorema de Sarkovskii sabemos que existen puntos periódicos de todos los ordenes. Por la complejidad de la dinámica cuando r está en este rango, primero discutiremos que pasa cuando $r > 4$.

9.- Supongamos $r > 4$. Entonces $h\left(\frac{1}{2}\right) > 1$ y $\frac{1}{2}$ diverge asintóticamente hacia infinito. Como $h\left(\frac{1}{2}\right) > 1$; $h(1) = 0$ y $h(0) = 0$, el Teorema del Valor Intermedio implica que existe x_0 en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y x_1 en $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$ tales que $h(x_0) = h(x_1) = 1$, consecuentemente, $h^2(x_0) = h^2(x_1) = 0$ y ambos, x_0 y x_1 , son eventualmente fijos.

Nos gustaría saber cuáles otros puntos de $[0, 1]$ convergen, bajo iteraciones de h , a “algo” en $[0, 1]$. Para cada número natural n definimos

$$\Lambda_n = \{x \mid h^n(x) \text{ está en } [0, 1]\}.$$

Nuestro objetivo es describir el conjunto $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$: el conjunto de puntos que permanecen para siempre en $[0, 1]$ bajo la iteración de h . Para hacer ésto necesitamos conocer más acerca de los conjuntos Λ_n . La siguiente proposición es el primer paso en el desarrollo de la descripción de Λ .

Proposición 2.1.1 *Si $h(x) = rx(1-x)$ y $r > 4$, entonces las siguientes afirmaciones resultan verdaderas.*

a) *El conjunto de números reales x en $[0, 1]$ que satisfacen la condición de que $h(x)$ no está en $[0, 1]$ es el intervalo $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}\right)$ y por lo tanto, $\Lambda_1 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}, 1\right]$.*

b) *El conjunto Λ_n consiste de 2^n intervalos cerrados disjuntos para todo número natural n .*

c) *Si I es uno de estos intervalos cerrados en Λ_n , entonces $h^n : I \rightarrow [0, 1]$ es uno a uno y sobre.*

Demostración: Primero notemos que si $h(x)$ está en $[0, 1]$, entonces x debe de estar en $[0, 1]$. Así que Λ_n está contenida en $[0, 1]$ para toda n . Ahora probemos la parte a) de la proposición.

a) La gráfica de $h(x)$ se muestra en la figura 2.1. Observemos que el conjunto de puntos en $[0, 1]$ que no cumplen con que $h(x)$ está en $[0, 1]$ son exactamente aquellos puntos que satisfacen $h(x) > 1$. Pero estos son los puntos contenidos entre las raíces de $h(x) = 1$. Usando la fórmula cuadrática encontramos que $h(x) = rx(1-x) = 1$ cuando $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}$ y de aquí se sigue a).

Probarémos b) y c) por inducción. Esta claro de la parte a) que Λ_1 consiste de 2^1 intervalos cerrados disjuntos. También, podemos ver que $h(0) = h(1) = 0$ y que $h\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}\right) = 1$. Entonces los puntos finales de los dos intervalos son mapeados en 0 y 1. Por la continuidad de h y por el Teorema del Valor Intermedio concluimos que $h : I \rightarrow [0, 1]$ es sobre. Para verificar que h es uno a uno en los intervalos de Λ_1 , notemos que la función es estrictamente monótona en estos intervalos; de hecho, $h'(x) = r(1-2x) > 0$ cuando $x < \frac{1}{2}$ y $h'(x) < 0$ cuando $x > \frac{1}{2}$. Así que si I es uno de los dos intervalos en Λ_1 entonces $h : I \rightarrow [0, 1]$ es uno a uno y sobre.

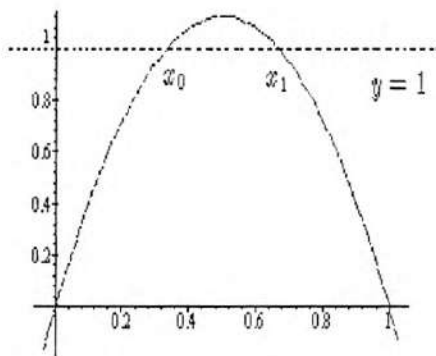


Figura 2.1: Gráfica de $h(x) = rx(1-x)$ donde $r > 4$. Los puntos donde $h(x) = 1$ son $x_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}$ y $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}$

Continuando con el argumento de inducción, supongamos que Λ_k consiste de 2^k intervalos cerrados disjuntos. Aún mas, supongamos que si I es uno de los intervalos cerrados en Λ_k , entonces $h^k : I \rightarrow [0, 1]$ es uno a uno y sobre y que se cumple que $(h^k)'(x) < 0$ para toda x en I ó $(h^k)'(x) > 0$ para toda $x \in [a, b]$. Ahora consideremos Λ_{k+1} . Es facil ver que $\Lambda_{k+1} \subset \Lambda_k$. Sea $[a, b]$ uno de los intervalos en Λ_k y supongamos que $(h^k)'(x) > 0 \forall x \in [a, b]$. Entonces h^k es estrictamente creciente en $[a, b]$. h^k es además continua y $h^k([a, b]) = [0, 1]$, el Teorema del Valor Intermedio implica que existén puntos x_2 y x_3 tales que

- 1) $a < x_2 < x_3 < b$.
- 2) $h^k([a, x_2]) = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}\right]$.
- 3) $h^k((x_2, x_3)) = \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}\right]$ y
- 4) $h^k([x_3, b]) = \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}, 1\right]$.

La primera condición implica que los intervalos $[a, x_2]$ y $[x_3, b]$ son disjuntos. Las últimas tres condiciones implican que $h^{k+1}([a, x_2]) = [0, 1]$, $h^{k+1}(x) > 1 \forall x$ en (x_2, x_3) , y $h^{k+1}([x_3, b]) = [0, 1]$. Entonces, el conjunto de puntos en $[a, b]$, los cuales están también en Λ_{k+1} , consisten en los dos intervalos cerrados disjuntos $[a, x_2]$ y $[x_3, b]$. Si x está en $[a, x_2]$, entonces $h^k(x)$ está en $\left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}\right]$ y $h'(h^k(x)) > 0$. Por hipótesis $(h^k)'(x) > 0$, así que cualquier x está en $[0, x_2]$, $(h^{k+1})'(x) = h'(h^k(x)) \cdot (h^k)'(x) > 0$.

Un argumento similar nos demuestra que $(h^{k+1})'(x) < 0 \forall x \in [x_3, b]$. Si en el párrafo anterior, comenzamos con el argumento de tomar como cierto que $(h^k)'(x) > 0 \forall x \in [a, b]$, entonces podemos usar el argumento análogo para mostrar que los puntos de Λ_{k+1} , los cuales están en $[a, b]$, están contenidos en dos intervalos disjuntos $[a, x_2]$ y $[x_3, b]$ y que además $h^{k+1}([a, x_2]) = [0, 1]$, $h^{k+1}([x_3, b]) = [0, 1]$ y que $(h^{k+1})'$ es estrictamente positiva o estrictamente negativa en cada uno de los intervalos $[a, x_2]$ y $[x_3, b]$.

Como $[a, b]$ es un intervalo arbitrario en Λ_k se sigue que Λ_{k+1} consiste del doble de la cantidad de intervalos que hay en Λ_k . Esto es, Λ_{k+1} contiene $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ intervalos cerrados disjuntos. Así, hemos demostrado que si J es uno de los intervalos en Λ_{k+1} , entonces $h^{k+1} : J \rightarrow [0, 1]$ es sobre (por las condiciones (2) y (4) mencionadas anteriormente). También, h^{k+1} es uno a uno en J y podemos concluir el proceso de inducción dado que $(h^{k+1})'$ es estrictamente positiva o estrictamente negativa en J .

□

Como lo establecimos anteriormente, nuestro objetivo es describir el conjunto $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$. En la prueba de la proposición 1, establecimos que Λ_{k+1} se construye

removiendo un intervalo abierto de enmedio de cada intervalo en Λ_k . El conjunto de puntos que no son removidos mediante este proceso para cada n es Λ . Seguramente para estos momentos ya habremos reconocido que esta construcción es similar a la del conjunto de Cantor $2/3$.

Definición 2.1.1 Un conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}$ es conocido como un conjunto de Cantor si:

- a) Γ es cerrado y acotado (compacto).
- b) Γ no contiene intervalos (conjunto totalmente disjunto).
- c) Cada punto en Γ es un punto de acumulación de Γ (es un conjunto perfecto).

Lema 2.1.1 Sea $r > 2 + \sqrt{5}$ y $h(x) = rx(1-x)$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|h'(x)| > 1 + \varepsilon$ siempre que x este en Λ_1 . Aún más, la longitud de cada intervalo en Λ_n es menor que $\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}$.

Notemos que el valor de ε encontrado en el Lema 2.1.1 depende del valor de r . Cuando r se vuelve pequeña, ε debe de serlo también. La prueba de la primera parte del Lema 2.1.1 depende del hecho, de que si x está en Λ_1 , entonces $|h'_r(x)|$ es mayor o igual que el valor absoluto de la derivada de h_r en $(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r})$. Probaremos la segunda parte del lema usando la primera parte de este y el teorema del valor medio.

Demostración: Si $x \in \Lambda_1 = [0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}, 1]$, observemos primeramente la información contenida en la primer y segunda derivada de la función $h(x)$, $h'(x) = r(1-2x)$, $h''(x) = -2r < 0$ por tanto $h'(x)$ es decreciente. Así que, si $x \in \Lambda_1$ tenemos que $|h'(x)| \geq |h'(x_0)| = |h'(x_1)| = \sqrt{r^2-4r} > 1$ si $r > 2 + \sqrt{5}$. Esto, ya que $h'(x_0) = r(1-2(x_0))$, $x_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}$ y además $h'(x_0) = r - 2r(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}) = \sqrt{r^2-4r}$

Para comprobar que $\sqrt{r^2-4r} > 1$ primero observemos que $r^2-4r = 1$ si $r = 2 + \sqrt{5}$ y así tenemos que $\sqrt{r^2-4r} > 1$ si $r > 2 + \sqrt{5}$.

Continuando con la demostración elijamos $\varepsilon = \delta/2$, fijemos r y tomemos $\delta = \sqrt{r^2 - 4r} - 1 > 0$ si $r > 2 + \sqrt{5}$ entonces $\sqrt{r^2 - 4r} = 1 + \delta > 1 + \varepsilon$ así que, si $x \in \Lambda_1 \implies |h'(x)| \geq \sqrt{r^2 - 4r} > 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0$.

Probemos la segunda parte del lema, utilizando la regla de la cadena, sabemos que:

$$(f^k)'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x)) \cdot f'(f^2(x)) \cdots f'(f^{k-1}(x)).$$

Sea $c \in \Lambda_n \implies h^n(c) \in [0, 1] \implies h^{n-1}(c) \in [0, 1]$. Así que

$$(h^k)'(c) = \underbrace{h'(c)}_{> (1+\varepsilon)} \cdot \underbrace{h'(h(c))}_{> (1+\varepsilon)} \cdot \underbrace{h'(h^2(c))}_{> (1+\varepsilon)} \cdots \underbrace{h'(h^{k-1}(c))}_{> (1+\varepsilon)} > (1+\varepsilon)^k$$

por lo tanto, si $c \in \Lambda_n \implies (h^k)'(c) > (1+\varepsilon)^k$.

Sean x y y los extremos de un intervalo de Λ_n , $I_j^n = [x, y] \subset \Lambda_n$ aplicando el teorema del valor medio a h^n y a los puntos x, y tenemos que

$$h^n(x) - h^n(y) = (h^n)'(c)(y - x) \text{ con } x \leq c \leq y$$

$$|h^n(x) - h^n(y)| = |(h^n)'(c)||y - x| > (1+\varepsilon)^n|x - y|$$

además, sabemos que $|h^n(x) - h^n(y)| \leq 1 \implies 1 > |x - y|(1+\varepsilon)^n \implies |x - y| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}$. \square

Teorema 2.1.1 *El conjunto $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ es un conjunto de Cantor.*

Demostración: Necesitamos mostrar que; a) Λ es cerrado y acotado, b) Λ no contiene intervalos, y c) Cada punto de Λ es un punto de acumulación de Λ .

a) Como Λ es la intersección de conjuntos cerrados, este es también un cerrado.

Además como Λ está contenido en $[0, 1]$, es por lo tanto, acotado.

b) Si Λ contiene un intervalo abierto (x, y) , con longitud $|x - y|$, entonces para cada n , (x, y) debe estar contenido en uno de los intervalos de Λ_n . El Lema 2.1.1

implica que existe un $\varepsilon > 0$ tal que la longitud de un intervalo en Λ_n es menor que $\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}$. Como podemos encontrar n_0 tal que $|x - y| > \frac{1}{(1+\varepsilon)^{n_0}}$, el intervalo (x, y) no puede caer dentro de algún intervalo en Λ_{n_0} . Así que, Λ no contiene intervalos abiertos.

c) Finalmente, supongamos que x es un punto en el conjunto Λ y sea $N_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta)$ una vecindad de x . Debemos mostrar que existe otro punto en Λ distinto de x el cual está contenido en $N_\delta(x)$. Notemos que si a es alguno de los extremos de alguno de los intervalos en Λ_n , entonces a está en Λ ya que $h^{n+1}(a) = 0$. Ahora para cada n , x debe de estar contenida en uno de los intervalos de Λ_n . Tomemos ε como en el Lema 2.1.1 y elijamos n lo suficientemente grande tal que $\frac{1}{(1+\varepsilon)^n} < \delta$. Entonces el intervalo completo de Λ_n debe de estar en $N_\delta(x)$ ya que la longitud de cada intervalo en Λ_n es menor que $\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}$. Como ambos de los puntos finales del intervalo están en $N_\delta(x)$ y por lo menos uno de ellos es distinto de x , hemos terminado. \square

Dejemos hasta este punto el análisis de la *función logística*. En la sección siguiente haremos una exposición de la dinámica simbólica, y después estableceremos una conexión entre estos dos temas.

2.2 Dinámica Simbólica.

Comenzaremos esta sección introduciendo algunas herramientas que nos serán útiles mas adelante.

Definición 2.2.1 *El conjunto*

$$\Sigma_2 = \{(s_0 s_1 s_2 \dots) \mid s_i = 0 \text{ ó } 1\}$$

es llamado el espacio de símbolos 0's y 1's. A los elementos de Σ_2 se les llama puntos de Σ_2 .

Definición 2.2.2 Sean $s = s_0s_1s_2s_3\dots$ y $t = t_0t_1t_2t_3\dots$ puntos en Σ_2 . La distancia entre s y t denotada con $d[s, t]$ está dada por

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

Esta noción de distancia está bien definida, pues, como es sencillo verificar, satisface las propiedades $d[s, t] \geq 0$, $d[s, t] = 0$ si y sólo si $s = t$, $d[s, t] = d[t, s]$ y $d[s, t] \leq d[s, q] + d[q, t]$.

Se puede ver además que, como $|s_i - t_i|$ es 0 ó 1, entonces $0 \leq d[s, t] \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$ y que, en general, $d[s, t]$ es un número entre 0 y 2.

El siguiente lema proporciona un criterio para decidir si dos puntos de Σ_2 están cerca.

Lema 2.2.1 Sea s y t elementos de Σ_2 . Si los primeros $n + 1$ dígitos en s y t son idénticos, entonces $d[s, t] \leq \frac{1}{2^n}$. Por otra parte, si $d[s, t] \leq \frac{1}{2^n}$, entonces los primeros n dígitos en s y t son idénticos.

Demostración: Sean $s = s_0s_1s_2s_3\dots$ y $t = t_0t_1t_2t_3\dots$ puntos en Σ_2 . Notemos primero que los primeros $n + 1$ dígitos de s son $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$. Así que s y t concuerdan en los primeros $n + 1$ dígitos si y solo si $s_i = t_i$ para $i \leq n$. Entonces

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^n \frac{0}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

o lo que es lo mismo

$$d[s, t] = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_{i+n+1} - t_{i+n+1}|}{2^i} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}$$

de otro modo, si existe $j < n$ tal que $s_j \neq t_j$, entonces

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geq \frac{1}{2^j} > \frac{1}{2^n}. \quad \square$$

Ahora presentaremos una función mediante la cuál definiremos un sistema dinámico en Σ_2 .

Definición 2.2.3 *El mapeo $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ definido como $\sigma(s_0s_1s_2\dots) = s_1s_2s_3\dots$ es llamado el mapeo corrimiento (“shiftmap”, en Inglés).*

En otras palabras, el mapeo corrimiento “borra” del primer dígito en la sucesión, recorriendo a todos los demás un lugar a la izquierda. Por ejemplo, $\sigma(1011001010\dots) = 011001010\dots$

Existen importantes observaciones que podemos hacer con respecto del mapeo corrimiento. La primera es que es un mapeo continuo.

Proposición 2.2.1 *El mapeo corrimiento es continuo.*

Demostración: Sea s un elemento de Σ_2 y $\varepsilon > 0$. Debemos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que, siempre que $d[s, t] < \delta$ entonces $d[\sigma(s), \sigma(t)] < \varepsilon$. Elijamos n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ y sea $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$. Si $d[s, t] < \delta$, entonces, por el Lema 2.2.1, s y t concuerdan en los primeros $n + 2$ dígitos. Así que $\sigma(s)$ y $\sigma(t)$ concuerdan en los primeros $n + 1$ dígitos y $d[\sigma(s), \sigma(t)] \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. \square

En la siguiente proposición se enlistan algunas de las más importantes propiedades del mapeo corrimiento.

Proposición 2.2.2 *El mapeo corrimiento tiene las siguientes características:*

- a) *El conjunto de puntos periódicos del mapeo corrimiento es denso en Σ_2 .*
- b) *El mapeo corrimiento tiene 2^n puntos periódicos de período n .*
- c) *El conjunto de puntos eventualmente periódicos del mapeo corrimiento, los cuales no son periódicos, es denso en Σ_2 .*
- d) *Existe un elemento de Σ_2 cuya órbita es densa en Σ_2 . Esto es, existe un s^* en Σ_2 tal que el conjunto $\{s^*, \sigma(s^*), \sigma^2(s^*), \sigma^3(s^*), \dots\}$ es denso en Σ_2 .*
- e) *El conjunto de puntos los cuales no son periódicos, ni eventualmente periódicos, es denso en Σ_2 .*

Demostración: a) Supongamos $s = s_0s_1s_2s_3\dots$ es un punto periódico de σ con período k . Entonces $\sigma^n(\sigma^k(s)) = \sigma^n(s)$. Como $\sigma^n(s)$ “se olvida” de los primeros n – dígitos de s , observamos que $\sigma^n(\sigma^k(s_0s_1s_2s_3\dots)) = s_{n+k}s_{n+k+1}s_{n+k+2}\dots = s_ns_{n+1}s_{n+2}\dots = \sigma^n(s_0s_1s_2s_3\dots)$ y $s_{n+k} = s_n \forall n$. Esto implica que s es una sucesión formada por la repetición de k – dígitos, $s_0s_1s_2\dots s_{k-1}$ de manera infinita. Para probar que los puntos periódicos de σ son densos en Σ_2 , debemos probar que para todos los puntos $t \in \Sigma_2$ y todo $\varepsilon > 0$, existe un punto periódico de σ contenido en $N_\varepsilon(t)$. De la observación anterior, vemos que esto significa, que necesitamos un punto en $N_\varepsilon(t)$ el cual es una sucesión formada por la repetición de los primeros k – dígitos de manera infinita. Pero, si $t = t_0t_1t_2t_3\dots$ y escogemos n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, entonces podemos tomar $s = t_0t_1t_2t_3\dots t_nt_0t_1t_2\dots t_nt_0t_1t_2\dots$. Como t y s concuerdan en los primeros $n+1$ dígitos, el lema 2 implica $d[s, t] \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ ó s está en $N_\varepsilon(t)$ y s es un punto periódico por construcción.

b) Si s pertenece al conjunto de puntos periódicos de período n entonces $s = \underbrace{s_0}_{0,1} \underbrace{s_1}_{0,1} \underbrace{s_2}_{0,1} \underbrace{s_3}_{0,1} \dots \underbrace{s_{n-1}}_{0,1} \dots$ consta de n elementos en la órbita cada uno con la posibilidad de ser cero o uno, así que Σ_2 tendrá 2^n puntos periódicos de período n .

c) Si $s \in \Sigma_2$ es eventualmente periódico (con período k) entonces existe N tal que $\sigma^{n+k}(s) = \sigma^n(s)$ para toda $n \geq N$, i.e.,

$$s = s_0s_1s_2\dots s_{N-1}s_Ns_{N+1}\dots s_{N+k}s_Ns_{N+1}\dots s_{N+k}s_Ns_{N+1}\dots$$

Ahora, sea $t \in \Sigma_2$, $t = t_0t_1t_2\dots t_nt_{n+1}\dots t_{n+k}t_{n+k+1}t_{n+k+2}\dots t_{n+k+1}t_n\dots$. Además sea $s \in \Sigma_2$ tal que $s = t_0t_1t_2\dots t_nt_{n+1}\dots t_{n+k}t_{n+1}t_{n+2}\dots t_{n+k}t_{n+1}t_{n+2}\dots$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $\varepsilon > \frac{1}{2^n}$ entonces $d[s, t] < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ implica $s \in N_\varepsilon(t)$ además $s \neq t$ y s es eventualmente periódico.

d) La sucesión que comienza con 01 00 01 10 11 y que incluye todos los bloques posibles de 0 y 1 con tres dígitos (son ocho de ellos) seguido de todos los posibles bloques de 0 y 1 con cuatro dígitos (son 16) y así sucesivamente, es llamada la

sucesión Morse, y se denota con s^*

Sea $t = t_0t_1t_2 \dots \in \Sigma_2$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Por la manera en que está construída la sucesión de Morse s^* , existe un entero N tal que los primeros n dígitos de $\sigma^N(s^*)$ coinciden con los primeros n dígitos de t . Es decir, s^* es de la forma

$$s^* = \underbrace{0100011011 \dots}_{N \text{ símbolos}} \underbrace{t_0t_1 \dots t_n}_{\text{los primeros } n+1 \text{ dígitos de } t} \dots$$

Entonces, $s = \sigma^N(s^*)$ coincide con t en los primeros $n + 1$ dígitos; es decir, $d[s, t] < 1/2^n < \epsilon$

e) Como el conjunto de puntos no-periódicos incluye como un subconjunto a la órbita de la sucesión de Morse, definida anteriormente, la verdad de la parte e) de esta proposición se sigue de la parte d). \square

2.3 Una Definición De Caos.

Las características del mapeo corrimiento descritas en la Proposición 2.2.2 constituyen uno de los primeros elementos que intervienen en la definición de caos. En esta sección presentamos los dos elementos restantes.

Definición 2.3.1 *La función $f : D \rightarrow D$ es topologicamente transitiva si para todo par de conjuntos abiertos U y V en D , existen x en U y un número natural $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(x)$ está en V .*

Algunas veces se describe la acción de una función topologicamente transitiva diciendo que f “mezcla el dominio”. Si U es cualquier conjunto abierto en el dominio de la función f , entonces algún punto de U caerá eventualmente en cualquier vecindad, de cualquier punto en el dominio bajo alguna iteración de f . La Proposición 2.2.2, d), en conjunto con la Proposición 2.3.1 siguiente nos garantiza que el mapeo corrimiento es topologicamente transitivo.

Proposición 2.3.1 *Sea f una función y supongamos que existe un punto cuya órbita es densa en el dominio de f , entonces f es topológicamente transitiva.*

Demostración: Sea $f : D \rightarrow D$ y sean U y V conjuntos abiertos en D . Debemos encontrar $x \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(x) \in V$. Por hipótesis, existe un punto en D , cuya órbita es densa en D . Si x_0 es tal punto, entonces existe una k tal que $f^k(x_0)$ está en U . Si podemos mostrar que existe un número natural n tal que $f^{k+n}(x_0)$ está en V , entonces habremos terminado. Ahora, como podemos tomar $x = f^k(x_0)$, en este caso x está en U y $f^n(x) = f^n(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0)$ está en V .

Como la órbita de x_0 es densa, V contiene al menos una iterada de x_0 . Supongamos que existe solo una cantidad finita de estas iteradas de x_0 en V . Si v es cualquier elemento de V que no es una iterada de x_0 , entonces el número $\varepsilon = \min \{|v - f^n(x_0)|\}$ es positivo y la vecindad $N_{\frac{\varepsilon}{2}}(v)$ no contiene iterada alguna de x_0 . Entonces, la órbita de x_0 no es densa en D , lo cual es una contradicción. Consecuentemente, V debe contener una cantidad infinita de iteradas de x_0 . Y como sólo hay una cantidad finita de números menores que k , entonces existe $m > k$ tal que $f^m(x_0)$ está en V . Si tomamos $n = m - k$, la prueba esta completa. \square

El mapeo corrimiento tiene otra importante propiedad que se puede describir informalmente diciendo que en cualquier vecindad de un punto $s \in \Sigma_2$ existe un punto t tal que las órbitas (de s y t) se separan tanto como es posible, a pesar que en un inicio estuvieran arbitrariamente cercanos. En términos precisos: para toda $s \in \Sigma_2$ y toda $\varepsilon > 0$, existen $t \in \Sigma_2$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d[s, t] < \varepsilon$ pero $d[\sigma^n(s), \sigma^n(t)] = 2$.

Esto se demuestra escogiendo n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ y además escogiendo t tal que los primeros $n + 1$ dígitos de t son los mismos que los de s y los demás dígitos de t son todos diferentes de los siguientes dígitos correspondientes de s .

Esto es, $s_i = t_i \iff i < n$. En este caso, $d[s, t] = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Como $\sigma^n(s) = s_n s_{n+1} s_{n+2} \dots$ y $\sigma^n(t) = t_n t_{n+1} t_{n+2} \dots$ entonces $d[\sigma^n(s), \sigma^n(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_{i+n} - t_{i+n}|}{2^i} =$

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$. De hecho, vemos que $d[\sigma^k(s), \sigma^k(t)] = 2 \forall k \geq n$. Así, después de un número finito de iteraciones la separación entre s y t es la máxima posible ($= 2$) en Σ_2 , aunque inicialmente las pudieramos tomar tan cercanas como quisieramos. Este es un ejemplo extremo de la sensibilidad a la dependencia en las condiciones iniciales.

Definición 2.3.2 *Sea D un espacio metrico con metrica d . Entonces la función $f : D \rightarrow D$ exhibe sensibilidad a la dependencia en las condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in D$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $y \in D$ y un número natural n tal que $d[x, y] < \varepsilon$ y además $d[f^n(x), f^n(y)] > \delta$.*

Hablando intuitivamente, la sensibilidad a la dependencia en las condiciones iniciales implica que si estamos usando una función para modelar el comportamiento dinámico de alguna variable (como el crecimiento poblacional, o alguna variable climatológica o económica) y la función exhibe sensibilidad en los cambios de las condiciones iniciales, entonces cualquier error en las mediciones de las condiciones iniciales podría resultar en grandes diferencias entre el comportamiento esperado y el actual del sistema que estamos modelando. Como todas las mediciones físicas incluyen error, esta condición limita severamente la utilidad de nuestro modelo.

Las funciones que muestran las tres características mencionadas anteriormente para σ se dicen caóticas.

Definición 2.3.3 [Devaney:] *Sea D un espacio metrico. Entonces la función $f : D \rightarrow D$ es caótica si:*

- a) Los puntos periódicos de f son densos en D .
- b) f es topologicamente transitiva, y
- c) f exhibe dependencia en las condiciones iniciales.

Resumiendo, esta definición implica que una función caótica muestra una cierta regularidad y mezcla bien el dominio. Aún mas, incluso los mas pequeños cambios en

las posiciones iniciales puede terminar en resultados dramáticamente diferentes en los valores, bajo la iteración de la función. La regularidad se muestra en el hecho de que siempre podemos encontrar una órbita periódica en cualquier vecindad, no importa cuán pequeña sea, de cualquier punto en el dominio de la función. Del otro lado, el dominio es bien mezclado por la función, ya que si elegimos cualquier conjunto abierto, entonces podemos encontrar un punto en cualquier otro conjunto abierto que eventualmente caerá en el primer conjunto bajo la iteración de la función.

Como hemos visto, en $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, exhibe todos estos comportamientos y por lo tanto es caótica.

Completaremos esta parte del trabajo, presentando un sorprendente resultado y relativamente reciente, (Abril de 1992).

Teorema 2.3.1 *Sea $f : X \rightarrow X$ topológicamente transitiva y supongamos que los puntos periódicos de f son densos en X . Si X contiene un número infinito de elementos, entonces f exhibe dependencia en las condiciones iniciales.*

Demostración: Sea $f : X \rightarrow X$ topológicamente transitiva y supongamos que los puntos periódicos de f son densos en X . Sea d la métrica en X . Comenzaremos mostrando que existe un $\delta_0 > 0$ tal que para todo $x \in X$, existe un punto periódico q , tal que la distancia de x a $f^n(q)$ es mayor o igual a δ_0 para todo n . En otras palabras, cualquier $x \in X$ está alejado al menos δ_0 de una órbita periódica. Definamos δ_0 escogiendo dos puntos periódicos p y q con diferente órbita y fijemos $\delta_0 = \frac{1}{2} \min_{n,m \in \mathbb{N}} \{d[f^n(p), f^m(q)]\}$. Como sólo existe una cantidad finita de puntos en las órbitas de p y q , se concluye que $\delta_0 > 0$. Por definición, todos los puntos en la órbita de p están por lo menos $2\delta_0$ unidades, separados de todo punto en la órbita de q . Entonces por la desigualdad del triángulo, tenemos $2\delta_0 \leq [f^n(p), f^m(q)] \leq d[f^n(p)] + d[f^m(q)]$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Se sigue que, cuando $d[f^n(p), x] \leq \delta_0$ para algún n , entonces $d[f^m(q), x] \geq \delta_0 \forall m$, e inversa. De

aquí que, cualquier punto x está al menos, δ_0 unidades distante de cualquier otro punto en la órbita de q ó cualquier punto en la órbita de p .

Ahora, sea $\delta = \frac{1}{4}\delta_0$. Comenzaremos mostrando que para toda x en X y todo $\varepsilon > 0$ existe una y tal que $d[x, y] < \varepsilon$ y $d[f^n(x), f^n(y)] > \delta$ para algún n . En otras palabras, mostraremos que δ satisface el criterio para comprobar que f exhibe dependencia de las condiciones iniciales.

Sea x cualquier elemento de X y elijamos $\varepsilon > 0$. Como la condición es mas restrictiva a medida que ε se hace mas pequeño podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\varepsilon < \delta$. Como los puntos periódicos de f son densos en X , podemos encontrar un punto periódico p con período primo k tal que $d[x, p] < \varepsilon$. También, existe un punto periódico q tal que cualquier punto en su órbita está por lo menos a una distancia $4\delta = \delta_0$ de x . Anteriormente hemos demostrado que tal órbita existe.

Finalmente, definamos

$$V = \bigcap_{i=0}^k f^{-i}(N_\delta(f^i(q))) = \{x \mid d[f^i(x), f^i(q)] < \delta \text{ para } 0 \leq i \leq k\},$$

donde $N_\delta(f^i(q))$ es el conjunto de puntos que se encuentran a una distancia menor que δ de $f^i(q)$. Claramente se ve que q está en V , por la definición de V , sabemos que V es abierto, así que $N_\delta(f^i(q))$ también es abierto para toda i , y que f^i es continua. Entonces $f^{-i}(N_\delta(f^i(q)))$ es abierto para cada i , y en consecuencia V , siendo la intersección finita de conjuntos abiertos, es abierto.

Ahora, como V y $N_\varepsilon(x)$ son abiertos, la transitividad topológica de f implica que existen y y m tales que y está en $N_\varepsilon(x)$ y $f^m(y)$ está en V . Sea j el entero que satisface $\frac{m}{k} < j \leq \frac{m}{k} + 1$, o, lo que es lo mismo, $0 < kj - m \leq k$.

Antes de completar la demostración revisemos lo hecho hasta este punto. Tenemos el punto arbitrario x y $0 < \varepsilon < \delta$. Dentro de $N_\varepsilon(x)$ encontramos tres puntos: x , p , que es un punto periódico con período k , y y . Tenemos también otro conjunto abierto V el cual no intersecta $N_\varepsilon(x)$ y tal que: (i) el punto periódico q está en V , (ii) si z

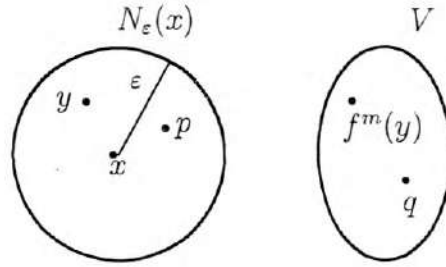


Figura 2.2: Una ilustración de la localización de los objetos utilizados en la demostración del teorema 2.3.1

está en V e $i \leq k$, entonces la distancia entre $f^i(z)$ y $f^i(q)$ es menor que δ , y (iii) $f^m(y)$ está en V . Esto está ilustrado en la figura 2.2. Para completar la prueba, mostraremos que se cumple una de las dos desigualdades siguientes:

$$d[f^{kj}(p), f^{kj}(x)] > \delta \quad \text{ó} \quad d[f^{kj}(x), f^{kj}(y)] > \delta$$

Como la distancia de x a alguno de los puntos p ó y es menor que ε , esto probará que f exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales. Notemos que la distancia de $f^{kj}(y) = f^{kj-m}(f^m(y))$ a $f^{kj-m}(q)$ es menor que δ ya que escogimos y tal que $f^m(y)$ está en V , la distancia entre $f^i(z)$ y $f^i(q)$ es menor que δ siempre que z este en V y $i \leq k$, y, como en un principio, escogimos j tal que $kj - m \leq k$. Por lo tanto la desigualdad del triángulo implica

$$d[x, f^{kj-m}(q)] \leq d[x, p] + d[p, f^{kj}(y)] + d[f^{kj}(y), f^{kj-m}(q)] \quad (2.1)$$

Como asumimos que $d[x, p] < \varepsilon < \delta$ y hemos demostrado que

$$d[f^{kj}(y), f^{kj-m}(q)] < \delta.$$

La desigualdad (2.1) implica

$$d[x, f^{kj-m}(q)] < d[p, f^{kj}(y)] + 2\delta \quad (2.2)$$

Recordemos que hemos elegido q como un punto periódico con la propiedad de que $d[x, f^{kj-m}(q)] > 4\delta = \delta_0$. Entonces se sigue de la desigualdad (2.2) que

$$4\delta < d[p, f^{kj}(y)] + 2\delta \quad \text{ó} \quad 2\delta < d[p, f^{kj}(y)] \quad (2.3)$$

Como p es periódico con período k , vemos que $f^{kj}(p) = p$ y así concluimos de la desigualdad (2.3) que $2\delta < d[f^{kj}(p), f^{kj}(y)]$. Finalmente por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$2\delta < d[f^{kj}(p), f^{kj}(y)] \leq d[f^{kj}(p), f^{kj}(x)] + d[f^{kj}(x), f^{kj}(y)]$$

De aquí que alguna de las desigualdades

$$d[f^{kj}(p), f^{kj}(x)] > \delta \quad \text{ó} \quad d[f^{kj}(x), f^{kj}(y)] > \delta$$

se cumple. \square

2.4 El Caos En La Función Logística.

Retomemos nuevamente el análisis de la función logística. Nuestra meta es probar que si $r > 2 + \sqrt{5}$, entonces $h_r(x) = rx(1-x)$ es caótica en Λ donde Λ es el conjunto de todos los puntos en $[0, 1]$ que permanecen ó caen de nuevo en $[0, 1]$ bajo la iteración de $h(x)$. Esto es $\Lambda = \{x \mid h^n(x) \text{ está en } [0, 1] \forall n\}$ por el Teorema 2.3.1 sería suficiente probar que los puntos periódicos de h son densos en Λ y que h es topologicamente transitiva en Λ . Probar que los puntos periódicos de h son densos en Λ no es tan complicado, sin embargo, probar que h es topologicamente transitiva en Λ directamente de la definición es un trabajo relativamente difícil.

En consecuencia, mostraremos en vez de eso, que la dinámica de σ en Σ_2 es esencialmente la misma que la de h en Λ . Hablado en terminos matemáticos, diremos que h en Λ es un conjugado topológico de σ en Σ_2 .

Definición 2.4.1 Sean $f : D \rightarrow D$ y $g : E \rightarrow E$ dos funciones. Entonces se dice que f es topologicamente conjugada a g si existe un homomorfismo $\tau : D \rightarrow E$ tal que $\tau \circ f = g \circ \tau$. En este caso τ es la conjugación topológica (entre f y g).

Representamos esta relación con los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ E & \xrightarrow{g} & E \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & f(x) \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \tau(x) & \xrightarrow{g} & g(\tau(x)) \end{array}$$

Los diagramas implican que si x es un elemento de D , entonces $\tau(f(x)) = g(\tau(x))$. También, como τ es un homomorfismo, sabemos que τ es uno a uno y τ^{-1} está bien definida y además es continua. Entonces, los diagramas anteriores son equivalentes a los siguientes

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D \\ \tau \downarrow & & \uparrow \tau^{-1} \\ E & \xrightarrow{g} & E \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y = f(x) \\ \tau \downarrow & & \uparrow \tau^{-1} \\ \tau(x) & \xrightarrow{g} & g(\tau(x)) \end{array}$$

de donde leemos que $f(x) = \tau^{-1}(g(\tau(x)))$.

También tenemos

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D \\ \tau^{-1} \uparrow & & \downarrow \tau \\ E & \xrightarrow{g} & E \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{ccc} \tau^{-1}(a) & \xrightarrow{f} & f(\tau^{-1}(a)) \\ \tau^{-1} \uparrow & & \downarrow \tau \\ a & \xrightarrow{g} & g(a) \end{array}$$

de donde leemos que $g(a) = \tau(f(\tau^{-1}(a)))$.

El hecho de que exista un homomorfismo entre los espacios D y E implica que las topologías de D y E son idénticas. Esta afirmación se precisa en la siguiente proposición.

Proposición 2.4.1 Sean D y E espacios métricos y sea $\varphi : D \rightarrow E$ un homomorfismo. Entonces:

- a) El conjunto U en D es abierto \iff si el conjunto $\varphi(U)$ es abierto en E .
- b) La sucesión x_1, x_2, x_3, \dots en D converge a x en D \iff si la sucesión $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \dots$ converge a $\varphi(x)$ en E .
- c) El conjunto F es cerrado en D \iff el conjunto $\varphi(F)$ es cerrado en E .
- d) El conjunto A es denso en D \iff el conjunto $\varphi(A)$ es denso en E .

La demostración de la Proposición 2.4.1 se puede leer en cualquier texto de topología.¹

La existencia de un homomorfismo entre los espacios D y E implica que las topologías de los dos espacios son idénticas. Si, además, este homomorfismo es una conjugación topológica entre dos funciones, $f : D \rightarrow D$ y $g : E \rightarrow E$ entonces las dinámicas de estas funciones son también idénticas. Este es el contenido del Teorema siguiente.

Teorema 2.4.1 Sean D y E espacios métricos. $f : D \rightarrow D$, $g : E \rightarrow E$. Sea $\tau : D \rightarrow E$ una conjugación topológica. Entonces:

- a) $\tau^{-1} : E \rightarrow D$ es una conjugación topológica.
- b) $\tau \circ f^n = g^n \circ \tau$ para todo número natural n .
- c) p es un punto periódico de f si y solo si $\tau(p)$ es un punto periódico de g . Aún más los periodos primos de p y $\tau(p)$ son idénticos.
- d) Si p es un punto periódico de f con conjunto estable $W^s(p)$, entonces el conjunto estable de $\tau(p)$ es $\tau(W^s(p))$.
- e) Los puntos periódicos de f son densos en D si y solo si los puntos periódicos de g son densos en E .
- f) f es topológicamente transitiva en D si y solo si g es topológicamente transitiva en E .

¹La demostración de esta proposición se puede encontrar en el libro de texto de James R. Munkers, Topology, 2nd. Edition pag.[104]

g) f es caótica en D si y solo si g es caótica en E.

Demostración: La demostración de (a) es obvia. De $\tau \circ f = g \circ \tau$ y de la invertibilidad de τ se sigue que $\tau^{-1} \circ g = f \circ \tau^{-1}$.

b) $\tau \circ f^n = g^n \circ \tau$ se satisface, por definición, para $n = 1$. Supongamos que se satisface para $k \in \mathbb{N}$, esto es, $\tau \circ f^k = g^k \circ \tau$. Entonces $\tau \circ f^{k+1} = (\tau \circ f^k) \circ f = (g^k \circ \tau) \circ f = g^k \circ (\tau \circ f) = g^k \circ (g \circ \tau) = g^{k+1} \circ \tau$.

De manera que (b) se satisface para todo $N \in \mathbb{N}$.

c) Sea p un punto periódico de f con período primo k . Primero mostraremos que $g^k(\tau(p)) = \tau(p)$. Ya que $f^k(p) = p$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{f^k} & f^k(p) \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \tau(p) & \xrightarrow{g^k} & g^k(\tau(p)) \end{array}$$

De aquí que $g^k(\tau(p)) = \tau(p)$ y $\tau(p)$ es un punto periódico de período k de g . Si $0 < n < k$, entonces observamos que $g^n(\tau(p)) = \tau(f^n(p)) \neq \tau(p)$ ya que τ es uno a uno y p tiene período primo k bajo f . Por lo tanto $\tau(p)$ tiene período primo k bajo g . Como τ^{-1} es una conjugación topológica, el mismo argumento demuestra que si q es un punto periódico de g con período primo k , entonces $\tau^{-1}(q)$ es un punto periódico de f con período primo k .

d) Sea p un punto periódico de f con período primo k y sea x un elemento de $W^s(p)$. Entonces por la definición de $W^s(p)$, para cada $\delta > 0$ existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ y d_D es la métrica en D , entonces $d_D[f^{kn}(x), p] < \delta$. Debemos mostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe un M tal que, siempre que $n \geq M$ entonces $d_E[g^{kn}(\tau(x)), \tau(p)] < \varepsilon$, donde d_E es la métrica en E . Supongamos que $\varepsilon > 0$. Como τ es continua, existe $\delta > 0$ tal que si $d_D[y, p] < \delta$, entonces $d_E[\tau(y), \tau(p)] < \varepsilon$. Elijamos M tal que si $n \geq M$, entonces $d_D[f^{kn}(x), p] < \delta$. Por continuidad tenemos que,

$$d_E \left[\tau \left(f^{kn}(x) \right), \tau(p) \right] = d_E \left[g^{kn}(\tau(x)), \tau(p) \right] < \varepsilon, \text{ cuando } n \geq M.$$

e) La preservación de la densidad de los puntos periódicos en la conjugación topológica se desarrolla fácilmente de la parte c) de este teorema y la parte d) de la proposición 2.4.1.

f) Supongamos que f es topologicamente transitiva en D . Deseamos mostrar que g es topologicamente transitiva en E . Dado un conjunto abierto U en E , queremos encontrar una x en U tal que para algún número natural n , $g^n(x)$ cae en el conjunto abierto V en E .

$$\begin{array}{ccc} \tau^{-1}(U) \subset D & \xrightarrow{f^n} & \tau^{-1}(V) \subset D \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ U \subset E & \xrightarrow{g^n} & V \subset E \end{array}$$

Ya que $\tau : D \rightarrow E$ es un homomorfismo entre los espacios métricos D y E y $U, V \subset E$ son abiertos, entonces $\tau^{-1}(U)$ y $\tau^{-1}(V)$ son abiertos. De aquíque, como f es topologicamente transitiva en U , existe una y en $\tau^{-1}(U)$ y un número natural n tal que $f^n(y) \in \tau^{-1}(V)$. Elijamos $x = \tau(y)$. Entonces $g^n(x) = g^n(\tau(y)) = \tau(f^n(y))$, por la parte b) del Teorema 2.4.1. De esta manera $g^n(x) = \tau(f^n(y))$ el cual está en V ya que $f^n(y)$ está en $\tau^{-1}(V)$.

g) Esta parte del teorema es consecuencia directa e inmediata de las partes e) y f) y del Teorema 2.3.1. \square

Completaremos este Capítulo construyendo una conjugación topológica entre $h_r : \Lambda \rightarrow \Lambda$ y $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ cuando $r > 2 + \sqrt{5}$. Como σ es caótica en Σ_2 , el Teorema 2.4.1 implicará que la función logística h_r es caótica en el conjunto de Cantor en Λ .

Comenzaremos definiendo la función $\psi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$. Tomemos de nuevo los intervalos como $I_0 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r} \right]$ e $I_1 = \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}, 1 \right]$. Recordemos, de la Proposición 2.1.1, que $\Lambda_1 = \{x \mid h(x) \text{ está en } [0, 1]\} = I_0 \cup I_1$. Como Λ es un subconjunto de Λ_1 , Λ está también incluido en $I_0 \cup I_1$. Para cada x en Λ definamos la sucesión $\psi(x) = s_0s_1s_2\dots$ en Σ_2 tal que $h^n(x)$ está en I_{s_n} para cada n . Por ejemplo, si $r = 5$,

entonces $h^0\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right) = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)$ está en I_0 . $h^1\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right) = 1$ está en I_1 y $h^k\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right) = 0$ está en I_0 para toda $k \geq 2$. Así que $\psi\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right) = 01000\bar{0}\dots$. Podemos pensar que $\psi(x)$ es el *itinerario* de x sobre los intervalos I_0 e I_1 bajo h . El dígito S_n en $\psi(x) = s_0s_1s_2\dots$ es 0 si y solo si $h^n(x)$ está en I_0 y $S_n = 1$ si y solo si $h^n(x)$ está en I_1 . Claramente ψ está bien definida.

Teorema 2.4.2 *La función $\psi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ definida anteriormente, es una conjugación topológica. Esto es :*

- a) ψ es uno a uno y sobre.
- b) ψ es continua.
- c) ψ^{-1} es también continua, y
- d) $\psi \circ h = \sigma \circ \psi$.

Demostración: Sean h , I_0 y I_1 como los definimos anteriormente y sea $s_0s_1s_2\dots$ un elemento de Σ_2

$$I_{s_0s_1s_2\dots s_n} = \left\{ x \mid h^k(x) \text{ está en } I_{s_k} \text{ para todo } k \leq n \right\}$$

a cada uno de los intervalos en Λ_{n+1} donde $\Lambda_{n+1} = \{x \mid h^{n+1}(x) \text{ está en } [0, 1]\}$. Notemos que esta definición de Λ_n es la misma que la usada anteriormente. Probaremos lo dicho anteriormente por inducción.

Por la proposición 2.1.1, I_{s_0} debe de ser I_0 ó I_1 . Como $\Lambda_1 = I_0 \cup I_1$ la afirmación del Teorema es válida en este caso. Supongamos que $I_{s_0s_1s_2\dots s_{n-1}}$ es alguno de los intervalos en Λ_n . Deseamos mostrar que esto implica $I_{s_0s_1s_2\dots s_n}$ es uno de los intervalos en Λ_{n+1} . Notemos primero que $I_{s_0s_1s_2\dots s_n}$ es un subconjunto de $I_{s_0s_1s_2\dots s_{n-1}}$ así que es suficiente determinar cual porción de $I_{s_0s_1s_2\dots s_{n-1}}$ pertenece a $I_{s_0s_1s_2\dots s_n}$.

Sea $I_{s_0s_1s_2\dots s_{n-1}} = [a, b]$. Entonces por la proposición 2.1.1, $h^n([a, b]) = [0, 1]$ y h^n es monótona en $[a, b]$. Supongamos que h^n es creciente en $[a, b]$; la prueba es similar cuando h^n es decreciente. Por el Teorema del Valor Intermedio, existen c_1

y c_2 , $a < c_1 < c_2 < b$, tales que $h^n(c_1) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}$, y $h^n(c_2) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} h^n([a, c_1]) &= \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}\right] = I_0, \\ h^n((c_1, c_2)) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}\right), \\ \text{y } h^n([c_2, b]) &= \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}, 1\right] = I_1. \end{aligned}$$

Así que si $S_n = 0$ entonces $I_{S_0 S_1 S_2 \dots S_n} = [a, c_1]$ y si $S_n = 1$ entonces $I_{S_0 S_1 S_2 \dots S_n} = [c_2, b]$. Como este es el mismo procedimiento con el que tratamos los intervalos de Λ_{n+1} en la prueba de la Proposición 2.1.1, observamos que $I_{S_0 S_1 S_2 \dots S_n}$ es uno de los intervalos incluidos en Λ_{n+1} .

a) Sea $s = s_0 s_1 s_2 s_3 \dots$ un elemento de Σ_2 . Para mostrar que ψ es uno a uno y sobre, debemos mostrar que $\psi^{-1}(s)$ contiene exactamente un solo punto. Pero si x está en $\psi^{-1}(s)$, entonces x está en $I_{S_0 S_1 S_2 \dots S_n}$ para toda n . De esta manera, $\psi^{-1}(s) = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{S_0 S_1 S_2 \dots S_n}$. Así que necesitamos demostrar que esta intersección es no vacía y además contiene exactamente un punto. Sea $I_{S_0 S_1 S_2 \dots S_n} = [a_n, b_n]$. Supongamos que $\psi^{-1}(s)$ contiene dos puntos x y y . Entonces $|x - y| \leq |b_n - a_n|$ para toda n pues x y y están en cada uno de los intervalos $[a_n, b_n]$. El Lema 2.1.1 implica que $|a_n - b_n|$ se aproxima a cero cuando n tiende a infinito. Por tanto $|x - y| = 0$ y en consecuencia $x = y$. Así que $\psi^{-1}(s)$ contiene a lo más un punto. Sólo nos resta mostrar que $\psi^{-1}(s)$ contiene por lo menos un punto. Pero este resultado es inmediato a partir del conocido Teorema de los Intervalos Anidados el cuál establece que la intersección de intervalos cerrados anidados es no vacía.

b) Sea $\varepsilon > 0$ y x en Λ . Para mostrar que ψ es continua en x debemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $d[\psi(x), \psi(y)] < \varepsilon$. Si elegimos n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, entonces el Lema 2.2.1 implica que es suficiente mostrar que existe una $\delta > 0$ tal que las sucesiones $\psi(x)$ y $\psi(y)$ concuerden en los primeros $n + 1$ dígitos siempre que $|x - y| < \delta$. En otras palabras, si $\psi(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$ entonces x está en $I_{S_0 S_1 S_2 \dots S_n}$ y necesitamos demostrar que y está en $I_{S_0 S_1 S_2 \dots S_n}$ siempre que y este en Λ y $|x - y| < \delta$.

Sean $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \dots, [a_{2^{n+1}}, b_{2^{n+1}}]$ los 2^{n+1} intervalos en Λ_{n+1} y supongamos que están etiquetados de tal manera que $b_{i-1} < a_i \forall i$. Sea $\delta = \frac{1}{2} \min \{|a_i - b_{i-1}|\}$. Como los intervalos no se traslapan y son además un número finito, δ es positivo. También si x y y están en Λ_{n+1} , como $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ es un intervalo en Λ_{n+1} y x está en $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$, observamos que y debe de estar en $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ y la prueba de la parte b) esta completa.

c) Para demostrar que ψ^{-1} es continua utilizaremos un argumento muy similar al usado para demostrar que ψ es continua.

Sea $\frac{1}{2^n} < \delta$, sea $x, y \in \Sigma_2$ tal que $|x - y| < \frac{1}{2^n} < \delta$ entonces los primeros n -digitos de sus itinerarios son identicos, esto implica que $\psi^{-1}(x), \psi^{-1}(y)$ estan en el mismo intervalo de Λ_n por lo tanto $d(\psi^{-1}(x), \psi^{-1}(y)) < \frac{1}{(1+\epsilon)^n} < \epsilon$.

d) Sólo nos resta mostrar que $\psi \circ h = \sigma \circ \psi$. Sea x en Λ y $\psi(x) = s_0 s_1 s_2 s_3 \dots$. Como hemos visto en la prueba de la parte a), x es el unico punto en

$$I_{s_0 s_1 s_2 \dots} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{x \mid h^k(x) \text{ está en } I_{s_k} \forall k \leq n\}.$$

De aquí , se sigue que $h(x)$ es el único punto en

$I_{s_0 s_1 s_2 \dots} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{x \mid h^{k+1}(x) \text{ está en } I_{s_k} \forall k \leq n\}$. Así que $\psi(h(x)) = s_1 s_2 s_3 \dots = \sigma(\psi(x))$ y hemos terminado. \square

Corolario 2.4.1 Sea $r > 2 + \sqrt{5}$, $h(x) = rx(1-x)$, y

$\Lambda = \{x \mid h^n(x) \text{ está en } [0, 1] \text{ para toda } n\}$. Entonces, h es caótica en Λ .

Capítulo 3

Caos, Fractales y Medidas.

La definición de Caos según R. Devaney implica que, para decidir si un sistema dado es caótico, debemos considerar las órbitas de todos los posibles “estados iniciales” para observar si las órbitas periódicas son densas y si el sistema es sensible ante cambios en las condiciones iniciales. En este capítulo presentamos otra definición de caos que resulta ser más práctica desde el punto de vista computacional. Esta es una definición basada en los “exponentes de Lyapunov”, que son números asociados con cada posible órbita del sistema y que miden (en una manera que se precisará en la sección 3.1), la tasa de separación de dos órbitas con condiciones iniciales cercanas. La difícil cuestión de si estas dos definiciones son equivalentes no es tratada en este trabajo. En la sección 3.2 hacemos algunos comentarios sobre fractales, los cuáles son conjuntos que usualmente se asocian con el caos. Nuestra intención aquí es intentar explicar, aunque sea ligeramente, cómo se da esta asociación. Existe toda una teoría relacionada con el estudio de fractales, pero en este trabajo nos limitamos a señalar sólo una de las propiedades más populares: la relacionada con su dimensión fractal. Esto lo hacemos en la sección 3.3. En la última parte del capítulo, y todavía en relación con el concepto de fractales, hacemos una rápida excursión sobre dinámica de mapeos complejos, considerando un sólo ejemplo, el mapeo cuadrático, para el que revisamos sus conjuntos del Mandelbrot y de Julia

3.1 Exponentes De Lyapunov.

Hemos visto el comportamiento de mapeos de \mathbb{R} a \mathbb{R} . Consideremos una condición inicial cercana a un punto repelente p del mapeo f . En un principio, esta órbita tendrá un comportamiento inestable y separaciones exponenciales. Separación exponencial, significa que la distancia, entre la órbita del punto y el punto repelente, se incrementa en una razón exponencial. Cada iteración multiplica la distancia entre estos en $|f'(p)| > 1$. Diremos que la razón exponencial de separación es $|f'(p)|$ por iterada. Esto es, al menos en principio, pequeñas separaciones que van creciendo. después de un cierto número de iteraciones la órbita puede ser atraída a un punto atractor q . Como se aproxima a un punto atractor, la órbita desarrollará un comportamiento convergente, la distancia entre el punto atractor y la órbita se reduce por un factor $|f'(q)| < 1$. En tanto la órbita se aproxime al atractor, las distancias se van reduciendo.

Es común observar este tipo de comportamientos, en los cuales se presenta primero un comportamiento inestable transitorio y después se cae en una conducta estable. Pero no hay razón para pensar que una condición inicial tomada cerca de un punto repelente deba caer, un tiempo después, en una órbita atractor.

Una órbita caótica se puede describir informalmente como aquella que siempre exhibe ese comportamiento inestable; no es periódica ni converge a una órbita periódica.

Hemos observado en el Capítulo 1, que para puntos fijos de sistemas dinámicos discretos, la estabilidad del punto está altamente influenciada por la derivada del mapeo. Por ejemplo, si x_1 es un punto fijo de un mapeo uno-dimensional f y $f'(x_1) = a > 1$, entonces la órbita de cada punto x cercano a x_1 , se separa de x_1 en una razón multiplicativa, aproximada de a veces por iteración, hasta que la órbita de x se mueva lo suficientemente lejos de x_1 . Esto es, la distancia entre $f^n(x)$ y

$f^n(x_1) = x_1$ sera incrementada aproximadamente ($a > 1$) veces por iteración de f .

Para un punto periódico de período primo k , debemos considerar la derivada de la k -ésima iterada del mapeo, la cual, por la regla de la cadena, es el producto de las derivadas en los k puntos de la órbita. Supongamos que el producto de estas derivadas es $A > 1$. Entonces la órbita de cada vecindad x del punto periódico x_1 se separa de x_1 en una razón aproximada A después de k iteradas. Esta es una tasa acumulativa de separación, *i.e.*, se necesitan k iteraciones para separarse una distancia A . Tiene sentido describir el crecimiento en la razón de separación, como una distancia $A^{\frac{1}{k}}$ por iterada.

El término “número de Lyapunov” se usa para medir el crecimiento en la razón de separación de puntos x muy cercanos a x_1 . El exponente de Lyapunov es simplemente el logaritmo natural del número de Lyapunov. Por ejemplo, un número de Lyapunov igual a 2 para la órbita de x_1 significa que la distancia entre la órbita de x_1 y la órbita del punto cercano x se duplica cada iteración. Para un punto periódico x_1 de período k , esto es lo mismo que decir;

$$\left| (f^k)'(x_1) \right| = \left| (f)'(x_1) \right| \left| (f)'(x_2) \right| \dots \left| (f)'(x_k) \right| = 2^k.$$

Pero, queremos considerar este concepto incluso cuando x_1 no es punto fijo, ó periódico. Un número de Lyapunov de $\frac{1}{2}$ significa que la distancia se reducirá a la mitad en cada iteración, y las órbitas de x_1 y x se acercarán rápidamente. La importancia del concepto de número de Lyapunov es que este puede ser aplicado a órbitas no periódicas. Una característica de las órbitas caóticas es la sensibilidad en la dependencia de las condiciones iniciales (ver Definición 2.3.3), lo que implica la separación eventual de las órbitas con condiciones iniciales cercanas, cuando el sistema evoluciona en el tiempo. De hecho, nuestra definición de órbita caótica implica que la órbita no tiende a hacerse periódica y que el número de Lyapunov es mayor que 1.

Definiremos los números de Lyapunov y los exponentes de Lyapunov para una órbita en general, siguiendo la analogía del caso periódico, y considerando el producto

de las derivadas evaluadas en los puntos a lo largo de la órbita. Esto lo haremos primeramente para mapeos en dimensión uno.

Definición 3.1.1 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un mapeo suave; es decir, $f \in C^1(\mathbb{R})$. El número de Lyapunov, $L(x_1)$, de la órbita $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ está definido por

$$L(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|f'(x_1)| \cdots |f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}}$$

si este el límite existe. El exponente de Lyapunov, $h(x_1)$, se define como:

$$h(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) [\ln |f'(x_1)| + \cdots + \ln |f'(x_n)|]$$

si este el límite existe. Notemos que h existe si y solo si L existe y además $\ln L = h$.

De la definición anterior, observamos que el número de Lyapunov de un punto fijo x_1 para un mapeo uno-dimensional f es $|f'(x_1)|$ ó equivalentemente, el exponente de Lyapunov de la órbita es $h = \ln |f'(x_1)|$. Si x es un punto periódico de período primo k , entonces el exponente de Lyapunov es $h(x_1) = \frac{\ln |f'(x_1)| + \cdots + \ln |f'(x_k)|}{k}$. La idea central es que para una órbita periódica, el número de Lyapunov $e^{h(x_1)}$ describe la razón local de estiramiento por iterada para puntos cercanos a la órbita.

Definición 3.1.2 Sea f un mapeo suave. Una órbita $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ es llamada, asintóticamente periódica, si converge a una órbita periódica cuando n tiende a ∞ ; es decir, si existe una órbita periódica $\{y_1, y_2, \dots, y_k, y_1, y_2, \dots\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$.

Lema 3.1.1 Si el número de Lyapunov de x_1 bajo f es L , entonces el número de Lyapunov de x_1 bajo f^k es L^k .

Demostración. Escribiremos primero el caso en el que $k = 2$. Sea $g = f^2$. Por definición

$$L_g(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} [|g'(x_1)| \cdot |g'(x_2)| \cdots |g'(x_n)|]^{1/n}$$

Pero

$$g'(x_i) = (f \circ f)'(x_i) = f'(f(x_i))f'(x_i) = f'(x_i)f'(x_{i+1})$$

de manera que

$$\begin{aligned} L_g(x_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [|f'(x_1)| \cdot |f'(x_2)| \cdot \dots \cdot |f'(x_n)| \cdot |f'(x_{n+1})|]^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|f'(x_{n+1})|}{|f'(x_1)|} (|f'(x_1)| \cdot |f'(x_2)| \cdot \dots \cdot |f'(x_n)|)^2 \right]^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|f'(x_{n+1})|}{|f'(x_1)|} \right]^{1/n} \lim_{n \rightarrow \infty} [(|f'(x_1)| |f'(x_2)| \cdot \dots \cdot |f'(x_n)|)^2]^{1/n} \\ &= L^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|f'(x_{n+1})|}{|f'(x_1)|} \right]^{1/n} \end{aligned}$$

Sean

$$a = \min_n \{|f'(x_n)|\} \quad \text{y} \quad A = \max_n \{|f'(x_n)|\} \quad (3.1)$$

Entonces

$$0 \leq a \leq |f'(x_n)| \leq A$$

y, por tanto

$$a^{1/n} \leq |f'(x_n)|^{1/n} \leq A^{1/n}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} A^{1/n} = 1$, concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |f'(x_n)|^{1/n} = 1$. Por tanto,

$$L_g(x_1) = L^2.$$

En general, sea $g = f^k$. Entonces

$$L_g(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^n g'(x_i) \right)^{1/n}$$

Pero $g'(x_i) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{k \text{ veces}}(x_i) = \prod_{j=0}^{k-1} f'(x_{i+j})$, de modo que

$$\begin{aligned} L_g(x_i) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^{k-1} f'(x_{i+j}) \right]^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\prod_{j=1}^{k-1} |(f'(x_{n+j}))^{(j)}|}{\prod_{j=1}^{k-1} |(f'(x_j))^{(k-j)}|} \right]^{1/n} \left[\prod_{j=1}^n |f'(x_j)|^k \right]^{1/n} \\ &= L^k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\prod_{j=1}^{k-1} |(f'(x_{n+j}))^{(j)}|}{\prod_{j=1}^{k-1} |(f'(x_j))^{(k-j)}|} \right]^{1/n} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nótese que $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{k-1} |(f'(x_j))^{(k-j)}|^{1/n} = 1$, (pues $\prod_{j=1}^{k-1} |(f'(x_j))^{(k-j)}|$ es constante positiva, independiente de n). Con respecto al límite del numerador en el lado derecho de (3.2), argumentamos de la siguiente manera. De acuerdo a (3.1),

$$a \leq |f'(x_n)| \leq A$$

de manera que

$$0 \leq b \stackrel{\text{def}}{=} a^{\frac{(k-1)k}{2}} \leq \prod_{j=1}^{k-1} |(f'(x_{n+j}))^{(j)}| \leq A^{\frac{(k-1)k}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} B$$

y, entonces,

$$b^{1/n} \leq \left[\prod_{j=1}^{k-1} |(f'(x_{n+j}))^{(j)}| \right]^{1/n} \leq B^{1/n}$$

así que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{j=1}^{k-1} |(f'(x_{n+j}))^{(j)}| \right]^{1/n} = 1 \quad \square$$

Lema 3.1.2 Sea $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales que converge a s . Entonces la sucesión de promedios $\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i\}$ también converge a s .

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Existe un número natural $N = N(\varepsilon)$ tal que si $n > N(\varepsilon)$

entonces $|s_n - s| < \varepsilon$. Ahora, suponiendo (sin perder generalidad) que $n > N(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i - s \right| &= \left| \frac{\sum_{i=1}^n s_i - ns}{n} \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)-1} s_i + \sum_{i=N(\varepsilon)}^n s_i - ns \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)-1} [s_i - s] + \sum_{i=N(\varepsilon)}^n [s_i - s] \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)-1} [s_i - s] \right| + \frac{1}{n} \left| \sum_{i=N(\varepsilon)}^n [s_i - s] \right| \end{aligned}$$

Sea $A = \max \{|s_i - s|, \quad i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon) - 1\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)-1} [s_i - s] \right| + \frac{1}{n} \left| \sum_{i=N(\varepsilon)}^n [s_i - s] \right| &\leq \frac{1}{n} A (N(\varepsilon) - 1) + \frac{1}{n} \varepsilon (n - N(\varepsilon)) \\ &= \varepsilon + \frac{1}{n} [A(N(\varepsilon) - 1) - \varepsilon N(\varepsilon)] \end{aligned}$$

Como el número $\frac{1}{n} A (N(\varepsilon) - 1) + \frac{1}{n} \varepsilon (n - N(\varepsilon))$ se puede hacer tan pequeño como se quiera tomando n suficientemente grande, concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i = s. \quad \square$$

Cualquier órbita que es atraída a un punto atractor es asintóticamente periódica. Por ejemplo, la órbita con condición inicial $x = \frac{1}{2}$ de $h(x) = 4x(1-x)$ es también asintóticamente periódica, ya que después de dos iteradas ésta coincide con el punto fijo $x = 0$. El término *eventualmente periódica* es usado para describir los casos en que la órbita cae precisamente sobre una órbita periódica.

Teorema 3.1.1 *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si la órbita $\{x_1, x_2, \dots\}$ de f satisface $f'(x_i) \neq 0 \forall i$ y además es asintóticamente periódica a una órbita periódica $\{y_1, y_2, \dots\}$, entonces las dos órbitas tienen exponentes de Lyapunov idénticos, dado que ambos existen.*

Demostración : Para comenzar tomaremos $k = 1$, de manera que y_1 es un punto fijo. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y_1$, y f' es continua, vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = f'(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f'(y_1)$. Aún mas, como $\ln|x|$ es continua para x positivo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln |f'(x_n)| = \ln \left| \lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) \right| = \ln |f'(y_1)|$$

Esta ecuación nos da el límite de una sucesión infinita. Usando el lema 3.1.2 tenemos que

$$h(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)| = \ln |f'(y_1)| = h(y_1)$$

Ahora, tomemos $k > 1$, de modo que ahora y_1 no necesariamente es un punto fijo. Entonces y_1 es un punto fijo de f^k , y la órbita de x_1 es asintóticamente periódica sobre f^k a la órbita de y_1 . Por el lema 3.1.1, el exponente de Lyapunov de la órbita de x_1 sobre f^k es $\ln |f'(y_1)|$. Así por el Lema 3.1.1 tenemos que el exponente de Lyapunov de x_1 bajo f es $\frac{1}{k} \ln |(f^k)'(y_1)| = h(y_1)$. \square

3.1.1 Órbitas Caóticas.

En la sección anterior definimos el exponente de Lyapunov h de una órbita, como el logaritmo del crecimiento de la razón de separación por iterada de la función (ver Definición 3.1.1). Vimos también cómo calcular h para algunos casos especiales: para un punto fijo ó una órbita periódica podemos expresar h en términos de las derivadas. Vimos, además, que si una órbita converge a una órbita periódica entonces tienen el mismo exponente de Lyapunov. Un caso más interesante es aquel de órbitas acotadas que no son asintóticamente periódicas. Cuando una de tales órbitas tiene exponente de Lyapunov positivo, entonces es una órbita caótica.

Definición 3.1.3 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y sea $\{x_1, x_2, \dots\}$ una órbita acotada de f . Entonces la órbita es caótica si:

- 1) $\{x_1, x_2, \dots\}$ no es asintóticamente periódica.
- 2) El exponente de Lyapunov $h(x_1)$ es mayor de cero.

Ilustraremos estos conceptos mediante el siguiente ejemplo.

Consideremos el *mapeo tienda* (“tent map”),

$$f(x) = 2x \pmod{1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

El mapeo no es continuo, y por lo tanto, no es diferenciable, en $x = \frac{1}{2}$. Así que enfocaremos nuestra atención a órbitas que “nunca pasan” por el punto $\frac{1}{2}$. Para estas órbitas, es fácil calcular el exponente de Lyapunov:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln 2 = \ln 2.$$

Así que, cada órbita que siempre evita a el punto $x = \frac{1}{2}$ y además no es asintóticamente periódica, es una órbita caótica, con exponente de Lyapunov $\ln 2$.

El efecto de este mapeo, en un número $x \in [0, 1]$ puede ser visualizado fácilmente si consideramos la expansión binaria de x . El mapeo f aplicado a el número x , expresado en expansión binaria, “corta” el dígito que está enseguida del punto decimal. Tomemos por ejemplo $x = 1/5$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} &= .0011\overline{00110011} \\ f\left(\frac{1}{5}\right) &= .011\overline{00110011} \\ f^2\left(\frac{1}{5}\right) &= .11\overline{00110011} \\ f^3\left(\frac{1}{5}\right) &= .1\overline{00110011} \\ f^4\left(\frac{1}{5}\right) &= \overline{00110011} \end{aligned}$$

Vemos que $x = \frac{1}{5}$ es un punto con órbita periódica de período 4. Como el mapeo es muy simple en el sistema binario, podemos ver inmediatamente cuales puntos en $[0, 1]$ son periódicos, estos son los puntos con expansión binaria repetida, como $x = \frac{1}{5}$. Los puntos eventualmente periódicos, son aquellos con expansión binaria eventualmente periódica, como $x = \frac{1}{4} = .0\overline{10}$ ó $x = \frac{1}{10} = .\overline{00011}$.

La única forma de tener una expansión que se repita asintóticamente ocurre cuando la expansión es eventualmente repetitiva. Concluimos que si la expansión

binaria de un número $x \in [0, 1]$ no es eventualmente repetida, entonces su órbita será caótica. Estos puntos son precisamente los irracionales. Es decir, existe una infinidad no numerable de puntos cuyas órbitas son caóticas.

3.2 Fractales.

Es común que uno de los primeros pasos que se dan cuando se está analizando un sistema dinámico es determinar aquellos conjuntos de condiciones iniciales que exhiben un comportamiento similar. Si el sistema no es caótico, esta descomposición en regiones del conjunto de condiciones iniciales resulta ser muy directa, y las fronteras entre las regiones resultantes son conjuntos “simples” de puntos, en el caso de sistemas de dimensión 1 y curvas “simples” en dimensiones mayores. Pero para sistemas dinámicos caóticos los conjuntos o curvas que separan estas regiones son objetos altamente irregulares llamados *fractales*. El término “fractal” fue introducido en la década de 1960 por B. Mandelbrot, un matemático de IBM.

En nuestra discusión anterior ya hemos encontrado un fractal. Recordemos que el conjunto Λ apareció en el proceso de dar respuesta a la pregunta que nos hicimos en la Sección 2.1, acerca de cuáles puntos permanecen en $[0, 1]$ bajo iteraciones de h_r cuando el parámetro r es tal que h_r es caótica. En este sentido, Λ es “la frontera” entre las condiciones iniciales cuyas órbitas permanecen en $[0, 1]$ y las que se salen de $[0, 1]$. Es decir, si definimos el conjunto

$$\Psi_r = \{x \in [0, 1] : h_r^n(x) \text{ se sale de } [0, 1] \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}\} \quad (3.3)$$

entonces $\Lambda = \partial\Psi_r$. En este sentido Λ es un fractal.

No conocemos una definición universalmente aceptada de fractal, pero todas las descripciones que se hacen de los mismos incluyen por lo menos alguna de las siguientes propiedades: (a) tienen una estructura (o forma) geométrica complicada y

(b) una “medida (o dimensión) fractal”¹ (véase la Sección siguiente). Estas dos propiedades se pueden ilustrar rápidamente con el conjunto de Cantor. Por simplicidad, consideraremos el conjunto de Cantor “del tercio medio”, es decir, el que se obtiene removiendo del intervalo inicial $\Lambda_1 = [0, 1]$ el subintervalo abierto (el “tercio medio”) $(1/3, 2/3)$. A cada uno de los dos intervalos cerrados que componen el conjunto Λ_2 se les remueve el tercio medio para obtener Λ_3 . Continuando de esta manera obtendremos conjuntos Λ_n , que consisten de 2^n subintervalos cerrados ajenos, cada uno de igual longitud $(1/3)^n$; de manera que la suma de las longitudes de todos los subintervalos de Λ_n es $(2/3)^n$. El conjunto de Cantor es (abusando un poco de la notación) $\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n$. El Conjunto de Cantor es un conjunto de medida cero, totalmente desconexo (es decir, no contiene subintervalo alguno) y tiene la cardinalidad del intervalo $[0, 1]$. De estas propiedades se ve que Λ es “muy pequeño” para ser de dimensión 1 (pues es de medida cero) pero es “muy grande” para ser de dimensión 0 (pues tiene la cardinalidad de $[0, 1]$). Estas observaciones permiten esperar que Λ tenga dimensión fractal.

3.3 Medidas de Hausdorff.

La medida de Hausdorff surgió a partir del problema de que la medida de Lebesgue no distingue entre conjuntos de igual medida (de Lebesgue). Por ejemplo, la medida de Lebesgue asigna a los racionales en $[0, 1]$ la misma medida que al conjunto de Cantor: cero en ambos casos. Sin embargo la cardinalidad (o “el tamaño”) de estos conjuntos difiere notablemente. Los racionales tienen la cardinalidad de los naturales (es decir, de un conjunto numerable; o si se quiere ser más drástico, de un conjunto de un sólo punto!) pero el Conjunto de Cantor tiene la cardinalidad del continuo (es decir, de toda la recta real!). De manera que claramente se ve la necesidad de diseñar una

¹Del latín *fractum*: fraccional, quebrado

medida que diferencie entre conjuntos que tienen la misma medida de Lebesgue. Una medida adecuada para estos propósitos es la Medida de Hausdorff.

Iniciaremos dando una motivación a la definición de una medida de Hausdorff. Veamos que el segmento de línea $[0, 1]$ tiene medida de Lebesgue cero en el plano. Cubramos el segmento $[0, 1]$ con discos cerrados B_j de radio $1/N$, centrados en los puntos $j/N, j = 0, \dots, N$. Hay $N + 1$ tales discos, cada uno con área π/N^2 . El área total de $N + 1$ discos es entonces $(N + 1) \cdot \pi/N^2$, la cual tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$. De acuerdo con la definición de la medida de Lebesgue, la medida en \mathbb{R}^2 de $[0, 1]$ es entonces cero.

Es sencillo entender porqué la medida en \mathbb{R}^2 se convierte en cero. El segmento de línea $[0, 1]$ es de dimensión uno. Este puede ser cubierto por un número de discos ($N + 1$ de ellos por el argumento anterior). A medida que el radio de los discos disminuye, el número de discos necesarios para cubrir $[0, 1]$ tiende a infinito mas lentamente que la rapidez con que el área de cada disco (π/N^2) tiende a cero. Entonces

$$\text{Número de discos} \times \text{Área por disco} \sim \text{Área total} \rightarrow 0.$$

Si, con el objetivo de decidir si la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 del cuadrado unitario es cero, aplicamos el procedimiento anterior al cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, usamos discos centrados en los puntos $(i/N, j/N)$, necesitaremos, al menos, $(N + 1)^2$ de ellos y, entonces, el área total estará dada (aproximadamente) por $(N + 1)^2 \cdot \pi/N^2$, la cual no tiende a cero a medida que el radio de los discos tiende a cero. Así que la medida de Lebesgue del cuadrado unitario no es cero.

La medida de Hausdorff, comunmente hablando, hace lo siguiente. Esta reconoce que el número de discos que cubren a $[0, 1]$ no esta en balance con el área del disco típico, y toma varias potencias α del área, hasta que encuentra un α para el cual

$\sum(\text{area del disco})^\alpha$ se hace finita. Por ejemplo:

$$\sum_{j=0}^N (\pi/N^2)^1 \rightarrow 0,$$

$$\sum_{j=0}^N (\pi/N^2)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \infty,$$

$$\sum_{j=0}^N (\pi/N^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{un límite finito.}$$

Este proceso como podemos ver, identifica la dimensión del conjunto en cuestión, y calcula el tamaño o medida del conjunto en la dimensión correcta.

La definición precisa de medida de Hausdorff funciona mejor con el radio de los discos que con su area. Elevando el radio a varias potencias, se captura el cambio de dimensión. En dimensión 1, la longitud es proporcional al radio a la potencia 1. En dimensión 2, el área es proporcional al radio a la 2 potencia. Esta idea se extiende para potencias no enteras. Así, por analogía, en dimensión 2/3, "el volumen" debe ser proporcional al radio a la potencia 2/3. Ahora ya estamos preparados para dar la definición de una medida de Hausdorff.

Definición 3.3.1 Sea $\alpha > 0$ dado, y sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Una ε -cubierta de A es un conjunto finito o numerable de bolas de radio menor que ε , las unión de las cuáles contiene a A . Sean r_1, r_2, \dots los radios de estas. La medida de Hausdorff de A en dimensión α está definida por :

$$H_\alpha(A) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_n r_n^\alpha$$

donde el inf se toma sobre todas las ε - cubiertas de A .

La definición anterior realmente de hecho define una *medida exterior* de Hausdorff²

²Una demostración de este hecho aparece en :Harrison, Jenny. "An Introduction to Fractals" Chaos and Fractals: The Mathematics Behind the Computer Graphics. Robert L. Devaney & Linda Keen, eds. Providence, RI: American Mathematical Society, 1988. En esta misma referencia se hace una presentación de doce definiciones de dimensión, incluida, por supuesto, la dimensión de Hausdorff.

pues una medida se define sobre una σ -álgebra de conjuntos medibles. La expresión H_α no asigna medidas en una manera consistente a conjuntos arbitrarios. Es posible demostrar que los borelianos son conjuntos Haudorff medibles.

La definición de una medida de Hausdorff se entiende mejor si la descomponemos en partes. Primero, sea $\theta(\varepsilon)$ la colección de todas las cubiertas de A por bolas B_n , $n \geq 1$ con radio $r_n \leq \varepsilon$. Para $l \in \theta(\varepsilon)$ calculamos

$$H_\alpha(A, \varepsilon, l) = \sum_{j=0}^{\infty} r_n^\alpha.$$

Ahora sea

$$H_\alpha(A, \varepsilon) = \inf_{l \in \theta(\varepsilon)} H_\alpha(A, \varepsilon, l).$$

La función $H_\alpha(A, \varepsilon)$ es creciente si $\varepsilon \rightarrow 0$ decrecientemente, cuando α se mantiene fijo. Para visualizar mejor esto veamos el siguiente ejemplo: trataremos de calcular la medida de Haudorff en dimensión α del segmento de línea.

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

En el ejemplo con el que empezamos A fue cubierto por $N + 1$ bolas de radio $1/N$; llamemos a esta cubierta l_N . Evidentemente

$$H_\alpha(A, 1/N, l_N) = \sum_{j=0}^N (1/N)^\alpha = (N + 1)/(N^\alpha).$$

El infimo sobre todas las cubiertas (de radio $\leq 1/N$) solo puede ser mas pequeño, de modo que

$$H_\alpha(A, 1/N) \leq (N + 1)/(N^\alpha).$$

Ahora si $N \rightarrow \infty$ (lo mismo que $\varepsilon \rightarrow 0$ decrecientemente)

$$H_\alpha(A) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N + 1}{N^\alpha}$$

con esto podemos concluir que $H_\alpha(A) = 0$ para $\alpha > 1$, que $H_\alpha(A) \leq 1$ si $\alpha = 1$ y que $H_\alpha(A) \leq \infty$ cuando $\alpha < 1$. Intuitivamente podemos asegurar que el conjunto A

tiene dimensión 1. Esto sostiene la razón de que A mismo se ve delgado y pequeño en cualquier dimensión mayor que 1 y por supuesto, su medida de Hausdorff es cero en dimensión $\alpha > 1$, justo como su medida de Lebesgue es 0 en dimensión 2. Esto revela que la medida de Hausdorff de A en dimensión $\alpha < 1$ es ∞ .

Podemos ahora considerar el problema de calcular la dimensión de Hausdorff del Conjunto de Cantor.

Como vimos al inicio de la Sección 3.2 el conjunto de Cantor Λ puede ser cubierto por 2^n bolas disjuntas cerradas, cada una con un radio de $(1/2) \cdot 3^{-n}$. Llamaremos a esta cubierta l_n y sea ε_n el valor común de los radios. Entonces

$$H_\alpha(\Lambda, \varepsilon_n) \leq H_\alpha(\Lambda, \varepsilon_n, l_n) = \sum_{k=1}^{2^n} \left(\frac{1}{2 \cdot 3^n} \right)^\alpha = \frac{2^n}{2^{\alpha n} \cdot 3^{\alpha n}}$$

Ahora hagamos que $n \rightarrow \infty$, lo cual corresponde a que $\varepsilon_n \rightarrow 0$. La expresión a la derecha puede ser escrita como $\frac{1}{2^\alpha} \left(\frac{2}{3} \right)^{\alpha n}$ y el límite es 0 si $2^{\frac{1}{\alpha}} < 3$. Para tal α , la medida de Hausdorff es $H_\alpha(\Lambda) = 0$. Cuando $2^{\frac{1}{\alpha}} > 3$ el límite es ∞ . Finalmente, el límite es finito cuando $2^{\frac{1}{\alpha}} = 3$, es decir, cuando $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309\dots$. Se concluye entonces que el conjunto de Cantor tiene dimensión fractal $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. Y el valor de $H_{0.6309}(\Lambda)$ es 1.

En general se puede afirmar que si $A \subset \mathbb{R}^n$, si $\alpha > n$ A deberá “verse pequeño”, porque está en un espacio de dimensión menor que α . Mas precisamente:

$$H_\alpha(A) = 0 \quad \text{para toda} \quad \alpha > n$$

Nada es posible decir de $H_\alpha(A)$ cuando $\alpha \leq n$ ya que, en este caso, A puede ser cualquier cosa desde un simple punto hasta todo \mathbb{R}^n .

Estos ejemplos nos sugieren que $H_\alpha(A)$ es entonces cero o infinito, excepto para algún valor en particular de α . Y como probaremos a continuación esto es lo que realmente sucede.

Proposición 3.3.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, existe una única $\alpha_0 \in [0, 1]$ tal que*

$$H_\alpha = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \alpha_0 \\ 0 & \text{si } \alpha > \alpha_0 \end{cases}$$

α_0 es llamada la dimensión Haudorff de A .

Demostración: Si $b > 0$ entonces

$$H_\alpha(A, \varepsilon) \geq \varepsilon^{\alpha-b} H_b(A, \varepsilon).$$

Aceptemos esto por un momento, y analizemos las consecuencias. Supongamos primero que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_b(A, \varepsilon) > 0$. Entonces cuando el exponente $\alpha - b$ es negativo el lado derecho tiende a ∞ . Tenemos que si $H_b(A) > 0$ entonces $H_\alpha(A) = \infty$ para toda $\alpha < b$, es obvio que si $H_b(A) = \infty$ entonces $H_\alpha(A) = \infty$. Supongamos que $H_\alpha(A) < \infty$, entonces la relación que tenemos muestra que $H_b(A) = 0$ si $b > \alpha$. Ahora podemos definir α_0 . Sea A_∞ el conjunto de α para las cuales $H_\alpha(A) = \infty$, sea A_0 el conjunto de α para las cuales $H_\alpha(A) = 0$. Hemos mostrado que $A_\infty < A_0$ en el sentido que todo elemento en el primer conjunto es menor que cualquier elemento del segundo. El número especial α_0 es la "cota" entre estos conjuntos, es decir $\alpha_0 = \inf A_0$ ó $\alpha_0 = \sup A_\infty$. El siguiente paso es probar la relación con la que iniciamos esta demostración.

Sea $l \in \theta(\varepsilon)$ tenemos definido $H_\alpha(A, \varepsilon, l) = \sum_{j=1}^{\infty} r_n^\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} r_n^b$ como $r_n^{\alpha-b} \leq \varepsilon$ y $\alpha - b < 0$ el estimado $r_n^{\alpha-b} \geq \varepsilon^{\alpha-b}$ es válido cuando:

$$H_\alpha(A, \varepsilon, l) \geq \varepsilon^{\alpha-b} \sum_{j=1}^{\infty} r_n^b = \varepsilon^{\alpha-b} H_\alpha(A, \varepsilon, l).$$

Ahora tomemos el ínfimo sobre $l \in \theta(\varepsilon)$, y con esto se concluye la demostración de la proposición. \square

3.3.1 Otros Ejemplos de Fractales

El conjunto de Cantor puede verse como un fractal obtenido mediante una construcción recursiva que consiste en remover "tercios medios" a partir del intervalo

$[0, 1]$.

Usando este mismo enfoque es posible construir otros fractales que son muy conocidos. En esta subsección consideraremos dos de tales fractales, el Triángulo de Sierpinski y la Curva de Koch, y calcularemos sus correspondientes dimensiones fractales.

(a) El triángulo de Sierpinski.

Comenzemos con el triángulo equilátero T_0 , de lado unitario. Eliminemos de este el triángulo medio, por esto nos referimos al triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de T_0 . La nueva figura T_1 es la unión de tres subtriángulos. Repitamos este proceso indefinidamente, removiendo los triángulos medios de los tres subtriángulos de T_1 , y así sucesivamente (este proceso está mostrado en la Figura 3.1). Los puntos que permanecen en la figura forman el Triángulo de Sierpinski, al que denotaremos con S .

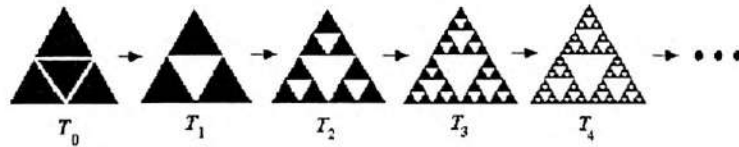


Figura 3.1: Construcción gráfica del triángulo de Sierpinski.

Se necesitan 3^n círculos de radio $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2^n}$ para cubrir al conjunto $T_n, n = 0, 1, 2, \dots$. De manera que

$$H_\alpha(S, \varepsilon_n) \leq H_\alpha(S, \varepsilon_n, l_n) = \sum_{k=1}^{3^n} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2^n} \right)^\alpha = 3^n \frac{1}{2^{n\alpha}} \frac{1}{\sqrt{3}^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}^\alpha} \left(\frac{3}{2^\alpha} \right)^n.$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3}^\alpha} \left(\frac{3}{2^\alpha} \right)^n = \begin{cases} 0, & \text{si } 3/2^\alpha < 1 \\ 1/\sqrt{3}^\alpha, & \text{si } 3/2^\alpha = 1, \\ \infty, & \text{si } 3/2^\alpha > 1 \end{cases}$$

y la dimensión fractal es aquel valor de α para el que el límite anterior toma un valor

positivo finito, concluimos que

$$\alpha = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.5849$$

(b) La Curva de Koch.

El procedimiento para obtener la Curva de Koch es el siguiente. Sea K_0 un segmento recto, de longitud 1, digamos. Dividamos K_0 en tres segmentos iguales y reemplazemos el segmento medio con dos lados de un triángulo equilátero de la misma longitud del segmento removido. Llamemos K_1 al objeto obtenido. Repetimos el procedimiento tomando cada uno de los cuatro segmentos de K_1 , dividiéndolo en tres partes iguales y reemplazando cada uno de los segmentos medios con dos lados de un triángulo equilátero. Así obtendremos K_2 . La *Curva de Koch*, K , es el objeto límite que se obtiene al aplicar la construcción anterior una infinidad de veces. Como,

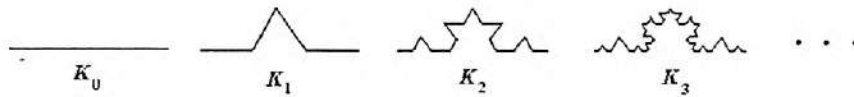


Figura 3.2: Construcción gráfica de la Curva de Koch

para cada n , se necesitan 4^n discos de radio $\varepsilon_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ para cubrir al conjunto K_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. De manera que

$$H_\alpha(K, \varepsilon_n) \leq H_\alpha(K, \varepsilon_n, l_n) = \sum_{k=1}^{4^n} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^\alpha = \frac{1}{2^\alpha} \left(\frac{4}{3^\alpha}\right)^n.$$

Para que $\lim_{n \rightarrow \infty} H_\alpha(K, \varepsilon_n, l_n)$ sea finito y no nulo es necesario tomar la dimensión fractal α como

$$\alpha = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26185$$

3.3.2 Conjuntos De Julia.

Consideramos finalmente en esta subsección un tipo muy conocido de fractales, llamados el *conjunto de Mandelbrot* y los *conjuntos de Julia* que surgen en el estudio de

la dinámica de funciones complejas de variable compleja.

Sea $\zeta_c(z) = z^2 + c$, donde z es una variable compleja y $c = a + ib$ es una constante también compleja.

Comenzaremos considerando la dinámica de este mapeo complejo cuando el parámetro $c = 0$. Entonces el mapeo $\zeta_0(z) = z^2$ tiene un punto fijo atractor en $z = 0$ cuyo cuenca de atracción es $\{z : |z| < 1\}$, el interior del disco unitario. Un punto del círculo unitario

$$S = \{z : |z| = 1\}$$

mapea a otro punto en el círculo unitario (el ángulo es duplicado). La órbita de cualquier punto en $\{z : |z| > 1\}$, el exterior del disco unitario, diverge a infinito. El círculo S forma la cota entre la cuenca de atracción de cero y la de infinito. Notemos que los puntos en el conjunto invariante S no están en ninguna de las cuencas.

Para distintos valores de la constante c , $z = 0$ ya no es más un punto fijo. Como queremos considerar a todos los puntos fijos, la ecuación $z^2 + c = z$ debe tener raíces. Por lo tanto ζ_c tiene puntos fijos. De hecho, existe una forma sencilla de encontrar a todos los puntos fijos atractores y a los periódicos de ζ_c , esto es por un teorema de Fatou: Cualquier ciclo atractor de un mapeo polinomial P atrae por lo menos a un punto crítico de P . De hecho, Fatou probó este resultado para todas las funciones racionales. Como nuestra función ζ_c tiene solamente un punto crítico ($z = 0$), debe tener, a lo más, una órbita periódica atractora.

Algunas veces ζ_c no tiene atractores. Consideremos, por ejemplo, $\zeta_{-i}(z) = z^2 - i$. Entonces $\zeta^2(0) = -1 - i$, el cual es un punto repelente de período dos. Así que no necesitamos buscar un atractor.

Reconociendo el papel tan importante que juega la órbita de cero, en la dinámica de ζ_c , definiremos a el *conjunto de Mandelbrot* como:

$$M = \{c \in \mathbb{C} \text{ tales que } 0 \notin W^s(\infty) \text{ para } \zeta_c(z)\}$$

donde $W^s(\infty)$ es el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ que divergen a ∞ bajo iteraciones de ζ_c . En otras palabras, $W^s(\infty)$ es la cuenca de atracción de infinito. Es decir, se escoge un valor de $c \in \mathbb{C}$ y se empieza la iteración de 0. Si la órbita no diverge, se pone un punto en las coordenadas correspondientes a c . Si se hace ésto de manera sistemática para todos los puntos $c \in \mathbb{C}$, la figura que se obtiene es el Conjunto de Mandelbrot. Observemos que, por ejemplo, $c = 0$ y $c = -i$ están en el conjunto de Mandelbrot, mientras que $c = 1$ no está. La Figura 3.3 muestra una imagen ³ de la frontera de este conjunto.

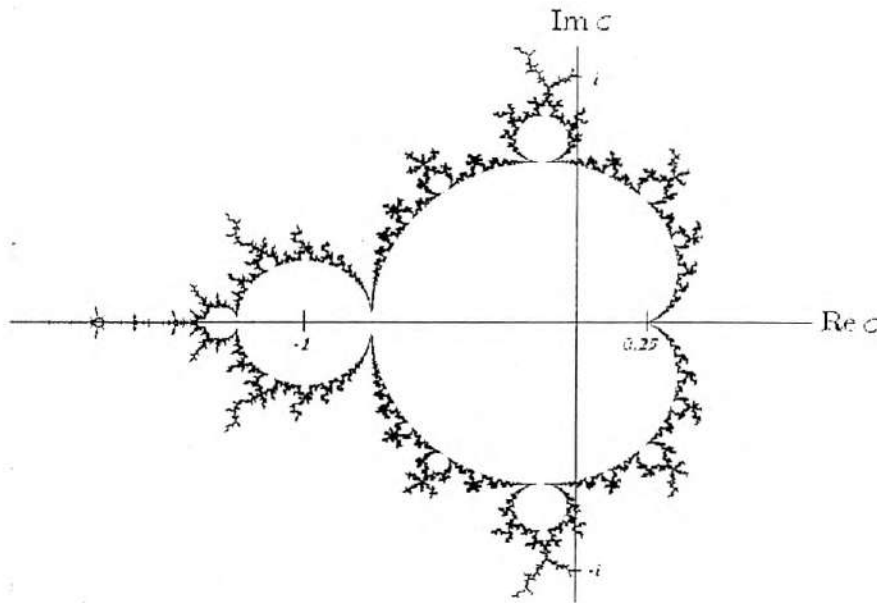


Figura 3.3: El Conjunto de Mandelbrot

Para cada c en el conjunto de Mandelbrot, existen órbitas de ζ_c que permanecen acotadas, y otras que no, dependiendo de la condición inicial z_0 que se escoja. De aquí que, la cota de la cuenca de atracción de infinito es no vacía. Esta cota es conocida como el *conjunto de Julia* de ζ_c , en honor a el matemático Francés G. Julia. Técnicamente, el conjunto de Julia es definido como el conjunto de puntos fijos

³copiada de <http://homestead.juno.com/johnrhg/files/outline.gif>

repelentes y puntos periódicos junto con el punto límite de este conjunto. En el caso de los polinomios, las dos definiciones coinciden. A continuación presentamos algunas gráficas de los conjuntos de Julia, para distintos valores del parámetro c . Para mayor información sobre los conjuntos de Julia y Mandelbrot, puede consultar (Devaney, 1996), (Devaney & Keen, 1998), o (Peitgen & Richter, 1986).

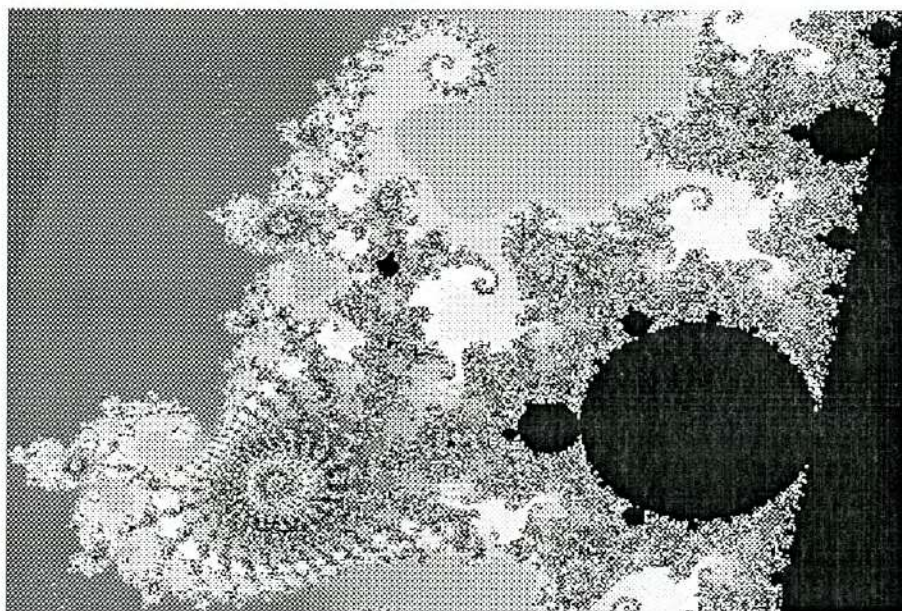


Figura 3.4: El valle de los caballitos de mar. Un acercamiento (Zoom) a una de las pequeñas bulbas en el conjunto de Mandelbrot, así como en este caso se pueden encontrar distintos fractales en acercamientos a otras regiones. Los cambios en los colores nos indica la rapidez con la que los puntos, en esa región, convergen. El color negro nos indica la mayor rapidez y el blanco la ausencia de orbitas acotadas, es decir, los puntos en blanco $\in W^s(\infty)$.

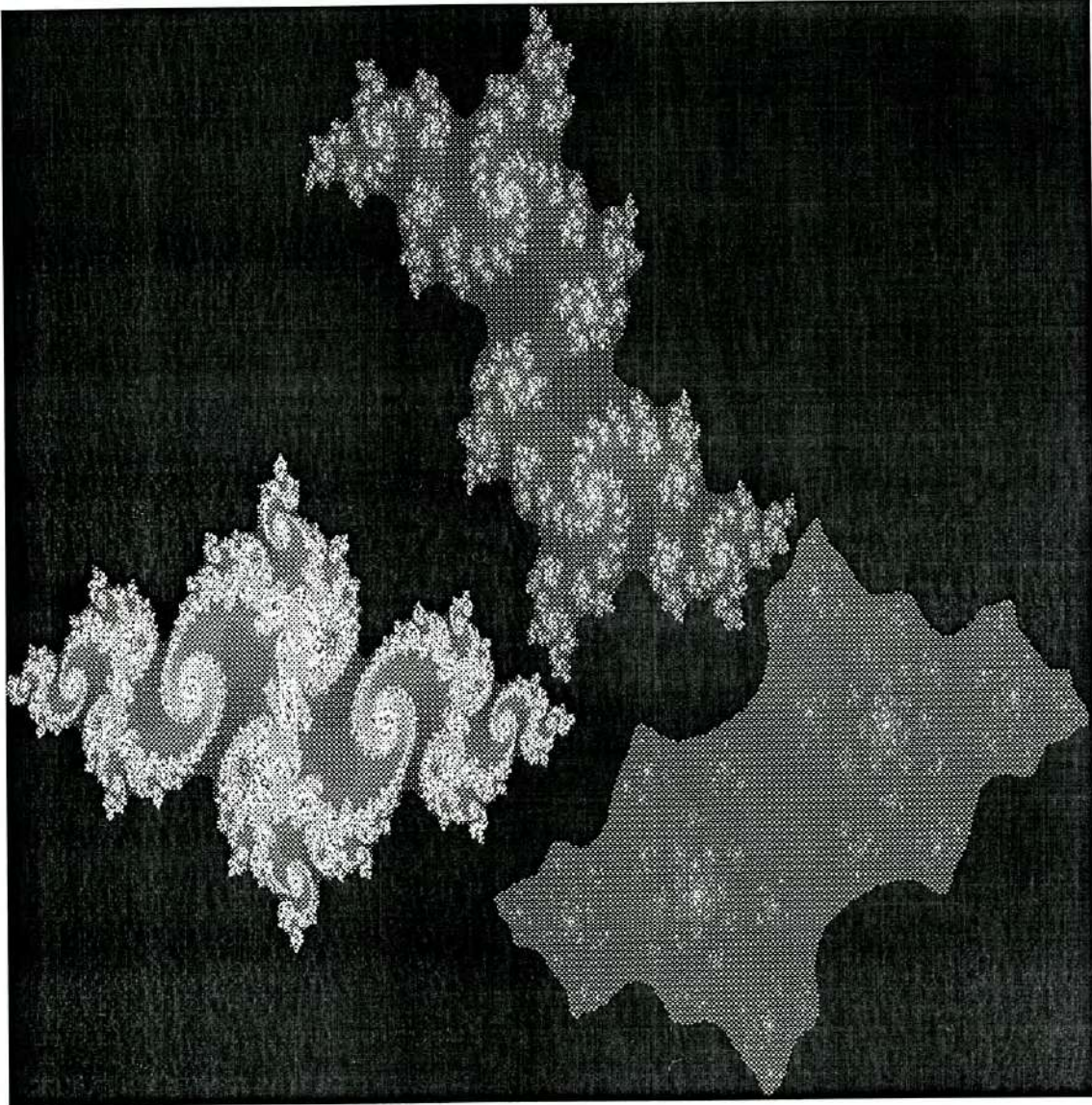


Figura 3.5: Algunos conjuntos de Julia para distintos valores del parámetro c . Al igual que en el conjunto de Mandelbrot los colores indican la velocidad con la que estas órbitas convergen. Para cada punto en el conjunto de Mandelbrot existe un conjunto de Julia asociado con este. Muchos de ellos ya categorizados y con formas muy interesantes.

Capítulo 4

Sistemas Dinámicos En Dimensión Mayor.

En los capítulos anteriores hemos revisado los principales conceptos y propiedades de la dinámica de mapeos de dimensión uno.

En este Capítulo expondremos los primeros elementos de sistemas dinámicos en dimensión mayor que uno. La discusión se centrará principalmente en los mapeos de dimensión 2. En la sección 4.1 hacemos una rápida revisión de mapeos lineales. En particular estudiamos la dinámica de mapeos lineales definidos por matrices en forma de bloque de Jordan, dado que estos son representativos de todas las posibilidades que se pueden presentar. En la Sección 4.2 estudiamos los elementos de mapeos no lineales y terminamos presentando el concepto de caos para sistemas de dimensión mayor que uno, en la Sección 4.3

4.1 Mapeos Lineales.

Definición 4.1.1 *Un mapeo $A(\vec{v})$ de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 es lineal si para cada $a, b \in \mathbb{R}$, y $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, sucede que, $A(a\vec{v} + b\vec{w}) = aA(\vec{v}) + bA(\vec{w})$. Equivalentemente, la acción de un mapeo lineal A sobre un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $A(\vec{v})$, puede ser representado como la multiplicación $A\vec{v}$ de A por \vec{v} .*

El único punto fijo de un mapeo lineal es el origen, exceptuando el caso del mapeo identidad, para el cuál todos los puntos son puntos fijos. Si la órbita de cada punto en una vecindad del punto $(0,0)$ se acerca al punto fijo bajo las iteradas del mapeo, consideraremos al punto fijo como *atractor*. Si la órbita de puntos cercanos al origen se alejan del origen, decimos que el origen es *repelente*.

La dinámica de los mapeos lineales está determinada por las propiedades espectrales de la matriz A .

Recordemos que λ es un *eigenvalor* de la matriz A si existe un vector \vec{v} , distinto de cero, tal que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. El vector \vec{v} es llamado *eigenvector* de A correspondiente a λ . Notemos que si \vec{v}_0 es un eigenvector con eigenvalor λ , la órbita de \vec{v}_0 es

$$\vec{v}_1 = A\vec{v}_0 = \lambda\vec{v}_0, \vec{v}_2 = A\lambda\vec{v}_0 = \lambda A\vec{v}_0 = \lambda^2\vec{v}_0 = \dots$$

y, en general

$$\vec{v}_n = \lambda^n \vec{v}_0.$$

Es decir el mapeo se comporta como el mapeo uni-dimensional $x_{n+1} = \lambda x_n$. En este sentido, a los subespacios lineales determinados por los eigenectores de A se les llama *subespacios invariantes*.

A continuación presentamos tres importantes ejemplos de mapeos lineales en \mathbb{R}^2 .

Caso 1.- [Eigenvalores reales distintos]. Sea $\vec{v} = (x, y)$ un vector en \mathbb{R}^2 y sea $L(\vec{v})$ el mapeo definido por $L(x, y) = (ax, by)$. El mapeo L puede representarse matricialmente en la forma

$$L(\vec{v}) = A\vec{v} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Es práctica común identificar el mapeo L con la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

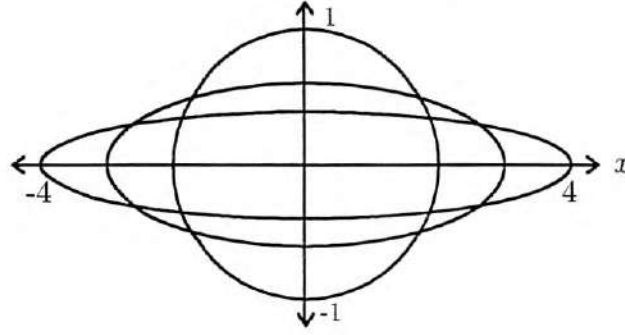


Figura 4.1: El disco unitario y dos de sus imágenes bajo el mapeo lineal.

Las potencias enteras de A están dadas por

$$A^n = a^{n-1} \begin{bmatrix} a & n \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Por lo tanto, el efecto de la matriz A^n sobre el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es :

$$A^n \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a^{n-1} \begin{bmatrix} ax + ny \\ ay \end{bmatrix}$$

Vemos entonces que el punto fijo $(0,0)$ es un atractor si $|a| < 1$ y es repelente si $|a| > 1$.

Caso 3.-[Eigenvalores complejos]. Por último, si los eigenvalores de una matriz cuadrada de tamaño 2 son complejos, entonces la matriz es equivalente

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Los eigenvalores de A son $a - ib$ y $a + ib$, donde $i = \sqrt{-1}$. Los eigenvectores correspondientes son $(1, -i)$ y $(1, i)$, respectivamente. El efecto dinámico de A sobre un vector \vec{v} puede ser interpretado en términos sencillos. Si multiplicamos y dividimos por $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ obtenemos

$$A = r \begin{bmatrix} \frac{a}{r} & \frac{-b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{bmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

El ángulo θ puede ser identificado como $\theta = \arctan(\frac{b}{a})$. De aquí se ve que la multiplicación por esta matriz rota puntos con respecto al origen en un ángulo θ , y multiplica la norma (de \vec{v}) por $\sqrt{a^2 + b^2}$. Así que el efecto de multiplicar por A es una combinación de una rotación (en un ángulo θ) y dilatación/contracción (por el factor $\sqrt{a^2 + b^2}$).

Así se sigue que la estabilidad resultante es similar a la de los dos casos anteriores: Si la magnitud de los eigenvalores es menor que 1, el origen es un atractor; Si es mayor que 1 es repelente.

Los tres ejemplos de matrices en \mathbb{R}^2 considerados anteriormente son, en esencia, todos los posibles casos que se pueden considerar pues son los tres posibles bloques de Jordan en \mathbb{R}^2 . Cualquiera otra matriz en \mathbb{R}^2 puede, dependiendo de sus propiedades espectrales, transformarse (mediante una transformación de similaridad) en una y sólo una de las matrices consideradas.

Estas conclusiones pueden fácilmente establecerse en espacios de dimensión mayor que dos. De manera que el siguiente resultado (cuya demostración omitimos) es verdadero:

Teorema 4.1.1 *Sea $L(\vec{v})$ un mapeo lineal en \mathbb{R}^m , el cuál es representado por la matriz A . Entonces:*

- 1.- *El origen es un atractor si todos los eigenvalores de A son menores que uno en valor absoluto.*
- 2.- *El origen es repelente si todos los eigenvalores de A son mayores que uno en valor absoluto.*

Como vimos en el Caso I, un mapeo puede ser tal que el origen es atractor en una dirección y repelente en otra. En estos casos el origen se dice ser un punto *silla*.

Definición 4.1.2 *Sea A un mapeo lineal en \mathbb{R}^m . Diremos que A es hiperbólico si A no tiene eigenvalores con valor absoluto 1. Si un mapeo hiperbolico A tiene por lo*

menos un eigenvalor de valor absoluto mayor que 1 y al menos un eigenvalor de valor absoluto menor que 1, entonces el origen es llamado un punto silla.

4.2 Mapeos No Lineales y la Matriz Jacobiana.

Los comentarios hechos en la sección anterior son suficientes para nuestros propósitos de ilustrar la dinámica de mapeos lineales. Ahora deseamos hacer una breve incursión en el terreno de los mapeos no-lineales y en particular en el problema de determinar la estabilidad de los puntos fijos. Esencialmente las cosas son similares a lo que ocurre en sistemas de dimensión 1. En particular, debemos considerar la derivada para estudiar el comportamiento dinámico.

Definición 4.2.1 Sea f un mapeo en \mathbb{R}^m . Es decir, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ donde $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$. Sea $p \in \mathbb{R}^m$. La Matriz Jacobiana de f en p , denotada por $D_f(p)$ es la matriz de derivadas parciales, evaluadas en p :

$$D_f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Teorema 4.2.1 Sea f un mapeo en \mathbb{R}^m , y sea p un punto fijo de f ; es decir, $f(p) = p$.

1.-Si la magnitud de cada eigenvalor de $D_f(p)$ es menor que 1, entonces p es atractor.

2.-Si la magnitud de cada eigenvalor de $D_f(p)$ es mayor que 1, entonces p es repelente.

Justo como en los mapeos lineales de \mathbb{R}^m para $m > 1$ podemos tener algunas condiciones iniciales para las que las órbitas divergen de cero y en otras convergen a cero. Los puntos fijos de mapeos no-lineales pueden también atraer órbitas en algunas direcciones y repelerlas en otras.

Definición 4.2.2 Sea f un mapeo en \mathbb{R}^m , $m \geq 1$. Supongamos que $f(p) = p$. Entonces el punto fijo p es llamado hiperbolico si ninguno de los eigenvalores de $D_f(p)$ tiene magnitud 1. Si p es hiperbolico y al menos un eigenvalor de $D_f(p)$ tiene magnitud mayor que uno y al menos un eigenvalor tiene magnitud menor que uno y entonces p es llamado un punto silla. (Para puntos periodicos de período k , reemplazaremos f por f^k).

Hasta ahora, hemos visto que la clasificación para la dinámica de los mapeos no-lineales, es muy parecida a la de los lineales, sólo que en los primeros, se utiliza la matriz Jacobiana ó matriz de derivadas parciales, para la caracterización de los puntos a tratar. Otra diferencia está en que en el caso lineal la estabilidad de los puntos fijos es *global*, mientras que en el caso no lineal ésta es sólo *local*.

4.3 Caos En Los Mapeos Dos Dimensionales.

Los Conceptos de “número” y “exponente de Lyapunov”, se pueden extender a los mapeos en \mathbb{R}^m para $m \geq 1$. En el caso uni-dimensional, la idea era medir las tazas de separación de las órbitas de condiciones iniciales cercanas, a lo largo de una linea real. En dimensiones mayores, el comportamiento local de la dinámica puede variar con la dirección, es decir puntos cercanos pueden acercarse en una dirección, y alejarse en otra.

En esta sección trataremos de explicar la definición de los números Lyapunov y de los exponentes de Lyapunov en dimensión mayor, con el fin de obtener una definición de caos a partir de estos.

4.3.1 Exponentes De Lyapunov En \mathbb{R}^m .

Para un mapeo en \mathbb{R}^m , cada órbita tiene m números de Lyapunov, los cuales miden las tazas de separación de los puntos en la órbita a lo largo de m direcciones ortogonales.

Estas direcciones están determinadas por la dinámica del mapeo. Lo primero que haremos será fijarnos en la dirección en la cuál, la separación entre puntos cercanos es mayor (ó en la cual se contrae menos, esto si el mapeo se contrae en todas direcciones). Lo segundo será fijarnos en la mayor separación, de las direcciones escogidas como todas las perpendiculares a la primera. Lo tercero consiste en ver cual es la mas larga de todas las direcciones tomadas como perpendiculares a las primeras dos, y es todo. El factor de estiramiento en cada una de estas direcciones elegidas, son los números de Lyapunov de la órbita. La figura 4.2 nos ilustra este proceso pictorialmente. Consideremos una esfera de radio pequeño centrada en el primer punto \vec{v}_0 de la órbita. Si examinamos la imagen $f^n(S)$ de la esfera pequeña, bajo la iteración del mapeo, veremos algo aproximado a una forma elipsoidal, con ejes mayores a lo largo de las direcciones expansoras y ejes menores a lo largo de las direcciones contrayentes.

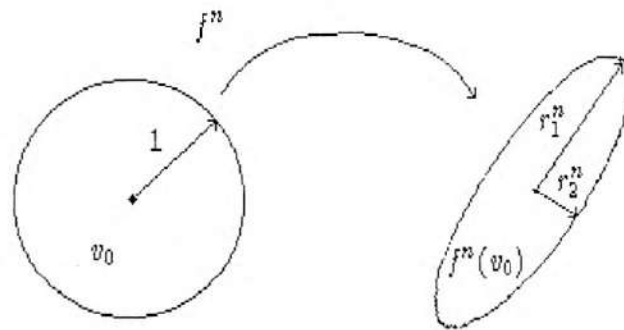


Figura 4.2: Evolucion inicial de un disco infinitesimal.

Después de n iteradas del mapeo f , la pequeña esfera habrá evolucionado en un largo y delgado objeto de forma elipsoidal. Los cambios en los ejes, por el efecto de las iteradas en la imagen "elipsoidal" son los números de Lyapunov. Al igual que en dimensión uno, el logaritmo natural de cada número de Lyapunov es el exponente de Lyapunov.

Para una definición formal, reemplazemos a la pequeña esfera sobre \vec{v}_0 y al mapeo f por la esfera unitaria U y la matriz de primeras derivadas $Df(\vec{v}_0)$, como estamos interesados en el comportamiento infinitesimal cerca de \vec{v}_0 .

Sea $J_n = Df^n(\vec{v}_0)$ que denota la matriz de primeras derivadas de la n -ésima iterada de f . Entonces $J_n U$ será una elipsoide con m ejes ortogonales. Esto porque para cualquier matriz A , la imagen AU es necesariamente una elipsoide. Los ejes serán mayores que uno en las direcciones expansoras y menores de uno en las contrayentes, como podemos ver en la figura uno. El crecimiento de las m tasas de expansión multiplicativa de los m ejes ortogonales son los números de Lyapunov.

Definición 4.3.1 Sea f un mapeo suave en \mathbb{R}^m , sea $J_n = Df^n(\vec{v}_0)$ el Jacobiano de la n -ésima iterada de f , evaluado en el punto \vec{v}_0 . Para $k = 1, 2, \dots, m$, sea γ_k^n la longitud del k -ésimo eje ortogonal más largo del elipsoide $J_n U$ para una órbita con punto inicial \vec{v}_0 . Entonces γ_k^n mide la contracción o expansión cerca de la órbita de \vec{v}_0 durante las primeras n iteraciones. El k -ésimo número de Lyapunov de \vec{v}_0 está definido como

$$L_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_k^n)^{1/n},$$

si el límite existe. El k -ésimo exponente de Lyapunov de \vec{v}_0 es $h_k = \ln L_k$.

Notemos que, de la definición, se cumple la propiedad de que $L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_m$ y $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_m$. Usando el concepto de exponente de Lyapunov, podemos extender la definición de órbita caótica a mapeos de dimensión mayor.

Definición 4.3.2 Sea f un mapeo de \mathbb{R}^m , $m \geq 1$, y sea $\{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots\}$ una órbita acotada de f . La órbita es caótica si:

1. No es asintóticamente periódica,
2. Ningun número de Lyapunov es exactamente uno, y
3. $L_1(\vec{v}_0) > 1$.

En terminos de exponentes de Lyapunov, la parte 3 de la Definición 4.3.2 es equivalente a decir $h_1(\vec{v}_0) > 0$.

Ejemplo 4.3.1 Consideremos el mapeo $B : A \rightarrow A$ donde A es el cuadrado unitario $A = [0, 1] \times [0, 1]$, definido por

$$B(x, y) = \begin{cases} (\frac{1}{3}x, 2y) & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ (\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, 2y - 1) & \text{si } \frac{1}{2} < y \leq 1 \end{cases}$$

El Jacobiano de B ,

$$DB(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es constante para cada punto $(x, y) \in A$ en el que esté definido

Consideremos un círculo γ de radio r pequeño, con centro en algún punto de A . Después de una iteración de B , γ es transformado es una elipse con ejes de longitud $\frac{1}{3}r$ en la dirección horizontal y $2r$ en la vertical. Así que después de n iteraciones los ejes serán $(\frac{1}{3})^n r$ y $2^n r$. Esto es válido siempre y cuando ninguna de las elipses que aparecen en las iteraciones dce γ cruza la línea $y = 1/2$. Concluimos que los números de Lyapunov de B son $1/3$ y 2 , o equivalentemente, los exponentes de Lyapunov son $-\ln 3$ y $\ln 2$ para cualquier órbita. Ya que $\ln 2 > 0$, cada órbita que no sea asintóticamente periódica será caótica.

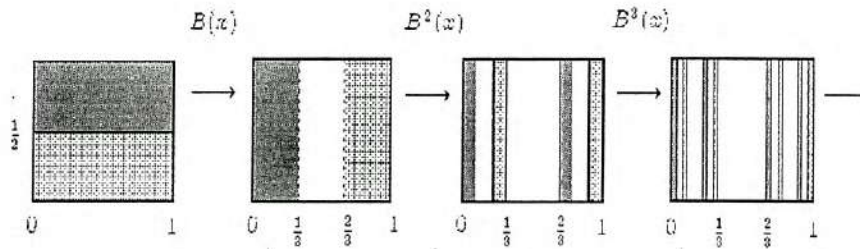


Figura 4.3: Iteradas del mapeo del panadero (“baker’s map”)

Observando la gráfica de algunas iteradas de B , como se muestra en la Figura 4.3, vemos que, dada la similitud con el conjunto de Cantor, y dada la relación que

existe entre éste y el mapeo corrimiento, podemos describir, para cada punto en A , un itinerario similar al del mapeo tienda. Entonces, podemos concluir que los puntos cuyas órbitas no son asintóticamente periódicas son aquellos que tienen un itinerario que no se repite eventualmente.



Capítulo 5

Aplicaciones.

En este último capítulo tratamos tres aplicaciones de la teoría desarrollada a lo largo del trabajo. Las tres aplicaciones corresponden al contexto de biología matemática, basadas en modelos ya establecidos y estudiados.

5.1 Aplicación 1

Si x_n denota la población (es decir, cantidad) de globulos rojos en el cuerpo de un ser humano en un tiempo n , entonces, un modelo para la evolución de x_n es

$$x_{n+1} = x_n - d_n + p_n \quad (5.1)$$

donde d_n y p_n representan respectivamente el número de globulos destruidos (por alguna infección, por ejemplo) y creados (por la administración de alguna vacuna, por ejemplo), respectivamente, durante un intervalo de tiempo $[n, n + 1]$. En general las funciones d_n y p_n dependen de x_n , y posiblemente de la población en un estado previo x_{n-k} . En este modelo, consideraremos el caso simple, en el cual d_n y p_n dependen solo de x_n . La forma de esta dependencia puede ser obviamente materia de debate, y hay distintas formas que podemos citar, y ninguna de ellas se puede elegir como la mejor. La forma que propondremos es la de A. Lasota [Lasota, 1977].

según la cuál

$$d_n = ax_n, p_n = b(x_n)^r e^{-sx_n} \quad (5.2)$$

donde $0 < a \leq 1$ y $b, r, s > 0$ son parámetros. Así que el modelo (5.1), toma la forma

$$x_{n+1} = (1 - a)x_n + b(x_n)^r e^{-sx_n}. \quad (5.3)$$

Si fijamos nuestro interés en los efectos de tasa de mortalidad a sobre la dinámica del modelo, entonces (5.3) puede escribirse en la forma $x_{n+1} = F_a(x_n)$ donde

$$F_a(x) = (1 - a)x + bx^r e^{-sx} \quad (5.4)$$

Notemos que $F_a(0) = 0$ para cualquier a . Entonces $x_s = 0$ siempre es un punto fijo. Esperamos que este sea un punto atractor ya que, desde un punto de vista clínico, un individuo no puede recuperarse cuando la población de globulos rojos cae por debajo de un cierto nivel crítico.

Como $DF_a(x) = 1 - a + bx^{r-1}e^{-sx}(r - sx)$ vemos que el origen es un atractor si el parámetro $r > 1$. En este caso $DF_a(0) = 1 - a < 1$. Evidencia experimental [Gearhart-Martelli,1990] sugiere la presencia de un punto máximo x_M , tal que, el valor máximo correspondiente $F_a(x_M)$ es mayor que x_M . Este hecho implica que, además de $x = 0$, la función $F_a(x)$ tiene otros dos puntos fijos positivos. En un punto máximo la derivada de F_a es cero; es decir,

$$bx_M^r e^{-sx_M} = x \frac{1 - a}{sx_M - r} \quad (5.5)$$

De (5.5) se ve que necesariamente ocurre que

$$r < sx_M. \quad (5.6)$$

Como

$$F_a(x_M) > x_M \quad (5.7)$$

entonces, por (5.5)

$$(1 - a)x_M + bx_M^r e^{-sx_M} = (1 - a)x_M + x_M \frac{1 - a}{sx_M - r} > x_M.$$

Multiplicando por x_M :

$$1 - a + \frac{1 - a}{sx_M - r} > 1,$$

o, lo que es lo mismo,

$$r < sx_M \leq r + \frac{1 - a}{a}. \quad (5.8)$$

En estos casos, lo mejor es usar datos obtenidos previamente (ver [10]) para determinar los valores de los parámetros b, r y s . Los valores sugeridos para algunos casos son, $r = 8, s = 16$ y $b = 1.1 \times 10^6$. Podemos mostrar que para cualquier valor de $a > 0$ el sistema dinámico gobernado por:

$$F_a(x) = (1 - a)x + 1.1 \times 10^6 x^8 e^{-16x} \quad (5.9)$$

tiene tres puntos fijos, $x_{S_1} = 0 < x_{S_2} < x_{S_3}$. Hemos observado previamente que 0 es siempre atractor. Mas precisamente, toda órbita $O(x)$ tal que $x < x_{S_2}$ converge a cero. El segundo punto fijo x_{S_2} es siempre repelente y además existe $a_0 \in (0, 1)$ tal que el tercer punto fijo es atractor para $a < a_0$ y repelente para $a > a_0$. Ahora determinemos a_0 .

En la figura 5.1 representamos la gráfica de la función F para dos distintos valores de a : 0.2 y 0.78. La derivada de F en x_{S_3} es negativa en ambos casos y observamos que en el caso $a = 0.2$ el valor absoluto de la derivada es menor que 1, y para $a = 0.78$ es mayor que 1. Entonces $a_0 \in (0.2, 0.78)$. La estabilidad se pierde para estos dos valores ya que la derivada de F en x_{S_3} es menor que -1. Ya que x_{S_3} satisface la ecuación

$$1.1 \times 10^6 (x_{S_3})^7 e^{-16x_{S_3}} = a \quad (5.10)$$

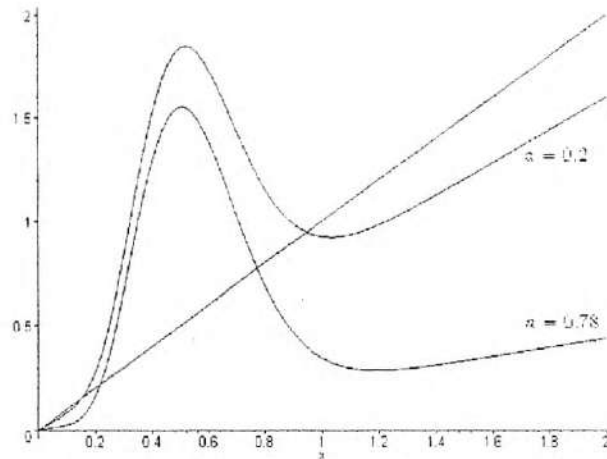


Figura 5.1: Gráfica de la función F para $a = 0.2$ y $a = 0.78$

Y así tenemos que

$$-1 = DF_a(x_{S_3}) = 1 + 7a - 16ax_{S_3} \quad (5.11)$$

De aquí que $x_{S_3} = \frac{2+7a}{16a}$. Sustituyendo en (5.10) obtenemos

$$1.1 \times 10^6 \left(\frac{2+7a}{16a}\right)^7 e^{-\frac{2+7a}{a}} = a \quad \text{ó} \quad 1.1 \times 10^6 (2+7a)^7 e^{-\frac{2+7a}{a}} = 2^{28} a^8$$

Tomando logaritmos a ambos lados de la ecuación, llegamos a la ecuación

$$a \ln 11 + 5a \ln 10 + 7a \ln(2+7a) - 2 - 7a - 28a \ln 2 - 8a \ln a = 0$$

La solución de esta ecuación es $a = 0.262\overline{7} \dots$. De (5.9) vemos que el punto de equilibrio es $x_s = .913279$. En la Figura 5.2 usamos el valor $a = 0.3$. Observamos que surge una órbita periódica de período 2. Esto nos muestra que el parámetro está cruzando un punto de bifurcación de período doble.

De acuerdo con [10], la aparición de estas órbitas periódicas de período dos, concuerda con los resultados de laboratorio. Para el valor de $a = 0.78$ presentamos la gráfica de F y la de su tercer iterada (Figura 5.3). Encontramos dos órbitas periódicas de período tres. Así que, para este valor del parámetro, el sistema es caótico en

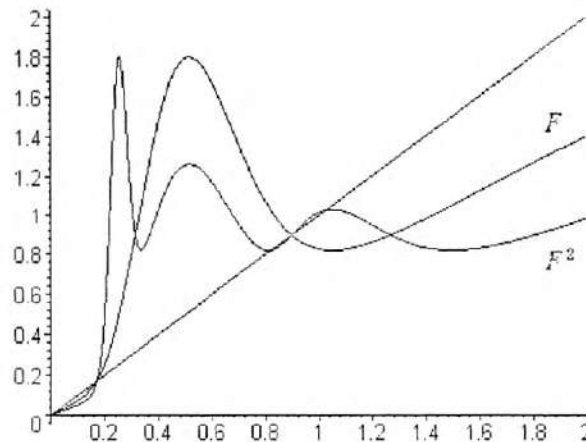


Figura 5.2: Gráfica de la función F y F^2 para $a = 0.3$

el sentido de Li y Yorke¹. Este comportamiento también es respaldado por pruebas de laboratorio. Un examen a los exponentes de Lyapunov en el sistema nos revela que las trayectorias son inestables para valores cercanos a 0.8. Por ejemplo, el valor $a = 0.8$ nos da la siguiente aproximación sucesiva al exponente de Lyapunov, a lo largo de la trayectoria que inicia en $x = 0.8$

Número de iteraciones	Exponente de Lyapunov
901	0.43703
902	0.438573
903	0.438806
904	0.436471
905	0.438063

Comenzando en 1.1 obtenemos la siguiente tabla:

¹Esto se remonta a Edward Lorenz (meteorólogo del MIT), quién publicó en 1963 "Deterministic Nonperiodic Flow" sobre el comportamiento no-lineal de un sistema de 3 ecuaciones lineales correspondiente a un modelo simplificado de dinámica de fluidos. James Yorke descubrió en 1972 el trabajo de Lorenz, lo difundió y analizó con Robert May (matemático, biólogo y ecólogo). Analizando matemáticamente el comportamiento de la ecuación (que May puso en evidencia) Yorke probó que cualquier sistema unidimensional (como el de la función logística), que muestra en algún momento una órbita periódica de período 3, mostrará órbitas periódicas de todos los tipos y también caos. Así hizo el descubrimiento de que "sistemas simples tienen dinámica compleja", el cual dió a conocer en el artículo "Period three Implies Chaos" (1975). Se han descubierto efectos similares además de en Biología, en Genética, Economía, dinámica de fluidos, Epidemiología, Fisiología, etc.

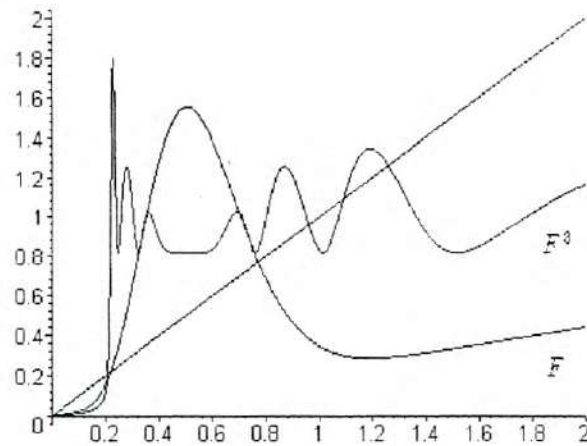


Figura 5.3: Gráfica de la función F y F^3 para $a = 0.78$

Número de iteraciones	Exponente de Lyapunov
901	0.409193
902	0.410843
903	0.411094
904	0.410868
905	0.408586

Estos resultados son notables ya que sólo calculamos 900 iteraciones. Pero esto nos sugiere que el sistema no tiene órbitas estables. Para los valores cercanos a 1 tenemos $F_a(F_a(x_M)) < x_{S_2}$. Esto es esperado. Cuando $a \approx 1$ el cuerpo trata de compensar el gran índice de destrucción de globulos rojos, incrementando la producción al máximo. En consecuencia, un gran número de globulos rojos entra en la sangre, causando una acumulación excesiva. Este “crecimiento” es detenido por el control automático del nivel de células y durante el siguiente intervalo de tiempo solo un pequeño número de globulos es creado. Y ya que el índice de destrucción no ha cambiado, la población cae por debajo del nivel crítico x_{S_2} y la órbita tiende a cero.

5.2 Aplicación 2.

El daño causado por el escarabajo de la harina, conocido comunmente como gorgojo, representa un costo significativo a la industria de proceso de alimentos. Uno de los mayores retos de los entomólogos es tener una visión dentro de la dinámica de la población de los escarabajos y otros insectos, como un modo de aprendizaje sobre la fisiología de los insectos. Una aplicación comercial del estudio de población consta en desarrollar estrategias para el control poblacional.

Un grupo de investigadores recientemente diseñaron un estudio de la fluctuación del escarabajo de la harina (*Tribolium*). La larva recién salida del cascarón pasa dos semanas alimentandose antes de entrar al estado de pupa donde le tomara aproximadamente el mismo tiempo. El escarabajo emerge, del estado de pupa, como un adulto. Los investigadores proponen un mapeo discreto que modela las tres poblaciones de manera separada. Dados el número de larvas, pupas y adultos en algún tiempo t , denotaremos L_t , P_t y A_t , respectivamente. La salida del mapeo son tres números; las tres poblaciones L_{t+1} , P_{t+1} y A_{t+1} , una unidad de tiempo después, es mas conveniente tomar la unidad de tiempo como dos semanas. Un modelo tipico para las tres poblaciones de escarabajos es :

$$L_{t+1} = bA_t$$

$$P_{t+1} = L_t(1 - \mu_l)$$

$$A_{t+1} = P_t(1 - \mu_p) + A_t(1 - \mu_a)$$

donde b es la tasa de nacimientos de la especie (El número de nuevas larvas por adulto cada unidad de tiempo), y donde μ_l , μ_p y μ_a son las tasas de mortandad de las larvas, pupas y adultos respectivamente.

LLamaremos a un mapeo discreto con tres variables, mapeo tri-dimensional, como el estado de la población en cualquier tiempo dado, esta especificado por tres números L_t , P_t y A_t .

La especie *Tribolium*, agrega un giro interesante al modelo referido: Canibalismo causado por el estrés sobrepoblacional. Bajo condiciones de sobrepoblación, los adultos deben de comer pupas y huevos sin salir del cascaron (futuras larvas); Las larvas a su vez comieran huevos. Incorporando estos refinamientos a nuestro modelo tenemos :

$$L_{t+1} = bA_t \exp(-c_{ea}A_t - c_{el}L_t)$$

$$P_{t+1} = L_t(1 - \mu_l)$$

$$A_{t+1} = P_t(1 - \mu_p) \exp(-c_{pa}A_t) + A_t(1 - \mu_a)$$

Los parámetros $c_{el} = 0.012$, $c_{ea} = 0.009$, $c_{pa} = 0.004$, $\mu_l = 0.267$, $\mu_p = 0$ y $b = 7.48$ fueron determinados por experimentos poblacionales. La tasa de mortalidad en los adultos fue determinada mediante experimentos y será $\mu_a = 0.0036$.

El efecto de llamar a un exterminador puede ser modelado por el cambio artificial en la tasa de mortalidad de los adultos. La figura 5.4 nos muestra un diagrama de bifurcación de las ecuaciones anteriores. El eje horizontal representa la tasa de mortalidad μ_a . El valor asintótico de L_t -calculado corriendo el modelo por un largo tiempo en una μ_a fija y guardando la población de larvas resultante- es graficada verticalmente. la figura 5.4 sugiere que para una relativa tasa de mortandad baja, la población de larvas alcanza un estado constante (un punto fijo). Para $\mu_a > 0.1$ (lo que representa una tasa de mortandad del 10% de los adultos, por cada período de dos semanas) el modelo muestra oscilación entre dos estados totalmente diferentes. Esto es un ciclo "Boom and Bust", muy conocido en poblaciones biológicas. Una baja población (Bust) conduce a una condición baja de vida y un gran crecimiento (Boom) en la siguiente generación. Hasta este punto el límite de crecimiento poblacional (lo que produce la aparición de canibalismo en el sistema) se puede presentar guiandolo a un decline catastrófico y repitiendo el ciclo. La bifurcación de período doble cerca de $\mu_a = 0.1$ continua por un período, teniendo bifurcación hasta $\mu_a \approx 0.6$. Para muy altas tasas de mortandad, cercano al 100 % vemos el complicado comportamiento

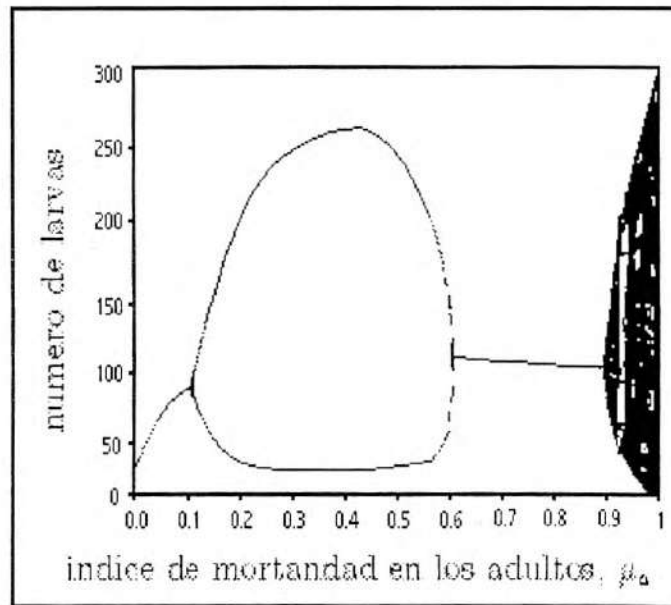


Figura 5.4: Diagrama de bifurcación para el modelo biológico.

no-periodico, característico de la función logística.

Esta es una manera de encontrar caos en un modelo matemático. Un significado mucho más importante encontrado fue demostrar que el modelo, que es lo suficientemente acertado para un sistema real que muestra comportamiento caótico, puede ser reproducido en un laboratorio.

El experimento fue realizado colocando en recipientes cientos de escarabajos y 20gr. de comida. Se tomaron muestras por 18 periodos consecutivos de 2 semanas. Para 6 distintas tasas de mortandad, $\mu_a = 0.036$ (la natural), 0.04, 0.27, 0.50, 0.73 y 0.96 fueron forzadas en distintos botes cada uno de los 6 experimentos fue reproducido en 4 botes por separado. El resultado se muestra en la Figura 5.5.

5.3 Aplicación 3.

Durante la primera guerra mundial la población de selachians, en el lado norte del mar adriático, se incremento de manera dramática, confrontando a los biólogos con

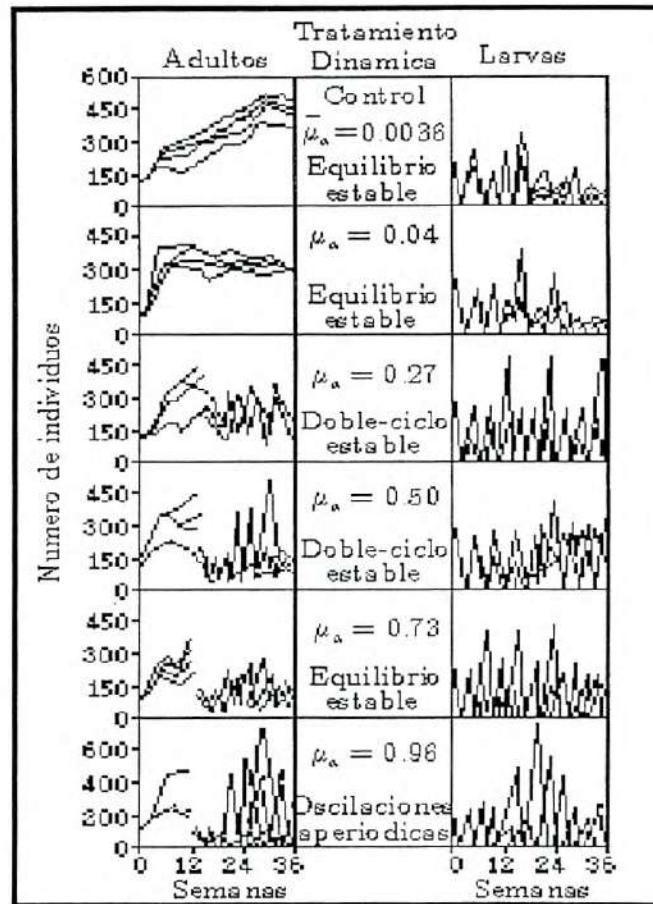


Figura 5.5: La población como una función del tiempo.

un supuesto irresoluble rompecabezas. Umberto D Ancona, uno de ellos, presentó el problema a un experto matemático, su suegro Vito Volterra [Volterra, 1931], quien le otorgó una brillante solución al rompecabezas, construyendo un modelo simple, pero objetivo y de gran ayuda. Él dividió la población de peces en dos categorías, depredadores (Selachians) y presas. Dando por hecho, que el número de encuentros, por unidad de tiempo, entre pares de los dos distintos grupos es proporcional a el producto de sus tamaños y que esto favorece al crecimiento de los depredadores, mientras el otro grupo decrece, Volterra propone el siguiente sistema elemental de ecuaciones diferenciales, para estudiar la dinámica de las dos poblaciones. Las variables $x(t)$

y $y(t)$ representan la población de las presas y depredadores respectivamente en un tiempo t , y a, b, c, d y ϕ son parámetros no negativos.

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) - \phi x(t) \\y'(t) &= cy(t) - dx(t)y(t) - \phi y(t)\end{aligned}\tag{5.12}$$

Los dos últimos términos de las ecuaciones, $-\phi x(t)$ y $-\phi y(t)$, contabilizan las bajas por la pesca. Debido a las hostilidades en la guerra, esta actividad fue disminuida significativamente de 1915 a 1919, el período caracterizado por la gran disminución en la proporción de selachians capturados por los pocos pescadores, operando en el área.

Podemos discretizar el sistema original 5.12, usando el método de Euler. Elijamos un intervalo de tiempo $\Delta t = h$ y reemplazemos las dos derivadas, por $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ y $\frac{y(t+h)-y(t)}{h}$ respectivamente. Así llegamos al sistema

$$\begin{aligned}x(t+h) &= (1+ah)x(t) - bhx(t)y(t) - \phi hx(t) \\y(t+h) &= (1-ch)y(t) - dhx(t)y(t) - \phi hy(t)\end{aligned}\tag{5.13}$$

Escogemos $t = 0$, y el estado inicial $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Sustituyendo en 5.13 obtenemos

$$\begin{aligned}x_1 &= x(h) = (1+ah+\phi h)x_0 - bhx_0y_0 \\y_1 &= y(h) = (1-ch-\phi h)y_0 - dhx_0y_0\end{aligned}\tag{5.14}$$

Tomemos $t = h$, y de 5.13 y 5.14 obtenemos

$$\begin{aligned}x_2 &= x(2h) = (1+ah+\phi h)x_1 - bhx_1y_1 \\y_2 &= y(2h) = (1-ch-\phi h)y_1 - dhx_1y_1\end{aligned}\tag{5.15}$$

Y en general, después de $n+1$ pasos, llegamos a que

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x(n+1)(h) = (1+ah+\phi h)x_n - bhx_ny_n \\y_{n+1} &= y(n+1)(h) = (1-ch-\phi h)y_n - dhx_ny_n\end{aligned}\tag{5.16}$$

Tomando el valor de los parámetros $\phi hx(t)$ y $\phi hy(t) = 0$, es decir considerando el efecto de la pesca como nula, tenemos que :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= (1+ah)x_n - bhx_ny_n \\y_{n+1} &= (1-ch)y_n - dhx_ny_n\end{aligned}\tag{5.17}$$

Los puntos fijos de nuestro sistema son $(0, 0)$ y $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Queremos analizar el tipo de estabilidad de estos estados. Como

$$F_a(x, y) = ((1 + ah)x - bhxy, (1 - ch)y + dhxy)$$

obtenemos

$$DF_a(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + ah - bhxy & -bhx \\ dhxy & 1 - ch + dhx \end{pmatrix}.$$

Así que,

$$DF_a(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 + ah & 0 \\ 0 & 1 - ch \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores de $DF_a(0, 0)$ son $(1 + ah), (1 - ch)$. El primero es mayor que 1 y el segundo menor que 1. Por lo tanto el origen es un punto silla. Similarmente, obtenemos

$$DF_a\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-bch}{d} \\ \frac{adh}{b} & 1 \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores de $DF_a\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ son $1 + ih\sqrt{ac}$ y $1 - ih\sqrt{ac}$. Este segundo equilibrio es repelente. Para visualizar este comportamiento, elijamos los valores numéricos $1 + ah = 1.2, bh = 0.2, 1 - ch = 0.8, dh = 0.2$. El punto de equilibrio es $(1, 1)$. Comenzando en $(1.3, 1)$ las dos poblaciones (ver Figura 5.6) desarrollan un comportamiento oscilatorio, fuera de fase y las amplitudes de las oscilaciones son decrecientes. Este comportamiento es esperado, ya que los eigenvalores de $DF_a(x_s)$ son complejos y sus modulos mayores que uno. En el sistema continuo, puede ser demostrado que, la órbita que comienza en $(1.3, 1)$ es periodica. Este hecho nos muestra la importancia de un cuidadoso análisis cualitativo del sistema, antes de usar metodos numéricos, para investigar sus comportamientos evolutivos.

El modelo de Volterra, está basado en el hecho no realista del crecimiento exponencial de las presas en ausencia de depredadores. Así que se requieren refinamientos al sistema. Por ejemplo, que el crecimiento de presas este gobernado por un mapeo

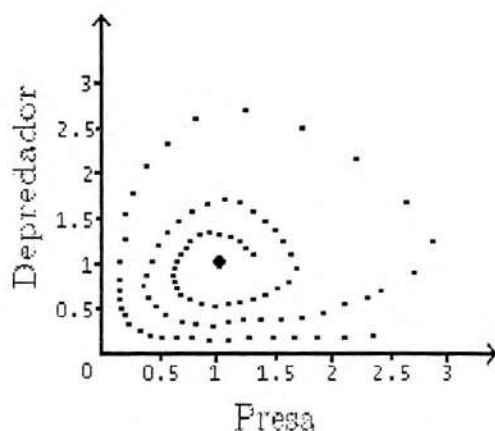


Figura 5.6: El punto de equilibrio y la trayectoria que comienza en $(1.3, 1)$

logístico de la forma $ax(1-x)$ y el de los depredadores por $-cy(1+y)$. En consecuencia, nuestra versión discreta del modelo, en el cual usamos el método de Euler, ahora se convierte en

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1+ah)x_n - ah(x_n)^2 - bhx_ny_n \\ y_{n+1} &= (1-ch)y_n - ch(y_n)^2 + dhx_ny_n \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde el intervalo de tiempo h , debe ser considerado un parámetro muy pequeño. El origen es de nuevo, un punto fijo y con

$$T_a(x, y) = \left((1+ah)x - ahx^2 - bhxy, (1-ch)y - chy^2 + dhxy \right)$$

encontramos

$$DT_a = (0, 0) = \begin{pmatrix} 1+ah & 0 \\ 0 & 1-ch \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores de $DT_a = (0, 0)$ son $1+ah$ y $1-ch$. Por lo tanto, el origen es nuevamente un punto silla. Existen tres equilibrios más. Uno tiene coordenadas $(0, -1)$ y este no es útil para nuestros propósitos. Otro de ellos tiene coordenadas $(1, 0)$. Denotaremos a este como x_2 . Asumiendo que $c < d$ tenemos un tercer punto de equilibrio $x_3 = \left(\frac{ac+bc}{ac+bd}, \frac{ad-ac}{ac+bd} \right)$. El estado estable de $(0, 1)$, es un punto silla ya que

$$DT_a(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 - ah & -bh \\ 0 & 1 - ch + dh \end{pmatrix}$$

para la cual, sus eigenvalores son $1 - ah$ y $1 + h(d - c)$. El último eigenvalor es mayor que uno (ya que $d > c$). El análisis de la estabilidad del tercer punto de equilibrio es un poco mas complicado. Notemos que $T = I + hG$, donde

$$G_a(x) = (ax(1 - x) - bxy, -cy(1 + y) + dxy).$$

Así que, los eigenvalores de la derivada de T serán encontrados sumando 1 a los eigenvalores de G multiplicados por h . Así, tenemos que :

$$DG_a(x_3) = \frac{1}{ac+bd} \begin{pmatrix} -ac(a+b) & -bc(a+b) \\ ad(d-c) & -ac(d-c) \end{pmatrix}$$

Ya que la traza de esta matriz es negativa y el determinante es positivo, sus eigenvalores tienen parte real negativa. Así que, para h lo suficientemente pequeña, el modulo del eigenvalor de $DT_a(x_2)$ es menor que 1 y el equilibrio es un atractor.

Uno puede encontrar también razones para criticar el modelo logístico de competencia *depredador-presa*, argumentando que el origen debe ser un atractor, ya que ambas poblaciones deben extinguirse si caen bajo un cierto nivel mínimo. El siguiente modelo *depredador-presa* presenta este comportamiento.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= rx_n(1 - x_n - y_n) \\ y_{n+1} &= rx_n y_n \end{aligned} \quad (5.19)$$

Sean $F_r(x, y) = (rx(1 - x - y), rxy)$ y $r \in (0, 4]$. Los puntos estables de este sistema son $\bar{x}_1(r) = (0, 0)$, $\bar{x}_2(r) = (1 - r^{-1}, 0)$, $\bar{x}_3(r) = (r^{-1}, 1 - 2r^{-1})$. El primero es un atractor para $r < 1$. En este valor del parámetro tenemos un intercambio de estabilidad entre los vectores $\bar{x}_1(r)$ y $\bar{x}_2(r)$; el equilibrio del primer vector se convierte en un punto silla y el equilibrio del segundo es ahora un atractor. Notemos que el estado estable del segundo vector, tiene sentido solo para $r > 1$ y en $r = 1$ tenemos $\bar{x}_2(1) = (0, 0) =$

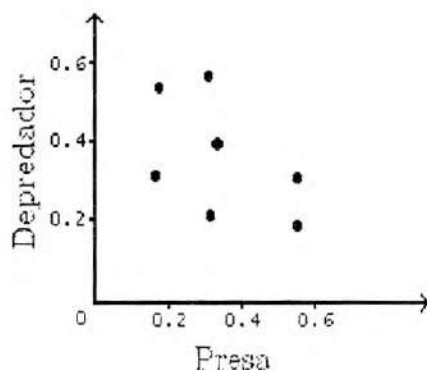


Figura 5.7: Gráfica de la trayectoria que comienza en $(0.32, 0.34)$. El círculo grande representa a el punto de equilibrio $x_3 = (3.2, 3.2)$

$\vec{x}_1(1)$. El conjunto estable del vector $\vec{x}_3(r)$ es aceptable sólo para valores de $r \geq 2$. Es exactamente en $r = 2$ que $\vec{x}_2(2) = \vec{x}_3(2)$. La matriz $DF_r(\vec{x})$ evaluada a lo largo del vector $\vec{x}_3(r)$ es

$$DF_r(\vec{x}_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ r-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los eigenvalores de esta matriz son $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{9-4r}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{9-4r}}{2}$. Ambos eigenvalores son positivos, reales y menores que 1 en $r \in (2, 2.25)$. Entonces, en $r = 2$ la característica atractora del equilibrio, en el segundo vector se pasa al equilibrio del tercero. Los eigenvalores se vuelven complejos para $r > 2.25$ y su modulo es $\sqrt{r-2}$. Están dentro del círculo unitario en el plano complejo, para $r \in (2.25, 3)$. En $r = 3$ los eigenvalores son $\lambda_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$; es decir, los eigenvalores cruzan el círculo unitario cuando r cruza a 3 y $\frac{d}{dr}\sqrt{r-2} > 0$. Aún más, el argumento del número complejo λ_1 es $\theta = \arctan \sqrt{3}$, lo cuál implica que $\theta = \pi/3$. De modo que, en $r = 3$ tenemos una *bifurcación de Hopf*, es decir una bifurcación en la que se genera un ciclo invariante cuando el punto fijo atractor se hace repelente. Las órbitas cercanas a $(r^{-1}, 1 - 2r^{-1})$ para $r > 3$ son atraídas por una órbita periodica de período 6 (ya que $\theta = \pi/3$) la cuál es a su vez, una función de r .

La órbita esta dada por:

$$\begin{aligned} x_1(r) &= \left(\frac{r-1+\sqrt{r^2-2r-3}}{2r}, \frac{r-1-\sqrt{r^2-2r-3}}{2r} \right), \\ x_2(r) &= \left(\frac{r-1+\sqrt{r^2-2r-3}}{2r}, \frac{1}{r} \right), \\ x_3(r) &= \left(\frac{1}{r}, \frac{r-1+\sqrt{r^2-2r-3}}{2r} \right), \\ x_4(r) &= \left(\frac{r-1-\sqrt{r^2-2r-3}}{2r}, \frac{r-1+\sqrt{r^2-2r-3}}{2r} \right), \\ x_5(r) &= \left(\frac{r-1-\sqrt{r^2-2r-3}}{2r}, \frac{1}{r} \right), \\ x_6(r) &= \left(\frac{1}{r}, \frac{r-1-\sqrt{r^2-2r-3}}{2r} \right). \end{aligned}$$

Para valores grandes del parámetro de control, el sistema parece ser caótico, como lo sugiere la figura 5.8.

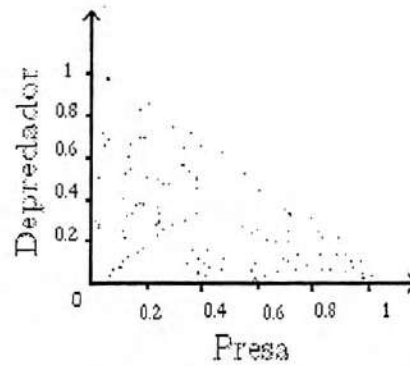


Figura 5.8: Gráfica de la trayectoria que comienza en $(0.4, 0.2)$ para $r = 3.9$

Bibliografía

- [1] Ahlfors, Lars V. *Complex Analysis*, McGraw Hill, México, 1979
- [2] Akin, Ethan, *The General Topology of Dynamical Systems*, American Mathematical Society, 1993
- [3] Alligood, K. T., Sauer, T. D., Yorke, J. A., *Chaos; An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1996
- [4] Berkey & Blanchard, *Calculus*, Saunders College Publishing, New York, 1992
- [5] Conway, John B. *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, 1978
- [6] Costantino, R. F., Cushing, J. M., Dennis, B. and Desharnais R. A. *Experimentally induced transitions in the dynamic behavior of insect populations*, Nature, 1995
- [7] Devaney, R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin/Cummings Publishing Co., 1986
- [8] Elaydi, Saber N., *Discrete Chaos*, Chapman & Hall/CRC, New York, 2000
- [9] Frøyland, J. *Introduction to Chaos and Coherence*, Institute for Physics Publishing, London, 1992

- [10] Gearhart-Martelli *A blood cell population model, dynamical diseases, and chaos*, UMAP, 1990
- [11] Hale, J., Koçak, H. *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York, 1991
- [12] Halmos, Paul R. *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974
- [13] Holmgren, R. A. *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1994
- [14] Lasota, A. *Ergodic Problems in Biology*, Société Mathématique de France, 1977
- [15] Li T., Yorke J. A. *Period three implies chaos*, The American Mathematical Monthly, 1975
- [16] Iribarren, I. L. *Topología de Espacios Métricos*, limusa, 1984
- [17] Martelli, M., *Discrete Dynamical Systems and Chaos*, John Wiley & Sons, 1992
- [18] Munkers, J. R. *Topology*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 2000
- [19] Royden, H. L. *Real Analysis*, Prentice Hall, 1988
- [20] Shashkin, Yu. A. *Fixed Points*, American Mathematical Society, Rusia, 1991
- [21] Thomas, George B. *Cálculo Infinitesimal*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1978
- [22] Volterra, V. *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Paris, 1931