UNIVERSIDAD DE SONORA

UNIDAD REGIONAL CENTRO

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Un enfoque analítico-gráfico para el estudio de la función cuadrática de variable compleja

Tesis que para obtener el grado de Licenciado en Matemáticas presenta

P.L.M. Francisco Javier Reyes Carrizosa

Director de Tesis: MC José Ramón Jiménez Rodríguez

Comité Revisor

Dr. Fernando Luque Vázquez
MC Jorge Ruperto Vargas Castro
MC Arturo Fragozo Robles
MC José Ramón Jiménez Rodríguez

Jurado

MC Arturo Fragozo Robles, *Presidente*
MC Jorge Ruperto Vargas Castro, *Secretario*
MC José Ramón Jiménez Rodríguez, *Vocal*

Hermosillo, Sonora **Septiembre del 2002**

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

T. 123
QA331.7
.R49

RIS T 1140

RIS . 63

Dedicatoria

Dedico este trabajo de manera muy especial a la memoria de mi ***padre José*** y de mi ***hermana Elvia***, que me impulsaron a seguir estudiando cuando había decidido no hacerlo.

A mi director de tesis:

José Ramón Jiménez Rodríguez

Por el gran apoyo y confianza que me brindo de manera incondicional.

Al comité revisor de tesis:

Dr. Fernando Luque Vázquez
MC Arturo Fragoso Robles
MC Jorge Ruperto Vargas Castro
MC José Ramón Jiménez Rodríguez

Por sus importantes aportaciones, que ayudaron a enriquecer y mejorar este trabajo.

A todos mis maestros por sus valiosas enseñanzas.

Con mucho cariño para mi querida ***madre María Jesús***, por su enorme sacrificio, cariño y comprensión.

También de manera muy especial a mi adorada ***esposa Diana***, por su apoyo y comprensión en los momentos más difíciles por los que pase al realizar este trabajo, y por supuesto a mi pequeño ***hijo José Eduardo***, que se privó de disfrutar a su papá.

Índice

Capítulo 1

El enfoque analítico-gráfico para el estudio de la función cuadrática de variable compleja

Introducción

Uno de los rasgos característicos de la enseñanza formal de las matemáticas, en casi todos sus niveles pero muy especialmente en el nivel superior, es el carácter sumamente abstracto de los conceptos que son objeto de enseñanza. Esto hace que su asimilación por parte de los alumnos no sea inmediata y exenta de dificultades, sino que se constituya en un proceso en el que gradualmente se van aclarando el significado y las interpretaciones de los conceptos, y en el que se presentan varias y enormes dificultades, sobre todo en lo que concierne a la visualización y la transferencia de las nociones, conceptos y métodos enseñados.

A lo largo de la historia moderna, muchos de los matemáticos involucrados en la enseñanza de esta ciencia han intentado desarrollar formas de abordar los conceptos matemáticos que los hagan más asequibles y visualizables para el alumno.

Sin embargo, hasta hace muy poco tiempo estos esfuerzos habían tenido poco impacto en la enseñanza, debido en gran parte a la carencia de un soporte técnico o instrumental adecuado para realizar muchas de las iniciativas planteadas incluso por algunos de los mejores matemáticos.

Tal es el caso, por ejemplo, de las funciones de variable compleja. La enseñanza tradicional ha tratado este tema (y, de hecho, todo el curso) de manera formal, es decir, desde el punto de vista exclusivamente analítico, y los encomiables intentos de Polya (1974) de desarrollar un enfoque geométrico para tales conceptos no encontraron eco en su tiempo en una comunidad de matemáticos desprovista de los instrumentos tecnológicos que hicieran posible materializar dicho enfoque.

El gran desarrollo tecnológico que ha tenido lugar en los últimos tiempos ha proporcionado a los profesores e investigadores de los diferentes niveles educativos potentes herramientas para la visualización de conceptos matemáticos, tales como la computadora y el software matemático especializado, las calculadoras simbólicas, programables y gráficas, los multimedios, entre otros, que permiten no solamente rescatar valiosas ideas pedagógicas propuestas en el pasado, sino buscar y desarrollar nuevas estrategias y enfoques para abordar los conceptos matemáticos, inclusive los del más alto nivel de abstracción.

El uso de tecnología tiende a ser el rasgo esencial y distintivo de la enseñanza de las matemáticas en nuestros días. Por distintas razones, en nuestro país la introducción intensiva de computadoras y calculadoras en el proceso docente ha dominado los niveles medios y las etapas iniciales del nivel superior, mientras que su uso es poco frecuente o raro en el nivel básico y en los cursos matemáticos avanzados del nivel superior.

En este nivel, y específicamente en el caso del curso de Variable Compleja I, enmarcado en el Plan de Estudios de la Licenciatura en Matemáticas que se imparte en la Universidad de Sonora, en los últimos años he estado desarrollando como parte de mi trabajo de Tesis un enfoque analítico y visual para el tratamiento de las funciones de variable compleja, a partir del uso de la calculadora simbólica TI92 Plus.

El proyecto que nos hemos propuesto ha resultado ser demasiado ambicioso. Hemos querido desarrollar un acercamiento visual para el tratamiento de las funciones elementales de variable compleja que se abordan en el curso correspondiente de la Licenciatura en Matemáticas. Pero ha sido un proyecto demasiado extenso para reportarlo como trabajo de tesis. Es por esta razón, fundamentalmente, que hemos decidido restringir este trabajo exclusivamente al tratamiento de la función cuadrática de la forma $w = a z^2$, donde $a \in \mathbf{C}$. Aunque se tienen avances sustanciales en el caso de otras funciones (en concreto: la función lineal $w = a z + b$, donde $a,\ b \in \mathbf{C},\ a \neq 0$ y la función $w = 1/z$), su análisis y reporte será motivo de otro trabajo.

El análisis que se presenta en este trabajo no pretende constituirse en una propuesta didáctica para el tratamiento de la función cuadrática de variable compleja en el curso correspondiente de la Licenciatura en Matemáticas. Tampoco pretende constituirse en una alternativa a la enseñanza tradicional de este tema; mucho menos aspira a sustituirla. Simplemente pretende ser un apoyo, tanto para profesores como para estudiantes, durante el estudio de este tema.

Las funciones de variable compleja como transformaciones

Uno de los conceptos matemáticos básicos que se estudian en el curso de Variable Compleja I es el de función de una variable compleja. Una interpretación visual de este concepto es la siguiente.

Consideraremos que z y w son puntos[1] localizados en dos planos coordenados distintos, a los que llamaremos respectivamente el plano z y el plano w. Al punto z lo denominaremos el punto ***original***, mientras que al punto w lo llamaremos el punto ***imagen***. Supongamos que $z = x + i\,y$, donde $x, y \in \mathbf{R}$. Entonces z está representado en el plano original por el punto de coordenadas (x, y), referido al sistema coordenado xOy. Análogamente, si $w = u + iv$, donde $u, v \in \mathbf{R}$, entonces w está representado en el plano imagen por el punto (u, v), referido al sistema coordenado $uO'v$.

[1] Los números complejos también pueden ser representados como vectores. No es la interpretación que se asume en este trabajo.

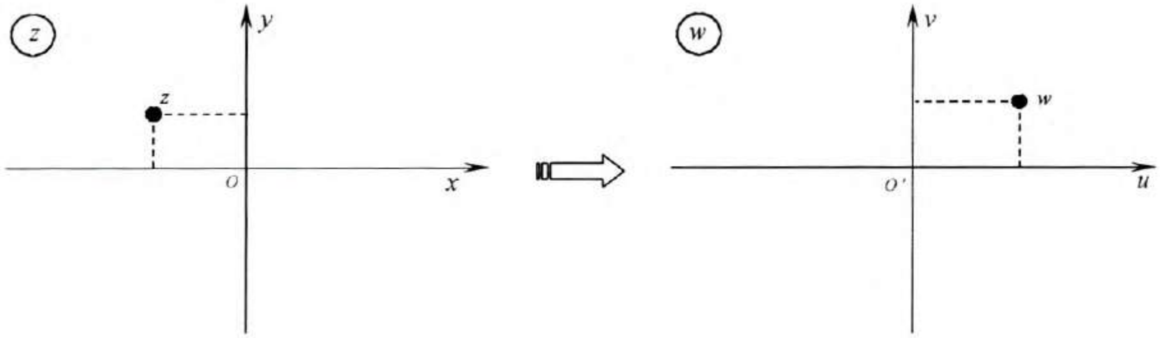


Figura 1 El plano z (original) y el plano imagen w. Transformación puntual.

Si es posible entonces establecer, para un conjunto dado de puntos z y w, una cierta relación $w = f(z)$ entre el punto original z y su punto imagen w, entonces se dice que se tiene un ***mapeo*** o ***transformación*** de z a w (Fig.1). Por ejemplo, si $w = az + b$, se dice que el mapeo correspondiente es una transformación lineal. Si $w = \dfrac{f(z)}{g(z)}$, donde $f(z)$ y $g(z)$ son polinomios, se dice que el mapeo es una transformación racional.

El análisis de una función como transformación o mapeo se puede hacer desde dos perspectivas: una ***puntual*** y otra ***global***. Desde el enfoque puntual se estudian puntos aislados, tanto los originales como sus respectivas imágenes.

Desde el punto de vista global, se estudian conjuntos o regiones del plano complejo original y sus correspondientes regiones imagen. La Fíg. 1 ilustra la primera de estas perspectivas (puntual), mientras que la Fíg. 2 ilustra la perspectiva global.

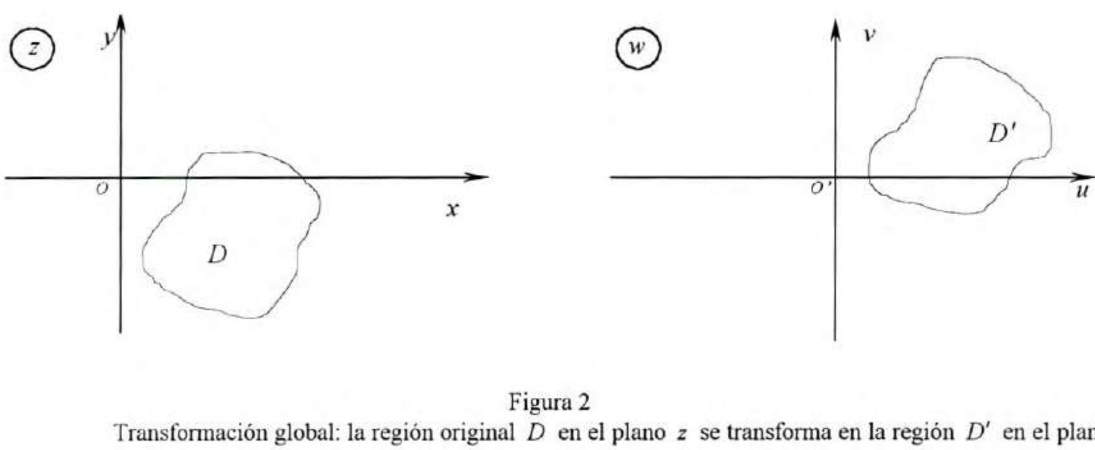


Figura 2
Transformación global: la región original D en el plano z se transforma en la región D' en el plano w.

Desde la perspectiva global, resulta interesante investigar, para una función (transformación o mapeo) dada, qué regiones concretas o conjuntos del plano en z se transforman en qué conjuntos o regiones del plano en w. En otras palabras, resulta de interés averiguar las transformaciones de ciertas figuras simples del plano original z al plano imagen w.

El uso de tecnología para el análisis de las funciones de variable compleja como transformaciones

Es importante enfatizar el hecho de que, salvo el software especializado, no es posible manipular directamente las funciones de variable compleja como transformaciones en las computadoras. E inclusive en el caso del software especializado, las manipulaciones se realizan no sobre cualquier figura arbitraria en el plano z, sino sobre el conjunto de figuras que el diseñador del software ha considerado adecuado presentar, y que no necesariamente coinciden con las figuras de interés para el profesor.

En el caso de la calculadora simbólica TI92 Plus, tampoco se dispone de opciones en los menús del usuario para manipular las transformaciones de variable compleja. Por esta razón, para poder realizar el enfoque visual de las transformaciones o mapeos que hemos descrito en el párrafo anterior se requiere resolver dos problemas fundamentales:

1. Familiarizarse con el lenguaje de programación de la calculadora, a fin de ***programar*** el despliegue visual de una transformación dada.

2. Obtener las fórmulas generales de la imagen producida por una transformación dada, a fin de usar estas fórmulas en el programa mencionado en el punto anterior.

Para la realización del presente trabajo se han tenido que resolver estos dos problemas. El primero de ellos nos ha conducido a la elaboración de un paquete de programas para la calculadora simbólica TI92 Plus, que se incluyen en el Apéndice, y que permiten explorar la transformación de una serie de regiones del plano complejo bajo la función cuadrática $w = az^2$.

La solución del segundo problema constituye la parte medular del presente trabajo, pues ha hecho posible programar los cálculos y las gráficas en la calculadora simbólica TI92 Plus para la gama de regiones del plano complejo original que han sido seleccionadas, al tiempo que ha permitido descubrir nuevos hechos (tanto analíticos como gráficos) relativos a dicho mapeo y que no se consignan en los libros de texto tradicionales.

Un acercamiento analítico y gráfico a la función cuadrática de variable compleja

En general, el problema de la graficación de mapeos con ayuda de graficadores, como ya hemos señalado, puede ser abordado de dos maneras distintas. A una de ellas le hemos denominado el *enfoque puntual*, mientras que a la segunda la denominamos el *enfoque global*.

El enfoque *puntual* consiste en calcular por separado, a partir de la expresión analítica que define a la función de variable compleja dada (por ejemplo $w = az^2$), la imagen w que corresponde a un valor dado de z y en graficar dicho punto en el plano imagen w. Se supone que z es un punto que pertenece a una región incluida en el dominio de la función, es decir que z toma un conjunto de valores permitidos en el dominio de la función. Cuando se grafica de este modo un número suficiente de puntos se puede llegar a obtener un esbozo suficientemente adecuado del mapeo de la región imagen. Este enfoque tiene ventajas y desventajas. La principal ventaja de este enfoque estriba en que no se requieren fórmulas complicadas para realizar los cálculos; de hecho, las únicas fórmulas requeridas son la expresión analítica de la función (por ejemplo, $w = 3z^2$), y la regla que define los valores elegidos para la variable z, es decir, la regla que define a la región original a ser mapeada (por ejemplo, la línea recta $y = 2$, en cuyo caso $z = x + iy$, es decir, $z = x + 2i$, $-\infty < x < \infty$). Estas dos fórmulas son suficientes para efectuar todos los cálculos necesarios y obtener la gráfica del mapeo.

Las desventajas de este enfoque son básicamente dos. En primer lugar, el proceso de graficación tiende a ser lento por la gran cantidad de cálculos que debe realizar la máquina (típicamente, obtener las imágenes de unos sesenta-setenta puntos en la pantalla normal de la calculadora). En segundo lugar, la imagen así obtenida del mapeo no es muy nítida y tampoco es continua: los puntos imagen quedan a veces bastante separados.

El enfoque *global* consiste en obtener en forma de expresión analítica general (es decir, dependiente de parámetros) la ecuación de la figura imagen. Si esta expresión analítica es una función, se puede obtener un buen esbozo del mapeo. Por ejemplo, se puede intentar obtener la expresión analítica general de la imagen de cualquier recta horizontal $y = c$ bajo la transformación $w = az^2$. De lograrlo, se obtendrá una función que depende de: la variable compleja z y los parámetros a y c. A partir de esta función se puede obtener la gráfica del mapeo de toda la familia de rectas horizontales (lo que se logra variando el parámetro c), bajo una amplia gama de funciones cuadráticas de variable compleja (lo que se logra variando el parámetro a). Claramente, las ventajas de este enfoque consisten en que el proceso de graficación es relativamente rápido (se grafican funciones, y no puntos aislados), mientras que la imagen obtenida es nítida y continua. Quizá la principal desventaja de este enfoque es que eventualmente puede resultar excesivamente complicado o laborioso encontrar la expresión analítica general de la imagen. También, a veces no es posible observar el sentido en el que se recorre la imagen; incluso la imagen "virtual" obtenida vía formula analítica puede ser recorrida en un sentido distinto al que realmente corresponde.

Parecería legítimo entonces preguntarse cuál de estos dos enfoques es el mejor. Nuestra opinión personal es que no se trata de una cuestión fácil y que su solución es relativa. Es una decisión didáctica que debe tomarse no solamente a partir de consideraciones de carácter teórico, sino también con base en la evidencia empírica, a partir de datos experimentales y observaciones en el salón de clase.

En el presente trabajo decidimos incorporar ambos enfoques. Hemos realizado el esfuerzo de programación necesario para que el estudiante o el profesor puedan obtener un esbozo por puntos del mapeo deseado o una gráfica continua de dicho mapeo, o ambas cosas, para una gama amplia pero condicionada de regiones del plano original.

Por otro lado, y a diferencia de otros acercamientos al estudio de las funciones de variable compleja como transformaciones, y que se apoyan en el empleo de paquetes de geometría dinámica, permitiendo la visualización dinámica inmediata del mapeo, pero ocultando en cambio el procesamiento algebraico, nuestro enfoque toma como eje central el marco algebraico.

Se propone obtener las expresiones analíticas generales de la transformación y, a partir de ellas, ofrecer al usuario (profesor o alumno) la posibilidad de explorar diversos casos particulares, obteniendo en pantalla no solamente la representación gráfica (de acuerdo con los dos enfoques y en dos variantes: en menor o mayor resolución), sino también la representación analítica del mapeo dado, es decir, la ecuación de la imagen. Esto resulta posible por poner en el centro del desarrollo la búsqueda de fórmulas generales.

A fin de materializar este planteamiento, ha sido necesario sacrificar generalidad en lo que respecta a la gama de objetos o figuras originales cuyas imágenes bajo la transformación $w = a z^2$ se investigan gráfica y analíticamente. Se ha decidido restringir el estudio a las siguientes figuras:

- Familias de rectas: *horizontales, verticales* y *oblicuas.*

- Familias de circunferencias: *con centro en el origen* y *con centro fuera del origen.*

- Familias de hipérbolas: *equiláteras y no-equiláteras: horizontales* y *verticales.*

En el siguiente capítulo se presentan en detalle los cálculos efectuados en cada caso para obtener las fórmulas generales de la transformación. Enseguida se procede a analizar dichas fórmulas y extraer a partir de ellas ciertas conclusiones relativas a las propiedades de la transformación. Finalmente, tales conclusiones se ilustran a partir de ejemplos graficados usando el paquete de programas para la calculadora.

Capítulo 2

Estudio analítico-gráfico de la función cuadrática de variable compleja

La función cuadrática $w = a z^2$

La transformación $w = az^2$, así como cualquier otra, tiene sus ecuaciones generales bajo las cuales un objeto geométrico es mapeado. La obtención de las mismas se describe a continuación.

Sean $z = x + i\,y$ un punto cualquiera del plano complejo, $a = a_1 + i\,a_2$ un número complejo arbitrario distinto de cero, y $w = az^2 = u + i\,v$. Así se tiene que:

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x^2 - a_1y^2 - 2a_2xy \\ 2a_1xy + a_2x^2 - a_2y^2 \end{pmatrix}.$$

De aquí se sigue que:

$$u = a_1x^2 - a_1y^2 - 2a_2xy \qquad \textbf{(2.1)}$$

$$v = 2a_1xy + a_2x^2 - a_2y^2 \qquad \textbf{(2.2)}$$

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) son las ecuaciones generales de la transformación $w = a z^2$. Un punto arbitrario z del plano complejo, bajo esta transformación, tiene como imagen al punto $w = u + iv$, donde u y v están dados por las ecuaciones (2.1) y (2.2). Estas ecuaciones son ***puntuales***, es decir, describen la transformación de ***un punto arbitrario*** del plano complejo.

Análisis algebraico y gráfico de la transformación de algunas regiones del plano complejo

Cabe mencionar que desde el punto de vista geométrico, el analizar cómo se transforma una cierta región del plano complejo, a través de un determinado mapeo, puede brindar información relevante del efecto que produce el mismo.

Así, por ejemplo, para el mapeo $w = a\,z + b$, el transformar una recta o una circunferencia, permite ver claramente el efecto que provoca el mismo; o bien si tenemos $w = e^z$, el ver cómo se transforma una banda, proporciona una idea clara del efecto que produce este mapeo.

1. Rectas horizontales $y = c$, $c \in \mathbf{R}$.

Con el fin de analizar la transformación global de una región del plano complejo formada por la recta $y = c$, donde $c \in \mathbf{R}$, tomemos un punto arbitrario $z_0 = x_0 + i\,y_0$ perteneciente a dicha recta. Este punto, entonces, es de la forma $z_0 = x_0 + i\,c$, de manera que las ecuaciones generales (2.1) y (2.2) se reducen a las ecuaciones particulares:

$$u_0 = a_1 x_0^2 - a_1 c^2 - 2a_2 c x_0 \qquad \textbf{(2.3)}$$

$$v_0 = 2a_1 c x_0 + a_2 x_0^2 - a_2 c^2 \qquad \textbf{(2.4)}$$

Vemos que las ecuaciones (2.3) y (2.4) están dadas en función de x_0, es decir, tanto u como v dependen de x_0: $u_0 = f(x_0)$ y $v_0 = h(x_0)$. De manera que para obtener la relación que existe entre las coordenadas de la imagen del punto $z_0 = x_0 + i\,c$ a través del mapeo $w = a\,z^2$, podemos llevar a cabo el siguiente procedimiento, cuyo objetivo es eliminar x_0 del sistema de ecuaciones (2.3) y (2.4).

De (2.4) obtenemos la ecuación de segundo grado en x_0:

$$a_2 x_0^2 + 2a_1 c x_0 - (v_0 + a_2 c^2) = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$x_0 = \frac{-2a_1\,c \pm \sqrt{4a_1^2\,c^2 + 4a_2(v_0 + a_2 c^2)}}{2a_2} = \frac{-a_1\,c \pm \sqrt{c^2(a_1^2 + a_2^2) + a_2 v_0}}{a_2} = \frac{-a_1\,c \pm \sqrt{c^2|a|^2 + a_2 v_0}}{a_2}$$

siempre y cuando $a_2 \neq 0$.

Sustituyendo estos valores de x_0 en (2.3) obtenemos:

$$u_0 = a_1\left(\frac{-a_1\,c \pm \sqrt{c^2(a_1^2 + a_2^2) + a_2 v_0}}{a_2}\right)^2 - 2a_2 c\left(\frac{-a_1\,c \pm \sqrt{c^2(a_1^2 + a_2^2) + a_2 v_0}}{a_2}\right) - a_1 c^2$$

Ésta es la ecuación de la imagen del punto $z_0 = x_0 + i\,c$, expresada en términos de las coordenadas u_0, v_0. Sin embargo, esta expresión no está escrita en la forma canónica. Tratemos de reducir esta ecuación de la imagen a su forma canónica. Para ello se requiere ejecutar la siguiente serie de operaciones y manipulaciones algebraicas.

Desarrollando el binomio al cuadrado del primer término y realizando la multiplicación indicada en el segundo término, obtenemos:

$$u_0 = \frac{a_1}{a_2^2}\left(a_1^2 c^2 \mp 2a_1 c\sqrt{c^2|a|^2 + a_2 v_0} + c^2|a|^2 + a_2 v_0\right) + 2a_1 c^2 \mp 2c\sqrt{c^2|a|^2 + a_2 v_0} - a_1 c^2$$

Luego, desarrollando las multiplicaciones indicadas en el primer término, juntando términos semejantes y factorizando en toda la expresión, tenemos:

$$u_0 = \frac{a_1 c^2}{a_2^2}\left(2a_1^2 + a_2^2\right) + \frac{a_1 a_2}{a_2^2} v_0 + a_1 c^2 \mp 2c\left(\frac{a_1^2}{a_2^2} + 1\right)\sqrt{c^2|a|^2 + a_2 v_0}$$

Agrupando términos semejantes y reacomodando, obtenemos:

$$u_0 = a_1c^2\left(\frac{2a_1^2}{a_2^2}+1+1\right)+\frac{a_1a_2}{a_2^2}v_0 \mp 2c\left(\frac{a_1^2}{a_2^2}+1\right)\sqrt{c^2|a|^2+a_2v_0}$$

Sumando y factorizando en el primer y tercer término, y reacomodando la expresión, tenemos:

$$u_0 = \frac{a_1a_2}{a_2^2}v_0 + \frac{2a_1c^2|a|^2}{a_2^2} \mp \frac{2c|a|^2}{a_2^2}\sqrt{c^2|a|^2+a_2v_0}$$

Multiplicando por a_2^2 en ambos lados:

$$a_2^2u_0 = a_1a_2v_0 + 2a_1c^2|a|^2 - 2c|a|^2\sqrt{c^2|a|^2+a_2v_0}$$

Pasando el primero y segundo término del miembro derecho al miembro izquierdo, obtenemos: $$a_2^2u_0 - (a_1a_2v_0 + 2a_1c^2|a|^2) = -2c|a|^2\sqrt{c^2|a|^2+a_2v_0}$$

Ahora, elevando al cuadrado en ambos lados, obtenemos:

$$a_2^4u_0^2 - 2a_2^2(a_1a_2v_0 + 2a_1c^2|a|^2)u_0 + a_1^2a_2^2v_0^2 + 4a_1^2a_2c^2|a|^2v_0 + 4a_1^2c^4|a|^4 = 4c^2|a|^4(c^2|a|^2 + a_2v_0)$$

Pasando el término del miembro derecho al izquierdo, luego desarrollando y factorizando (el tercero y cuarto término del miembro izquierdo con el término del miembro derecho) y reacomodando, llegamos a la expresión:

$$a_2^4u_0^2 - 2a_2^2(a_1a_2v_0 + 2a_1c^2|a|^2)u_0 + 4c^4|a|^4(a_1^2 - |a|^2) + 4a_2c^2|a|^2(a_1^2 - |a|^2)v_0 + a_1^2a_2^2v_0^2 = 0$$

Desarrollando las restas indicadas en el tercero y cuarto término, obtenemos:

$$a_2^4u_0^2 - 2a_2^2(a_1a_2v_0 + 2a_1c^2|a|^2)u_0 - 4a_2^2c^4|a|^4 - 4a_2^3c^2|a|^2v_0 + a_1^2a_2^2v_0^2 = 0$$

Finalmente, dividiendo entre a_2^2 $(a_2^2 \neq 0)$ en ambos lados, obtenemos:

$$a_2^2u_0^2 - 2a_1a_2u_0v_0 + a_1^2v_0^2 - 4a_1c^2|a|^2u_0 - 4a_2c^2|a|^2v_0 - 4c^4|a|^4 = 0$$

Ésta es la expresión general de la imagen del punto arbitrario $z_0 = x_0 + ic$, bajo la transformación $w = az^2$ reducida a su forma canónica. Toda vez que se trata de un punto arbitrario z_0, tenemos que todos los puntos $z = x + iy$ pertenecientes a dicha recta se transforman de manera análoga, es decir, la ecuación de su imagen bajo la transformación dada es de la forma:

$$a_2^2u^2 - 2a_1a_2uv + a_1^2v^2 - 4a_1c^2|a|^2u - 4a_2c^2|a|^2v - 4c^4|a|^4 = 0 \qquad (2.5)$$

Por lo tanto, ésta es la expresión global de la transformación, la cual es válida solo si $a_2 \neq 0$.

Desde la perspectiva de la geometría analítica, la expresión (2.5) representa una ecuación general de segundo grado en las variables u y v, es decir, es de la forma:

$$\mathbf{A}u^2 + \mathbf{B}uv + \mathbf{C}v^2 + \mathbf{D}u + \mathbf{E}v + \mathbf{F} = 0,$$

la cual representa una cónica. La clase de cónica representada por dicha ecuación puede determinarse a partir de los coeficientes de los términos de segundo grado, más precisamente por la expresión $\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{AC}$. De manera que si:

a) $\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{AC} < 0$, se tiene una elipse o un punto aislado.

b) $\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{AC} > 0$, se tiene una hipérbola o dos rectas que se cortan.

c) $\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{AC} = 0$, se tiene una parábola, dos rectas paralelas, o una recta.

Así, de (2.5) tenemos que:

$$\mathbf{A} = a_2^2, \qquad \mathbf{B} = -2a_1 a_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = a_1^2.$$

Luego entonces:

$$\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{A}\mathbf{C} = (-2a_1 a_2)^2 - 4a_2^2 a_1^2 = 4a_1^2 a_2^2 - 4a_2^2 a_1^2 = 0.$$

Esto significa que, independientemente del número complejo $a = a_1 + ia_2$ que se tome en la transformación $w = az^2$, a condición de que $a \neq 0$, el discriminante $\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{A}\mathbf{C}$ de la expresión canónica (2.5) resulta idénticamente igual a cero.

Por lo tanto, la imagen de una recta de la familia $y = c$, bajo la transformación $w = az^2$, es una parábola, dos rectas paralelas, o una recta.

Recordemos que al obtener la expresión (2.5) hemos supuesto que $a_2 \neq 0$. De manera que el resultado que acabamos de obtener puede ser enunciado mediante el siguiente

Teorema 1. Sean $a = a_1 + ia_2$ un número complejo tal que $a_2 \neq 0$, y $z = x + ic$ un punto del plano complejo perteneciente a la recta $y = c$, donde c es una constante real: $c \in \mathbf{R}$. Entonces la imagen de dicha recta bajo la transformación $w = az^2$ es una parábola, dos rectas paralelas o una sola recta.

Cabe mencionar que dicho resultado no es propuesto como ejercicio ni enunciado como teorema en los libros de texto que se presentan en el apartado bibliográfico.

Consideremos ahora que $a_2 = 0$, entonces las ecuaciones (2.3) y (2.4) en el caso general se reducen a las expresiones:

$$u = a_1 x^2 - a_1 c^2 \tag{2.6}$$

$$v = 2a_1 cx \tag{2.7}$$

Nuevamente, estas ecuaciones representan la imagen de la recta $y = c$ bajo la transformación $w = a_1 z^2$, donde $a_1 \in \mathbf{R} - \{0$. Estas ecuaciones en las variables u y v dependen de x, es decir, están dadas en función de x. Intentemos eliminarla mediante las siguientes manipulaciones algebraicas.

Despejando x de (2.7) se tiene que $x = \dfrac{v}{2a_1 c}$ lo que es válido solo si $c \neq 0$, luego sustituyendo en (2.6) obtenemos:

$$u = a_1 \frac{v^2}{4a_1^2 c^2} - a_1 c^2 = \frac{v^2}{4a_1 c^2} - a_1 c^2$$

Multiplicando ahora por $4a_1 c^2$ en ambos lados de la expresión anterior concluimos que:

$$4a_1 c^2 u = v^2 - 4a_1^2 c^4$$

de donde obtenemos la expresión canónica:

$$v^2 - 4a_1 c^2 u - 4a_1^2 c^4 = 0 \quad \text{ó bien} \quad v^2 = 4a_1 c^2 (u + a_1 c^2),$$

la cual representa una parábola horizontal con vértice en $\mathbf{V}(-a_1 c^2,0)$. Este resultado podemos expresarlo mediante el siguiente

> **Teorema 2**. La imagen de la recta $y = c$, donde $c \in \mathbf{R} - \{0\}$, bajo la transformación $w = a_1 z^2$, con $a_1 \in \mathbf{R} - \{0$, es una parábola horizontal con vértice en $\mathbf{V}(-a_1 c^2,0)$, y cuya ecuación canónica es $v^2 = 4a_1c^2(u + a_1c^2)$. Si $a_1 > 0$, entonces la parábola se abre hacia la derecha, mientras que si $a_1 < 0$, entonces la parábola se abre hacia la izquierda.

Ejemplo 1.1 Mediante la transformación $w = z^2$ determine cuál es la imagen de la recta horizontal $y = 1$.

Solución. Como $a_1 = 1$ y $c = 1$, entonces al sustituir estos valores en la expresión $v^2 - 4a_1c^2u - 4a_1^2c^4 = 0$ obtenemos la ecuación $v^2 - 4u - 4 = 0$. O sea que la imagen de la recta horizontal $y = 1$ es una parábola horizontal con vértice en $\mathbf{V}(-1,0)$, tal y como lo muestran las imágenes obtenidas en la calculadora, dadas a continuación.

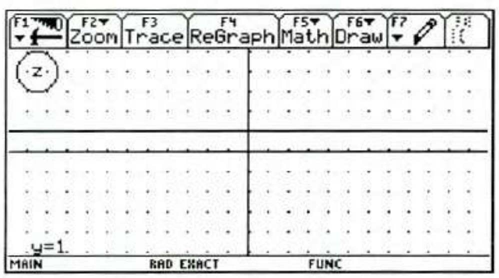


Fig. 1.1(a) Recta $y = 1$ en el plano original z.

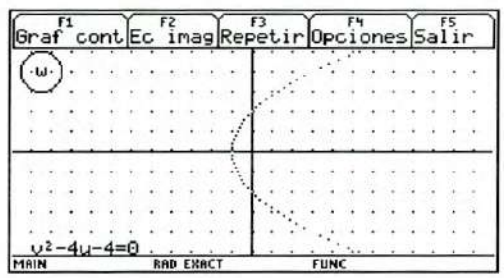


Fig. 1.1(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = z^2$. Se trata de la parábola $v^2 - 4u - 4 = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(-1,0)$

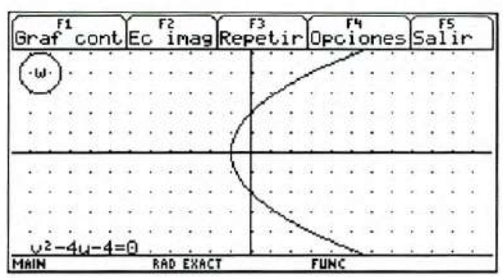


Fig. 1.1(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = z^2$.

Ejemplo 1.2 Mediante la transformación $w = -\dfrac{z^2}{2}$ determine cuál es la imagen de la recta horizontal $y = 1$.

Solución. Como $a_1 = -1/2$ y $c = 1$, entonces al sustituir estos valores en la expresión $v^2 - 4a_1c^2u - 4a_1^2c^4 = 0$ obtenemos la ecuación $v^2 + 2u - 1 = 0$. O sea que la imagen de la recta horizontal $y = 1$ es una parábola horizontal con vértice en $\mathbf{V}(1/2,0)$, tal y como lo muestran las imágenes obtenidas en la calculadora, dadas a continuación.

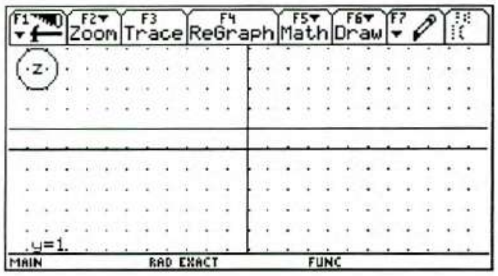


Fig. 1.2(a) Recta $y = 1$ en el plano original z.

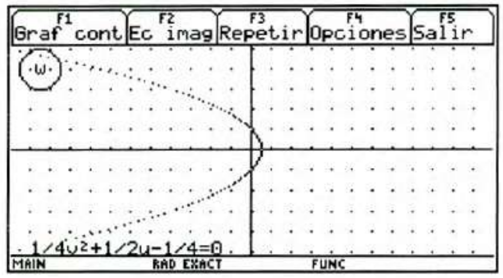


Fig. 1.2(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = -1/2\,z^2$. Se trata de la parábola $v^2 + 2u - 1 = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(1/2,0)$.

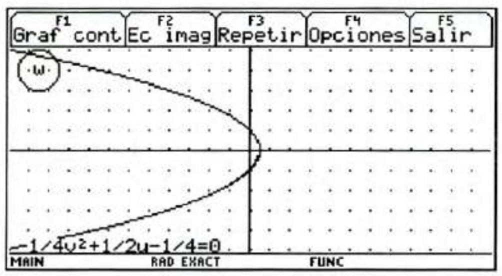


Fig. 1.2(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = -\frac{1}{2}z^2$.

Podemos observar que la ecuación $v^2 + 2u - 1 = 0$ dada en el párrafo anterior no coincide con la ecuación $\frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} = 0$ que se presenta en la pantalla de la calculadora; sin embargo, dichas ecuaciones son equivalentes, solo es necesario multiplicar por 4 a la ecuación descrita en la figura de la imagen para llegar a la ecuación obtenida en la solución. Este hecho es debido a que la calculadora obtiene la ecuación de la imagen utilizando directamente la expresión general (2.5) y no la ecuación del Teorema 2, que es un caso particular.

Al obtener el Teorema 2 hemos supuesto que $a_2 = 0$ y $c \neq 0$. Si ahora aceptamos que $c = 0$, entonces de las ecuaciones (2.6) y (2.7) obtenemos que:

$$u = a_1x^2 \qquad \textbf{(2.8)}$$

$$v = 0 \qquad \textbf{(2.9)}$$

Las ecuaciones (2.8) y (2.9) muestran que los puntos $(x,0)$ y $(-x,0)$, bajo esta transformación, tendrán una misma imagen $w = a_1x^2 + i \cdot 0$, esto implica que el eje horizontal se transforma en un semieje horizontal, de tal manera que si $a_1 > 0$ se obtiene el semieje positivo; en caso contrario se obtiene el semieje negativo. Por consecuencia el resultado anterior puede ser enunciado en el siguiente

Teorema 3. La imagen del eje Ox, bajo la transformación $w = a_1 z^2$, donde $a_1 \in \mathbf{R} - \{0\}$, es el semieje horizontal positivo ($v = 0$, $u \geq 0$) si $a_1 > 0$, mientras que si $a_1 < 0$, entonces se obtiene el semieje horizontal negativo ($v = 0$, $u \leq 0$).

Ejemplo 1.3 Mediante la transformación $w = z^2$ determine cuál es la imagen de la recta horizontal $y = 0$.

Solución. En este caso tenemos que $a = 1$, y por lo tanto $a_1 = 1$, $a_2 = 0$. También tenemos que $c = 0$. Sustituyendo directamente estos valores en las ecuaciones (2.3) y (2.4) obtenemos las ecuaciones (2.8) y (2.9). Estas dos últimas expresiones implican que la ecuación correspondiente de la imagen es $v = 0, u \geq 0$.

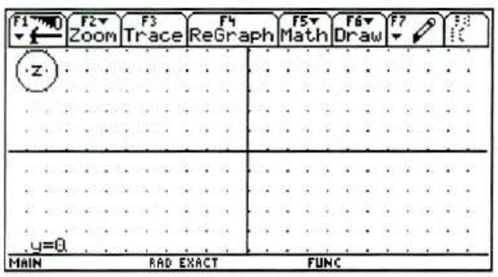


Fig.1.3(a) Recta $y = 0$ en el plano original z. Se trata del eje Ox.

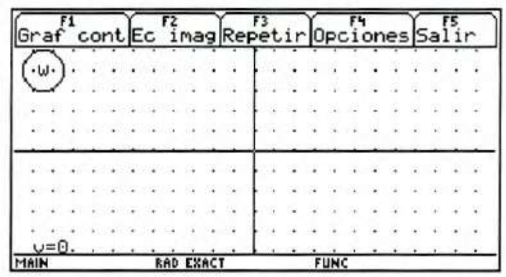


Fig. 1.3(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = 0$ en el plano w bajo la transformación $w = z^2$. Se trata de la semirrecta positiva $v = 0$, $u \geq 0$.

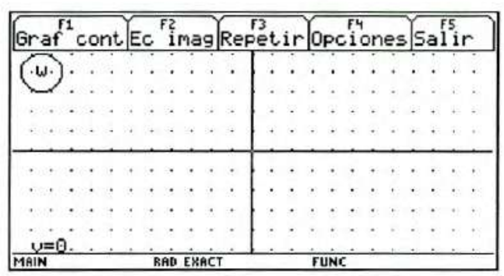


Fig. 1.3(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = 0$ en el plano w, esto es, de la recta $v = 0, u \geq 0$. A diferencia de la imagen dinámica que se muestra durante el proceso de aplicación, esta figura estática no permite distinguir el hecho de que la imagen correspondiente efectivamente es la parte positiva del eje horizontal $O'u$. Esta parte del eje es recorrida primeramente desde $+\infty$ hacia 0, y luego a la inversa, de 0 a $+\infty$.

Ejemplo 1.4. Mediante la transformación $w = -z^2$ determine cuál es la imagen de la recta horizontal $y = 0$.

Solución. En este caso tenemos que $a = -1$, y por lo tanto $a_1 = -1$, $a_2 = 0$. También tenemos que $c = 0$. Sustituyendo directamente estos valores en las ecuaciones (2.3) y (2.4) obtenemos las ecuaciones (2.8) y (2.9). Estas dos últimas expresiones implican que la ecuación correspondiente de la imagen es $v = 0, u \leq 0$.

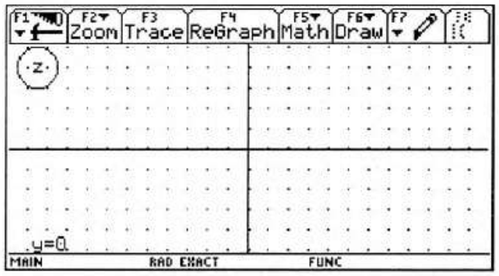
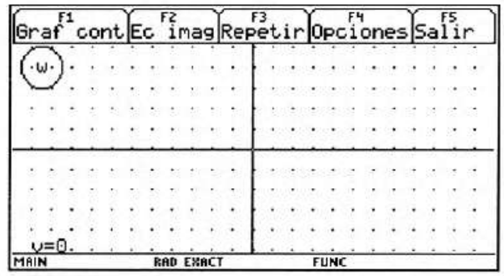
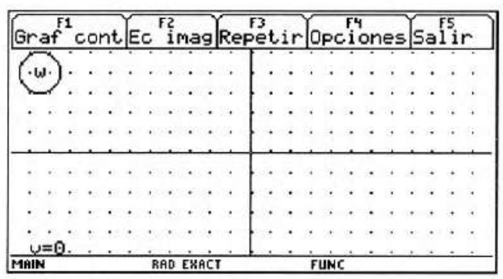


Fig.1.4(a) Recta $y = 0$ en el plano original z. Se trata del eje Ox.



Fíg. 1.4(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = 0$ en el plano w bajo la transformación $w = -z^2$. Se trata de la semirrecta negativa $v = 0$, $u \leq 0$.



Fíg. 1.4(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = 0$ en el plano w, esto es, de la recta $v = 0, u \leq 0$. A diferencia de la imagen dinámica que se muestra durante el proceso de aplicación, esta figura estática no permite distinguir el hecho de que la imagen correspondiente efectivamente es la parte negativa del eje horizontal $O'u$. Esta parte del eje es recorrida primeramente desde $-\infty$ hacia 0, y luego a la inversa, de 0 a $-\infty$.

Por otro lado, si consideramos que $c = 0$, entonces las expresiones (2.3) y (2.4) se reducen a:

$$u = a_1 x^2 \quad \text{y} \quad v = a_2 x^2 .$$

Estas ecuaciones nos indican que los puntos $(x,0)$ y $(-x,0)$ tienen la misma imagen. Luego si dividimos la segunda expresión entre la primera, lo que es válido si $x \neq 0$, concluimos que:

$$v = \frac{a_2}{a_1} u .$$

Además si $x = 0$, entonces las ecuaciones generales (2.1) y (2.2) indican que tanto u como v son cero, por lo tanto, concluimos que el origen se transforma en si mismo, lo cual significa que el origen es un punto fijo bajo la transformación $w = a z^2$.

Todo lo anterior significa que el eje x se transforma en una semirrecta que llega al origen y cuya pendiente es $m = \dfrac{a_2}{a_1}$. Nuevamente tenemos que este resultado puede expresarse a través del siguiente

Teorema 4. La imagen del eje Ox, bajo la transformación $w = a z^2$, donde $a = a_1 + i a_2$, con $a_1, a_2 \in \mathbf{R} - \{0\}$, es la semirrecta $v = \dfrac{a_2}{a_1} u$. La dirección de la semirrecta coincide con la dirección del número complejo a considerado como vector.

Ejemplo 1.5 Mediante la transformación $w = (1+i)z^2$ determine cuál es la imagen de la recta horizontal $y = 0$.

Solución. En este caso tenemos que $a_1 = 1, a_2 = 1$ y $c = 0$, de manera que al sustituir estos valores en la expresión $v = \dfrac{a_2}{a_1} u$ obtenemos la ecuación de la semirrecta $v = u$, $u \geq 0$, ubicada en el primer cuadrante tal y como lo ilustran las imágenes obtenidas en la calculadora.

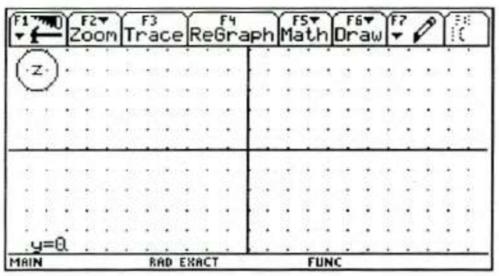


Fig. 1.5(a) Recta $y = 0$ en el plano original z. Se trata del eje horizontal Ox.

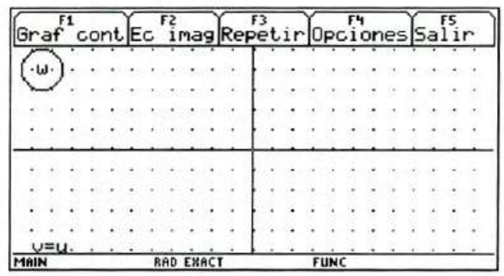


Fig. 1.5(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = 0$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la semirrecta $v = u$, $u \geq 0$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$ es la misma, entonces en la figura solamente se distingue la imagen del origen, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,0)$ avanzando sobre la semirrecta $v = u$, $u \geq 0$, hacia el origen, y después la de los puntos $(x,0)$, avanzando otra vez sobre la semirrecta $v = u$, $u \geq 0$, alejándose del origen y borrando los puntos ya graficados.

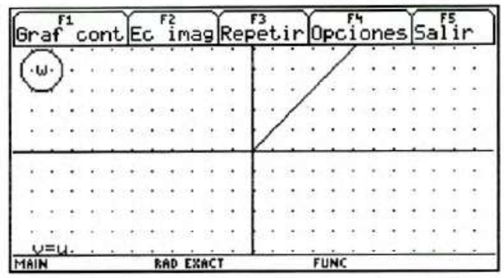


Fig. 1.5(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = 0$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la semirrecta $v = u$, $u \geq 0$. Esta semirrecta es recorrida dos veces: primero, avanzando sobre ella hacia el origen y luego alejándose de él en sentido inverso.

Ejemplo 1.6 Mediante la transformación $w = -(1+i)z^2$ determine cuál es la imagen de la recta horizontal $y = 0$.

Solución. En este caso tenemos que $a_1 = -1, a_2 = -1$ y $c = 0$, de manera que al sustituir estos valores en la expresión $v = \frac{a_2}{a_1}u$ obtenemos la ecuación de la semirrecta $v = u$, $u \leq 0$, ubicada en el tercer cuadrante tal y como lo ilustran las imágenes obtenidas en la calculadora.

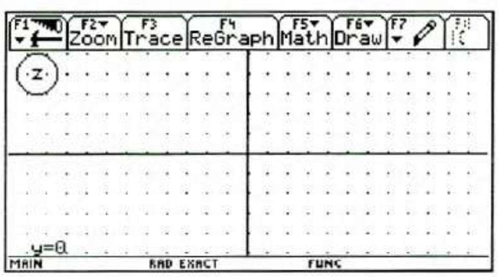


Fig. 1.6(a) Recta $y = 0$ en el plano original z. Se trata del eje horizontal Ox.

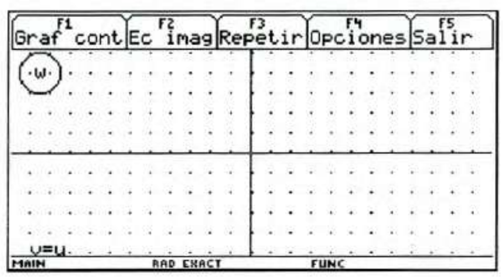


Fig. 1.6(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = 0$ en el plano w bajo la transformación $w = -(1+i)z^2$. Se trata de la semirrecta $v = u$, $u \leq 0$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$ es la misma, entonces en la figura solamente se distingue la imagen del origen, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,0)$ avanzando sobre la semirrecta $v = u$, $u \leq 0$, hacia el origen, y después la de los puntos $(x,0)$, avanzando otra vez sobre la semirrecta $v = u$, $u \leq 0$, alejándose del origen y borrando los puntos ya graficados.

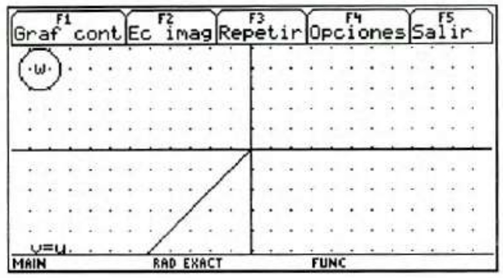


Fig. 1.6(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = 0$ en el plano w bajo la transformación $w = -(1+i)z^2$. Se trata de la semirrecta $v = u$, $u \leq 0$. Esta semirrecta es recorrida dos veces: primero, avanzando sobre ella hacia el origen y luego alejándose de él en sentido inverso.

Por otra parte, si $a_1 = 0$ entonces, las ecuaciones (2.3) y (2.4) se transforman en:

$$u = -2a_2 cx \qquad \textbf{(2.10)}$$

$$v = a_2\left(x^2 - c^2\right) \qquad \textbf{(2.11)}$$

Despejando x de (2.10) tenemos: $x = -\dfrac{u}{2a_2 c}$. Luego sustituyendo en (2.11) obtenemos:

$$v = a_2\left(\frac{u^2}{4a_2^2 c^2} - c^2\right) = \frac{u^2}{4a_2 c^2} - a_2 c^2$$

Multiplicando por $4a_2 c^2$ en ambos lados de la expresión anterior llegamos a:

$$4a_2 c^2 v = u^2 - 4a_2^2 c^4,$$

de donde obtenemos la expresión canónica:

$$u^2 - 4a_2 c^2 v - 4a_2^2 c^4 = 0 \quad \text{ó bien} \quad u^2 = 4a_2 c^2 (v + a_2 c^2),$$

la cual representa una parábola vertical con vértice en $\mathbf{V}(0, -a_2 c^2)$. Así tenemos que este nuevo resultado se puede expresar mediante el siguiente

Teorema 5. La imagen de la recta $y = c$, donde $c \in \mathbf{R} - \{0\}$, bajo la transformación $w = ia_2 z^2$, con $a_2 \in \mathbf{R} - \{0\}$, es una parábola vertical cuya ecuación canónica es $u^2 = 4a_2 c^2 (v + a_2 c^2)$, y cuyo vértice está localizado en el punto $\mathbf{V}(0, -a_2 c^2)$. Si $a_2 > 0$, entonces la parábola se abre hacia arriba, mientras que si $a_2 < 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo.

Ejemplo 1.7 Mediante la transformación $w = iz^2$ determine cuál es la imagen de la recta horizontal $y = 1$.

Solución. En este caso tenemos que $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ y $c = 1$, luego entonces al sustituir dichos valores en la expresión $u^2 - 4a_2 c^2 v - 4a_2^2 c^4 = 0$ obtenemos la ecuación $u^2 - 4v - 4 = 0$, que representa una parábola vertical que abre hacia arriba y cuyo vértice está localizado en el punto $\mathbf{V}(0, -1)$, tal y como lo ilustran las siguientes imágenes obtenidas en la calculadora.

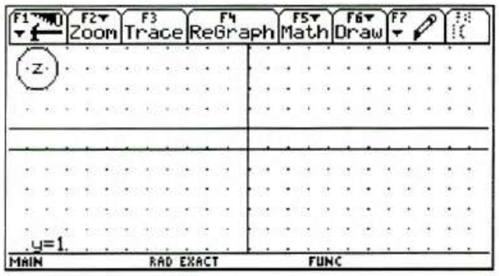


Fig. 1.7(a) Recta $y = 1$ en el plano original z.

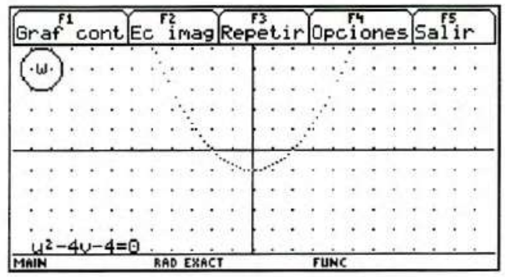


Fig. 1.7(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la parábola $u^2 - 4v - 4 = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(0,-1)$.

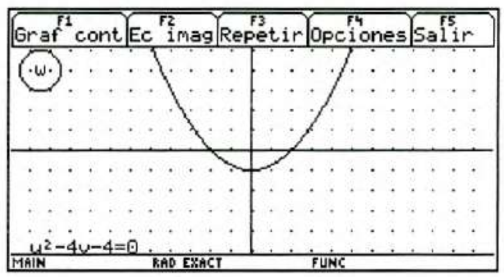


Fig. 1.7(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la parábola $u^2 - 4v - 4 = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(0,-1)$.

Ejemplo 1.8 Mediante la transformación $w = -\dfrac{i}{2}z^2$ determine cuál es la imagen de la recta horizontal $y = 1$.

Solución. En este caso tenemos que $a_1 = 0, a_2 = -1/2$ y $c = 1$, luego entonces al sustituir dichos valores en la expresión $u^2 - 4a_2c^2v - 4a_2^2c^4 = 0$ obtenemos la ecuación $u^2 + 2v - 1 = 0$, que representa una parábola vertical que se abre hacia abajo y cuyo vértice está localizado en el punto $\mathbf{V}(0,1/2)$, tal y como lo ilustran las siguientes imágenes obtenidas en la calculadora.

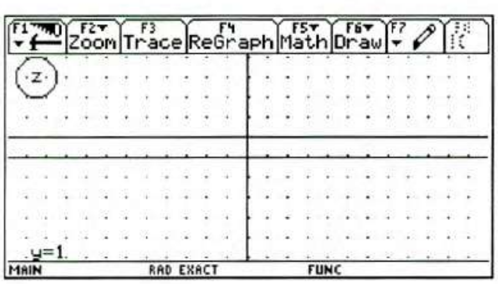


Fig. 1.8(a) Recta $y = 1$ en el plano original z.

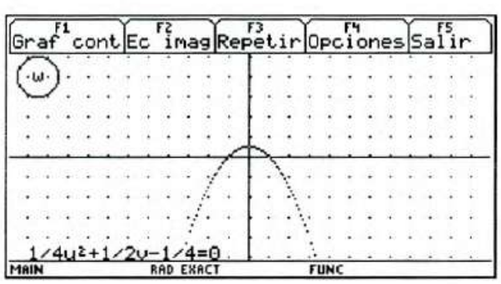


Fig. 1.8(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = -\frac{i}{2}z^2$. Se trata de la parábola $u^2 + 2v - 1 = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(0,1/2)$.

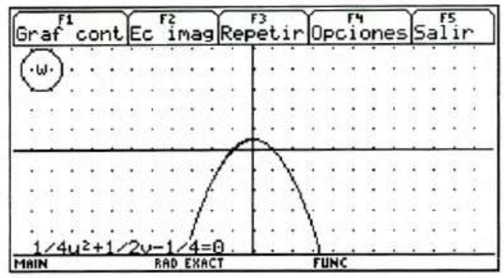


Fig. 1.8(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = -\frac{i}{2}z^2$. Se trata de la parábola $u^2 - 2v - 1 = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(0,1/2)$.

Finalmente, si consideramos que $a_1 = 0$ y $c = 0$, entonces tenemos que:

$$u = 0 \quad \text{y} \quad v = a_2 x^2,$$

estas ecuaciones nos indican que los puntos $(x,0)$ y $(-x,0)$ bajo esta transformación, tendrán una misma imagen $w = 0 + ia_2 x^2$, esto implica que el eje horizontal se transforma en un semieje vertical, de tal manera que si $a_2 > 0$ se obtiene el semieje positivo, en caso contrario se obtiene el semieje negativo. Por consecuencia el resultado podemos expresarlo mediante el siguiente

Teorema 6. La imagen del eje Ox bajo la transformación $w = ia_2 z^2$, donde $a_2 \in \mathbf{R} - \{0\}$, es el semieje vertical positivo si $a_2 > 0$, mientras que si $a_2 < 0$ se obtiene el semieje vertical negativo.

Ejemplo 1.9 Mediante la transformación $w = iz^2$ determine cuál es la imagen de la recta horizontal $y = 0$.

Solución. En este caso tenemos que $a = i$, y por lo tanto $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. También tenemos que $c = 0$. Sustituyendo directamente estos valores en las ecuaciones (2.3) y (2.4) obtenemos las ecuaciones $u = 0$ y $v = x^2$. Estas dos últimas expresiones implican que la ecuación correspondiente de la imagen es $u = 0$, $v \geq 0$: el semieje vertical positivo.

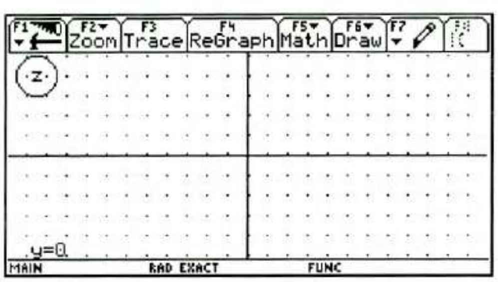


Fig. 1.9(a) Recta $y = 0$ en el plano original z. Se trata del eje horizontal Ox.

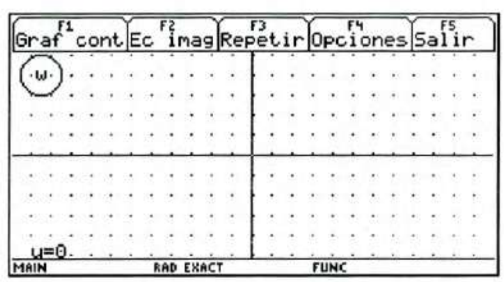
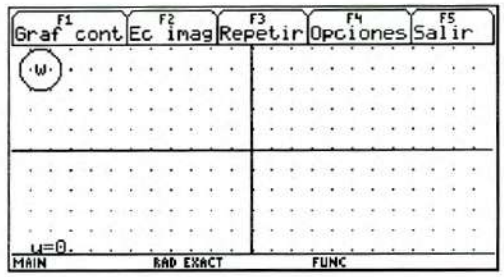


Fig. 1.9(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = 0$ bajo la transformación $w = iz^2$ en el plano w. Se trata de la semirrecta $u = 0$, $v \geq 0$.



Fíg. 1.9(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = 0$ bajo la transformación $w = iz^2$ en el plano w, esto es, la semirrecta $u = 0$, $v \geq 0$. A diferencia de la imagen dinámica que se muestra durante el proceso de aplicación, esta figura estática no permite distinguir el hecho de que la imagen correspondiente es el semieje vertical positivo. Dicho semieje es recorrido primeramente desde $+\infty$ hacia 0, y luego a la inversa, de 0 a $+\infty$.

Ejemplo 1.10 Mediante la transformación $w = -i\,z^2$ determine cuál es la imagen de la recta horizontal $y = 0$.

Solución. En este caso tenemos que $a = -i$, y por lo tanto $a_1 = 0$, $a_2 = -1$. También tenemos que $c = 0$. Sustituyendo directamente estos valores en las ecuaciones (2.3) y (2.4) obtenemos las ecuaciones $u = 0$ y $v = x^2$. Estas dos últimas ecuaciones implican que la ecuación correspondiente de la imagen es $u = 0$, $v \leq 0$: el semieje vertical negativo.

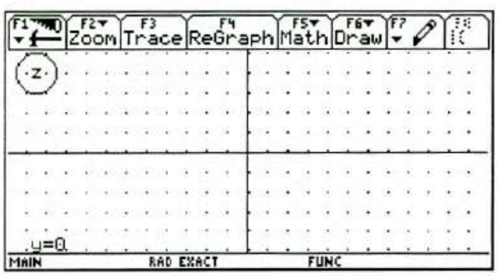


Fig. 1.10(a) Recta $y = 0$ en el plano original z. Se trata del eje horizontal Ox.

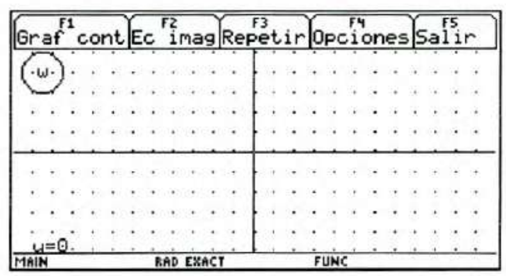


Fig. 1.10(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = 0$ bajo la transformación $w = -iz^2$ en el plano w. Se trata de la semirrecta $u = 0$, $v \leq 0$.

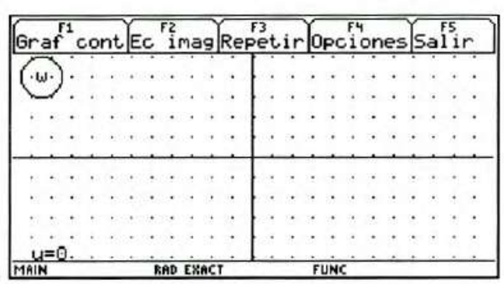


Fig. 1.10(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = 0$ bajo la transformación $w = -iz^2$ en el plano w, esto es, la semirrecta $u = 0$, $v \leq 0$. A diferencia de la imagen dinámica que se muestra

durante el proceso de aplicación, esta figura estática no permite distinguir el hecho de que la imagen correspondiente es el semieje vertical negativo. Dicho semieje es recorrido primeramente desde $-\infty$ hacia 0, y luego a la inversa, de 0 a $-\infty$.

Cabe mencionar que todos los resultados particulares presentados anteriormente, también se obtienen a partir de la ecuación (2.5), realizando las sustituciones correspondientes, como se muestra a continuación.

Por un lado tenemos que cuando $a_2 = 0$ la expresión (2.5) se reduce a:

$$a_1^2 v^2 - 4a_1 c^2 |a|^2 u - 4c^4 |a|^4 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad a_1^2 v^2 - 4a_1^3 c^2 u - 4c^4 a_1^4 = 0$$

Dividiendo primero la ecuación entre a_1^2 $(a_1 \neq 0)$, luego pasando los términos lineal en u e independiente hacia el miembro derecho de la ecuación, y además factorizando $4a_1 c^2$, obtenemos la expresión: $v^2 = 4a_1 c^2 \left(u + a_1 c^2\right)$, la cual representa una parábola horizontal con vértice en $\mathbf{V}\left(-a_1 c^2, 0\right)$ **(Teorema 2)**.

Si además consideramos que $c = 0$, entonces de (2.5) obtenemos: $a_1^2 v^2 = 0$, de donde concluimos que $v = 0$ **(Teorema 3)**.

Si solamente $c = 0$, entonces de (2.5) obtenemos:

$$a_2^2 u^2 - 2a_1 a_2 uv + a_1^2 v^2 = 0$$

Esta expresión es un trinomio cuadrado perfecto, por lo cual se puede factorizar como el binomio al cuadrado $(a_2 u - a_1 v)^2 = 0$. De aquí se sigue que $a_2 u - a_1 v = 0$, luego despejando v, tenemos $v = \dfrac{a_2}{a_1} u$, $a_1 \neq 0$ **(Teorema 4)**.

Por otro lado, si $a_1 = 0$, entonces de (2.5) obtenemos:

$$a_2^2 u^2 - 4a_2 c^2 |a|^2 v - 4c^4 |a|^4 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad a_2^2 u^2 - 4a_2^3 c^2 v - 4a_2^4 c^4 = 0$$

Dividiendo primero la ecuación entre a_2^2, luego pasando los términos lineal en v e independiente, hacia el miembro derecho de la ecuación, y además factorizando $4a_2 c^2$, obtenemos la expresión $u^2 = 4a_2 c^2 \left(v + a_2 c^2\right)$, la cual representa una parábola vertical con vértice en $\mathbf{V}\left(0, -a_2 c^2\right)$ **(Teorema 5)**.

Si además $c = 0$, entonces de (2.5) obtenemos $a_2^2 u^2 = 0$, de donde concluimos que $u = 0$ **(Teorema 6)**.

El hecho de que todos estos resultados particulares puedan ser derivados directamente de la ecuación canónica (2.5), implica que ésta es precisamente la ***ecuación general*** (es decir, que es válida para todos los casos posibles) de la imagen de la recta $y = c$ bajo la transformación

$w = a z^2$, donde $a \in \mathbf{C}, a \neq 0$. Además dicha imagen o es una parábola o es una semirrecta. En virtud de ello, podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 7. Sean $a \in \mathbf{C}, a \neq 0$, y $c \in \mathbf{R}$. Entonces la imagen de la recta horizontal $y = c$ bajo la transformación $w = a z^2$ es una parábola o bien una semirrecta y además la ecuación canónica general (es decir, válida para todos los casos posibles) de la imagen correspondiente es la expresión:

$$a_2^2 u^2 - 2 a_1 a_2 u v + a_1^2 v^2 - 4 a_1 c^2 |a|^2 u - 4 a_2 c^2 |a|^2 v - 4 c^4 |a|^4 = 0$$

Para ilustrar un caso en el cual se obtengan todos los términos que contiene la ecuación general dada en el teorema anterior, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.11 Mediante la transformación $w = (1+i) z^2$ determine la imagen en el plano w de la recta $y = 1/2$ del plano z.

Solución. En este caso tenemos que tanto a_1 como a_2 son iguales a uno, además $c = 1/2$. De manera que al sustituir estos valores en la ecuación general dada en el Teorema 7, obtenemos la expresión $u^2 - 2uv + v^2 - 2u - 2v - 1 = 0$, la cual nos indica que la imagen ya no es una parábola ni vertical ni horizontal (como en los ejemplos 1, 2, 5 y 6), sino más bien es una parábola rotada un ángulo $\theta = \arg a = \pi/4$. Además, las imágenes obtenidas en la calculadora nos ilustran los siguientes resultados:

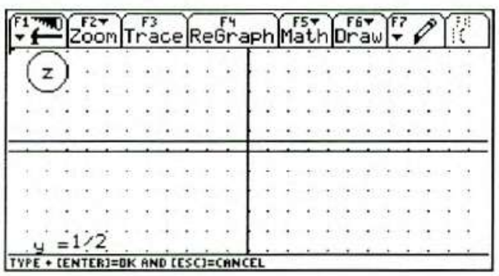


Fig. 1.11(a) Recta $y = 1/2$ en el plano original z.

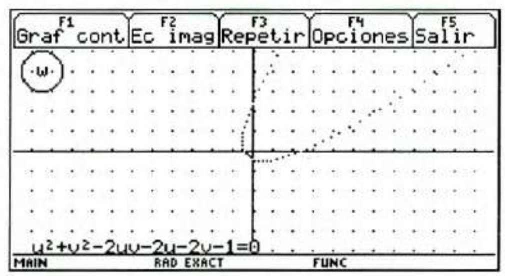


Fig. 1.11(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = 1/2$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$.

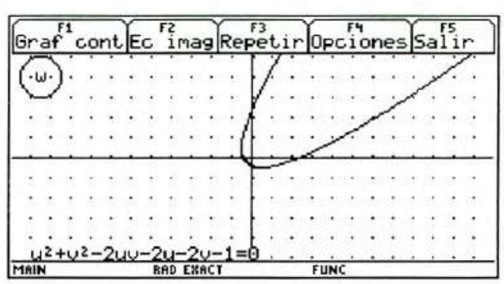


Fig. 1.11(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = 1/2$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$.

2. Rectas verticales $x = c$, $c \in \mathbf{R}$.

Con el fin de analizar la transformación global de una región del plano complejo formada por la recta $x = c$, donde $c \in \mathbf{R}$, procederemos ahora de una manera ligeramente distinta a la que usamos en la sección anterior. Allí tomamos primeramente un punto $z_0 = x_0 + iy_0$ y obtuvimos las coordenadas u_0, v_0 de su imagen, y luego concluimos que las coordenadas u, v de cualquier punto $z = x + iy$ perteneciente a la misma región se obtienen a partir de las mismas fórmulas. Aquí tomaremos directamente un punto arbitrario $z = x + iy$ perteneciente a dicha recta. Este punto, entonces, es de la forma $z = c + iy$, de manera que las ecuaciones generales (2.1) y (2.2) en este caso se reducen a las ecuaciones particulares:

$$u = -a_1 y^2 - 2a_2 cy + a_1 c^2 \qquad \textbf{(2.12)}$$

$$v = -a_2 y^2 + 2a_1 cy + a_2 c^2 \qquad \textbf{(2.13)}$$

Tenemos que las ecuaciones (2.12) y (2.13) están dadas en función de la variable y, es decir, que tanto u como v dependen de y, esto es: $u = f(y)$ y $v = h(y)$. De manera que para obtener la ecuación del lugar geométrico en términos de u y v de la imagen en la cual se transforma la recta $x = c$ a través del mapeo $w = az^2$, podemos llevar a cabo el siguiente procedimiento, con el fin de eliminar la variable y del sistema de ecuaciones (2.13) y (2.14).

De la ecuación (2.13) obtenemos la ecuación de segundo grado en y:

$$a_2 y^2 - 2a_1 cy + (v - a_2 c^2) = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$y = \frac{2a_1 c \pm \sqrt{4a_1^2 c^2 - 4a_2(v - a_2 c^2)}}{2a_2} = \frac{a_1 c \pm \sqrt{c^2(a_1^2 + a_2^2) - a_2 v}}{a_2} = \frac{a_1 c \pm \sqrt{c^2|a|^2 - a_2 v}}{a_2},$$

donde $a_2 \neq 0$.

Sustituyendo estos valores de y en (2.12) obtenemos:

$$u = -a_1\left(\frac{a_1 c \pm \sqrt{c^2|a|^2 - a_2 v}}{a_2}\right)^2 - 2a_2 c\left(\frac{a_1 c \pm \sqrt{c^2|a|^2 - a_2 v}}{a_2}\right) + a_1 c^2$$

Esta es la ecuación que estábamos buscando, de la imagen de la recta $x = c$, bajo la transformación $w = az^2$, expresada en términos de las variables u y v.

Intentemos ahora reducir esta ecuación a su forma canónica, mediante la siguiente serie de manipulaciones algebraicas.

Desarrollando el binomio al cuadrado del primer término y realizando la multiplicación indicada en el segundo término, obtenemos:

$$u = -\frac{a_1}{a_2^2}\left(a_1^2 c^2 \pm 2a_1 c\sqrt{c^2|a|^2 - a_2 v} + c^2|a|^2 - a_2 v\right) - 2a_1 c^2 \mp 2c\sqrt{c^2|a|^2 - a_2 v} + a_1 c^2$$

Luego, desarrollando las multiplicaciones indicadas en el primer término, juntando términos semejantes y factorizando en toda la expresión, tenemos:

$$u=-\frac{a_1c^2}{a_2^2}\left(2a_1^2+a_2^2\right)+\frac{a_1a_2}{a_2^2}v-a_1c^2\mp 2c\left(\frac{a_1^2}{a_2^2}+1\right)\sqrt{c^2|a|^2-a_2v}$$

Agrupando términos semejantes y reacomodando, obtenemos:

$$u=-a_1c^2\left(\frac{2a_1^2}{a_2^2}+1+1\right)+\frac{a_1a_2}{a_2^2}v\mp 2c|a|^2\sqrt{c^2|a|^2-a_2v}$$

Sumando y factorizando en el primer y tercer término, y reacomodando la expresión, tenemos:

$$u=\frac{a_1a_2}{a_2^2}v-\frac{2a_1c^2|a|^2}{a_2^2}\mp\frac{2c|a|^2}{a_2^2}\sqrt{c^2|a|^2-a_2v}$$

Multiplicando por a_2^2 en ambos lados:

$$a_2^2u=a_1a_2v-2a_1c^2|a|^2\mp 2c|a|^2\sqrt{c^2|a|^2-a_2v}$$

Pasando el primero y segundo término del miembro derecho al miembro izquierdo, obtenemos:

$$a_2^2u+(2a_1c^2|a|^2-a_1a_2v)=\mp 2c|a|^2\sqrt{c^2|a|^2-a_2v}$$

Ahora, elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$a_2^4u^2+2a_2^2(2a_1c^2|a|^2-a_1a_2v)u+4a_1^2c^4|a|^4-4a_1^2a_2c^2|a|^2v+a_1^2a_2^2v^2=4c^2|a|^4(c^2|a|^2-a_2v)$$

Pasando el término del miembro derecho al izquierdo, luego desarrollando, factorizando (el tercero y cuarto término del miembro izquierdo con el término del miembro derecho) y reacomodando, llegamos a la expresión:

$$a_2^4u^2+2a_2^2(2a_1c^2|a|^2-a_1a_2v)u+4c^4|a|^4(a_1^2-|a|^2)-4a_2c^2|a|^2(a_1^2-|a|^2)v+a_1^2a_2^2v^2=0$$

Desarrollando las restas indicadas en el tercero y cuarto término, obtenemos:

$$a_2^4u^2+2a_2^2(2a_1c^2|a|^2-a_1a_2v)u+4a_2^3c^2|a|^2v+a_1^2a_2^2v^2-4a_2^2c^4|a|^4=0$$

Por último, dividiendo entre a_2^2 en ambos lados, obtenemos:

$$a_2^2u^2-2a_1a_2uv+a_1^2v^2+4a_1c^2|a|^2u+4a_2c^2|a|^2v-4c^4|a|^4=0 \qquad \textbf{(2.14)}$$

Ésta es la expresión general canónica de la imagen del punto arbitrario $z=x+iy$, perteneciente a la recta $x=c$, bajo la transformación $w=az^2$. Toda vez que se trata de un punto arbitrario z, tenemos que todos los puntos pertenecientes a dicha recta se transforman de manera análoga, y por lo tanto ésta es la expresión global de la transformación, la cual es válida solo si $a_2\neq 0$.

Así como en el caso de rectas horizontales, tenemos que la expresión obtenida en (2.14) es de la forma:

$$\mathbf{A}u^2+\mathbf{B}uv+\mathbf{C}v^2+\mathbf{D}u+\mathbf{E}v+\mathbf{F}=0,$$

con coeficientes:

$$\mathbf{A}=a_2^2,\qquad \mathbf{B}=-2a_1a_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{C}=a_1^2.$$

De manera que:

$$\mathbf{B}^2-4\mathbf{A}\mathbf{C}=(-2a_1a_2)^2-4a_2^2a_1^2=4a_1^2a_2^2-4a_2^2a_1^2=0.$$

Esto significa, de nuevo, que para todo $a \in \mathbf{C}, a \neq 0,$ el discriminante $\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{A}\mathbf{C}$ de la ecuación canónica (2.14) resulta ser idénticamente igual a cero.

Por lo tanto, la imagen de la recta $x = c$, bajo la transformación $w = a z^2$, es una parábola, dos rectas paralelas, o una recta. Consignemos formalmente este resultado importante.

> **Teorema 8**. Sean $a = a_1 + i a_2$ un número complejo tal que $a_2 \neq 0$, y $z = c + i y$ un punto del plano complejo perteneciente a la recta $x = c$, donde $c \in \mathbf{R}$. Entonces la imagen de dicha recta bajo la transformación $w = a z^2$ es una parábola, dos rectas paralelas o una sola recta.

Es importante destacar que este teorema no esta enunciado ni planteado como ejercicio en los libros de texto que aparecen en las referencias bibliográficas citadas en el presente trabajo.

Dado que la expresión (2.14) es válida solo si $a_2 \neq 0$, entonces consideremos ahora que $a_2 = 0$, con ello las ecuaciones (2.12) y (2.13) se reducen a las expresiones:

$$u = -a_1 y^2 + a_1 c^2 \qquad \textbf{(2.15)}$$

$$v = 2a_1 c y \qquad \textbf{(2.16)}$$

Despejando y de (2.16) tenemos que $y = \dfrac{v}{2a_1 c}$, y sustituyendo en (2.15) obtenemos:

$$u = -a_1 \frac{v^2}{4a_1^2 c^2} + a_1 c^2 = -\frac{v^2}{4a_1 c^2} + a_1 c^2$$

Luego multiplicando por $4a_1 c^2$ en ambos lados de la expresión anterior concluimos que:

$$-4a_1 c^2 u = v^2 - 4a_1^2 c^4$$

de donde, obtenemos la expresión:

$$v^2 + 4a_1 c^2 u - 4a_1^2 c^4 = 0 \quad \text{ó bien} \quad v^2 = -4a_1 c^2 (u - a_1 c^2)$$

la cual representa una parábola horizontal con vértice en $\mathbf{V}(a_1 c^2, 0)$.

> **Teorema 9**. La imagen de la recta $x = c$, donde $c \in \mathbf{R} - \{0\}$, bajo la transformación $w = a_1 z^2$, con $a_1 \in \mathbf{R} - \{0\}$, es una parábola horizontal con vértice en $\mathbf{V}(a_1 c^2, 0)$, y cuya ecuación canónica es $v^2 = -4a_1 c^2 (u - a_1 c^2)$. Si $a_1 > 0$, la parábola se abre hacia la izquierda, en caso contrario, la parábola se abre hacia la derecha.

Ejemplo 2.1 Mediante la transformación $w = z^2$ determine cuál es la imagen de la recta vertical $x = 1$.

Solución. En este caso tenemos que $a_1 = 1$ y $c = 1$, de tal manera que al sustituir estos valores en la expresión $v^2 + 4a_1 c^2 u - 4a_1^2 c^4 = 0$ obtenemos la ecuación $v^2 + 4u - 4 = 0$, es decir, que la imagen de la recta vertical $x = 1$ es una parábola horizontal con vértice en el punto $\mathbf{V}(1,0)$, tal y como lo ilustran las imágenes obtenidas en la calculadora:

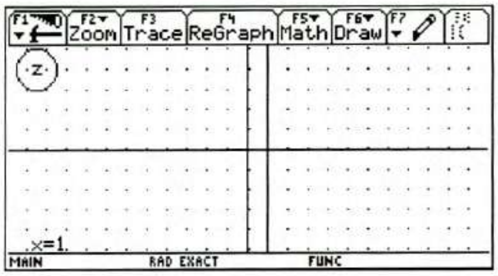


Fig. 2.1(a) Recta $x = 1$ en el plano original z.

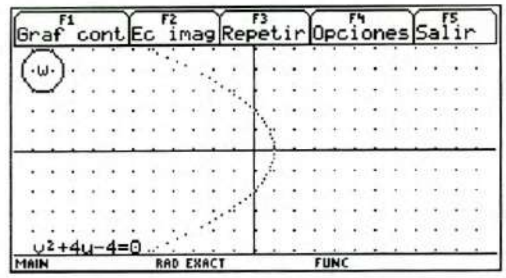


Fig. 2.1(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $x = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = z^2$. Se trata de la parábola $v^2 + 4u - 4 = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(1,0)$.

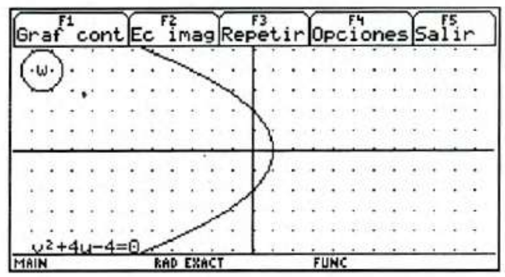


Fig. 2.1(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $x = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = z^2$. Se trata de la parábola $v^2 + 4u - 4 = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(1,0)$.

Ejemplo 2.2 Mediante la transformación $w = -z^2$ determine cuál es la imagen de la recta vertical $x = 1$.

Solución. En este caso tenemos que $a_1 = -1$ y $c = 1$, de tal manera que al sustituir estos valores en la expresión $v^2 + 4a_1c^2u - 4a_1^2c^4 = 0$ obtenemos la ecuación $v^2 - 4u - 4 = 0$, es decir, que la imagen de la recta vertical $x = 1$ es una parábola horizontal con vértice en el punto $\mathbf{V}(-1,0)$, tal y como lo ilustran las imágenes obtenidas en la calculadora

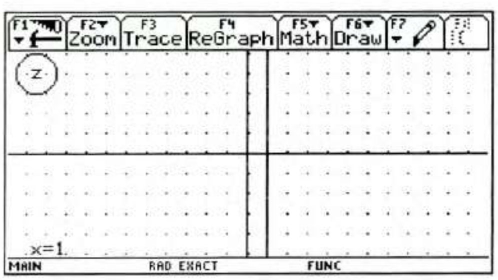


Fig. 2.2(a) Recta $x = 1$ en el plano original z.

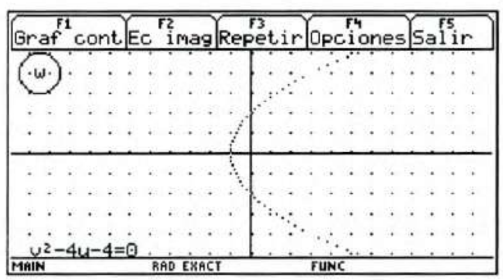


Fig. 2.2(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $x = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = -z^2$. Se trata de la parábola $v^2 - 4u - 4 = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(-1,0)$.

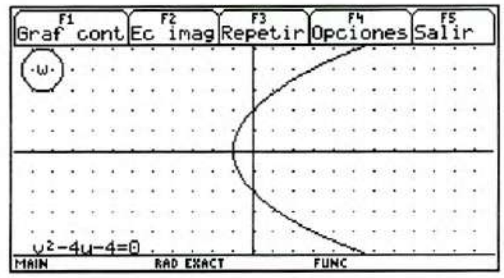


Fig. 2.2(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $x = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = -z^2$. Se trata de la parábola $v^2 - 4u - 4 = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(-1,0)$.

Para obtener el Teorema 9 consideramos que $a_2 = 0$ y $c \neq 0$. De manera que si aceptamos que $c = 0$, entonces de las ecuaciones (2.15) y (2.16) obtenemos que:

$$u = -a_1 y^2 \qquad \textbf{(2.17)}$$

$$v = 0 \qquad \textbf{(2.18)}$$

A partir de las ecuaciones (2.17) y (2.18) podemos concluir que los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$, bajo esta transformación, tendrán una misma imagen $w = -a_1 y^2 + i \cdot 0$, lo cual significa que el eje vertical se transforma en un semieje horizontal, de tal manera que si $a_1 > 0$ se obtiene el semieje negativo, en caso contrario se obtiene el semieje positivo. Por consecuencia el resultado anterior puede ser enunciado en el siguiente

Teorema 10. La imagen del eje Oy, bajo la transformación $w = a_1 z^2$, donde $a_1 \in \mathbf{R} - \{0\}$, es el semieje horizontal negativo si $a_1 > 0$, mientras que si $a_1 < 0$, se obtiene el semieje horizontal positivo.

Ejemplo 2.3 Mediante la transformación $w = z^2$ determine cuál es la imagen de la recta vertical $x = 0$.

Solución. En este caso tenemos que $a = 1$, y por lo tanto $a_1 = 1$, $a_2 = 0$. También tenemos que $c = 0$. Sustituyendo directamente estos valores en las ecuaciones (2.12) y (2.13) obtenemos las ecuaciones $u = -y^2$ y $v = 0$. Estas dos últimas expresiones implican que la ecuación correspondiente de la imagen es la semirrecta $v = 0$, $u \leq 0$.

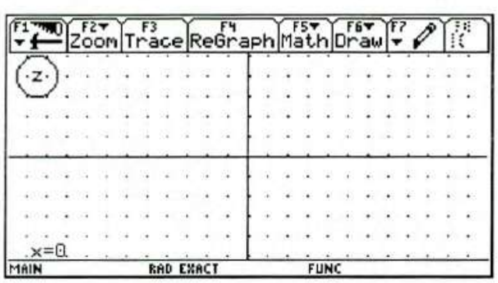


Fig. 2.3 (a) Recta $x = 0$ en el plano original z. Se trata del eje Oy.

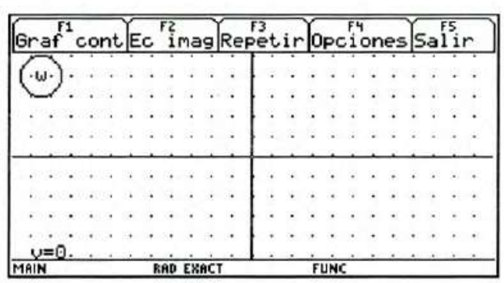


Fig. 2.3(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $x = 0$ en el plano w bajo la transformación $w = z^2$. Se trata de la semirrecta negativa $v = 0$, $u \leq 0$.

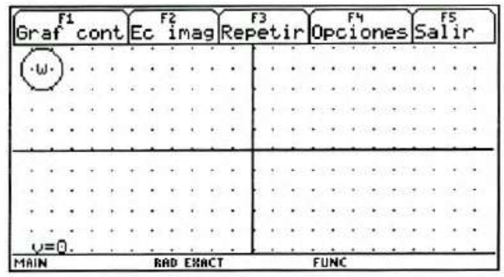


Fig. 2.3(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $x = 0$ en el plano w, esto es, de la recta $v = 0, u \leq 0$. A diferencia de la imagen dinámica que se muestra durante el proceso de aplicación, esta figura estática no permite distinguir el hecho de que la imagen correspondiente efectivamente es el semieje horizontal negativo. Este semieje es recorrido primeramente desde $-\infty$ hacia 0, y luego a la inversa, de 0 a $-\infty$.

Ejemplo 2.4 Mediante la transformación $w = -z^2$ determine cuál es la imagen de la recta vertical $x = 0$.

Solución. En este caso tenemos que $a = -1$, y por lo tanto $a_1 = -1$, $a_2 = 0$. También tenemos que $c = 0$. Sustituyendo directamente estos valores en las ecuaciones (2.12) y (2.13) obtenemos las ecuaciones $u = y^2$ y $v = 0$. Estas dos últimas expresiones implican que la ecuación correspondiente de la imagen es $v = 0, u \geq 0$.

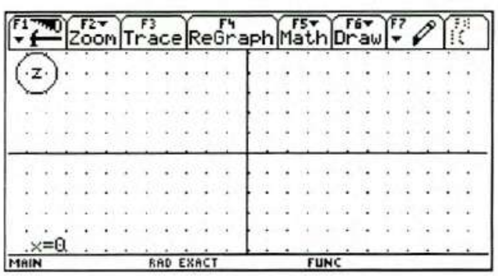


Fig. 2.4 (a) Recta $x = 0$ en el plano original z. Se trata del eje Oy.

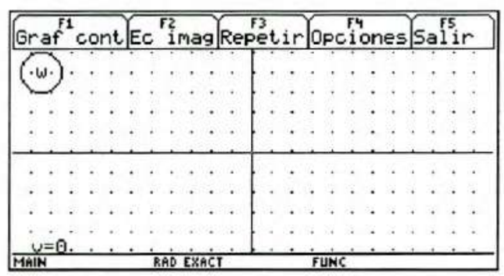


Fig. 2.4(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $x = 0$ en el plano w bajo la transformación $w = -z^2$. Se trata de la semirrecta positiva $v = 0$, $u \geq 0$.

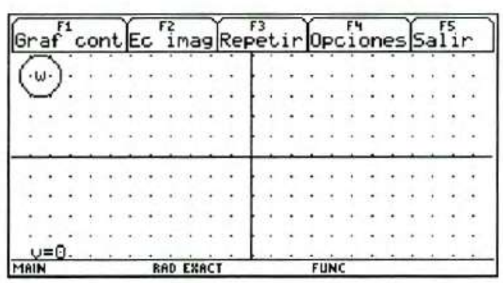


Fig. 2.4(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $x = 0$ en el plano w, esto es, de la recta $v = 0, u \geq 0$. A diferencia de la imagen dinámica

que se muestra durante el proceso de aplicación, esta figura estática no permite distinguir el hecho de que la imagen correspondiente efectivamente es el semieje horizontal negativo. Este semieje es recorrido primeramente desde $+\infty$ hacia 0, y luego a la inversa, de 0 a $+\infty$.

Por otra parte, si consideramos que $c = 0$, entonces de las expresiones (2.12) y (2.13) tenemos que:

$$u = -a_1 y^2 \quad \text{y} \quad v = -a_2 y^2 .$$

Estas ecuaciones nos indican que los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$ tienen la misma imagen. Luego si dividimos la segunda expresión entre la primera, lo que es válido si $y \neq 0$, concluimos que:

$$v = \frac{a_2}{a_1} u .$$

Además si $y = 0$, entonces las ecuaciones generales (2.1) y (2.2) indican que tanto u como v son cero, por lo tanto, concluimos que el origen se transforma en sí mismo. Este hecho ya había sido mostrado en el caso de rectas horizontales.

Todo lo anterior significa que el eje y se transforma en una semirrecta que llega al origen y cuya pendiente es $m = \frac{a_2}{a_1}$. Nuevamente tenemos que este resultado puede expresarse a través del siguiente

Teorema 11. La imagen de eje Oy, bajo la transformación $w = az^2$, donde $a = a_1 + ia_2$, con $a_1, a_2 \in \mathbf{R} - \{0\}$, es la semirrecta $v = \frac{a_2}{a_1} u$. La dirección de la semirrecta es en el sentido contrario al del número complejo a considerado como vector.

Ejemplo 2.5 Mediante la transformación $w = (1+i)z^2$ determine cuál es la imagen de la recta vertical $x = 0$.

Solución. En este caso tenemos que $a_1 = 1, a_2 = 1$ y $c = 0$, de manera que al sustituir estos valores en la expresión $v = \frac{a_2}{a_1} u$ obtenemos la ecuación de la semirrecta $v = u, u \leq 0$, ubicada en el tercer cuadrante, tal y como lo ilustran las imágenes obtenidas en la calculadora.

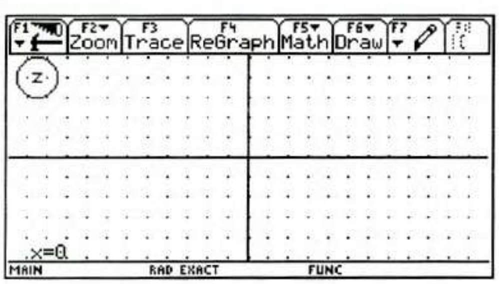


Fig. 2.5 (a) Recta $x = 0$ en el plano original z. Se trata del eje Oy.

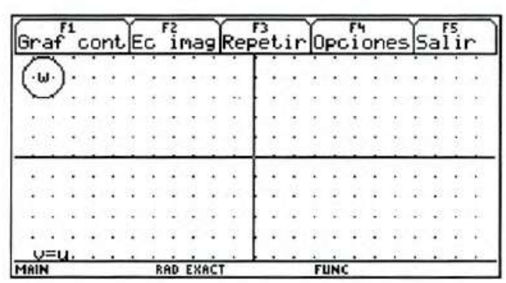


Fig. 2.5(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $x = 0$ en el plano w bajo la transformación

$w = (1+i)z^2$. Se trata de la semirrecta $v = u$, $u \leq 0$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$ es la misma, entonces en la figura solamente se distingue la imagen del origen, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,0)$ avanzando sobre la semirrecta $v = u$, $u \leq 0$ hacia el origen, y después la de los puntos $(x,0)$, avanzando otra vez sobre la semirrecta $v = u$, $u \leq 0$, alejándose del origen y borrando los puntos ya graficados.

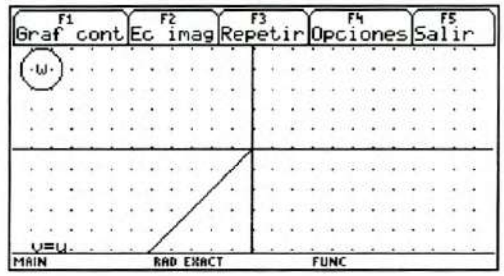


Fig. 2.5(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $x = 0$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la semirrecta $v = u$, $u \leq 0$. Esta semirrecta es recorrida dos veces: primero, avanzando sobre ella hacia el origen, y luego alejándose de él en sentido inverso.

Ejemplo 2.6 Mediante la transformación $w = -(1+i)z^2$ determine cuál es la imagen de la recta vertical $x = 0$.

Solución. En este caso tenemos que $a_1 = -1$, $a_2 = -1$ y $c = 0$, de manera que al sustituir estos valores en la expresión $v = \dfrac{a_2}{a_1}u$ obtenemos la ecuación de la semirrecta $v = u$, $u \geq 0$, ubicada en el primer cuadrante, tal y como lo ilustran las siguientes imágenes obtenidas en la calculadora.

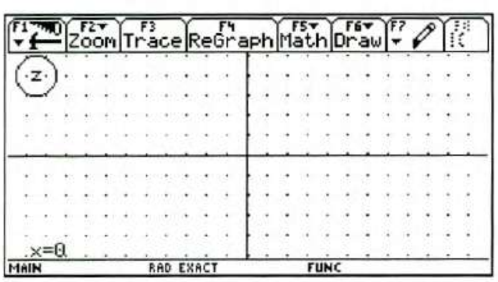


Fig. 2.6 (a) Recta $x = 0$ en el plano original z. Se trata del eje Oy.

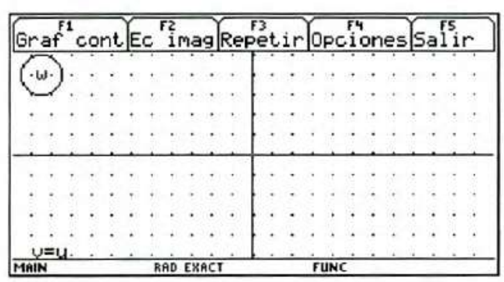


Fig. 2.6(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $x = 0$ en el plano w bajo la transformación $w = -(1+i)z^2$. Se trata de la semirrecta $v = u$, $u \geq 0$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$ es la misma, entonces en la figura solamente se distingue la imagen del origen, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los

puntos $(-x,0)$ avanzando sobre la semirrecta $v = u$, $u \geq 0$ hacia el origen, y después la de los puntos $(x,0)$, avanzando otra vez sobre la semirrecta $v = u$, $u \geq 0$, alejándose del origen y borrando los puntos ya graficados.

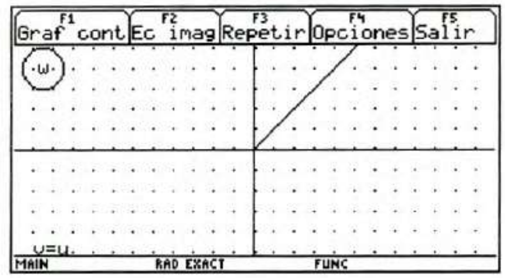


Fig. 2.6(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $x = 0$ en el plano w bajo la transformación $w = -(1+i)z^2$. Se trata de la semirrecta $v = u$, $u \geq 0$. Esta semirrecta es recorrida dos veces: primero, avanzando sobre ella hacia el origen, y luego alejándose de él en sentido inverso.

Por otra parte, si $a_1 = 0$, entonces, las ecuaciones (2.12) y (2.13) se transforman en:

$$u = -2a_2cy \qquad \textbf{(2.19)}$$

$$v = -a_2\left(y^2 - c^2\right) = a_2\left(c^2 - y^2\right) \qquad \textbf{(2.20)}$$

Despejando y de (2.19) tenemos: $y = -\dfrac{u}{2a_2c}$. Luego sustituyendo en (2.20) obtenemos:

$$v = -a_2\left(\frac{u^2}{4a_2^2c^2} - c^2\right) = -\frac{u^2}{4a_2c^2} + a_2c^2$$

Multiplicando por $4a_2c^2$ en ambos lados de la expresión anterior llegamos a:

$$-4a_2c^2v = u^2 - 4a_2^2c^4$$

de donde obtenemos la expresión canónica:

$$u^2 + 4a_2c^2v - 4a_2^2c^4 = 0 \quad \text{o bien} \quad u^2 = -4a_2c^2(v - a_2c^2),$$

la cual representa una parábola vertical con vértice en $\mathbf{V}(0, a_2c^2)$. De hecho, este resultado podemos expresarlo a través del siguiente

Teorema 12. La imagen de la recta $x = c$, donde $c \in \mathbf{R} - \{0\}$, bajo la transformación $w = ia_2z^2$, con $a_2 \in \mathbf{R} - \{0\}$, es una parábola vertical cuya ecuación canónica es $u^2 = -4a_2c^2(v - a_2c^2)$, y cuyo vértice está localizado en el punto $\mathbf{V}(0, a_2c^2)$. Si $a_2 > 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo, mientras que si $a_2 < 0$, entonces la parábola se abre hacia arriba.

Ejemplo 2.7 Mediante la transformación $w = iz^2$ determine cuál es la imagen de la recta vertical $x = 1$.

Solución. En este caso tenemos que $a_1 = 0, a_2 = 1$ y $c = 1$, de manera que al sustituir dichos valores en la expresión $u^2 - 4a_2c^2v - 4a_2^2c^4 = 0$ obtenemos la ecuación $u^2 + 4v - 4 = 0$, que representa una parábola vertical que se abre hacia abajo y cuyo vértice está localizado en el punto $\mathbf{V}(0,1)$, tal y como lo ilustran las siguientes imágenes obtenidas en la calculadora.

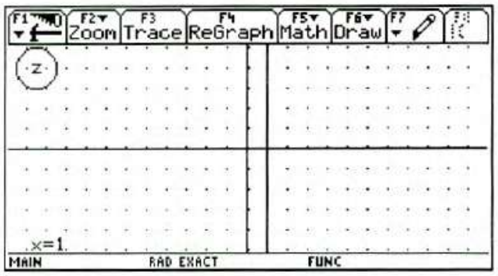


Fig. 2.7(a) Recta $x = 1$ en el plano original z.

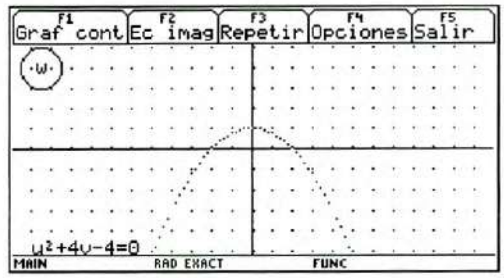


Fig. 2.7(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $x = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la parábola $u^2 + 4v - 4 = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(0,1)$.

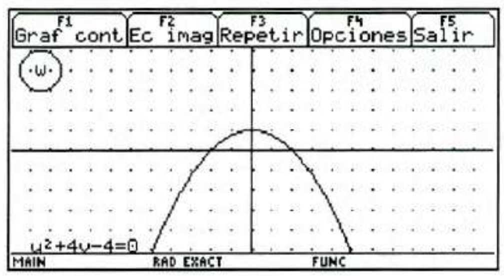


Fig. 2.7(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $x = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la parábola $u^2 + 4v - 4 = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(0,1)$.

Ejemplo 2.8 Mediante la transformación $w = -\frac{i}{3}z^2$ determine cuál es la imagen de la recta vertical $x = 1$.

Solución. En este caso tenemos que $a_1 = 0, a_2 = -1/3$ y $c = 1$, luego entonces al sustituir dichos valores en la expresión $u^2 - 4a_2c^2v - 4a_2^2c^4 = 0$ obtenemos la ecuación $u^2 + \frac{4}{3}v - \frac{4}{9} = 0$, que representa una parábola vertical que se abre hacia arriba y cuyo vértice está localizado en el punto $\mathbf{V}(0,-1/3)$, tal y como lo ilustran las siguientes imágenes obtenidas en la calculadora.

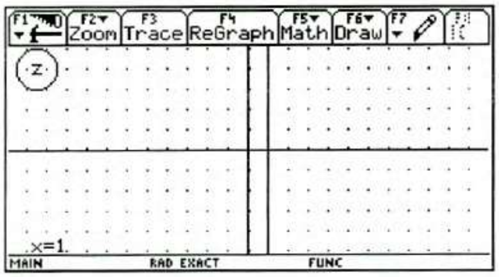


Fig. 2.8(a) Recta $x = 1$ en el plano original z.

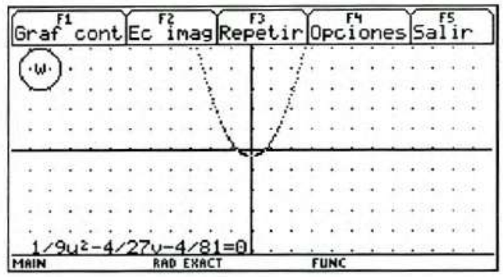


Fig. 2.8(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $x = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = -\frac{i}{3}z^2$ Se trata de la parábola $u^2 + \frac{4}{3}v - \frac{4}{9} = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(0,-1/3)$.

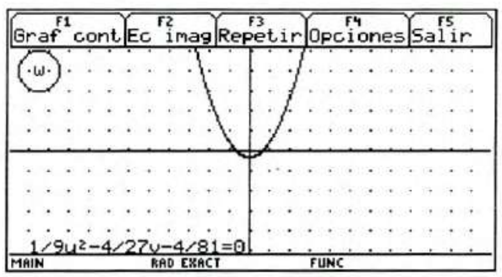


Fig. 2.8(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $x = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = -\frac{i}{3}z^2$ Se trata de la parábola $u^2 + \frac{4}{3}v - \frac{4}{9} = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(0,-1/3)$.

Podemos observar que la ecuación $u^2 + \frac{4}{3}v - \frac{4}{9} = 0$ dada en el párrafo anterior no coincide con la ecuación $\frac{1}{9}u^2 - \frac{4}{27}v - \frac{4}{81} = 0$ que se presenta en la pantalla de la calculadora; sin embargo, dichas ecuaciones son equivalentes, sólo es necesario multiplicar por 9 a la ecuación descrita en la figura de la imagen para llegar a la ecuación obtenida en la solución. Este hecho es debido a que la calculadora obtiene la ecuación de la imagen utilizando directamente la expresión general (2.14) y no la ecuación del Teorema 12, que es un caso particular.

Finalmente, si consideramos que $a_1 = 0$ y $c = 0$, entonces tenemos que:

$$u = 0 \quad \text{y} \quad v = -a_2 y^2,$$

estas ecuaciones nos indican que los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$ bajo esta transformación, tendrán una misma imagen $w = 0 - ia_2 y^2$, esto implica que el eje vertical se transforma en un semieje vertical, de tal manera que si $a_2 > 0$ se obtiene el semieje negativo, en caso contrario se obtiene el semieje positivo. Por consecuencia, el resultado podemos expresarlo mediante el siguiente

Teorema 13. La imagen del eje Oy bajo la transformación $w = ia_2 z^2$, donde $a_2 \in \mathbf{R} - \{0\}$, es el semieje vertical negativo si $a_2 > 0$, mientras que si $a_2 < 0$ se obtiene el semieje vertical positivo.

Ejemplo 2.9 Mediante la transformación $w = iz^2$ determine cuál es la imagen de la recta vertical $x = 0$.

Solución. En este caso tenemos que $a = i$, y por lo tanto $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. También tenemos que $c = 0$. Sustituyendo directamente estos valores en las ecuaciones (2.12) y (2.13) obtenemos las ecuaciones $u = 0$ y $v = -y^2$. Estas dos últimas expresiones implican que la ecuación correspondiente de la imagen es $u = 0, v \leq 0$: el semieje vertical negativo.

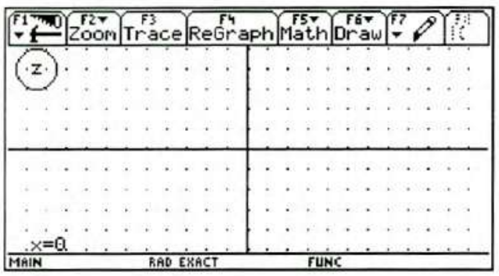


Fig. 2.9(a) Recta $x = 0$ en el plano original z. Se trata del eje vertical Oy.

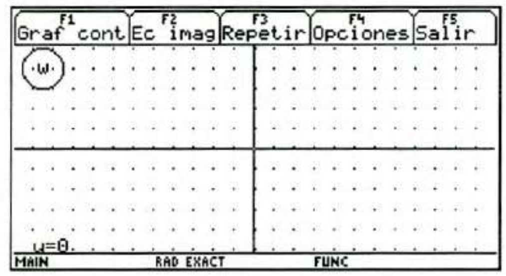


Fig. 2.9(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $x = 0$ bajo la transformación $w = iz^2$ en el plano w. Se trata de la semirrecta $u = 0, v \leq 0$.

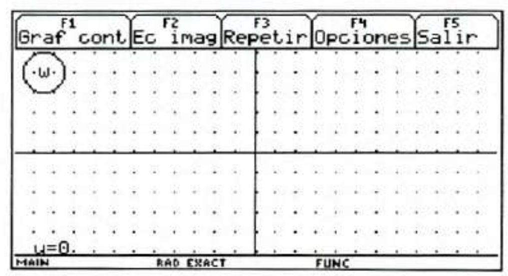


Fig. 2.9(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $x = 0$ bajo la transformación $w = iz^2$ en el plano w, esto es, la semirrecta $u = 0, v \leq 0$. A diferencia de la imagen dinámica que se muestra durante el proceso de aplicación, esta figura estática no permite distinguir el hecho de que la imagen correspondiente efectivamente es el semieje vertical negativo. Dicho semieje es recorrido primeramente desde $-\infty$ hacia 0, y luego a la inversa, de 0 a $-\infty$.

Ejemplo 2.10 Mediante la transformación $w = -iz^2$ determine cuál es la imagen de la recta vertical $x = 0$.

Solución. En este caso tenemos que $a = -i$, y por lo tanto $a_1 = 0$, $a_2 = -1$. También tenemos que $c = 0$. Sustituyendo directamente estos valores en las ecuaciones (2.12) y (2.13) obtenemos las ecuaciones $u = 0$ y $v = y^2$. Estas dos últimas ecuaciones implican que la ecuación correspondiente de la imagen es $u = 0, v \geq 0$: el semieje vertical positivo.

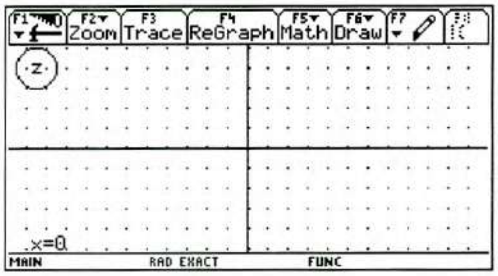


Fig. 2.10(a) Recta $x = 0$ en el plano original z. Se trata del eje vertical Oy.

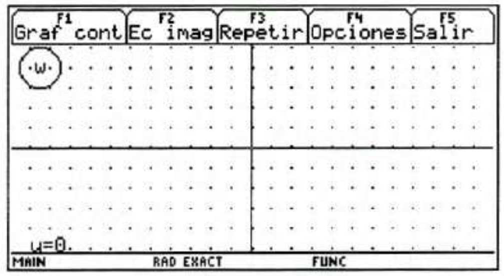


Fig. 2.10 (b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $x = 0$ bajo la transformación $w = -iz^2$ en el plano w. Se trata de la semirrecta $u = 0, v \geq 0$.

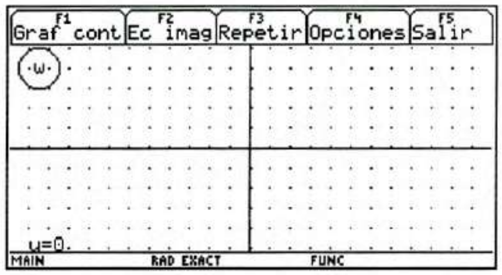


Fig. 2.10(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $x = 0$ bajo la transformación $w = -iz^2$ en el plano w, esto es, la semirrecta $u = 0, v \geq 0$. A diferencia de la imagen dinámica que se muestra durante el proceso de aplicación, esta figura estática no permite distinguir el hecho de que la imagen correspondiente efectivamente es el semieje vertical positivo. Dicho semieje es recorrido primeramente desde $+\infty$ hacia 0, y luego a la inversa, de 0 a $+\infty$.

Al igual que en el caso de las rectas horizontales, los resultados particulares anteriores se obtienen también de la expresión (2.14), al realizar las sustituciones correspondientes.

Por un lado tenemos que cuando $a_2 = 0$, la expresión (2.14) se reduce a:

$$a_1^2 v^2 + 4a_1 c^2 |a|^2 u - 4c^4 |a|^4 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad a_1^2 v^2 + 4a_1^3 c^2 u - 4a_1^4 c^4 = 0$$

Dividiendo primero la ecuación entre a_1^2, luego pasando los términos independiente y lineal en u hacia el miembro derecho de la ecuación, y además factorizando $-4a_1 c^2$, obtenemos la expresión $v^2 = -4a_1 c^2 (u - a_1 c^2)$, la cual representa una parábola horizontal con vértice en $\mathbf{V}(a_1 c^2, 0)$. Esto es lo mismo que ha quedado establecido en el **Teorema 9**.

Si además $c = 0$, entonces de (2.14) obtenemos $a_1^2 v^2 = 0$, de donde concluimos que $v = 0$ (**Teorema 10**).

Sí solamente $c = 0$, entonces de (2.5) obtenemos:

$$a_2^2 u^2 - 2a_1 a_2 uv + a_1^2 v^2 = 0$$

Esta expresión es un trinomio cuadrado perfecto, por lo cual se puede factorizar como el binomio al cuadrado $(a_2 u - a_1 v)^2 = 0$. De aquí se sigue que $a_2 u - a_1 v = 0$, luego despejando v, tenemos $v = \frac{a_2}{a_1} u$, $a_1 \neq 0$ **(Teorema 11)**.

Por otro lado, si $a_1 = 0$, entonces de (2.14) obtenemos:

$$a_2^2 u^2 + 4a_2 c^2 |a|^2 v - 4c^4 |a|^4 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad a_2^2 u^2 + 4a_2^3 c^2 v - 4a_2^4 c^4 = 0$$

Dividiendo primero la ecuación entre a_2^2, luego pasando los términos independiente y lineal en v hacia el miembro derecho de la ecuación, y además factorizando $-4a_2 c^2$, obtenemos la expresión $u^2 = -4a_2 c^2 (v - a_2 c^2)$ la cual representa una parábola vertical con vértice en $\mathbf{V}(0, a_2 c^2)$ **(Teorema 12)**.

Si además, $c = 0$, entonces de (2.14) obtenemos $a_2^2 u^2 = 0$, de donde concluimos que $u = 0$ **(Teorema 13)**.

El hecho de que todos estos resultados particulares puedan ser derivados directamente de la ecuación canónica (2.14), implica que ésta es precisamente la ***ecuación general*** (es decir, que es válida para todos los casos posibles) de la imagen de la recta $x = c$ bajo la transformación $w = az^2$, donde $a \in \mathbf{C}, a \neq 0$. Además, dicha imagen o es una parábola o es una semirrecta. En virtud de ello, podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 14. Sean $a \in \mathbf{C}, a \neq 0$, y $c \in \mathbf{R}$. Entonces la imagen de la recta vertical $x = c$ bajo la transformación $w = az^2$ es una parábola o bien una semirrecta, y además la ecuación canónica general (es decir, válida para todos los casos posibles) de la imagen correspondiente es la expresión:

$$a_2^2 u^2 - 2a_1 a_2 uv + a_1^2 v^2 + 4a_1 c^2 |a|^2 u + 4a_2 c^2 |a|^2 v - 4c^4 |a|^4 = 0$$

Para ilustrar un caso en el cual se obtengan todos los términos que contiene la ecuación general dada en el teorema anterior, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.11 Mediante la transformación $w = (1+i)z^2$ determine cuál es la imagen de la recta vertical $x = 1$.

Solución. En este caso tenemos que tanto a_1 como a_2 son iguales a uno, además $c = 1$. De manera que al sustituir estos valores en la ecuación general dada en el Teorema 14, obtenemos la expresión $u^2 - 2uv + v^2 + 8u + 8v - 16 = 0$, la cual nos indica que la imagen ya no es una parábola ni vertical ni horizontal (como en los ejemplos 2.1, 2.2, 2.7 y 2.8), sino más bien es una parábola rotada un ángulo $\theta = \arg a = \pi/4$. Además, las imágenes obtenidas en la calculadora nos ilustran los siguientes resultados:

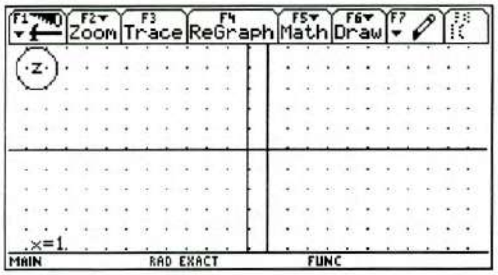


Fig. 2.11(a) Recta $x = 1$ en el plano original z.

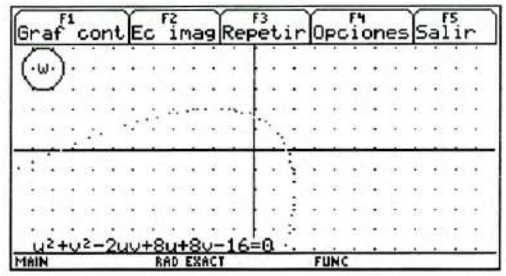


Fig. 2.11(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $x = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$.

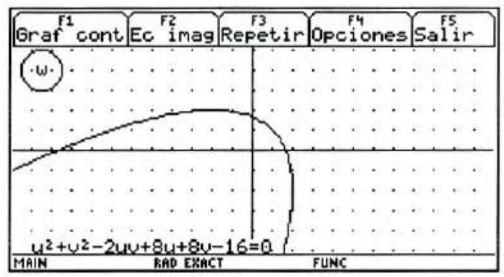


Fig. 2.11(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $x = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$.

3. Rectas oblicuas $y = mx + c, \quad m, c \in \mathbf{R}, m \neq 0.$

Analicemos ahora la transformación global de una región del plano complejo formada por la recta $y = mx + c$, donde $m, c \in \mathbf{R}, m \neq 0$. Para ello tomemos un punto arbitrario $z = x + i\,y$ perteneciente a dicha recta. Este punto, entonces, es de la forma $z = x + i\,(mx + c)$, de manera que:

$$y^2 = (mx + c)^2 = m^2x^2 + 2mcx + c^2.$$
$$xy = x(mx + c) = mx^2 + cx.$$

Sustituyamos estas expresiones en las ecuaciones generales (2.1) y (2.2) para encontrar la imagen correspondiente a dicho punto $z = x + i\,(mx + c)$. Luego de realizar los cálculos y agrupar términos semejantes obtenemos:

$$u = \left(a_1(1 - m^2) - 2a_2m\right)x^2 - 2c(a_1m + a_2)x - a_1c^2 \qquad \textbf{(2.21)}$$
$$v = \left(a_2(1 - m^2) + 2a_1m\right)x^2 + 2c(a_1 - a_2m)x - a_2c^2 \qquad \textbf{(2.22)}$$

Las ecuaciones (2.21) y (2.22) son las ecuaciones particulares de la imagen de la recta $y = mx + c$ bajo la transformación $w = a\,z^2$, las cuales están en función de la variable x. Intentemos llevar estas ecuaciones a su forma canónica, eliminando la variable x. Las manipulaciones algebraicas necesarias para tal efecto son bastante complicadas, y en lo que sigue bosquejamos las principales etapas del proceso y los resultados intermedios.

De (2.22) se obtiene la ecuación de segundo grado en x:

$$\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)x^2+2c\left(a_1-a_2m\right)x-\left(a_2c^2+v\right)=0$$

la cual tiene como soluciones:

$$x=\frac{-c(a_1-a_2m)\pm\sqrt{c^2|a|^2+\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v}}{a_2(1-m^2)+2a_1m};\ \text{ a condición de que } a_2(1-m^2)+2a_1m\neq 0.$$

Ahora sustituyendo en (2.21) estos valores de x tenemos:

$$u=\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)\left(\frac{-c(a_1-a_2m)\pm\sqrt{c^2|a|^2+\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v}}{a_2(1-m^2)+2a_1m}\right)^2$$
$$-2c\left(a_1m+a_2\right)\left(\frac{-c(a_1-a_2m)\pm\sqrt{c^2|a|^2+\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v}}{a_2(1-m^2)+2a_1m}\right)-a_1c^2$$

Esta ecuación ya no contiene al parámetro x, sin embargo, tampoco está reducida a su forma canónica. Por lo cual continuamos desarrollando el siguiente proceso.

Elevando al cuadrado en el primer término y simplificando en el segundo término obtenemos:

$$u=\left(\frac{a_1(1-m^2)-2a_2m}{(a_2(1-m^2)+2a_1m)^2}\right)\left(\begin{array}{l}c^2(a_1^2-2a_1a_2m+a_2^2m^2)\mp 2c(a_1-a_2m)\sqrt{c^2|a|^2+\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v}\\+c^2|a|^2+\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v\end{array}\right)$$
$$+\frac{2c^2(a_1m+a_2)(a_1-a_2m)\mp 2c(a_1m+a_2)\sqrt{c^2|a|^2+\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v}}{a_2(1-m^2)+2a_1m}-a_1c^2$$

Desarrollando las multiplicaciones indicadas en el primer término y factorizando en toda la expresión obtenemos:

$$u=\mp 2c\left(\frac{\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)\left(a_1-a_2m\right)+\left(a_1m+a_2\right)\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)}{\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^2}\right)\sqrt{c^2|a|^2+\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v}$$
$$+\frac{c^2\left(\begin{array}{l}\left(2a_1^2-2a_1a_2m+a_2^2(1+m^2)\right)\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)-a_1\left(a_2^2(1-m^2)^2+4a_1a_2m(1-m^2)+4a_1^2m^2\right)\\+2\left(a_1^2m+a_1a_2(1-m^2)-a_2^2m\right)\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)\end{array}\right)}{\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^2}$$
$$+\frac{a_1(1-m^2)-2a_2m}{a_2(1-m^2)+2a_1m}v$$

Ahora, realizando las multiplicaciones indicadas dentro del primero y segundo paréntesis y reacomodando llegamos a la expresión:

$$u=\frac{\mp 2c\sqrt{c^2|a|^2+\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v}}{\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^2}\begin{pmatrix} a_1^2(1-m^2)-a_1a_2m(1-m^2)-2a_1a_2m+2a_2^2m^2 \\ +a_1a_2m(1-m^2)+2a_1^2m^2+a_2^2(1-m^2)+2a_1a_2m \end{pmatrix}$$

$$\frac{c^2}{\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^2}\begin{pmatrix} 2a_1^3(1-m^2)-4a_1^2a_2m-2a_1^2a_2m(1-m^2)+4a_2^2a_1m^2+a_1a_2^2(1-m^4) \\ -2a_2^3m(1+m^2)+2a_1^2a_2m(1-m^2)+4a_1^3m^2+2a_2^2a_1(1-m^2)^2+4a_1^2a_2m(1-m^2) \\ -2a_2^3m(1-m^2)-4a_1a_2^2m^2-a_1a_2^2(1-m^2)^2-4a_1^2a_2m(1-m^2)-4a_1^3m^2 \end{pmatrix}$$

$$+\frac{a_1(1-m^2)-2a_2m}{a_2(1-m^2)+2a_1m}v$$

Luego, agrupando términos semejantes y factorizando las expresiones m^2 y $1-m^2$, $a_1a_2^2$ y $-2a_2^3m$, en el primero y segundo término respectivamente, obtenemos:

$$u=\frac{\mp 2c\left((1-m^2)|a|^2+2m^2|a|^2\right)\sqrt{c^2|a|^2+\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v}}{\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^2}+\frac{a_1(1-m^2)-2a_2m}{a_2(1-m^2)+2a_1m}v$$
$$+\frac{c^2\left(2a_1^3(1-m^2)-4a_1^2a_2m+a_1a_2^2\left(1-m^4+(1-m^2)^2\right)-2a_2^3m(1+m^2+1-m^2)\right)}{\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^2}$$

Factorizando $|a|^2$ en el primer término y además desarrollando, agrupando términos semejantes y factorizando $2|a|^2$ en el segundo término, resulta que:

$$u=\frac{\mp 2c|a|^2(1+m^2)\sqrt{c^2|a|^2+\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v}}{\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^2}+\frac{a_1(1-m^2)-2a_2m}{a_2(1-m^2)+2a_1m}v$$
$$+\frac{2c^2|a|^2(a_1(1-m^2)-2a_2m)}{\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^2}$$

Multiplicando por $\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^2$ en ambos lados obtenemos:

$$\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^2u=\mp 2c|a|^2(1+m^2)\sqrt{c^2|a|^2+\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v}$$
$$+\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)\left(2c^2|a|^2+\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v\right)$$

Luego se pasa restando el segundo término del miembro derecho de la igualdad hacia el miembro izquierdo, y se eleva al cuadrado en ambos lados, para así obtener:

$$\left(\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^2u-\left(\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)\left(2c^2|a|^2+\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v\right)\right)\right)^2$$
$$=\left(\mp 2c|a|^2(1+m^2)\sqrt{c^2|a|^2+\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v}\right)^2$$

Ahora desarrollando en ambos lados de la igualdad se llega a la expresión:

$$\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^4u^2-2\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^2\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)\left(2c^2|a|^2+\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v\right)u$$
$$+\left(a_1^2(1-m^2)^2-4a_1a_2m(1-m^2)+4a_2^2m^2\right)\begin{pmatrix}4c^4|a|^4+4c^2|a|^2\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v\\ +\left(a_2^2(1-m^2)^2+4a_1a_2m(1-m^2)+4a_1^2m^2\right)v^2\end{pmatrix}$$
$$=4c^4|a|^6\left(1+m^2\right)^2+4c^2|a|^4\left(1+m^2\right)^2\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v$$

Pasando el término del miembro derecho al izquierdo, luego desarrollando y factorizando en los dos últimos términos de este miembro, además haciendo $B=a_2(1-m^2)+2a_1m$ tenemos:

$$B^4u^2-2B^2\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)\left(2c^2|a|^2+Bv\right)u+\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)^2B^2v^2$$
$$+4c^4|a|^4\left(\left(a_1^2(1-2m^2+m^4)-4a_1a_2m(1-m^2)+4a_2^2m^2\right)-\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(1+2m^2+m^4\right)\right)$$
$$+4c^2|a|^2B\left(a_1^2(1-2m^2+m^4)-4a_1a_2m(1-m^2)+4a_2^2m^2-\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(1+2m^2+m^4\right)\right)v=0$$

Desarrollando, agrupando términos semejantes y factorizando en los dos últimos términos de la ecuación obtenemos:

$$B^4u^2-2B^2\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)\left(2c^2|a|^2+Bv\right)u+\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)^2B^2v^2$$
$$+4c^4|a|^4\left(-4a_1^2m^2-4a_1a_2m(1-m^2)-a_2^2(1-m^2)^2\right)$$
$$+4c^2|a|^2B\left(-4a_1^2m^2-4a_1a_2m(1-m^2)-a_2^2(1-m^2)^2\right)v=0$$

Ahora factorizando en los dos últimos términos obtenemos:

$$B^4u^2-2B^2\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)\left(2c^2|a|^2+Bv\right)u+$$
$$\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)^2B^2v^2-4c^4|a|^4B^2-4c^2|a|^2B^3v=0$$

Finalmente, dividiendo entre B^2 se llega al resultado:

$$\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^2u^2-2\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)uv+\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)^2v^2$$
$$-4c^2|a|^2\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)u-4c^2|a|^2\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)v-4c^4|a|^4=0 \qquad \textbf{(2.23)}$$

Ésta es la expresión canónica general de la imagen del punto arbitrario $z=x+iy$, perteneciente a la recta $y=mx+c$, bajo la transformación $w=az^2$. Toda vez que se trata de un punto arbitrario, tenemos que todos los puntos pertenecientes a dicha recta se transforman de manera análoga, y por lo tanto ésta es la expresión global de la transformación, la cual es válida solo si $a_2(1-m^2)+2a_1m\neq 0$.

Al igual que en los casos de las rectas horizontales y verticales, tenemos que la expresión (2.23) representa una ecuación general de segundo orden en las variables u y v. De manera que para determinar qué tipo de curva representa esta ecuación, tenemos que:

$$\mathbf{A}=\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^2$$
$$\mathbf{B}=-2\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)$$
$$\mathbf{C}=\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)^2$$

Luego entonces:

$$\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{AC} = \left(-2\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)\right)^2$$
$$-4\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)^2\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)^2 = 0$$

De aquí se sigue que para todo $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, $\mathbf{B}^2 - 4\mathbf{AC} = 0$, de manera que una recta del tipo $y = mx + c$, bajo la función $w = az^2$, se transforma en una parábola, dos rectas paralelas, ó una recta.

Consignemos de manera formal este resultado importante.

Teorema 15. Sea $a = a_1 + i a_2$ un número complejo arbitrario distinto de cero. Sea también $z = x + i(mx + c)$ un punto del plano complejo perteneciente a la recta $y = mx + c$ donde $m, c \in \mathbf{R}$ y $m \neq 0$, tales que satisfagan la condición $a_2(1-m^2) + 2a_1m \neq 0$. Entonces la imagen de dicha recta bajo la transformación $w = a z^2$ es una parábola, dos rectas paralelas o una sola recta.

Dicho resultado no aparece demostrado ni propuesto como ejercicio en los libros de texto que se encuentran en el apartado de bibliografía del presente trabajo.

Dado que la expresión (2.23) es válida a condición de que $a_2(1-m^2) + 2a_1m \neq 0$, consideremos entonces que $a_2(1-m^2) + 2a_1m = 0$. Por lo que las ecuaciones particulares obtenidas para este caso a partir de (2.21) y (2.22) son las siguientes:

$$u = \left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)x^2 - 2c\left(a_1m + a_2\right)x - a_1c^2 \qquad \textbf{(2.24)}$$
$$v = 2c\left(a_1 - a_2m\right)x - a_2c^2 \qquad \textbf{(2.25)}$$

Despejando x de la ecuación (2.25) tenemos:

$$x = \frac{v + a_2c^2}{2c\left(a_1 - a_2m\right)}, \quad \text{siempre que} \quad c(a_1 - a_2m) \neq 0.$$

Luego, sustituyendo en la ecuación (2.24), obtenemos:

$$u = \left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)\left(\frac{v + a_2c^2}{2c\left(a_1 - a_2m\right)}\right)^2 - 2c\left(a_1m + a_2\right)\left(\frac{v + a_2c^2}{2c\left(a_1 - a_2m\right)}\right) - a_1c^2$$

Esta expresión representa la ecuación general de la imagen del punto arbitrario $z = x + i(mx + c)$ bajo la transformación conforme $w = a z^2$ cuando $a_2(1-m^2) + 2a_1m = 0$ y $c(a_1 - a_2m) \neq 0$. Reduzcamos esta ecuación a su forma canónica.

Desarrollando el producto notable del primer término y simplificando en el segundo, tenemos:

$$u = \frac{\left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)\left(v^2 + 2a_2c^2v + a_2^2c^4\right)}{4c^2\left(a_1 - a_2m\right)^2} - \frac{\left(a_1m + a_2\right)\left(v + a_2c^2\right)}{a_1 - a_2m} - a_1c^2$$

Desarrollando las multiplicaciones indicadas en el primer y segundo término, luego juntando términos semejantes y simplificando, obtenemos:

$$\begin{aligned} u = &\frac{\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)}{4c^2\left(a_1-a_2m\right)^2}v^2+\frac{\left(a_2\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)-2\left(a_1m+a_2\right)\left(a_1-a_2m\right)\right)}{2\left(a_1-a_2m\right)^2}v \\ &+\frac{c^2\left(a_2^2\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)-4a_2\left(a_1m+a_2\right)\left(a_1-a_2m\right)-4a_1\left(a_1-a_2m\right)^2\right)}{4\left(a_1-a_2m\right)^2} \end{aligned}$$

Realizando las multiplicaciones del numerador del término lineal en v y factorizando $4(a_1-a_2m)$ en el numerador del término independiente, tenemos:

$$\begin{aligned} u = &\frac{\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)}{4c^2\left(a_1-a_2m\right)^2}v^2+\frac{\left(a_1a_2-a_1a_2m^2-2a_2^2m-2a_1^2m+2a_1a_2m^2-2a_1a_2+2a_2^2m\right)}{2\left(a_1-a_2m\right)^2}v \\ &+\frac{c^2\left(a_2^2\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)-4\left(a_1-a_2m\right)\left(a_2\left(a_1m+a_2\right)+a_1\left(a_1-a_2m\right)\right)\right)}{4\left(a_1-a_2m\right)^2} \end{aligned}$$

Juntando términos semejantes en el término en v, además realizando la multiplicación indicada en el segundo factor del segundo término del numerador del coeficiente independiente, obtenemos:

$$\begin{aligned} u = &\frac{\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)}{4c^2\left(a_1-a_2m\right)^2}v^2+\frac{\left(-a_1a_2+a_1a_2m^2-2a_1^2m\right)}{2\left(a_1-a_2m\right)^2}v \\ &+\frac{c^2\left(a_2^2\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)-4\left(a_1-a_2m\right)\left(a_1^2+a_2^2\right)\right)}{4\left(a_1-a_2m\right)^2} \end{aligned}$$

Factorizando consecutivamente $-a_1$ y a_2 en el término lineal en v y realizando las multiplicaciones indicadas en el término independiente, tenemos:

$$\begin{aligned} u = &\frac{\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)}{4c^2\left(a_1-a_2m\right)^2}v^2+\frac{\left(-a_1\left(a_2(1-m^2)+2a_1m\right)\right)}{2\left(a_1-a_2m\right)^2}v \\ &+\frac{c^2\left(a_1a_2^2(1-m^2)-2a_2^3m-4a_1^3+4a_1^2a_2m-4a_1a_2^2+4a_2^3m\right)}{4\left(a_1-a_2m\right)^2} \end{aligned}$$

Si multiplicamos toda la ecuación por $4c^2\left(a_1-a_2m\right)^2$, pero si además en el término independiente reacomodamos, juntamos términos semejantes y descomponemos el término $4a_1^2a_2m$ como $2a_1^2a_2m+2a_1^2a_2m$, como además tenemos que $a_2(1-m^2)+2a_1m=0$, entonces la ecuación se transforma en:

$$\begin{aligned} 4c^2\left(a_1-a_2m\right)^2u = &\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)v^2 \\ &+c^4\left(a_1a_2^2(1-m^2)+2a_1^2a_2m+2a_1^2a_2m-4a_1^3+2a_2^3m-4a_1a_2^2\right) \end{aligned}$$

Desarrollando el binomio del término lineal en u; luego si en el término independiente se factoriza a_1a_2, $2a_1^2$ y $2a_2^2$, en la primera, segunda y tercera pareja de términos respectivamente, llegamos a:

$$4c^2\left(a_1^2 - 2a_1a_2m + a_2^2m^2\right)u = \left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)v^2$$
$$+ c^4\left(a_1a_2\left(a_2(1-m^2) + 2a_1m\right) + 2a_1^2\left(a_2m - 2a_1\right) + 2a_2^2\left(a_2m - 2a_1\right)\right)$$

Sumando y restando a_2^2 en el término lineal en u; luego factorizando $2(a_2m - 2a_1)$ en el término independiente, y además como $a_2(1-m^2) + 2a_1m = 0$, obtenemos:

$$4c^2\left(a_1^2 - 2a_1a_2m + a_2^2m^2 - a_2^2 + a_2^2\right)u = \left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)v^2 + 2c^4\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(a_2m - 2a_1\right)$$

Si en el término en u factorizamos $-a_2$ en $-2a_1a_2m$, $a_2^2m^2$ y $-a_2^2$, luego multiplicamos toda la expresión por $\left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)$ y reacomodamos, obtenemos:

$$4c^2\left(a_1^2 + a_2^2 - a_2\left(a_2(1-m^2) + 2a_1m\right)\right)\left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)u = \left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)^2 v^2$$
$$+ 2c^4|a|^2\left(a_2m - 2a_1\right)\left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)$$

Desarrollando la multiplicación indicada en el término independiente y considerando además que $a_2(1-m^2) + 2a_1m = 0$, entonces obtenemos:

$$4c^2\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)u = \left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)^2 v^2$$
$$+ 2c^4|a|^2\left(a_1a_2m - a_1a_2m^3 - 2a_2^2m^2 - 2a_1^2 + 2a_1^2m^2 + 4a_1a_2m\right)$$

Factorizando a_1m y a_2 consecutivamente en los términos a_1a_2m, $-a_1a_2m^3$ y $2a_1^2m^2$ del coeficiente del término independiente, obtenemos:

$$4c^2|a|^2\left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)u = \left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)^2 v^2$$
$$+ 2c^4|a|^2\left(a_1m\left(a_2(1-m^2) + 2a_1m\right) - 2a_2^2m^2 - 2a_1^2 + 4a_1a_2m\right)$$

Sumando y restando $2a_2^2$ en el término independiente y como $a_2(1-m^2) + 2a_1m = 0$, entonces tenemos:

$$4c^2|a|^2\left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)u = \left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)^2 v^2$$
$$+ 2c^4|a|^2\left(-2a_2^2m^2 - 2a_1^2 + 4a_1a_2m + 2a_2^2 - 2a_2^2\right)$$

Ahora factorizando en el coeficiente independiente -2 en los términos $-2a_1^2$ y $-2a_2^2$, también $2a_2$ y a_2 consecutivamente en los términos $-2a_2^2m^2$, $4a_1a_2m$, $2a_2^2$, luego reacomodando, obtenemos:

$$4c^2|a|^2\left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)u = \left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)^2 v^2$$
$$+ 2c^4|a|^2\left(-2\left(a_1^2 + a_2^2\right) + 2a_2\left(a_2(1-m^2) + 2a_1m\right)\right)$$

Finalmente, pasando el término del miembro izquierdo hacia el miembro derecho, además teniendo en cuenta que $a_2(1-m^2)+2a_1m=0$, obtenemos la ecuación:

$$\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)^2v^2-4c^2|a|^2\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)u-4c^4|a|^4=0$$

o bien:

$$v^2=\frac{4c^2|a|^2\left(\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)u+c^2|a|^2\right)}{\left(a_1(1-m^2)-2a_2m\right)^2}$$

De este modo, hemos obtenido la ecuación canónica general de la imagen del punto arbitrario $z=x+i(mx+c)\ (m,c\in\mathbf{R},m\neq 0)$ bajo la transformación $w=az^2$, cuando $a_2(1-m^2)+2a_1m=0$ y $c(a_1-a_2m)\neq 0$ Se trata de la ecuación de una parábola horizontal con vértice en $\mathbf{V}\left(-\dfrac{c^2|a|^2}{a_1(1-m^2)-2a_2m},0\right)$. Es importante mencionar que dicha ecuación también se obtiene al sustituir directamente la condición $a_2(1-m^2)+2a_1m=0$ en la ecuación (2.23).

Teorema 16. La imagen de la recta $y=mx+c$, donde $m,c\in\mathbf{R}-\{0\}$, bajo la transformación $w=az^2$, cuando $a_2(1-m^2)+2a_1m=0$ y $c(a_1-a_2m)\neq 0$ es una parábola horizontal con vértice en el punto $\mathbf{V}\left(-\dfrac{c^2|a|^2}{a_1(1-m^2)-2a_2m},0\right)$ y cuya ecuación canónica es

$$v^2=\frac{4c^2|a|^2}{a_1(1-m^2)-2a_2m}\left(u+\frac{c^2|a|^2}{a_1(1-m^2)-2a_2m}\right).$$

Dado que en el resultado anterior se tiene la condición $c(a_1-a_2m)\neq 0$, entonces podría pensarse que las condiciones $a_2(1-m^2)+2a_1m=0$ y $c(a_1-a_2m)=0$ generan un caso especial. Pero para verificar si este hecho es cierto analicemos lo siguiente. Primeramente dado que $a_1^2+a_2^2\neq 0$ la condición $a_2(1-m^2)+2a_1m=0$ se cumple únicamente en los siguientes casos:

i. Si $a_2=0$ y $m=0$.
ii. Si $a_1=0$ y $m=\pm 1$.
iii. Si $m=\dfrac{a_1\pm|a|}{a_2}$; $a_2\neq 0$.

Luego entonces para la expresión $c(a_1-a_2m)$ se tienen las siguientes conclusiones:

a) Si $a_2=0$ y $m=0$, entonces $c(a_1-a_2m)=a_1c$
b) Si $a_1=0$ y $m=\pm 1$, entonces $c(a_1-a_2m)=\mp a_2c$
c) Si $m=\dfrac{a_1\pm|a|}{a_2}$; $a_1\neq 0$ y $a_2\neq 0$, entonces $c(a_1-a_2m)=\mp c|a|$.

Con base en lo expuesto anteriormente, podemos concluir que la condición $c(a_1 - a_2 m) = 0$ se cumple solamente si $c = 0$. Esta situación genera un caso especial, el cual expondremos más adelante. Por consiguiente, podemos concluir que si $c \neq 0$ las condiciones $a_2(1-m^2) + 2a_1 m = 0$ y $c(a_1 - a_2 m) = 0$ no se cumplen simultáneamente y por lo tanto no generan otro caso especial. Sin embargo, debemos verificar qué ocurre en cada una de las situaciones que se originan cuando se cumple la condición $a_2(1-m^2) + 2a_1 m = 0$. Para ello tenemos el siguiente desarrollo.

Primeramente, consideremos que $a_2 = 0$ y $m = 0$ (lógicamente $a_1 \neq 0$), a partir de estas condiciones tenemos que la recta a mapear es una recta horizontal $(y = c)$ bajo la transformación $w = a_1 z^2$, de manera que este es un caso ya estudiado en el apartado de rectas horizontales. De hecho la imagen resultante en este caso es una parábola horizontal (véase el **Teorema 2**, ejemplos 1 y 2).

Ahora analicemos el resultado que se obtiene al tomar la segunda de las condiciones, es decir, cuando $a_1 = 0$ y $m = \pm 1$. En este caso tenemos que al sustituir estas condiciones en las ecuaciones particulares (2.24) y (2.25), obtenemos las nuevas ecuaciones:

$$u = \mp 2a_2 x^2 - 2a_2 cx$$
$$v = \mp 2a_2 cx - a_2 c^2$$

Con el fin de eliminar la variable x y de llevar a la forma canónica la ecuación de la imagen resultante en este caso desarrollemos el siguiente trabajo.

Despejando x de la segunda ecuación anterior obtenemos:

$$x = \frac{v + a_2 c^2}{\mp 2a_2 c}$$

Luego sustituyendo en la primera ecuación tenemos:

$$u = \mp 2a_2 \left(\frac{v + a_2 c^2}{\mp 2a_2 c} \right)^2 - 2a_2 c \left(\frac{v + a_2 c^2}{\mp 2a_2 c} \right)$$

Desarrollando el binomio al cuadrado en el primer término, realizando la multiplicación indicada en el segundo término del miembro derecho y simplificando obtenemos:

$$u = \mp \frac{1}{2a_2 c^2} \left(v^2 + 2a_2 c^2 v + a_2^2 c^4 \right) \pm v \pm a_2 c^2$$

Realizando la multiplicación indicada en el primer término, luego simplificando y juntando términos semejantes, tenemos:

$$u = \mp \frac{1}{2a_2 c^2} v^2 \pm \frac{a_2 c^2}{2}$$

Pasando el término en u del miembro izquierdo de la ecuación hacia el miembro derecho, además multiplicando la ecuación por $2a_2 c^2$ obtenemos:

$$\mp v^2 - 2a_2 c^2 u \pm a_2^2 c^4 = 0$$

Finalmente multiplicando la ecuación por ∓ 1 obtenemos:

$$v^2 \pm 2a_2c^2u - a_2^2c^4 = 0 \qquad \text{o bien} \qquad v^2 = \mp 2a_2c^2\left(u \mp \frac{a_2c^2}{2}\right)$$

Tal ecuación representa una parábola horizontal con vértice en $\mathbf{V}\left(\pm\dfrac{a_2c^2}{2}, 0\right)$.

Podemos ahora formalizar este resultado en el siguiente teorema.

Teorema 17. La imagen de la recta $y = \pm x + c$, donde $c \in \mathbf{R} - \{0\}$, bajo la transformación $w = ia_2z^2$, con $a_2 \in \mathbf{R} - \{0\}$, es una parábola horizontal con vértice en $\mathbf{V}\left(\pm\dfrac{a_2c^2}{2}, 0\right)$ y cuya ecuación canónica es $v^2 = \mp 2a_2c^2\left(u \mp \dfrac{a_2c^2}{2}\right)$. Si m y a_2 tienen signos iguales la parábola abre hacia la izquierda, pero si tienen signos contrarios abre hacia la derecha.

Nota. *Este resultado también se obtiene a partir de la ecuación (2.23) sustituyendo directamente los valores de* $a_1 = 0$ y $m = \pm 1$.

Ejemplo 3.1 Mediante la transformación $w = iz^2$ determine cuál es la imagen de la recta oblicua $y = x + 1$.

Solución. Aquí tenemos que $a_2 = 1$ y $c = 1$, de tal manera que al sustituir estos valores en la expresión $v^2 \pm 2a_2c^2u - a_2^2c^4 = 0$ obtenemos la ecuación $v^2 + 2u - 1 = 0$, es decir, la imagen resultante es una parábola horizontal con vértice en el punto $(1/2, 0)$, tal y como lo muestran las figuras 3.1(b) y 3.1(c).

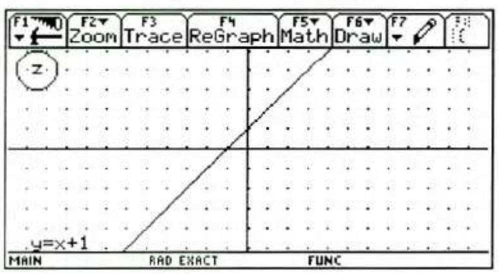


Fig. 3.1(a) Recta $y = x + 1$ en el plano complejo z.

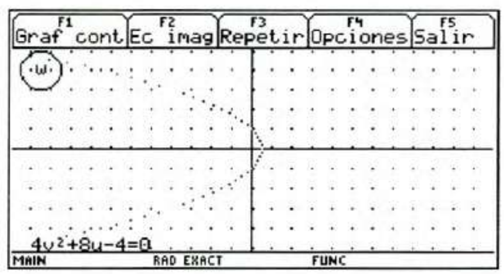


Fig. 3.1(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = x + 1$ en el plano w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la parábola $v^2 + 2u - 1 = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(1/2, 0)$.

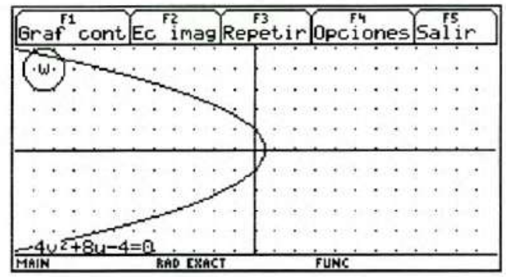


Fig. 3.1(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = x + 1$ en el plano w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la parábola $v^2 + 2u - 1 = 0$, cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}(1/2,0)$.

Podemos observar que la ecuación $v^2 + 2u - 1 = 0$ dada en el párrafo anterior no coincide con la ecuación $4v^2 + 8u - 4 = 0$ que se presenta en la pantalla de la calculadora; sin embargo, dichas ecuaciones son equivalentes, solo es necesario dividir entre 4 a la ecuación descrita en la figura de la imagen para llegar a la ecuación obtenida en la solución. Este hecho es debido a que la calculadora obtiene la ecuación de la imagen utilizando directamente la expresión general (2.23) y no la ecuación del Teorema 17, que es un caso particular.

Finalmente, indaguemos qué ocurre en el caso de tener la condición $m = \dfrac{a_1 \pm |a|}{a_2}$, con $a_1, a_2 \neq 0$. Para ello recordemos primeramente que a partir de la ecuación (2.25) obtuvimos para x la expresión:

$$x = \frac{v + a_2 c^2}{2c(a_1 - a_2 m)}$$

Luego al sustituir la condición $m = \dfrac{a_1 \pm |a|}{a_2}$ en este resultado y también en las expresiones $a_1(1 - m^2) - 2a_2 m$ y $-2c(a_1 m + a_2)$, es fácil verificar que se llega a las conclusiones:

$$x = \frac{v + a_2 c^2}{\mp 2c|a|}, \quad \text{de aquí tenemos } x^2 = \frac{v^2 + 2a_2 c^2 v + a_2^2 c^4}{4c^2|a|^2}, \quad a_1(1 - m^2) - 2a_2 m = \frac{-2|a|^2(a_1 \pm |a|)}{a_2^2}$$

$$\text{y} \quad -2c(a_1 m + a_2) = \frac{-2c|a|(|a| \pm a_1)}{a_2}.$$

Ahora sustituyendo estos resultados en la ecuación (2.24) obtenemos:

$$u = \left(\frac{-2|a|^2(a_1 \pm |a|)}{a_2^2}\right)\left(\frac{v^2 + 2a_2 c^2 v + a_2^2 c^4}{4c^2|a|^2}\right) + \left(\frac{-2c|a|(|a| \pm a_1)}{a_2}\right)\left(\frac{v + a_2 c^2}{\mp 2c|a|}\right) - a_1 c^2$$

Realizando las multiplicaciones indicadas en los dos primeros sumandos del miembro derecho de la ecuación y simplificando, obtenemos:

$$u = -\frac{(a_1 \pm |a|)}{2a_2^2 c^2} v^2 - \frac{(a_1 \pm |a|)}{a_2} v - \frac{c^2(a_1 \pm |a|)}{2} + \frac{(\pm |a| + a_1)}{a_2} v + c^2(\pm |a| + a_1) - a_1 c^2$$

Juntando términos semejantes ocurre que el término lineal en v se cancela, quedando así la nueva ecuación:

$$u = -\frac{(a_1 \pm |a|)}{2a_2^2c^2}v^2 - \frac{c^2(a_1 \mp |a|)}{2}$$

Finalmente, pasando los términos del miembro derecho hacia el izquierdo y multiplicando la ecuación por $2a_2^2c^2$ obtenemos la ecuación general:

$$(a_1 \pm |a|)v^2 + 2a_2^2c^2u + a_2^2c^4(a_1 \mp |a|) = 0$$

o bien la ecuación canónica: $v^2 = -\dfrac{2a_2^2c^2}{a_1 \pm |a|}\left(u + \dfrac{c^2(a_1 \mp |a|)}{2}\right)$

Dicha ecuación representa una parábola horizontal con vértice en $\mathbf{V}\left(-\dfrac{c^2(a_1 \mp |a|)}{2}, 0\right)$. De nueva cuenta este resultado podemos expresarlo en el siguiente teorema.

> **Teorema 18**. Sean $a = a_1 + ia_2$ un número complejo arbitrario tal que $a_2 \neq 0$, $c \in \mathbf{R} - \{0\}$ y $m = \dfrac{a_1 \pm |a|}{a_2}$. Entonces la imagen de la recta $y = mx + c$ bajo la transformación $w = az^2$ es una parábola horizontal con vértice en $\mathbf{V}\left(-\dfrac{c^2(a_1 \mp |a|)}{2}, 0\right)$. y cuya ecuación canónica es $v^2 = -\dfrac{2a_2^2c^2}{a_1 \pm |a|}\left(u + \dfrac{c^2(a_1 \mp |a|)}{2}\right)$. Si m y a_2 tienen signos iguales la parábola abre hacia la izquierda, pero si tienen signos contrarios abre hacia la derecha.

Nota. *Cabe señalar que este resultado también se puede obtener al sustituir la condición* $m = \dfrac{a_1 \pm |a|}{a_2}$ *en la ecuación (2.23), realizando una serie de manipulaciones algebraicas.*

Ejemplo 3.2 Mediante la transformación $w = (1+i)z^2$ determine cuál es la imagen de la recta oblicua $y = (1+\sqrt{2})x + 1$.

Solución. Dado que $a_1 = 1, a_2 = 1, c = 1$ y $m = 1 + \sqrt{2}$, entonces al sustituir dichos valores en la expresión $(a_1 \pm |a|)v^2 + 2a_2^2c^2u + a_2^2c^4(a_1 \mp |a|) = 0$ obtenemos que la ecuación de la imagen es $(1+\sqrt{2})v^2 + 2u + (1-\sqrt{2}) = 0$. Además la gráfica nos muestra los siguientes resultados.

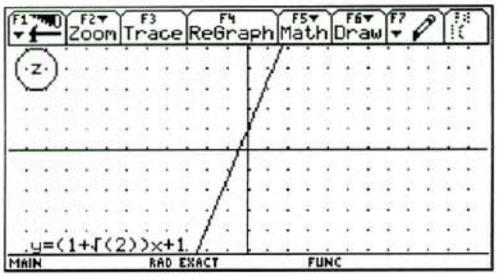


Fig. 3.2(a) Recta $y = \left(1+\sqrt{2}\right)x + 1$ en el plano complejo z.

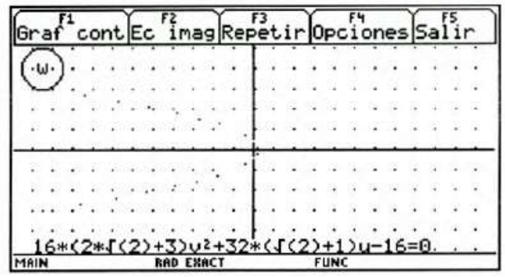


Fig. 3.2(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = \left(1+\sqrt{2}\right)x + 1$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la parábola $\left(1+\sqrt{2}\right)v^2 + 2u + (1-\sqrt{2}) = 0$. cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}, 0\right)$.

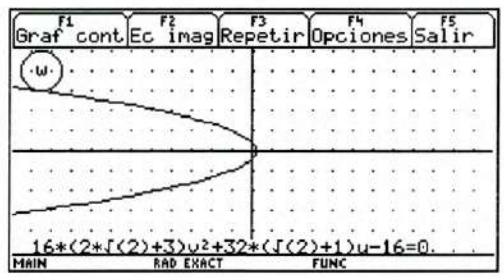


Fig. 3.2(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = \left(1+\sqrt{2}\right)x + 1$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la parábola $\left(1+\sqrt{2}\right)v^2 + 2u + (1-\sqrt{2}) = 0$. cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}, 0\right)$.

Podemos observar que la ecuación $\left(1+\sqrt{2}\right)v^2 + 2u + (1-\sqrt{2}) = 0$ dada en el párrafo anterior no coincide con la ecuación $16(2\sqrt{2}+3)v^2 + 32(\sqrt{2}+1)u - 16 = 0$ que se presenta en la pantalla de la calculadora; sin embargo, dichas ecuaciones son equivalentes, solo es necesario multiplicar por $\sqrt{2} - 1/16$ a la ecuación descrita en la figura de la imagen para llegar a la ecuación obtenida en la solución. Este hecho es debido a que la calculadora obtiene la ecuación de la imagen utilizando directamente la expresión general (2.23) y no la ecuación del Teorema 18, que es un caso particular.

En suma, todo este análisis nos permite concluir que siempre que se satisfaga la condición $a_2(1-m^2) + 2a_1 m = 0$, entonces la imagen de una recta oblicua $y = mx + c$ bajo la transformación $w = az^2$ es una parábola horizontal.

De una forma análoga se puede demostrar que si se satisface la condición $a_1(1-m^2) - 2a_2 m = 0$, entonces la imagen de la recta $y = mx + c$ bajo la transformación $w = az^2$ es una parábola vertical. Más precisamente, esta condición se satisface cuando:

a) $a_1 = 0,\ m = 0$ (Es el caso de una recta horizontal).

b) $a_2 = 0,\ m = \pm 1$.

c) $m = \dfrac{-a_2 \pm |a|}{a_1},\ a_1, a_2 \neq 0.$

Para ilustrar lo anterior utilicemos la calculadora y veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3 Determine en que se transforma la recta $y = (\sqrt{2}-1)x+1$ mediante el mapeo $w = (1+i)z^2$.

Solución. Como podemos ver este ejemplo nos ilustra el caso (c), en donde tenemos que $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ c = 1$ y $m = (\sqrt{2}-1)$, de manera que al sustituir dichos datos en la ecuación (2.23) obtenemos la siguiente expresión:

$16(3-2\sqrt{2})u^2 - 32(\sqrt{2}-1)v - 16 = 0.$ ó bien $-16(2\sqrt{2}-3)u^2 - 32(\sqrt{2}-1)v - 16 = 0.$

Además mediante la calculadora obtenemos las siguientes imágenes.

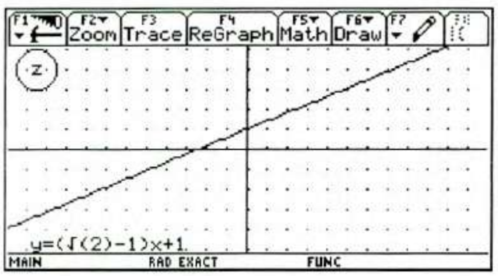


Fig. 3.3(a) Recta $y = \left(\sqrt{2}-1\right)x+1$ en el plano complejo z.

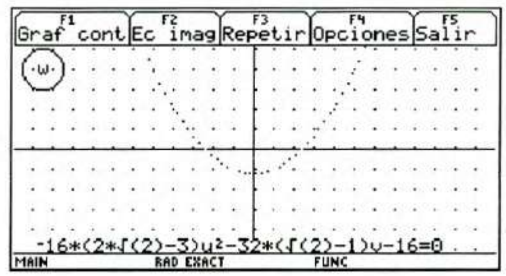


Fig. 3.3(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = \left(\sqrt{2}-1\right)x+1$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la parábola $16\left(3-2\sqrt{2}\right)u^2 - 32\left(\sqrt{2}-1\right)v - 16 = 0.$ cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}\left(0, -\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$.

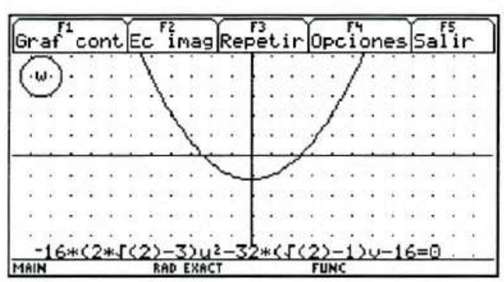


Fig. 3.3(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = \left(\sqrt{2}-1\right)x+1$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la parábola $16\left(3-2\sqrt{2}\right)u^2 - 32\left(\sqrt{2}-1\right)v - 16 = 0,$ cuyo vértice es el punto $\mathbf{V}\left(0, -\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$.

Dichas ilustraciones nos muestran efectivamente, como ya sea había anticipado, que la imagen de la recta $y = (\sqrt{2}-1)x+1$ mediante la transformación $w = (1+i)z^2$ es una parábola vertical.

También tenemos que otros casos especiales son los que se muestran a continuación.

Si consideramos que $c = 0$, entonces de las ecuaciones (2.21) y (2.22) obtenemos:

$$u = \left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)x^2$$

$$v = \left(a_2(1-m^2) + 2a_1m\right)x^2$$

Estas ecuaciones nos dicen que la imagen (u,v) de un punto de abscisa x es exactamente la misma que la del punto de abscisa $-x$. Luego dividiendo la segunda ecuación entre la primera obtenemos:

$$\frac{v}{u} = \frac{\left(a_2(1-m^2) + 2a_1m\right)x^2}{\left(a_1(1-m^2) - 2a_2m\right)x^2}, \quad a_1(1-m^2) - 2a_2m \neq 0, \quad x \neq 0.$$

Anteriormente ya sea había señalado que bajo ésta transformación si $x = 0$, entonces resultaba que $u = 0, v = 0$. Lo cual implica que el origen es un punto fijo, es decir, el origen se transforma en sí mismo. De manera que cancelando x^2 y pasando u multiplicando hacia el miembro derecho, obtenemos la ecuación:

$$v = \frac{a_2(1-m^2) + 2a_1m}{a_1(1-m^2) - 2a_2m}u$$

Esta expresión representa una semirrecta que toca al origen y cuya pendiente es:

$$\frac{a_2(1-m^2) + 2a_1m}{a_1(1-m^2) - 2a_2m}, \quad \text{donde } a_1(1-m^2) - 2a_2m \neq 0.$$

> **Teorema 19**. Sean $a = a_1 + ia_2$ un número complejo arbitrario distinto de cero, y $m \in \mathbf{R} - \{0\}$. Entonces la imagen de la recta $y = mx$ bajo la transformación $w = az^2$, cuando $a_1(1-m^2) - 2a_2m \neq 0$, es una semirrecta que llega y luego parte del origen, con pendiente $\dfrac{a_2(1-m^2) + 2a_1m}{a_1(1-m^2) - 2a_2m}$.

Nota. *El resultado también se obtiene al sustituir* $c = 0$ *en la ecuación (2.23)*

.

Ejemplo 3.4 Mediante la transformación $w = (1+i)z^2$ determine cuál es la imagen de la recta oblicua $y = x$.

Solución. En este caso tenemos que $a_1 = 1, a_2 = 1, m = 1$ y $c = 0$, de manera que al sustituir estos valores en la expresión $v = \dfrac{a_2(1-m^2) + 2a_1m}{a_1(1-m^2) - 2a_2m}u$, obtenemos la ecuación $v = -u$, $u \leq 0$.

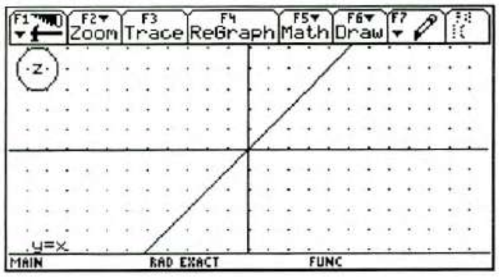


Fig. 3.4(a) Recta $y = x$ en el plano complejo z.

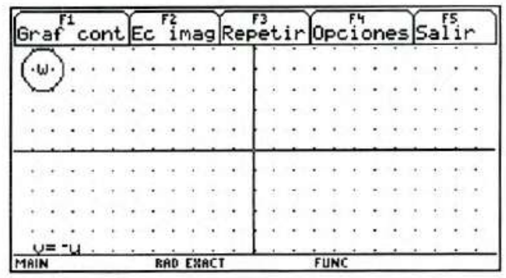


Fig. 3.4(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = x$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la semirrecta $v = -u$, $u \leq 0$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$ es la misma, entonces en la figura solo se distingue la imagen del origen, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,0)$ avanzando sobre la semirrecta $v = -u$, $u \leq 0$ hacia el origen, y después la de los puntos $(x,0)$, avanzando otra vez sobre dicha semirrecta alejándose del origen y borrando los puntos ya graficados.

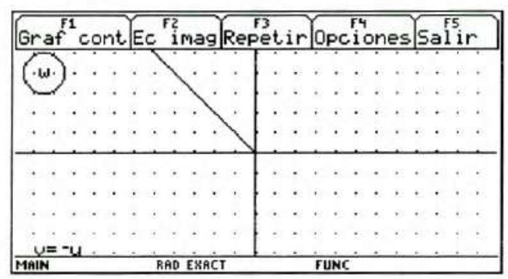


Fig. 3.4(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = x$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la semirrecta $v = -u$, $u \leq 0$. Esta semirrecta es recorrida dos veces: primero, avanzando sobre ella hacia el origen y luego alejándose de él en sentido inverso.

Ejemplo 3.5 Mediante la transformación $w = (1+i)z^2$ determine cuál es la imagen de la recta oblicua $y = -x$.

Solución. En este caso tenemos que $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $m = -1$ y $c = 0$, de manera que al sustituir estos valores en la expresión $v = \dfrac{a_2(1-m^2)+2a_1m}{a_1(1-m^2)-2a_2m}u$, obtenemos la ecuación $v = -u$, $u \geq 0$.

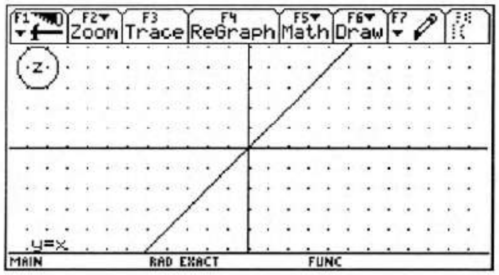


Fig. 3.5(a) Recta $y = -x$ en el plano complejo z.

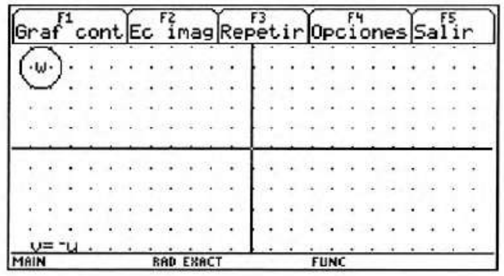


Fig. 3.5(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = -x$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la semirrecta $v = -u$, $u \geq 0$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$ es la misma, entonces en la figura solo se distingue la imagen del origen, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,0)$ avanzando sobre la semirrecta $v = -u$, $u \geq 0$ hacia el origen, y después la de los puntos $(x,0)$, avanzando otra vez sobre dicha semirrecta alejándose del origen y borrando los puntos ya graficados.

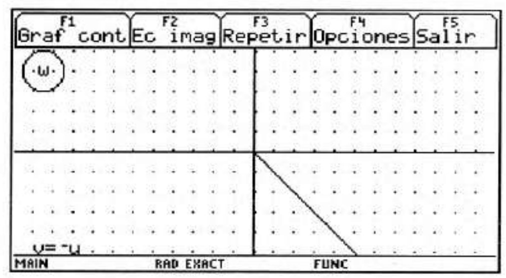


Fig. 3.5(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = -x$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la semirrecta $v = -u$, $u \geq 0$. Esta semirrecta es recorrida dos veces: primero, avanzando sobre ella hacia el origen y luego alejándose de él en sentido inverso.

Si además $a_1 = 0$, entonces las ecuaciones (2.21) y (2.22) se reducen a:

$$u = -2a_2mx^2$$
$$v = a_2\left(1-m^2\right)x^2$$

Dichas ecuaciones nos indican que los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$ bajo esta transformación, tendrán una misma imagen $w = -2a_2mx^2 + i \cdot a_2(1-m^2)x^2$. Luego dividiendo la segunda ecuación anterior entre la primera, además cancelando x^2 y a_2, lo cual es válido si $a_2 \neq 0$, $x \neq 0$, y pasando multiplicando a u hacia el miembro derecho tenemos:

$$v = \frac{m^2-1}{2m}u, \quad m \neq 0.$$

Así de nueva cuenta tenemos que la imagen es una semirrecta que pasa por el origen y cuya pendiente es $\dfrac{m^2-1}{2m}, m \neq 0$.

Teorema 20. La imagen de la recta $y = mx$, donde $m \in \mathbf{R} - \{0\}$, bajo la transformación $w = ia_2 z^2$, con $a_2 \neq 0$, es una semirrecta que llega y parte del origen y cuya pendiente es $\dfrac{m^2-1}{2m}$. Si $m \in (-1,0) \cup (1,\infty)$ la semirrecta tendrá pendiente positiva, pero si $m \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$ tendrá pendiente negativa.

Nota. *El resultado también se obtiene de Ec. (2.23) si sustituimos* $a_1 = 0, c = 0$.

Ejemplo 3.6 Mediante la transformación $w = iz^2$ determine cuál es la imagen de la recta oblicua $y = x/2$.

Solución. En este caso tenemos que $a_2 = 1$ y $m = 1/2$, de tal manera que al sustituir dichos valores en la expresión $v = \dfrac{m^2-1}{2m}u$ obtenemos la ecuación $v = -\dfrac{3}{4}u, u \leq 0$. Además las imágenes obtenidas en la calculadora son:

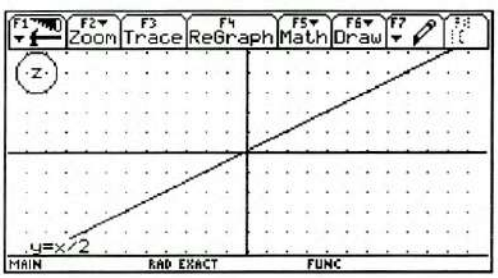


Fig. 3.6(a) Recta $y = x/2$ en el plano complejo z.

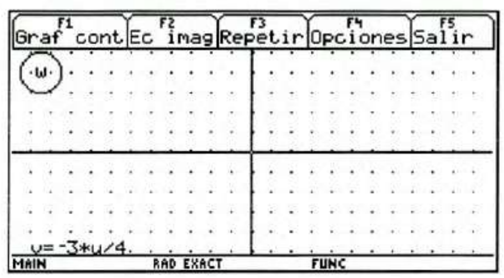


Fig. 3.6(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = x/2$ en el plano w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la semirrecta $v = -3u/4$, $u \leq 0$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$ es la misma, entonces en la figura solo se distingue la imagen del origen, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,0)$ avanzando sobre la semirrecta $v = -3u/4$, $u \leq 0$ hacia el origen, y después la de los puntos $(x,0)$, avanzando otra vez sobre la semirrecta $v = -3u/4$, $u \leq 0$ alejándose del origen y borrando los puntos ya graficados.

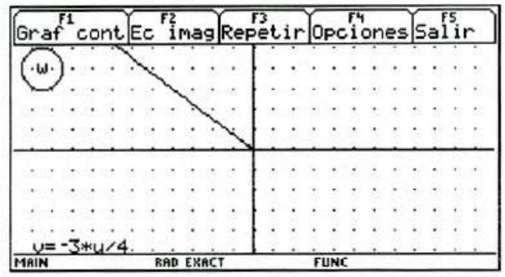


Fig. 3.6(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = x/2$ en el plano w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la semirrecta $v = -3u/4$, $u \leq 0$. Esta semirrecta es recorrida dos veces: primero, avanzando sobre ella hacia el origen y luego alejándose de él en sentido inverso.

Aún más, si tenemos que $m = \pm 1$, entonces a partir de las expresiones (2.21) y (2.22) obtenemos:

$$u = \mp 2a_2x^2 \text{ y } v = 0$$

Dichas ecuaciones nos indican que los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$, bajo esta transformación, tendrán una misma imagen $w = \mp 2a_2x^2 + i \cdot 0$, esto implica que la recta $y = \pm x$ se transforma en un semieje horizontal, de tal manera que si a_2 y m tienen signos opuestos se obtiene el semieje positivo, en caso contrario se obtiene el semieje negativo. Por consecuencia, el resultado podemos expresarlo mediante el siguiente

Teorema 21. La imagen de la recta $y = \pm x$ bajo la transformación $w = ia_2z^2$, con $a_2 \neq 0$, es un semieje horizontal. Si $a_2 > 0$ y $m = -1$ o si $a_2 < 0$ y $m = 1$ se obtiene el semieje horizontal positivo, mientras que si $a_2 > 0$ y $m = 1$ o si $a_2 < 0$ y $m = -1$ se obtiene el semieje horizontal negativo.

Nota. *El resultado también se obtiene sustituyendo* $a_1 = 0, c = 0$ y $m = \pm 1$ *en la Ec. (2.23).*

Ejemplo 3.7 Mediante la transformación $w = iz^2$ determine cuál es la imagen de la recta oblicua $y = -x$.

Solución. En este caso tenemos que $a = i$, y por lo tanto $a_1 = 0, a_2 = 1$. También tenemos que $m = -1, c = 0$. Sustituyendo directamente estos valores en las ecuaciones (2.21) y (2.22) obtenemos las ecuaciones $u = 2x^2$ y $v = 0$. Estas dos últimas expresiones implican que la ecuación correspondiente de la imagen es $v = 0, u \geq 0$: el semieje horizontal positivo.

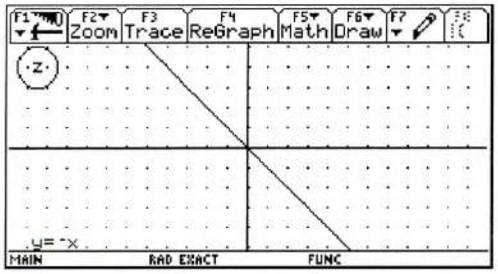


Fig. 3.7(a) Recta $y = -x$ en el plano complejo z.

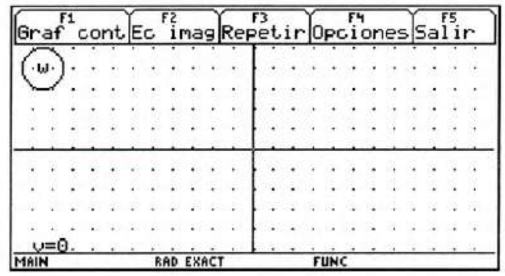


Fig. 3.7(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = -x$ bajo la transformación $w = iz^2$ en el plano w. Se trata de la semirrecta $v = 0, u \geq 0$.

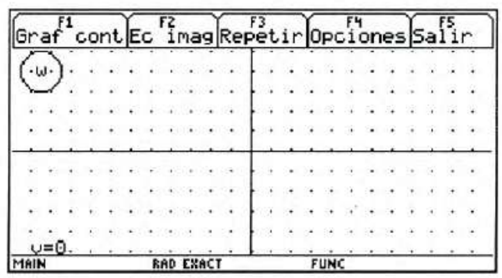


Fig. 3.7(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = -x$ bajo la transformación $w = iz^2$ en el plano w, esto es, la semirrecta $v = 0, u \geq 0$. A diferencia de la imagen dinámica que se muestra durante el proceso de aplicación, esta figura estática no permite distinguir el hecho de que la imagen correspondiente efectivamente es el semieje horizontal positivo. Dicho semieje es recorrido primeramente desde $+\infty$ hacia 0, y luego a la inversa, de 0 a $+\infty$.

Ejemplo 3.8 Mediante la transformación $w = -iz^2$ determine cuál es la imagen de la recta oblicua $y = -x$.

Solución. En este caso tenemos que $a = -i$, y por lo tanto $a_1 = 0, a_2 = -1$. También tenemos que $m = -1, c = 0$. Sustituyendo directamente estos valores en las ecuaciones (2.21) y (2.22) obtenemos las ecuaciones $u = -2x^2$ y $v = 0$. Estas dos últimas expresiones implican que la ecuación correspondiente de la imagen es $v = 0, u \leq 0$: el semieje horizontal negativo.

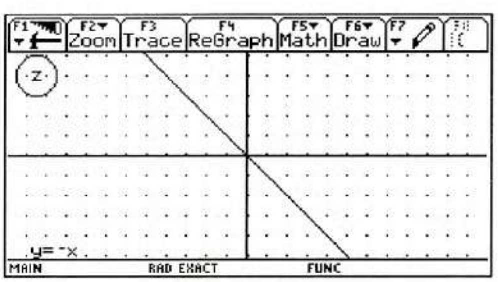


Fig. 3.8(a) Recta $y = -x$ en el plano complejo z.

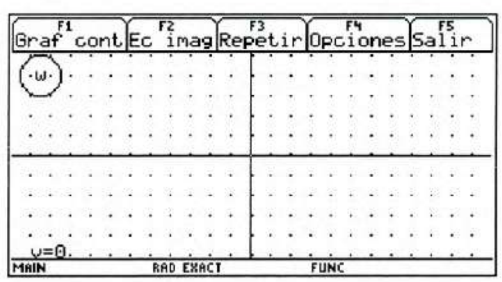


Fig. 3.8(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = -x$ bajo la transformación $w = -iz^2$ en el plano w. Se trata la recta $v = 0, u \leq 0$.

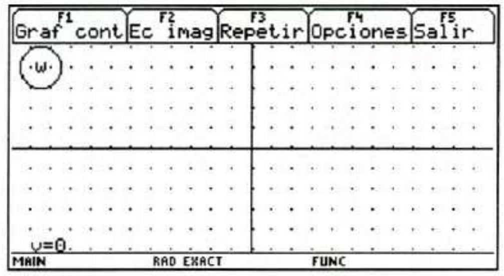


Fig. 3.8(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = -x$ bajo la transformación $w = -iz^2$ en el plano w, esto es, la semirrecta $v = 0$, $u \leq 0$. A diferencia de la imagen dinámica que se muestra durante el proceso de aplicación, esta figura estática no permite distinguir el hecho de que la imagen correspondiente efectivamente es el semieje horizontal negativo. Dicho semieje es recorrido primeramente desde $-\infty$ hacia 0, y luego a la inversa, de 0 a $-\infty$.

Por el contrario, si $c = 0$ y $a_2 = 0$ resulta que las ecuaciones (2.21) y (2.22) se reducen a las nuevas ecuaciones particulares:

$$u = a_1\left(1 - m^2\right)x^2$$
$$v = 2a_1 m x^2$$

Dichas ecuaciones nos indican que los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$, bajo esta transformación, tendrán una misma imagen $w = a_1(1-m^2)x^2 + i \cdot 2a_1 m.$ Luego dividiendo la segunda ecuación anterior entre la primera, además cancelando x^2 y a_1, lo cual es válido si $a_1 \neq 0,\ x \neq 0,$ y pasando multiplicando a u hacia el miembro derecho tenemos:

$$v = \frac{2m}{1-m^2}u, \quad m \neq \pm 1.$$

Una vez más tenemos en este caso que la imagen es una semirrecta que pasa por el origen y cuya pendiente es $\frac{2m}{1-m^2}$.

Teorema 22. La imagen de la recta $y = mx$, donde $m \in \mathbf{R} - \{-1, 0, 1\}$, bajo la transformación $w = a_1 z^2$, con $a_1 \neq 0$, es una semirrecta que pasa por el origen y cuya pendiente es $\frac{2m}{1-m^2}$. Si $m \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$ la semirrecta tendrá pendiente positiva, pero si $m \in (-1,0) \cup (1,\infty)$ la pendiente será negativa.

Nota. *el resultado también se obtiene sustituyendo* $a_2 = 0,\ c = 0$ *en la Ec. (2.23).*

Ejemplo 3.9 Mediante la transformación $w = z^2$ determine cuál es la imagen de la recta oblicua $y = x/2$.

Solución. En este caso tenemos que $a_1 = 1$ y $m = 1/2$, de tal manera que al sustituir dichos valores en la expresión $v = \dfrac{2m}{1-m^2}u$ obtenemos la ecuación $v = \dfrac{4}{3}u, u \geq 0$. Además, las imágenes obtenidas en la calculadora son:

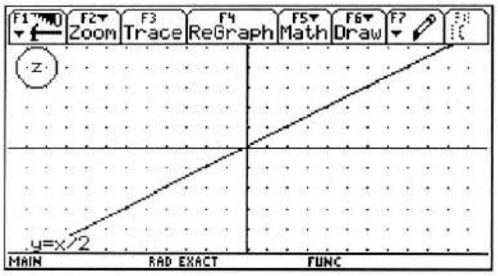


Fig. 3.9(a) Recta $y = x/2$ en el plano complejo z.

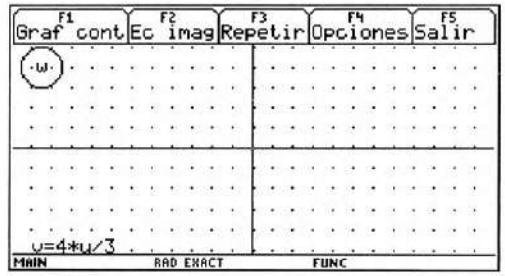


Fig. 3.9(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = x/2$ en el plano w bajo la transformación $w = z^2$. Se trata de la semirrecta $v = 4u/3$, $u \geq 0$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$ es la misma, entonces en la figura solo se distingue la imagen del origen, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,0)$ avanzando sobre la semirrecta $v = 4u/3, u \geq 0$ hacia el origen, y después la de los puntos $(x,0)$, avanzando otra vez sobre la semirrecta $v = 4u/3, u \geq 0$ alejándose del origen y borrando los puntos ya graficados.

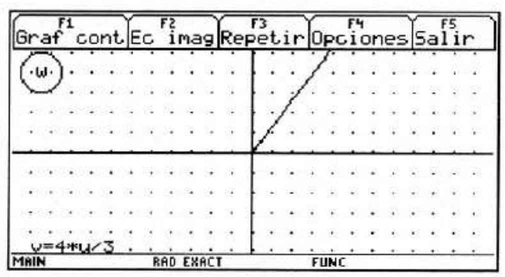


Fig. 3.9 (c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = x/2$ en el plano w bajo la transformación $w = z^2$. Se trata de la semirrecta $v = 4u/3, u \geq 0$. Esta semirrecta es recorrida dos veces: primero, avanzando sobre ella hacia el origen, y luego alejándose de él en sentido inverso.

Ejemplo 3.10 Mediante la transformación $w = -z^2$ determine cuál es la imagen de la recta oblicua $y = x/2$.

Solución. En este caso tenemos que $a_1 = -1$ y $m = 1/2$, de tal manera que al sustituir dichos valores en la expresión $v = \dfrac{2m}{1-m^2}u$ obtenemos la ecuación $v = \dfrac{4}{3}u, u \leq 0$. Además las imágenes obtenidas en la calculadora son:

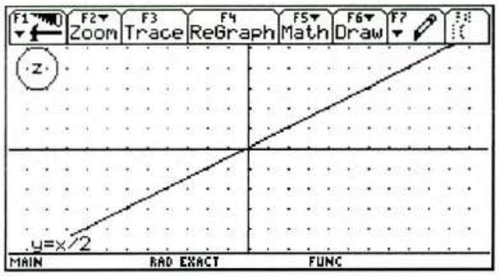


Fig. 3.10(a) Recta $y = x/2$ en el plano complejo z.

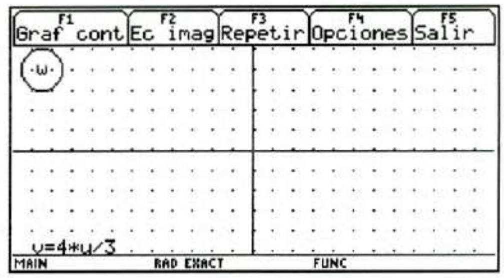


Fig. 3.10(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = x/2$ en el plano w bajo la transformación $w = -z^2$. Se trata de la semirrecta $v = 4u/3$, $u \leq 0$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$ es la misma, entonces en la figura solo se distingue la imagen del origen, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,0)$ avanzando sobre la semirrecta $v = 4u/3$, $u \leq 0$ hacia el origen, y después la de los puntos $(x,0)$, avanzando otra vez sobre la semirrecta $v = 4u/3$, $u \leq 0$ alejándose del origen y borrando los puntos ya graficados.

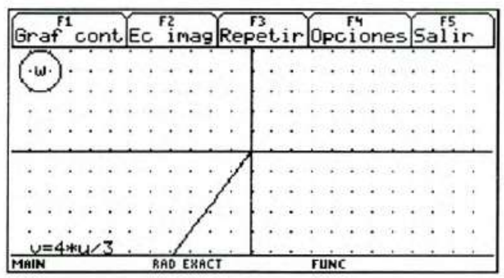


Fig. 3.10(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = x/2$ en el plano w bajo la transformación $w = -z^2$. Se trata de la semirrecta $v = 4u/3$, $u \leq 0$. Esta semirrecta es recorrida dos veces: primero, avanzando sobre ella hacia el origen, y luego alejándose de él en sentido inverso.

Pero si además tenemos que $m = \pm 1$, entonces de las expresiones (2.21) y (2.22) obtenemos las ecuaciones:

$$u = 0 \;\text{ y }\; v = \pm 2a_1 x^2$$

Dichas ecuaciones nos indican que los puntos $(-x,0)$ y $(x,0)$, bajo esta transformación, tendrán una misma imagen $w = 0 \pm 2a_1 i x^2$, esto implica que la recta $y = \pm x$ se transforma en un semieje vertical, de tal manera que si a_1 y m tienen signos opuestos entonces se obtiene el semieje negativo, en caso contrario se obtiene el semieje positivo. Por consecuencia el resultado podemos expresarlo mediante el siguiente

Teorema 23. La imagen de la recta $y = \pm x$ bajo la transformación $w = a_1 z^2$, con $a_1 \neq 0$, es un semieje vertical. Si $a_1 > 0$ y $m = -1$ o si $a_1 < 0$ y $m = 1$ se obtiene el semieje vertical negativo, mientras que si $a_1 > 0$ y $m = 1$ o si $a_1 < 0$ y $m = -1$ se obtiene el semieje vertical positivo.

Nota. *El resultado también se obtiene sustituyendo* $a_2 = 0, c = 0$ y $m = \pm 1$ *en la Ec. (2.23).*

Ejemplo 3.11 Mediante la transformación $w = z^2$ determine cuál es la imagen de la recta oblicua $y = -x$.

Solución. En este caso tenemos que $a = 1$, y por lo tanto $a_1 = 1, a_2 = 0$. También tenemos que $m = -1, c = 0$. Sustituyendo directamente estos valores en las ecuaciones (2.21) y (2.22) obtenemos las ecuaciones $u = 0$ y $v = -2x^2$. Estas dos últimas expresiones implican que la ecuación correspondiente de la imagen es $u = 0, v \leq 0$: el semieje vertical negativo.

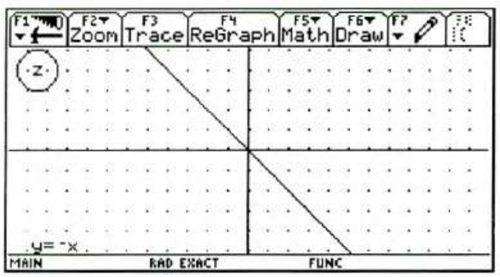


Fig. 3.11(a) Recta $y = -x$ en el plano complejo z.

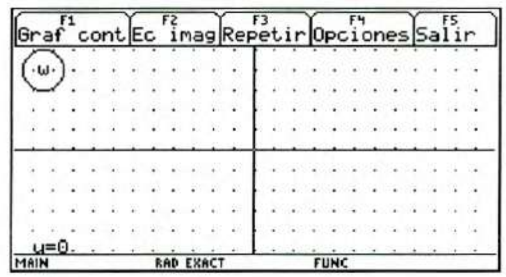


Fig. 3.11(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = -x$ bajo la transformación $w = z^2$ en el plano w. Se trata de la semirrecta $u = 0, v \leq 0$.

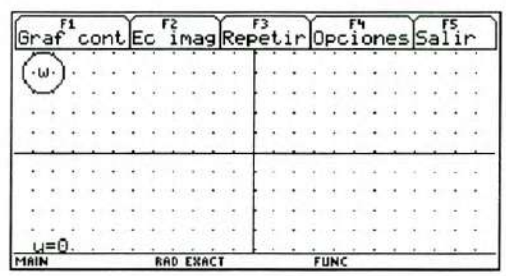


Fig. 3.11(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = -x$ bajo la transformación $w = z^2$ en el plano w, esto es, la semirrecta $u = 0, v \leq 0$. A diferencia de la imagen dinámica que se muestra durante el proceso de aplicación, esta figura estática no permite distinguir el hecho de que la imagen correspondiente efectivamente es el semieje vertical negativo. Dicho semieje es recorrido primeramente desde $-\infty$ hacia 0, y luego a la inversa, de 0 a $-\infty$.

Ejemplo 3.12 Mediante la transformación $w = -z^2$ determine cuál es la imagen de la recta oblicua $y = -x$.

Solución. En este caso tenemos que $a = -1$, y por lo tanto $a_1 = -1, a_2 = 0$. También tenemos que $m = -1, c = 0$. Sustituyendo directamente estos valores en las ecuaciones (2.21) y (2.22) obtenemos las ecuaciones $u = 0$ y $v = 2x^2$. Estas dos últimas expresiones implican que la ecuación correspondiente de la imagen es $u = 0, v \geq 0$: el semieje vertical positivo.

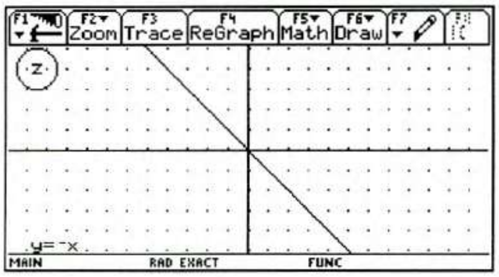


Fig. 3.12(a) Recta $y = -x$ en el plano complejo z.

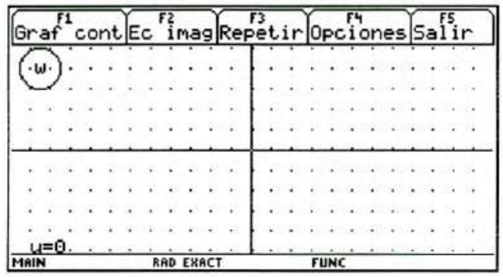


Fig. 3.12(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = -x$ bajo la transformación $w = -z^2$ en el plano w. Se trata de la semirrecta $u = 0, v \geq 0$.

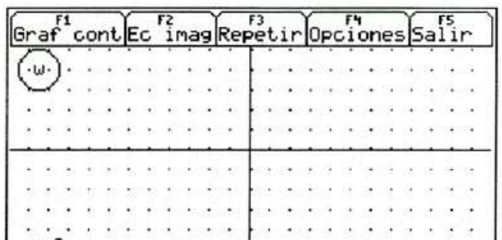


Fig. 3.12(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = -x$ bajo la transformación $w = -z^2$ en el plano w, esto es, la semirrecta $u = 0, v \geq 0$. A diferencia de la imagen dinámica que se muestra durante el proceso de aplicación, esta figura estática no permite distinguir el hecho de que la imagen correspondiente efectivamente es el semieje vertical positivo. Dicho semieje es recorrido primeramente desde $+\infty$ hacia 0, y luego a la inversa, de 0 a $+\infty$.

El hecho de que todos estos resultados particulares puedan ser derivados directamente de la ecuación canónica (2.23), implica que ésta es precisamente la ECUACIÓN GENERAL (es decir, que es válida para todos los casos posibles) de la imagen de la recta $y = mx + c$, $m \neq 0$, bajo la transformación $w = a\,z^2$, donde $a \in \mathbf{C}, a \neq 0$. Además dicha imagen o es una parábola o es una semirrecta. En virtud de ello, podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 24. Sean $a \in \mathbf{C}, a \neq 0$, y $m, c \in \mathbf{R}$, con $m \neq 0$. Entonces la imagen de la recta oblicua $y = mx + c$ bajo la transformación $w = a\,z^2$ es una parábola o bien una semirrecta y además la ecuación canónica general (es decir, válida para todos los casos posibles) de la imagen correspondiente es la expresión:

$$(a_2(1-m^2)+2a_1m)^2u^2 - 2(a_2(1-m^2)+2a_1m)(a_1(1-m^2)-2a_2m)uv + (a_1(1-m^2)-2a_2m)^2v^2$$
$$-4c^2|a|^2(a_1(1-m^2)-2a_2m)u - 4c^2|a|^2(a_2(1-m^2)+2a_1m)v - 4c^4|a|^4 = 0$$

Para ilustrar un caso en el cual se obtengan todos los términos que contiene la ecuación general dada en el teorema anterior, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.13 Mediante la transformación $w=(1+i)z^2$ determine cuál es la imagen de la recta oblicua $y=x+1$.

Solución. En este caso tenemos que tanto a_1 como a_2 son iguales a uno, además $c=1$ y $\mathrm{m}=1$. De manera que al sustituir estos valores en la ecuación general dada en el Teorema 24, obtenemos la expresión $4u^2+8uv+4v^2+16u-16v-16=0$, la cual nos indica que la imagen ya no es una parábola ni vertical ni horizontal como en los ejemplos anteriores, sino más bien es una parábola rotada un ángulo $\theta=\arg a=\pi/4$. Además las imágenes obtenidas en la calculadora nos ilustran los siguientes resultados:

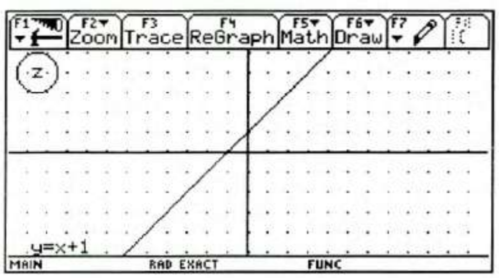


Fig. 3.13.(a) Recta $y = x + 1$ en el plano original z.

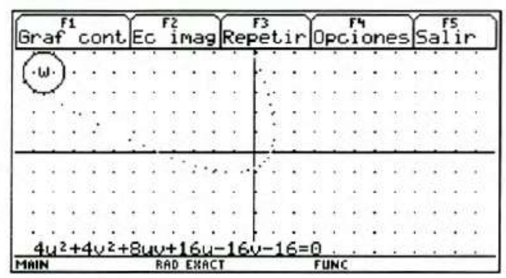


Fig. 3.13(b) Gráfica puntual de la imagen de la recta $y = x + 1$ en el plano w bajo la transformación $w = (1 + i)z^2$.

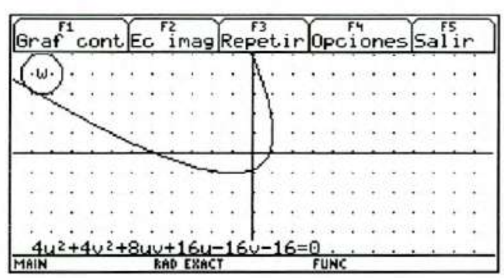


Fig. 3.13(c) Gráfica continua de la imagen de la recta $y = x + 1$ en el plano w bajo la transformación $w = (1 + i)z^2$.

4. Circunferencias con centro en el origen, $x^2 + y^2 = r^2$.

Para determinar analíticamente en qué se transforma una circunferencia con centro en el origen y radio r, elevemos primeramente al cuadrado las ecuaciones generales de la transformación $w = az^2$, es decir, las ecuaciones (2.1) y (2.2). Esto nos da como resultado las expresiones:

$$u^2 = a_1^2(x^2 - y^2)^2 - 4a_1a_2xy(x^2 - y^2) + 4a_2^2x^2y^2$$
$$v^2 = a_2^2(x^2 - y^2)^2 + 4a_1a_2xy(x^2 - y^2) + 4a_1^2x^2y^2$$

Ahora, con el objetivo de obtener la ecuación canónica general de la imagen debemos eliminar las variables x e y. Para ello primeramente sumamos las ecuaciones anteriores, además juntamos términos semejantes y factorizamos las expresiones $(x^2 - y^2)^2$ y x^2y^2 en los términos respectivos del miembro derecho de la ecuación, con lo cual obtenemos:

$$u^2 + v^2 = (a_1^2 + a_2^2)(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2(a_1^2 + a_2^2)$$

Luego, factorizando $a_1^2 + a_2^2$ en los términos del miembro derecho y desarrollando el binomio al cuadrado indicado en el primer término, llegamos a:

$$u^2 + v^2 = (a_1^2 + a_2^2)(x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2)$$

Ahora juntando términos semejantes en el segundo factor del miembro derecho, tenemos:

$$u^2 + v^2 = |a|^2(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$$

Como la expresión resultante en el segundo factor del miembro derecho es un trinomio cuadrado perfecto, entonces al factorizarlo obtenemos:

$$u^2 + v^2 = |a|^2(x^2 + y^2)^2$$

Dado que $x^2 + y^2 = r^2$, tenemos entonces que: $u^2 + v^2 = |a|^2(r^2)^2$

Por lo cual finalmente obtenemos que la ecuación canónica de la imagen es:

$$u^2 + v^2 = |a|^2r^4$$

De manera que una circunferencia con centro en el origen y radio r en el plano complejo z se transforma en otra circunferencia con centro en el origen en el plano complejo w, pero de radio $R = |a|r^2$. Este resultado podemos enunciarlo en el siguiente Teorema.

> **Teorema 25.** Sean $a = a_1 + ia_2$ un número complejo arbitrario distinto de cero, y r un número real mayor que cero. Entonces la imagen de la circunferencia con centro en el origen y de radio r bajo la transformación $w = az^2$ es una circunferencia con centro en el origen de radio $R = |a|r^2$.

A continuación presentamos algunos ejemplos que ilustran este resultado.

Ejemplo 4.1 Determine cuál es la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ bajo la transformación $w = iz^2$.

Solución. En este caso tenemos que $a = i$, por lo tanto $|a| = 1$, además el radio es $r = 2$, de manera que al sustituir estos datos en la expresión $u^2 + v^2 = |a|^2 r^4$ obtenemos la ecuación $u^2 + v^2 = 16$. Por otro lado, los resultados obtenidos en la calculadora son los siguientes:

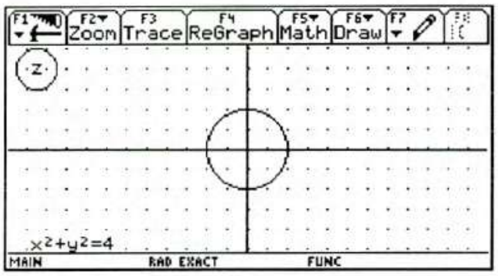


Fig. 4.1(a) Circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el plano complejo z.

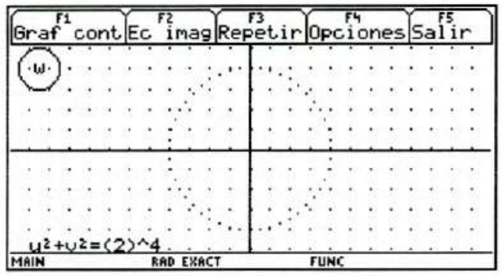


Fig. 4.1(b) Gráfica puntual de la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el plano complejo w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la circunferencia $u^2 + v^2 = 16$.

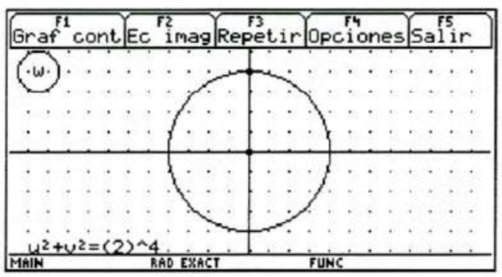


Fig. 4.1(c) Gráfica continua de la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el plano complejo w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la circunferencia $u^2 + v^2 = 16$. La misma es recorrida dos veces en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del punto (0,4).

Ejemplo 4.2 Determine cuál es la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = \frac{16}{25}$ bajo la transformación $w = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} z^2$.

Solución. En este caso tenemos que $a = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$, por lo que $|a| = 1$, además el radio es $r = \frac{4}{5}$, de manera que al sustituir estos datos en la expresión $u^2 + v^2 = |a|^2 r^4$ obtenemos la ecuación $u^2 + v^2 = \frac{256}{625}$. Por otro lado, los resultados obtenidos en la calculadora son los siguientes:

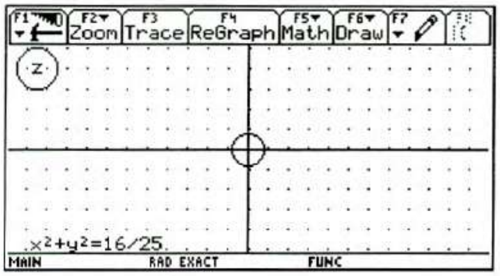


Fig. 4.2(a) Circunferencia $x^2 + y^2 = 16/25$ en el plano complejo z.

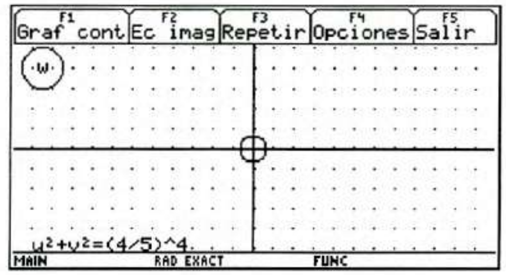


Fig. 4.2(b) Gráfica puntual de la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16/25$ en el plano complejo w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la circunferencia $u^2 + v^2 = 256/625$.

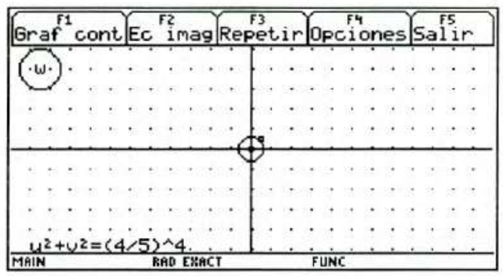


Fig. 4.2(c) Gráfica continua de la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16/25$ en el plano complejo w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la circunferencia $u^2 + v^2 = 256/625$. La misma es recorrida dos veces en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del punto $\left(\frac{16}{25\sqrt{2}}, \frac{16}{25\sqrt{2}}\right)$.

Es fácil verificar que la ecuación obtenida en la solución $u^2 + v^2 = \frac{256}{625}$ es equivalente a la ecuación presentada en la pantalla de la calculadora $u^2 + v^2 = (4/5)^4$, solamente es necesario desarrollar la potencia $(4/5)^4$ para obtener $256/625$.

Ejemplo 4.3 Determine cuál es la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ bajo la transformación $w = z^2$.

Solución. En este caso tenemos que $a = 1$, por lo tanto $|a| = 1$, además el radio es $r = 1$, de manera que al sustituir estos datos en la expresión $u^2 + v^2 = |a|^2 r^4$ obtenemos la ecuación $u^2 + v^2 = 1$. Por otro lado, los resultados obtenidos en la calculadora son los siguientes:

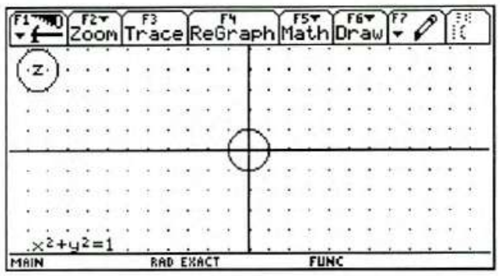


Fig. 4.3(a) Circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano complejo z.

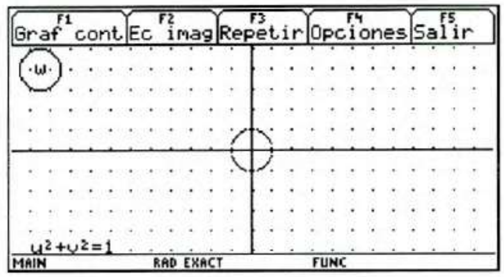


Fig. 4.3(b) Gráfica puntual de la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano complejo w bajo la transformación $w = z^2$. Se trata de la circunferencia $u^2 + v^2 = 1$.

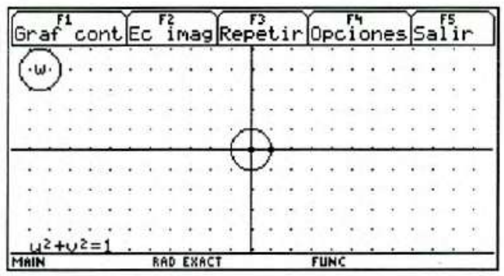


Fig. 4.3(c) Gráfica continua de la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano complejo w bajo la transformación $w = z^2$. Se trata de la circunferencia $u^2 + v^2 = 1$. La misma es recorrida dos veces en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del punto (1,0).

Ejemplo 4.4 Determine cuál es la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ bajo la transformación $w = (1+i)z^2$.

Solución. En este caso tenemos que $a = 1+i$, por lo tanto $|a| = \sqrt{2}$, además el radio es $r = 1$, de manera que al sustituir estos datos en la expresión $u^2 + v^2 = |a|^2 r^4$ obtenemos la ecuación $u^2 + v^2 = 2$. Por otro lado, los resultados obtenidos en la calculadora son los siguientes:

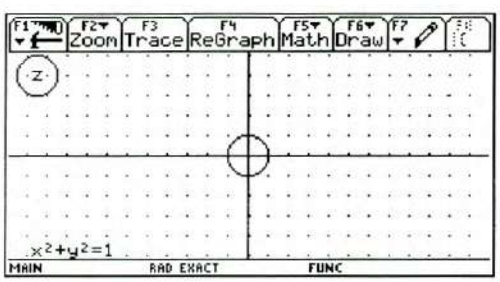


Fig. 4.4(a) Circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano complejo z.

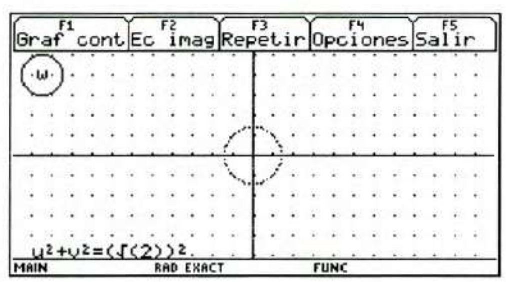


Fig. 4.4(b) Gráfica puntual de la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano complejo w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la circunferencia $u^2 + v^2 = 2$.

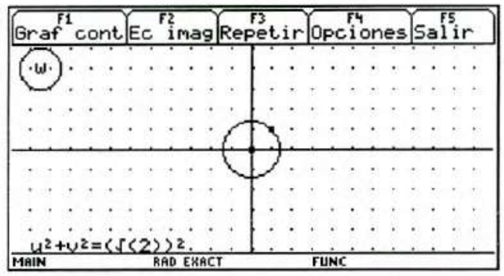


Fig. 4.4(c) Gráfica continua de la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano complejo w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la circunferencia $u^2 + v^2 = 2$. La misma es recorrida dos veces en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del punto $(1,1)$.

Para este caso también sucede que la ecuación obtenida en la solución $u^2 + v^2 = 2$ es equivalente a la ecuación presentada en la pantalla de la calculadora $u^2 + v^2 = (\sqrt{2})^2$, ya que al desarrollar la potencia $(\sqrt{2})^2$ obtenemos como resultado 2.

Ejemplo 4.5 Determine cuál es la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ bajo la transformación $w = \dfrac{1+i}{2} z^2$.

Solución. En este caso tenemos que $a = \dfrac{1+i}{2}$, por lo tanto $|a| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, además el radio es $r = 1$, de manera que al sustituir estos datos en la expresión $u^2 + v^2 = |a|^2 r^4$ obtenemos la ecuación $u^2 + v^2 = \dfrac{1}{2}$. Por otro lado, los resultados obtenidos en la calculadora son los siguientes:

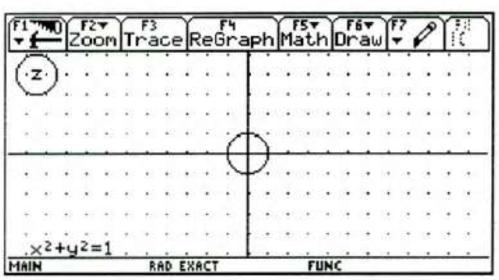


Fig. 4.5(a) Circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano complejo z.

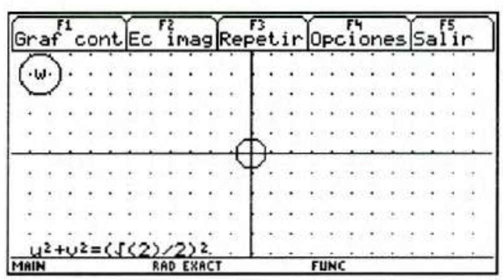


Fig.. 4.5(b) Gráfica puntual de la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano complejo w bajo la transformación $w = \dfrac{1+i}{2} z^2$. Se trata de la circunferencia $u^2 + v^2 = 1/2$.

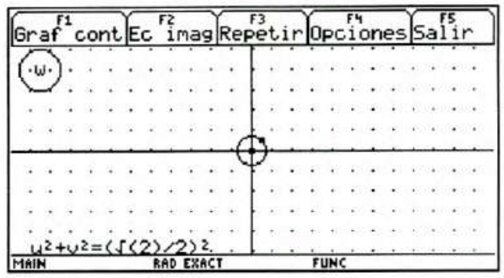


Fig.. 4.5(c) Gráfica continua de la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano complejo w bajo la transformación $w = \dfrac{1+i}{2}z^2$. Se trata de la circunferencia $u^2 + v^2 = 1/2$. La misma es recorrida dos veces en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del punto $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$.

En este ejemplo también ocurre que la ecuación obtenida en la solución $u^2 + v^2 = 1/2$ es equivalente a la ecuación presentada en la pantalla de la calculadora $u^2 + v^2 = (\sqrt{2}/2)^2$, dado que al desarrollar la potencia $(\sqrt{2}/2)^2$ y simplificarla obtenemos como resultado 1/2.

Ejemplo 4.6 Determine cuál es la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}$ bajo la transformación $w = (1-i)z^2$.

Solución. En este caso tenemos que $a = 1 - i$, por lo tanto $|a| = \sqrt{2}$, además el radio es $r = 3/2$, de manera que al sustituir estos datos en la expresión $u^2 + v^2 = |a|^2 r^4$ obtenemos la ecuación $u^2 + v^2 = \dfrac{81}{8}$. Por otro lado, los resultados obtenidos en la calculadora son los siguientes:

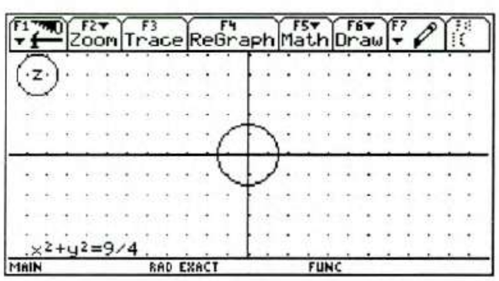


Fig.. 4.6(a) Circunferencia $x^2 + y^2 = 9/4$ en el plano complejo z.

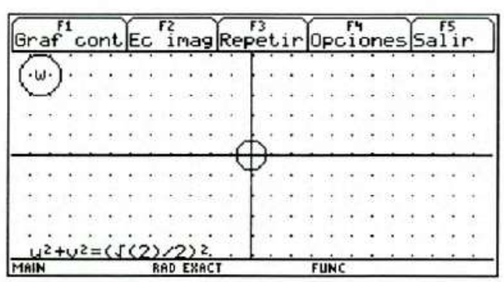


Fig.. 4.6(b) Gráfica puntual de la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9/4$ en el plano complejo w bajo la transformación $w = (1-i)z^2$. Se trata de la circunferencia $u^2 + v^2 = 81/8$.

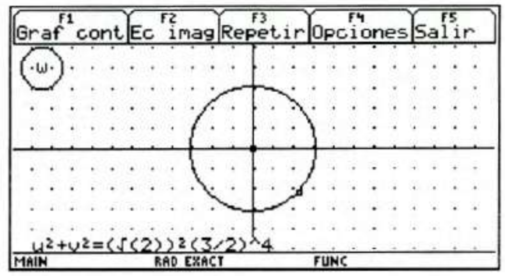


Fig.. 4.6(c) Gráfica continua de la imagen de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9/4$ en el plano complejo w bajo la transformación $w = (1 - i)z^2$. Se trata de la circunferencia $u^2 + v^2 = 81/8$. La misma es recorrida dos veces en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del punto $\left(\frac{9}{4}, -\frac{9}{4}\right)$.

Nuevamente, en este ejemplo ocurre que la ecuación obtenida en la solución $u^2 + v^2 = 81/8$ es equivalente con la ecuación presentada en la pantalla de la calculadora $u^2 + v^2 = (\sqrt{2})^2(3/2)^4$, puesto que al desarrollar la potencia $(\sqrt{2})^2(3/4)^4$ y simplificarla obtenemos como resultado $81/8$.

Dado que todos los ejemplos ilustrados anteriormente nos muestran cómo y en qué se transforma una circunferencia con centro en el origen, veamos ahora ejemplos que nos muestre cómo y en qué se transforma una circunferencia con centro fuera del origen.

Ejemplo 4.7 Determine cuál es la imagen de la circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 1$ bajo la transformación $w = (1-i)z^2$.

Solución. A continuación se presentan las imágenes obtenidas por medio de la calculadora:

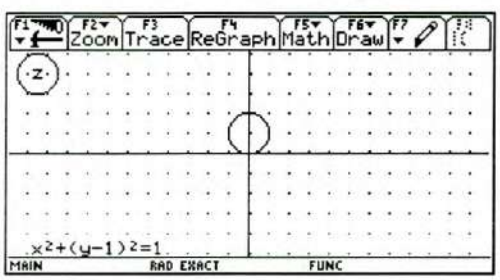


Fig.. 4.7(a) Circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 1$ en el plano complejo z.

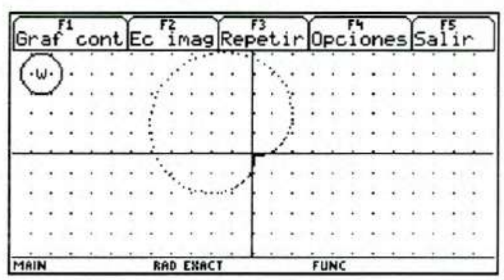


Fig.. 4.7(b) Gráfica puntual de la imagen de la circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 1$ en el plano complejo w bajo la transformación $w = (1-i)z^2$.

Como podemos apreciar en las imágenes anteriores, una circunferencia con centro fuera del origen ya no se transforma necesariamente en otra circunferencia. De hecho en este caso ya no es tan sencillo obtener las ecuaciones de la imagen bajo la transformación $w = az^2$.

Otro ejemplo que ilustra lo anterior es el siguiente:

Ejemplo 4.8 Determine cuál es la imagen de la circunferencia $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ bajo la transformación $w=(1+i)z^2$.

Solución. En este caso, la calculadora nos presenta los siguientes resultados.

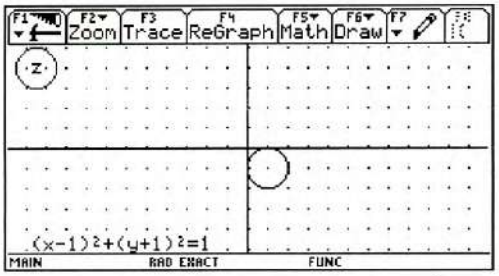


Fig. 4.8(a) Circunferencia $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ en el plano complejo z.

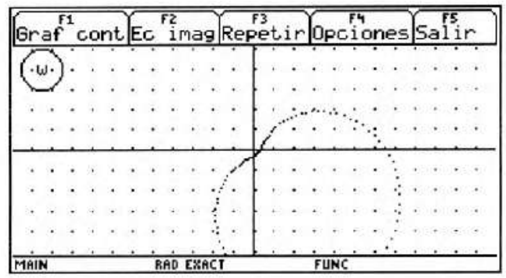


Fig. 4.8(b) Gráfica puntual de la imagen de la circunferencia $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ en el plano complejo w bajo la transformación $w=(1+i)z^2$.

Como podemos apreciar en la ilustración anterior, la imagen, nuevamente resulta no ser una circunferencia, al igual que en el ejemplo anterior.

5. Hipérbolas.

Tenemos que las hipérbolas pueden ser equiláteras y no-equiláteras, éstas a su vez pueden ser del tipo $x^2-y^2=c$ o bien del tipo $y^2-x^2=c$, donde $c>0$, de manera que a continuación presentamos un desarrollo analítico que nos muestra cómo se mapea cada tipo de hipérbola mediante la transformación $w=az^2$.

5.1. Hipérbolas equiláteras $xy=c, \quad c\in\mathbf{R}$

Para determinar analíticamente en qué se transforma una hipérbola equilátera ($xy=c$), primero multipliquemos las ecuaciones (2.1) y (2.2) por a_2 y a_1 respectivamente, esto nos da como resultado que:

$$a_2u=a_1a_2\left(x^2-y^2\right)-2a_2^2xy$$
$$a_1v=a_1a_2\left(x^2-y^2\right)+2a_1^2xy$$

Sí restamos la primera ecuación a la segunda, obtenemos:

$$a_1v-a_2u=2a_1^2xy+2a_2^2xy$$

Factorizando en los términos del miembro derecho $2xy$, y teniendo en cuenta que $xy=c$ tenemos:

$$a_1v-a_2u=2xy(a_1^2+a_2^2) \qquad \text{o bien} \qquad a_1v-a_2u=2c|a|^2.$$

De manera que si despejamos v obtenemos:

$$v = \frac{a_2}{a_1}u + \frac{2c|a|^2}{a_1}; \quad a_1 \neq 0. \tag{2.26}$$

Dicha expresión representa una recta con pendiente $m = a_2 / a_1$ y con ordenada en el origen $b = 2c|a|^2 / a_1$. De hecho, este resultado podemos expresarlo a través del siguiente Teorema.

Teorema 26. Sean $a = a_1 + ia_2$ un número complejo arbitrario distinto de cero, tal que $a_1 \neq 0$, y $c \in \mathbf{R} - \{0\}$. Entonces la imagen de la hipérbola equilátera $xy = c$ bajo la transformación $w = az^2$ es una recta oblicua con pendiente $m = a_2 / a_1$ y ordenada en el origen $b = 2c|a|^2 / a_1$.

Ejemplo 5.1 Determine cuál es la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ bajo la transformación $w = (1+i)z^2$.

Solución. Para este caso tenemos que tanto a_1 y a_2 son iguales a 1, además $c = 1/2$, de tal manera que sustituyendo estos datos en la expresión (2.26) obtenemos la ecuación $v = u + 2$, además, mediante la calculadora se obtienen los siguientes resultados.

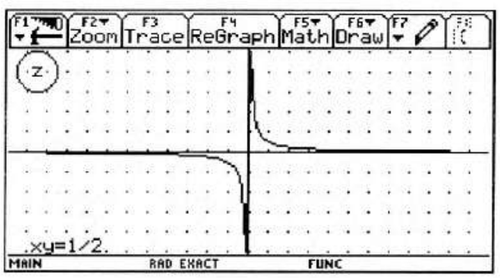


Fig. 5.1(a) Hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano original z.

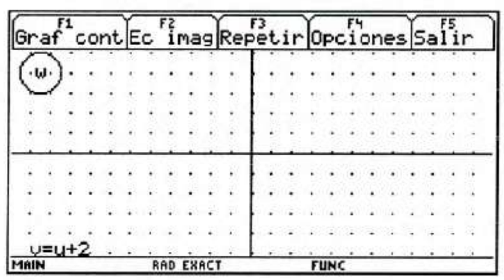


Fig. 5.1(b) Gráfica puntual de la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la recta $v = u + 2$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,-y)$ y (x,y) es la misma, entonces en la figura no se distingue la imagen de tal recta, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,-y)$ avanzando sobre la recta $v = u + 2$ en una cierta dirección, y después la de los puntos (x,y), avanzando de nueva cuenta sobre la recta $v = u + 2$ en la dirección contraria, para así borrar los puntos ya graficados.

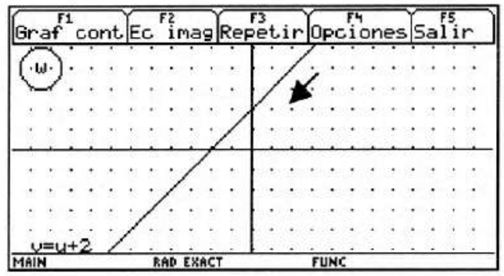


Fig. 5.1(c) Gráfica continua de la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la recta $v = u + 2$. Dicha recta se grafica dos veces, primero en el sentido indicado por la flecha, y después en el sentido contrario al de la flecha.

Es de resaltar que a partir de la expresión (2.26) no se concluye tan fácilmente que la recta imagen se recorre en dos ocasiones, dichos recorridos se realizan primero en la dirección que indica la flecha en la figura y posteriormente en la dirección contraria.

Para explicar analíticamente esta situación de manera general, consideremos un número M positivo suficientemente grande ($M \to \infty$), y un número δ positivo suficientemente pequeño ($\delta \to 0$). Dado que primero se transforman los puntos que se encuentran sobre la rama izquierda de la hipérbola, tomemos primeramente $x = -M$, lo cual significa que $x \to -\infty$, luego entonces $y = -c/M$, de tal manera que al sustituir lo anterior en las ecuaciones generales de la transformación obtenemos los resultados:

$$u = a_1\left(M^2 - \frac{c^2}{M^2}\right) - 2a_2c$$

$$v = a_2\left(M^2 - \frac{c^2}{M^2}\right) + 2a_1c$$

Luego al tomar el límite cuando $M \to \infty$, concluimos que:

$$u \to (a_1)(+\infty) - 2a_2c$$
$$v \to (a_2)(+\infty) + 2a_1c$$

De aquí se sigue que

$$u \to +\infty \quad \text{si} \quad a_1 > 0 \quad \text{y} \quad u \to -\infty \quad \text{si} \quad a_1 < 0$$
$$v \to +\infty \quad \text{si} \quad a_2 > 0 \quad \text{y} \quad v \to -\infty \quad \text{si} \quad a_2 < 0$$

Si ahora consideramos que $x = -\delta$, lo cual significa que x se aproxima a cero por la izquierda ($x \to 0^-$), entonces $y = -c/\delta$, de tal manera que al sustituir lo anterior en las ecuaciones generales de la transformación obtenemos que:

$$u = a_1\left(\delta^2 - \frac{c^2}{\delta^2}\right) - 2a_2c$$

$$v = a_2\left(\delta^2 - \frac{c^2}{\delta^2}\right) + 2a_1c$$

Calculando el límite cuando $\delta \to 0^-$ de las expresiones anteriores, concluimos que:

$$u \to (a_1)(-\infty) - 2a_2c$$
$$v \to (a_2)(-\infty) + 2a_1c$$

De aquí se sigue que

$$u \to -\infty \quad \text{si} \quad a_1 > 0 \quad \text{y} \quad u \to +\infty \quad \text{si} \quad a_1 < 0$$
$$v \to -\infty \quad \text{si} \quad a_2 > 0 \quad \text{y} \quad v \to +\infty \quad \text{si} \quad a_2 < 0$$

De hecho, el análisis realizado anteriormente nos permite concluir que la recta imagen de la rama izquierda de una hipérbola equilátera se empieza a graficar ya sea en los puntos $(+\infty,+\infty)$ ó $(+\infty,-\infty)$ ó $(-\infty,+\infty)$ ó $(-\infty,-\infty)$ y se va hacia los puntos $(-\infty,-\infty)$ ó $(-\infty,+\infty)$ ó $(+\infty,-\infty)$ ó $(+\infty,+\infty)$ respectivamente.

Una vez mapeados los puntos de la rama izquierda de la hipérbola, inmediatamente después se transforman los puntos localizados sobre la rama derecha de la hipérbola. Por ello tomemos primeramente $x = \delta$, lo cual significa que x se aproxima a cero por la derecha ($\delta \to 0^+$), entonces $y = c/\delta$, de tal manera que al sustituir lo anterior en las ecuaciones generales de la transformación obtenemos que:

$$u = a_1\left(\delta^2 - \frac{c^2}{\delta^2}\right) - 2a_2c$$
$$v = a_2\left(\delta^2 - \frac{c^2}{\delta^2}\right) + 2a_1c$$

Calculando el límite cuando $\delta \to 0^+$ en las expresiones anteriores concluimos que:

$$u \to (a_1)(-\infty) - 2a_2c$$
$$v \to (a_2)(-\infty) + 2a_1c$$

De aquí se sigue que

$$u \to -\infty \quad \text{si} \quad a_1 > 0 \quad \text{y} \quad u \to +\infty \quad \text{si} \quad a_1 < 0$$
$$v \to -\infty \quad \text{si} \quad a_2 > 0 \quad \text{y} \quad v \to +\infty \quad \text{si} \quad a_2 < 0$$

Supongamos ahora que $x = M$, lo cual significa que $x \to +\infty$, luego entonces $y = c/M$, de tal manera que al sustituir lo anterior en las ecuaciones generales de la transformación obtenemos los resultados:

$$u = a_1\left(M^2 - \frac{c^2}{M^2}\right) - 2a_2c$$
$$v = a_2\left(M^2 - \frac{c^2}{M^2}\right) + 2a_1c$$

Luego al tomar el límite cuando $M \to +\infty$, concluimos que:

$$u \to (a_1)(+\infty) - 2a_2c$$
$$v \to (a_2)(+\infty) + 2a_1c$$

De aquí se sigue que

$$u \to +\infty \quad \text{si} \quad a_1 > 0 \quad \text{y} \quad u \to -\infty \quad \text{si} \quad a_1 < 0$$
$$v \to +\infty \quad \text{si} \quad a_2 > 0 \quad \text{y} \quad v \to -\infty \quad \text{si} \quad a_2 < 0$$

Esto significa que la recta imagen de la rama derecha de una hipérbola equilátera se empieza a graficar ya sea en los puntos $(-\infty,-\infty)$ ó $(-\infty,+\infty)$ ó $(+\infty,-\infty)$ ó $(+\infty,+\infty)$ y se va hacia los puntos $(+\infty,+\infty)$ ó $(+\infty,-\infty)$ ó $(-\infty,+\infty)$ ó $(-\infty,-\infty)$ respectivamente.

En suma, lo expuesto anteriormente nos demuestra que la recta imagen de una hipérbola equilátera es recorrida en dos ocasiones en sentidos opuestos.

Ejemplo 5.2 Determine cuál es la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ bajo la transformación $w = (-1+i)z^2$.

Solución. Para este caso tenemos que $a = -1+i$, por lo tanto $a_1 = -1, a_2 = 1$, además $c = 1/2$, de tal manera que sustituyendo estos datos en la expresión (2.26) obtenemos la ecuación $v = -u - 2$, además mediante la calculadora se obtienen los siguientes resultados.

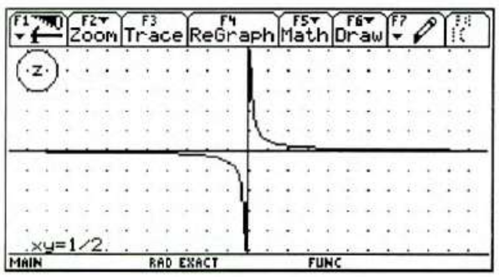


Fig. 5.2(a) Hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano original z.

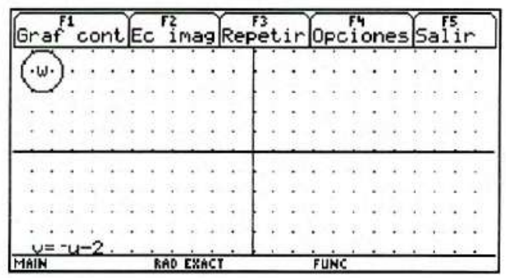


Fig. 5.2(b) Gráfica puntual de la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano w bajo la transformación $w = (-1+i)z^2$. Se trata de la recta $v = -u - 2$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,-y)$ y (x,y) es la misma, entonces en la figura no se distingue la imagen de tal recta, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,-y)$ avanzando sobre la recta $v = -u - 2$. en una cierta dirección, y después la de los puntos (x,y), avanzando de nueva cuenta sobre la recta $v = -u - 2$. en la dirección contraria, para así borrar los puntos ya graficados.

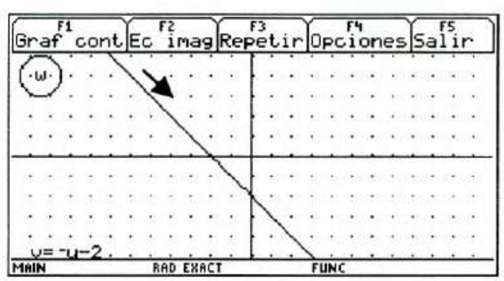


Fig. 5.2(c) Gráfica continua de la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano w bajo

la transformación $w = (-1+i)z^2$. Se trata de la recta $v = -u - 2$. Dicha recta se recorre en dos ocasiones, primero en el sentido indicado por la flecha y posteriormente en el sentido contrario de la misma.

Ahora consideremos que $a_1 = 0$, entonces las ecuaciones generales de la transformación (2.1) y (2.2) se reducen a:

$$u = -2a_2xy$$
$$v = a_2\left(x^2 - y^2\right)$$

Teniendo en cuenta que $xy = c$, entonces sustituyendo en las expresiones anteriores obtenemos las ecuaciones:

$$u = -2a_2c \qquad \textbf{(2.27)}$$
$$v = a_2\left(x^2 - y^2\right) \qquad \textbf{(2.28)}$$

A partir del análisis desarrollado en el caso anterior y de las ecuaciones (2.27) y (2.28) concluimos que la imagen en este caso es una recta vertical, a saber la recta $u = -2a_2c$, la cual se recorre en dos ocasiones, es decir, que cuando $a_1 = 0$ una hipérbola equilátera se transforma en una recta vertical. Este resultado podemos expresarlo mediante el siguiente Teorema.

Teorema 27. La imagen de la hipérbola equilátera $xy = c, \text{con } c \neq 0$, bajo la transformación $w = ia_2z^2$, con $a_2 \neq 0$, es la recta vertical $u = -2a_2c$, la cual se recorre en dos ocasiones. Si $a_2 > 0$, la recta se recorre primeramente de arriba hacia abajo y luego de abajo hacia arriba. Pero si $a_2 < 0$, entonces la recta se recorre primero de abajo hacia arriba y después en la dirección contraria.

Ejemplo 5.3 Determine cuál es la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ bajo la transformación $w = iz^2$.

Solución. Para este caso tenemos que $a = i$, por lo tanto $a_2 = 1$, además $c = 1/2$, de tal manera que sustituyendo estos datos en la expresión (2.27) obtenemos la ecuación $u = -1$, además, mediante la calculadora se obtienen los siguientes resultados.

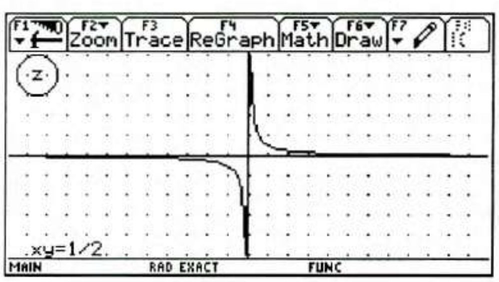


Fig. 5.3(a) Hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano original z.

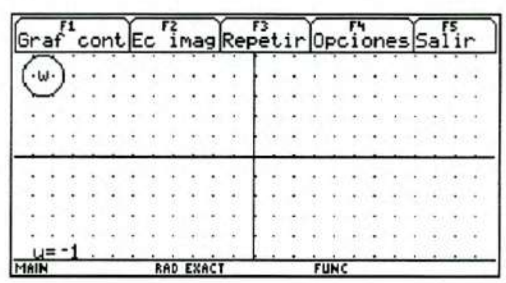


Fig. 5.3(b) Gráfica puntual de la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la recta $u = -1$. Dado que la imagen de los puntos

$(-x,-y)$ y (x,y) es la misma, entonces en la figura no se distingue la imagen de tal recta, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,-y)$ avanzando sobre la recta $u=-1$ de arriba hacia abajo, y después la de los puntos (x,y), avanzando de nueva cuenta sobre la recta $u=-1$ en la dirección contraria, para así borrar los puntos ya graficados.

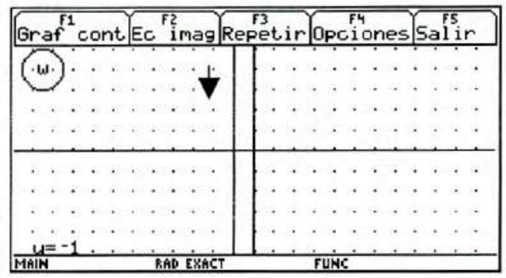


Fig. 5.3(c) Gráfica continua de la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la recta $u=-1$. Dicha recta se recorre en dos ocasiones, primero en el sentido indicado por la flecha y posteriormente en el sentido contrario.

Ejemplo 5.4 Determine cuál es la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ bajo la transformación $w = -iz^2$.

Solución. Para este caso tenemos que $a=-i$, por lo tanto $a_2=-1$, además $c=1/2$, de tal manera que sustituyendo estos datos en la expresión (2.27) obtenemos la ecuación $u=1$, además, mediante la calculadora se obtienen los siguientes resultados.

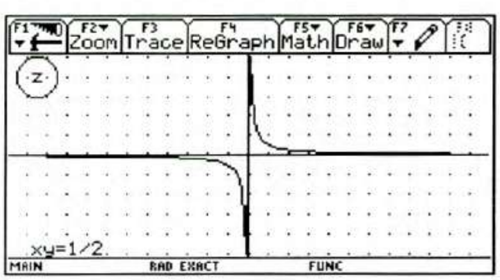


Fig. 5.4(a) Hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano original z.

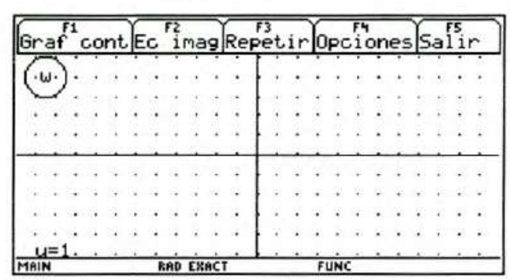


Fig. 5.4(b) Gráfica puntual de la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano w bajo la transformación $w = -iz^2$. Se trata de la recta $u=1$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,-y)$ y (x,y) es la misma, entonces en la figura no se distingue la imagen de tal recta, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,-y)$ avanzando sobre la recta $u=1$ de abajo hacia arriba, y después la de los puntos (x,y), avanzando de nueva cuenta sobre la recta $u=1$ en la dirección contraria, para así borrar los puntos ya graficados.

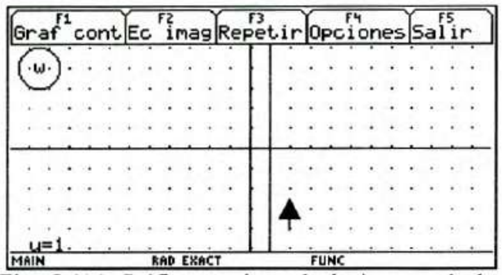


Fig. 5.4(c) Gráfica continua de la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano w bajo la transformación $w = -iz^2$. Se trata de la recta $u = 1$. Dicha recta se recorre en dos ocasiones, primero en el sentido indicado por la flecha y posteriormente en el sentido contrario.

Por el contrario, si $a_2 = 0$, entonces las ecuaciones generales de la transformación (2.1) y (2.2) se transforman en las nuevas ecuaciones particulares:

$$u = a_1\left(x^2 - y^2\right)$$
$$v = 2a_1xy$$

Recordando que $xy = c$, entonces tenemos que:

$$u = a_1\left(x^2 - y^2\right) \qquad \textbf{(2.29)}$$
$$v = 2a_1c \qquad \textbf{(2.30)}$$

De aquí se sigue que cuando $a_2 = 0$, entonces la imagen de una hipérbola equilátera es la recta horizontal $v = 2a_1c$. Análogamente al caso anterior, concluimos que dicha recta se recorre en dos ocasiones, es decir, que cuando $a_2 = 0$ una hipérbola equilátera se transforma en una recta horizontal. Este resultado podemos expresarlo mediante el siguiente Teorema.

Teorema 28. La imagen de la hipérbola equilátera $xy = c, \text{con } c \neq 0$, bajo la transformación $w = a_1z^2$, con $a_1 \neq 0$, es la recta horizontal $v = 2a_1c$, la cual se recorre en dos ocasiones. Si $a_1 > 0$, la recta se recorre primeramente de derecha a izquierda y luego de izquierda a derecha. Pero si $a_1 < 0$, entonces la recta se recorre primero de izquierda a derecha y después en la dirección contraria.

Ejemplo 5.5 Determine cuál es la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ bajo la transformación $w = z^2$.

Solución. Para este caso tenemos que $a = 1$, por lo tanto $a_1 = 1$, además $c = 1/2$, de tal manera que sustituyendo estos datos en la expresión (2.30) obtenemos la ecuación $v = 1$, además, mediante la calculadora se obtienen los siguientes resultados.

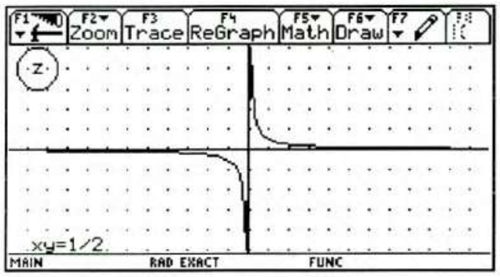


Fig. 5.5(a) Hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano original z.

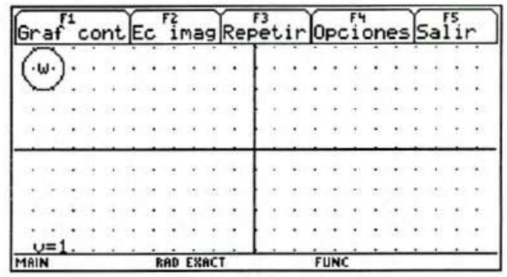


Fig. 5.5(b) Gráfica puntual de la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano w bajo la transformación $w = z^2$. Se trata de la recta $v = 1$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,-y)$ y (x,y) es la misma, entonces en la figura no se distingue la imagen de tal recta, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,-y)$ avanzando sobre la recta $v = 1$ de derecha a izquierda, y después la de los puntos (x,y), avanzando de nueva cuenta sobre la recta $v = 1$ en la dirección contraria, para así borrar los puntos ya graficados.

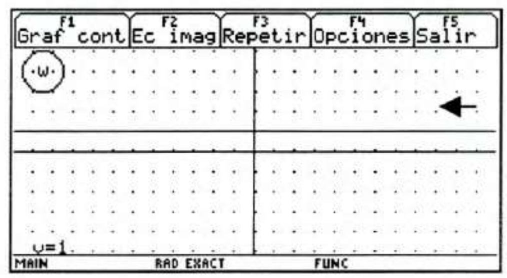


Fig. 5.5(c) Gráfica continua de la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano w bajo la transformación $w = z^2$. Se trata de la recta $v = 1$. Dicha recta se recorre en dos ocasiones, primero en el sentido indicado por la flecha y posteriormente en el sentido contrario.

Ejemplo 5.6 Determine cuál es la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ bajo la transformación $w = -z^2$.

Solución. Para este caso tenemos que $a = -1$, por lo tanto $a_1 = -1$, además $c = 1/2$, de tal manera que sustituyendo estos datos en la expresión (2.30) obtenemos la ecuación $v = -1$, además, mediante la calculadora se obtienen los siguientes resultados.

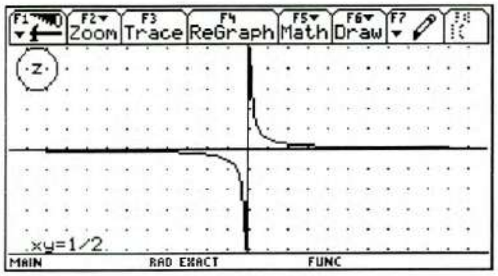


Fig. 5.6(a) Hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano original z.

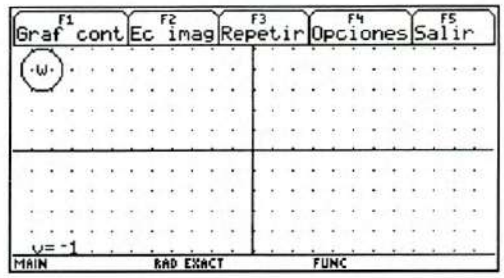


Fig. 5.6(b) Gráfica puntual de la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano w bajo la transformación $w = -z^2$. Se trata de la recta $v = -1$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,-y)$ y (x,y) es la misma, entonces en la figura no se distingue la imagen de tal recta, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,-y)$ avanzando sobre la recta $v = -1$ de izquierda a derecha, y después la de los puntos (x,y), avanzando de nueva cuenta sobre la recta $v = -1$ en la dirección contraria, para así borrar los puntos ya graficados.

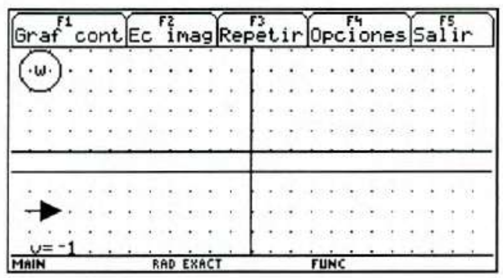


Fig. 5.6(c) Gráfica continua de la imagen de la hipérbola equilátera $xy = 1/2$ en el plano w bajo la transformación $w = -z^2$. Se trata de la recta $v = -1$. Dicha recta se recorre en dos ocasiones, primero en el sentido indicado por la flecha y posteriormente en el sentido contrario de la misma.

5.2. Hipérbolas del tipo $x^2 - y^2 = c$; $c > 0$.

Para determinar analíticamente en qué se transforma una hipérbola horizontal, es decir, de la forma $x^2 - y^2 = c$, bajo la transformación $w = az^2$, primero multipliquemos las ecuaciones generales (2.1) y (2.2) por a_1 y a_2 respectivamente, con ello obtenemos los siguientes resultados:

$$a_1 u = a_1^2\left(x^2 - y^2\right) - 2a_1 a_2 xy$$
$$a_2 v = a_2^2\left(x^2 - y^2\right) + 2a_1 a_2 xy$$

Ahora, sumando estas ecuaciones, obtenemos:

$$a_1 v + a_2 u = a_1^2\left(x^2 - y^2\right) + a_2^2\left(x^2 - y^2\right)$$

Factorizando en los términos del miembro derecho $x^2 - y^2$, y además teniendo en cuenta que $x^2 - y^2 = c$, obtenemos:

$$a_1 v + a_2 u = \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(x^2 - y^2\right) \qquad \text{o bien} \qquad a_1 v + a_2 u = c|a|^2$$

De manera que, despejando v, concluimos:

$$v = -\frac{a_1}{a_2}u + \frac{c|a|^2}{a_2}; \quad a_2 \neq 0. \tag{2.31}$$

Al igual que para una hipérbola equilátera, el resultado de la transformación es una recta con pendiente $m = -a_1 / a_2$ y con ordenada en el origen $b = c|a|^2 / a_2$. Este resultado podemos expresarlo formalmente en el siguiente Teorema.

Teorema 29. Sean $a = a_1 + ia_2$ un número complejo arbitrario distinto de cero, tal que $a_2 \neq 0$, y $c \in \mathbf{R}, c > 0$. Entonces la imagen de la hipérbola $x^2 - y^2 = c$, bajo la transformación $w = az^2$ es una recta oblicua con pendiente $m = -a_1 / a_2$ y ordenada en el origen $b = c|a|^2 / a_2$.

Ejemplo 5.7 Determine cuál es la imagen de la hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ bajo la transformación $w = (1+i)z^2$.

Solución. Para este caso tenemos que tanto a_1 y a_2 son iguales a 1, además $c = 1$, de tal manera que sustituyendo estos datos en la expresión (2.31) obtenemos la ecuación $v = -u + 2$, además, mediante la calculadora se obtienen los siguientes resultados.

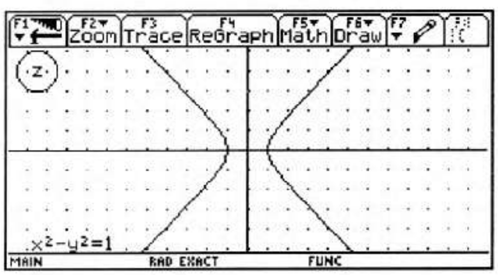


Fig. 5.7(a) Hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ en el plano original z.

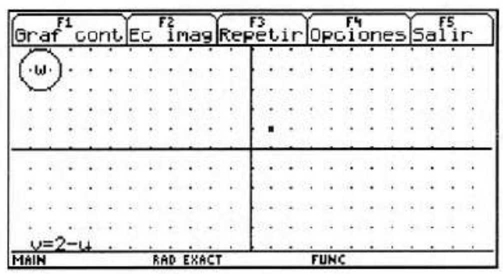


Fig. 5.7(b) Gráfica puntual de la imagen de la hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la recta $v = -u + 2$. Dado que la imagen de los puntos $(-x, \pm y)$ y $(x, \pm y)$ es la misma, entonces en la figura no se distingue la imagen de tal recta, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x, \pm y)$ avanzando sobre la recta $v = -u + 2$ en direcciones convergentes, y después la de los puntos $(x, \pm y)$, avanzando de

nueva cuenta sobre la recta $v = -u + 2$ en direcciones divergentes, para así borrar los puntos ya graficados.

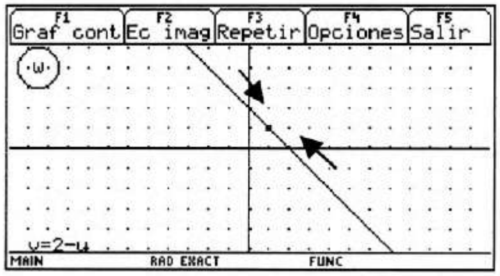


Fig. 5.7(c) Gráfica continua de la imagen de la hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = (1 + i)z^2$. Se trata de la recta $v = -u + 2$. Dicha recta se grafica dos veces, primero de manera convergente al punto (1,1), y posteriormente de forma divergente a partir de dicho punto.

Es importante destacar que a partir de la expresión (2.31) no se concluye tan fácilmente que la recta imagen se recorre en dos ocasiones, dichos recorridos se realizan primero en direcciones convergentes (como lo indica la flecha en la figura 5.7) y posteriormente en direcciones divergentes (en el sentido opuesto de la flecha).

Para analizar analíticamente esta situación de manera general, consideremos un número M positivo suficientemente grande ($M \to \infty$). Dado que primero se transforman los puntos que se encuentran sobre la rama izquierda de la hipérbola horizontal, tomemos $x = -M$, lo cual significa que $x \to -\infty$, luego entonces $y = \pm\sqrt{M^2 - c}$, de tal manera que al sustituir lo anterior en las ecuaciones generales de la transformación obtenemos los resultados:

$$u = a_1c + 2a_2M\left(\pm\sqrt{M^2 - c}\right) = a_1c \pm 2a_2M\left(\sqrt{M^2 - c}\right)$$
$$v = a_2c - 2a_1M\left(\pm\sqrt{M^2 - c}\right) = a_2c \mp 2a_1M\left(\sqrt{M^2 - c}\right)$$

Luego al tomar el límite cuando $M \to \infty$, concluimos que:

$$u \to a_1c \pm 2a_2(+\infty)$$
$$v \to a_2c \mp 2a_1(+\infty)$$

De aquí se sigue que:

$$u \to \pm\infty \text{ si } a_2 > 0 \text{ y } u \to \mp\infty \text{ si } a_2 < 0$$
$$v \to \mp\infty \text{ si } a_1 > 0 \text{ y } v \to \pm\infty \text{ si } a_1 < 0$$

Dado que $x \notin \left(-\sqrt{c}, \sqrt{c}\right)$, consideremos ahora que $x \to -\sqrt{c}$, entonces implica que $y \to 0$, de tal manera que al sustituir lo anterior en las ecuaciones generales de la transformación obtenemos que:

$$u \to a_1c$$
$$v \to a_2c$$

De hecho, el análisis realizado anteriormente nos permite concluir que la recta imagen de la rama izquierda de una hipérbola horizontal se empieza a graficar ya sea en los puntos $(+\infty,+\infty)$ y $(-\infty,-\infty)$ ó $(+\infty,-\infty)$ y $(-\infty,+\infty)$, y converge hacia el punto (a_1c, a_2c).

Una vez mapeados los puntos de la rama izquierda de la hipérbola, inmediatamente después se transforman los puntos localizados sobre la rama derecha de la misma. Por ello consideremos primeramente que $x \to \sqrt{c}$, luego entonces $y \to 0$, esto implica que:

$$u \to a_1c$$
$$v \to a_2c$$

Considerando ahora que $x = M$, lo cual significa que $x \to +\infty$, luego entonces $y = \pm\sqrt{M^2 - c}$, de tal manera que al sustituir lo anterior en las ecuaciones generales de la transformación obtenemos los resultados:

$$u = a_1c - 2a_2M\left(\pm\sqrt{M^2 - c}\right) = a_1c \mp 2a_2M\left(\sqrt{M^2 - c}\right)$$

$$v = a_2c + 2a_1M\left(\pm\sqrt{M^2 - c}\right) = a_2c \pm 2a_1M\left(\sqrt{M^2 - c}\right)$$

Luego al tomar el límite cuando $M \to \infty$, concluimos que:

$$u \to a_1c \mp 2a_2(+\infty)$$
$$v \to a_2c \pm 2a_1(+\infty)$$

De aquí se sigue que:

$$u \to \mp\infty \;\text{ si }\; a_2 > 0 \;\text{ y }\; u \to \pm\infty \;\text{ si }\; a_2 < 0$$
$$v \to \pm\infty \;\text{ si }\; a_1 > 0 \;\text{ y }\; v \to \mp\infty \;\text{ si }\; a_1 < 0$$

Esto significa que la recta imagen de la rama derecha de una hipérbola horizontal se empieza a graficar alejándose del punto de convergencia de la otra rama (a_1c, a_2c), ya sea hacia los puntos $(+\infty,-\infty)$ y $(-\infty,+\infty)$ ó $(+\infty,+\infty)$ y $(-\infty,-\infty)$, respectivamente.

En suma, lo expuesto anteriormente nos demuestra que la recta imagen de una hipérbola horizontal es recorrida en dos ocasiones, primeramente en direcciones convergentes, hacia el punto (a_1c, a_2c) y posteriormente en direcciones divergentes, ya sea hacia los puntos $(+\infty,-\infty)$ y $(-\infty,+\infty)$ ó $(+\infty,+\infty)$ y $(-\infty,-\infty)$.

Ejemplo 5.8 Determine cuál es la imagen de la hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ bajo la transformación $w = (1-i)z^2$.

Solución. Para este caso tenemos que $a = 1 - i$, por lo tanto, $a_1 = 1$ y $a_2 = -1$, además $c = 1$, de tal manera que sustituyendo estos datos en la expresión (2.31) obtenemos la ecuación $v = u - 2$, además mediante la calculadora se obtienen los siguientes resultados.

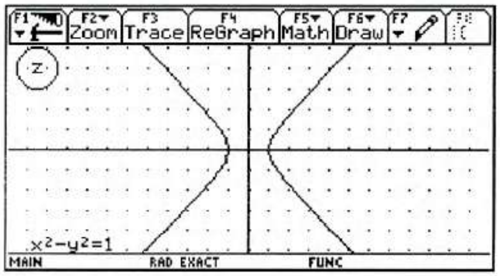


Fig. 5.8 (a) Hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ en el plano original z.

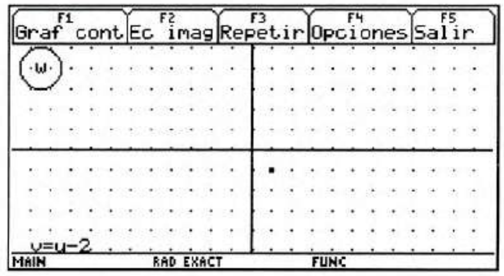


Fig. 5.8(b) Gráfica puntual de la imagen de la hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = (1-i)z^2$. Se trata de la recta $v = u - 2$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,\pm y)$ y $(x,\pm y)$ es la misma, entonces en la figura no se distingue la imagen de tal recta, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,\pm y)$ avanzando sobre la recta $v = u - 2$ en dirección convergente al punto $(1,-1)$, y después la de los puntos $(x,\pm y)$, avanzando de nueva cuenta sobre la recta $v = u - 2$ en la dirección contraria, para así borrar los puntos ya graficados.

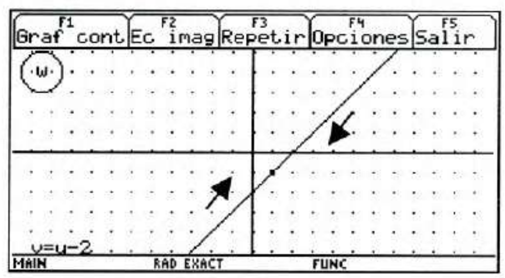


Fig. 5.8(c) Gráfica continua de la imagen de la hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = (1-i)z^2$. Se trata de la recta $v = u - 2$. Dicha recta se grafica dos veces, primero en la dirección convergente al punto $(1,-1)$, y después en la dirección divergente a dicho punto.

Pero si $a_2 = 0$, entonces las ecuaciones generales de la transformación se reducen a las ecuaciones particulares:

$$u = a_1\left(x^2 - y^2\right)$$
$$v = 2a_1xy$$

Recordando que $x^2 - y^2 = c$, entonces sustituyendo las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$u = a_1 c \qquad \textbf{(2.32)}$$
$$v = 2a_1xy \qquad \textbf{(2.33)}$$

A partir del análisis desarrollado en el caso anterior y de las ecuaciones (2.32) y (2.33) concluimos que cuando $a_2 = 0$, la imagen de una hipérbola horizontal es la recta vertical

$u = a_1c$, la cual se recorre en dos ocasiones, primero de manera convergente al punto $(a_1c,0)$, posteriormente de manera divergente a partir de dicho punto. Este resultado podemos expresarlo mediante el siguiente Teorema.

Teorema 30. La imagen de la hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = c$, con $c > 0$, bajo la transformación $w = a_1z^2$, con $a_1 \neq 0$, es la recta vertical $u = a_1c$, la cual se recorre en dos ocasiones, primero de manera convergente al punto $(a_1c,0)$, y posteriormente de manera divergente a partir de dicho punto.

Ejemplo 5.9 Determine cuál es la imagen de la hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ bajo la transformación $w = z^2$.

Solución. Para este caso tenemos que $a = 1$, por lo tanto $a_1 = 1$, además $c = 1$, de tal manera que sustituyendo estos datos en la expresión (2.32) obtenemos la ecuación $u = 1$, además mediante la calculadora se obtienen los siguientes resultados.

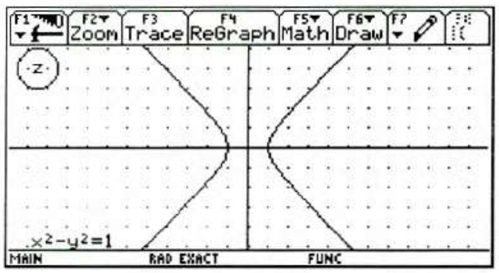


Fig. 5.9(a) Hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ en el plano original z.

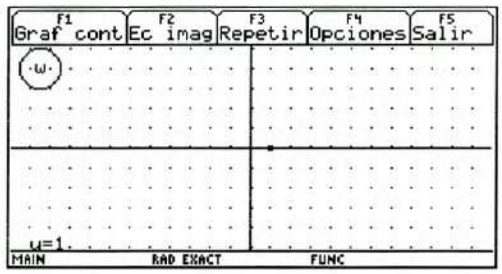


Fig. 5.9(b) Gráfica puntual de la imagen de la hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = z^2$. Se trata de la recta $u = 1$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,\pm y)$ y $(x,\pm y)$ es la misma, entonces en la figura no se distingue la imagen de tal recta, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,\pm y)$ avanzando sobre la recta $u = 1$ en dirección convergente al punto $(1,0)$, y después la de los puntos $(x,\pm y)$, avanzando de nueva cuenta sobre la recta $u = 1$ en la dirección contraria, para así borrar los puntos ya graficados.

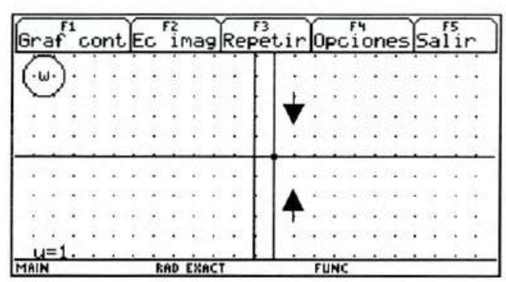


Fig. 5.9(c) Gráfica continua de la imagen de la hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ en el plano w

bajo la transformación $w = z^2$. Se trata de la recta $u = 1$. Dicha recta se recorre en dos ocasiones, primero en forma convergente al punto $(1,0)$, y luego de manera divergente a partir de dicho punto.

Por el contrario, si $a_1 = 0$, entonces las ecuaciones generales de la transformación se reducen a las ecuaciones particulares:

$$u = -2a_2xy$$
$$v = a_2\left(x^2 - y^2\right)$$

Dado que $x^2 - y^2 = c$, entonces tenemos las nuevas ecuaciones equivalentes:

$$u = -2a_2xy \tag{2.34}$$
$$v = a_2c \tag{2.35}$$

De aquí se sigue que la imagen de una hipérbola horizontal cuando $a_1 = 0$, es la recta horizontal $v = a_2c$. Análogamente al caso anterior concluimos que dicha recta se recorre en dos ocasiones, primero de manera convergente al punto $(0,a_2c)$, y posteriormente de manera divergente a partir de dicho punto. Este resultado podemos expresarlo mediante el siguiente Teorema.

Teorema 31. La imagen de la hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = c$, con $c > 0$, bajo la transformación $w = ia_2z^2$, con $a_2 \neq 0$, es la recta horizontal $v = a_2c$, la cual se recorre en dos ocasiones, primero de manera convergente al punto $(0,a_2c)$, y posteriormente de manera divergente a partir de dicho punto.

Ejemplo 5.10 Determine cuál es la imagen de la hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ bajo la transformación $w = iz^2$.

Solución. Para este caso tenemos que $a = 1$, por lo tanto $a_1 = 1$, además $c = 1$, de tal manera que sustituyendo estos datos en la expresión (2.35) obtenemos la ecuación $v = 1$, además mediante la calculadora se obtienen los siguientes resultados.

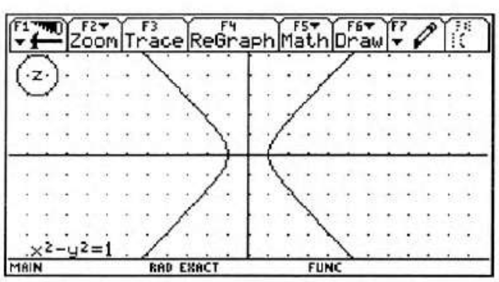


Fig. 5.10(a) Hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ en el plano original z.

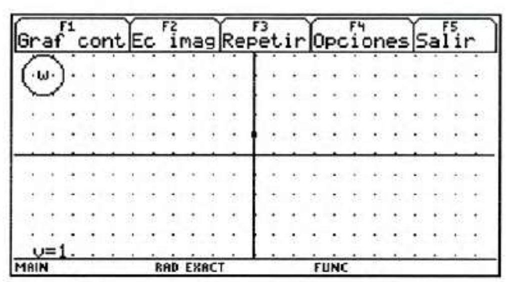


Fig. 5.10(b) Gráfica puntual de la imagen de la hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la recta $v = 1$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,\pm y)$ y $(x,\pm y)$ es la misma, entonces en la figura no se distingue la imagen de tal recta, esto es debido a que la calculadora primero grafica la

imagen de los puntos $(-x, \pm y)$ avanzando sobre la recta $v = 1$ en dirección convergente al punto $(1,0)$, y después la de los puntos $(x, \pm y)$, avanzando de nueva cuenta sobre la recta $v = 1$ en la dirección contraria, para así borrar los puntos ya graficados.

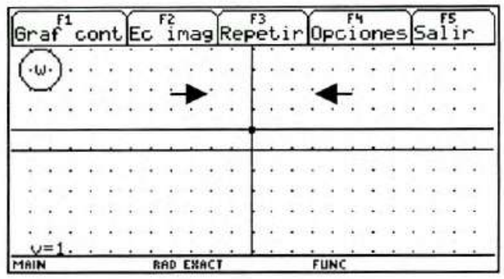


Fig. 5.10(c) Gráfica continua de la imagen de la hipérbola horizontal $x^2 - y^2 = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la recta $v = 1$. Dicha recta se recorre en dos ocasiones, primero en forma convergente al punto $(0,1)$, y luego de manera divergente a partir de dicho punto.

5.3 Hipérbolas del tipo $y^2 - x^2 = c;\quad c > 0.$

Para determinar analíticamente en qué se transforma una hipérbola vertical, es decir, de la forma $y^2 - x^2 = c$, primero multipliquemos las ecuaciones generales (2.1) y (2.2) por $-a_1$ y $-a_2$ respectivamente, esto nos permite obtener los siguientes resultados:

$$-a_1 u = a_1^2(y^2 - x^2) + 2a_1 a_2 xy$$
$$-a_2 v = a_2^2(y^2 - x^2) - 2a_1 a_2 xy$$

Ahora, sumando estas ecuaciones, obtenemos:

$$-a_1 v - a_2 u = a_1^2(y^2 - x^2) + a_2^2(y^2 - x^2$$

Factorizando en los términos del miembro derecho $y^2 - x^2$, y además teniendo en cuenta que $y^2 - x^2 = c$, obtenemos:

$$-a_1 v - a_2 u = (a_1^2 + a_2^2)(y^2 - x^2) \qquad \text{o bien} \qquad -a_1 v - a_2 u = c|a|^2$$

de manera que despejando v, obtenemos:

$$v = -\frac{a_1}{a_2}u - \frac{c|a|^2}{a_2};\quad a_2 \neq 0. \qquad \textbf{(2.36)}$$

Al igual que en los casos anteriores tenemos que una hipérbola vertical, es decir, del tipo $y^2 - x^2 = c$, se transforma en una recta con pendiente $m = -a_1 / a_2$ y con ordenada en el origen $b = -c|a|^2 / a_2$. Dicho resultado podemos expresarlo a través del siguiente Teorema.

Teorema 32. Sean $a = a_1 + ia_2$ un número complejo arbitrario distinto de cero, tal que $a_2 \neq 0$, y $c \in \mathbf{R}, c > 0$. Entonces la imagen de la hipérbola $y^2 - x^2 = c$, bajo la transformación $w = az^2$ es una recta oblicua con pendiente $m = -a_1 / a_2$ y ordenada en el origen $b = -c|a|^2 / a_2$.

Ejemplo 5.11 Determine cuál es la imagen de la hipérbola vertical $y^2 - x^2 = 1$ bajo la transformación $w = (1+i)z^2$.

Solución. Para este caso tenemos que tanto a_1 y a_2 son iguales a 1, además $c = 1$, de tal manera que sustituyendo estos datos en la expresión (2.36) obtenemos la ecuación $v = -u + 2$, además, mediante la calculadora se obtienen los siguientes resultados.

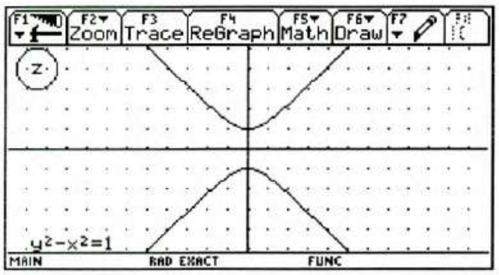


Fig. 5.11(a) Hipérbola vertical $y^2 - x^2 = 1$ en el plano original z.

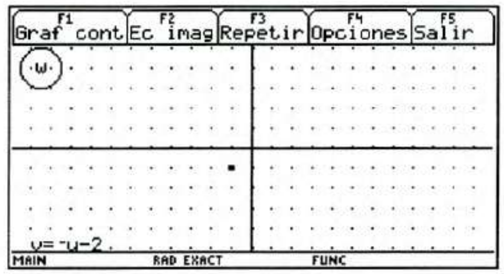


Fig. 5.11(b) Gráfica puntual de la imagen de la hipérbola vertical $y^2 - x^2 = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la recta $v = -u - 2$. Dado que la imagen de los puntos $(-x, \pm y)$ y $(x, \pm y)$ es la misma, entonces en la figura no se distingue la imagen de tal recta, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x, \pm y)$ avanzando sobre la recta $v = -u - 2$ en direcciones convergentes, y después la de los puntos $(x, \pm y)$, avanzando de nueva cuenta sobre la recta $v = -u - 2$ en direcciones divergentes, para así borrar los puntos ya graficados.

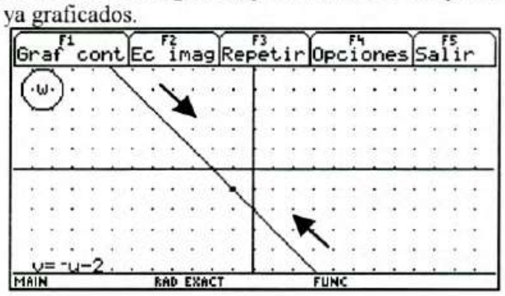


Fig. 5.11(c) Gráfica continua de la imagen de la hipérbola vertical $y^2 - x^2 = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = (1+i)z^2$. Se trata de la recta $v = -u - 2$. Dicha recta se grafica dos veces, primero de manera convergente al punto $(-1, -1)$, y posteriormente de forma divergente a partir de dicho punto.

Cabe señalar que a partir de la ecuación (2.36), no es fácil detectar que la recta imagen de una hipérbola vertical se recorre en dos ocasiones, y más todavía que dichos recorridos se llevan a cabo de manera convergente primeramente, (como lo indica la flecha en la figura 5.11) y después de manera divergente (en el sentido opuesto de la flecha). Para aclarar este hecho lo analizaremos analíticamente de la siguiente manera. Debemos tener presente que en este tipo de hipérbolas, las ramas se recorren simultáneamente, esto nos indica que los puntos de análisis son cuando $x \to -\infty$, cuando $x \to 0$, cuando $x \to +\infty$.

Por lo anterior, consideremos un número M positivo suficientemente grande ($M \to \infty$). Sea $x = -M$, lo cual significa que $x \to -\infty$, como $y = \pm\sqrt{x^2 + c}$, entonces $y \to \pm\infty$, de tal manera que al sustituir lo anterior en las ecuaciones generales de la transformación obtenemos:

$$u \to -a_1 c \pm 2a_2\infty$$
$$v \to -a_2 c \mp 2a_1\infty$$

De donde se sigue que:

$$u \to \pm\infty \text{ si } a_2 > 0 \text{ y } u \to \mp\infty \text{ si } a_2 < 0$$
$$v \to \mp\infty \text{ si } a_1 > 0 \text{ y } v \to \pm\infty \text{ si } a_1 < 0$$

Ahora consideremos que $x \to 0^-$, entonces $y \to \pm\sqrt{c}$, luego sustituyendo en las ecuaciones generales de la transformación obtenemos:

$$u \to -a_1 c$$
$$v \to -a_2 c$$

Hasta este momento hemos obtenido la imagen de los puntos de la mitad de la hipérbola, es decir, de la mitad de cada una de las ramas, lo cual nos indica que la recta imagen de una hipérbola vertical se inicia graficando ya sea en los puntos $(+\infty,-\infty)$ y $(-\infty,+\infty)$ ó $(+\infty,+\infty)$ y $(-\infty,-\infty)$, y converge hacia el punto $(-a_1c,-a_2c)$.

Por otro lado, veamos que ocurre cuando recorremos la otra mitad de la hipérbola. Por tal motivo consideremos que $x \to 0^+$, entonces $y \to \pm\sqrt{c}$, de manera que sustituyendo estas condiciones en las ecuaciones generales de la transformación concluimos nuevamente:

$$u \to -a_1 c$$
$$v \to -a_2 c$$

Ahora, sea $x = M$, lo cual significa que $x \to +\infty$, entonces $y \to \pm\infty$, por lo tanto al sustituir en las ecuaciones generales de la transformación obtenemos:

$$u \to -a_1 c \mp 2a_2\infty$$
$$v \to -a_2 c \pm 2a_1\infty$$

De aquí se sigue que:

$$u \to \mp\infty \text{ si } a_2 > 0 \text{ y } u \to \pm\infty \text{ si } a_2 < 0$$
$$v \to \pm\infty \text{ si } a_1 > 0 \text{ y } v \to \mp\infty \text{ si } a_1 < 0$$

Esto significa que la recta imagen de la otra mitad de una hipérbola vertical diverge inicialmente del punto de convergencia $(-a_1c,-a_2c)$ hacia los puntos $(+\infty,-\infty)$ y $(-\infty,+\infty)$ ó bien a los puntos $(+\infty,+\infty)$ y $(-\infty,-\infty)$.

En conclusión, la recta imagen de una hipérbola vertical es recorrida en dos ocasiones, primeramente en direcciones convergentes, hacia el punto $(-a_1c,-a_2c)$ y posteriormente en direcciones divergentes, ya sea hacia los puntos $(+\infty,+\infty)$ y $(-\infty,-\infty)$ o bien hacia los puntos $(+\infty,-\infty)$ y $(-\infty,+\infty)$.

Ejemplo 5.12 Determine cuál es la imagen de la hipérbola vertical $y^2-x^2=1$ bajo la transformación $w=(1-i)z^2$.

Solución. Para este caso tenemos que $a=1-i$, por lo tanto $a_1=1$ y $a_2=-1$, además $c=1$, de tal manera que sustituyendo estos datos en la expresión (2.36) obtenemos la ecuación $v=-u+2$, además mediante la calculadora se obtienen los siguientes resultados.

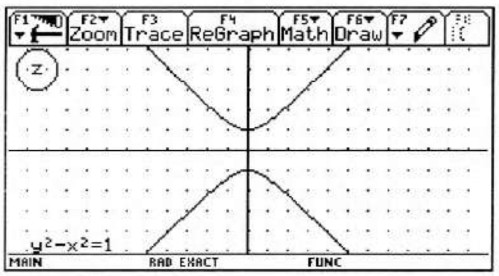


Fig. 5.12 (a) Hipérbola vertical $y^2-x^2=1$ en el plano original z.

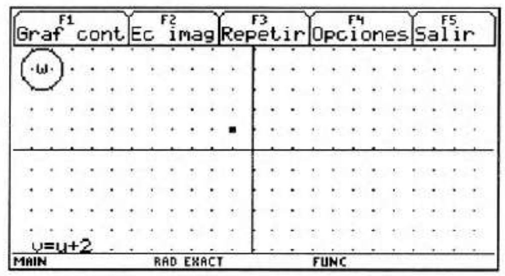


Fig. 5.12(b) Gráfica puntual de la imagen de la hipérbola vertical $y^2-x^2=1$ en el plano w bajo la transformación $w=(1-i)z^2$. Se trata de la recta $v=u+2$. Dado que la imagen de los puntos $(-x,\pm y)$ y $(x,\pm y)$ es la misma, entonces en la figura no se distingue la imagen de tal recta, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,\pm y)$ avanzando sobre la recta $v=u+2$ en direcciones convergentes, y después la de los puntos $(x,\pm y)$, avanzando de nueva cuenta sobre la recta $v=u+2$ en direcciones divergentes, para así borrar los puntos ya graficados.

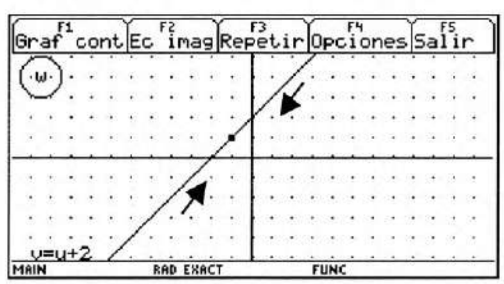


Fig. 5.12(c) Gráfica continua de la imagen de la hipérbola vertical $y^2-x^2=1$ en el plano w bajo

la transformación $w = (1-i)z^2$. Se trata de la recta $v = u + 2$. Dicha recta se grafica dos veces, primero de manera convergente al punto $(-1,1)$, y posteriormente de forma divergente a partir de dicho punto.

Pero si consideramos que $a_2 = 0$, entonces las ecuaciones generales de la transformación se reducen a las ecuaciones particulares:

$$u = a_1(x^2 - y^2) = -a_1(y^2 - x^2)$$
$$v = 2a_1xy$$

Como $y^2 - x^2 = c$, entonces tenemos las ecuaciones equivalentes:

$$u = -a_1c \qquad \textbf{(2.37)}$$
$$v = 2a_1xy \qquad \textbf{(2.38)}$$

A partir del análisis desarrollado en el caso anterior y de las ecuaciones (2.37) y (2.38) concluimos que la imagen de una hipérbola vertical cuando $a_2 = 0$, es una recta vertical, a saber, la recta $u = -a_1c$, la cual se recorre en dos ocasiones, primero de manera convergente al punto $(-a_1c,0)$, posteriormente de manera divergente a partir de dicho punto. Este resultado podemos expresarlo mediante el siguiente Teorema.

Teorema 33. La imagen de la hipérbola vertical $y^2 - x^2 = c$, con $c > 0$, bajo la transformación $w = a_1z^2$, con $a_1 \neq 0$, es la recta vertical $u = -a_1c$, la cual se recorre en dos ocasiones, primero de manera convergente al punto $(-a_1c,0)$, y posteriormente de manera divergente a partir de dicho punto.

Ejemplo 5.13 Determine cuál es la imagen de la hipérbola vertical $y^2 - x^2 = 1$ bajo la transformación $w = z^2$.

Solución. Para este caso tenemos que $a = 1$, por lo tanto $a_1 = 1$, además $c = 1$, de tal manera que sustituyendo estos datos en la expresión (2.37) obtenemos la ecuación $u = -1$, además mediante la calculadora se obtienen los siguientes resultados.

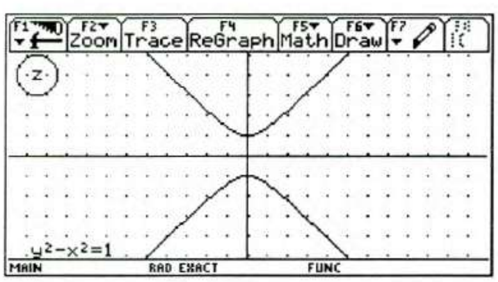


Fig. 5.13(a) Hipérbola vertical $y^2 - x^2 = 1$ en el plano original z.

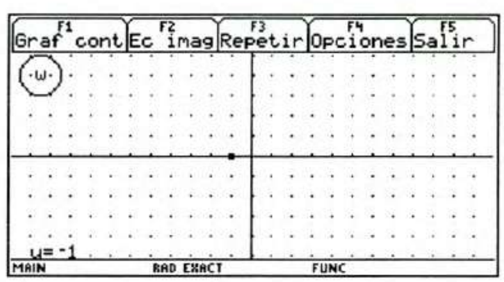


Fig. 5.13(b) Gráfica puntual de la imagen de la hipérbola vertical $y^2 - x^2 = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = z^2$. Se trata de la recta $u = -1$. Dado que la imagen de los puntos

$(-x,\pm y)$ y $(x,\pm y)$ es la misma, entonces en la figura no se distingue la imagen de tal recta, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x,\pm y)$ avanzando sobre la recta $u = -1$ en direcciones convergentes, y después la de los puntos $(x,\pm y)$, avanzando de nueva cuenta sobre la recta $u = -1$ en direcciones divergentes, para así borrar los puntos ya graficados.

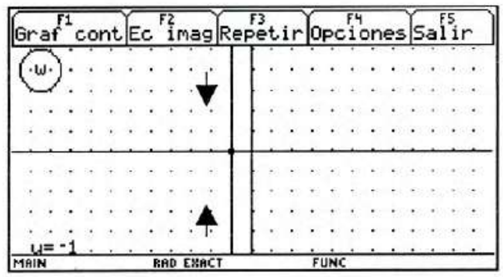


Fig. 5.13(c) Gráfica continua de la imagen de la hipérbola vertical $y^2 - x^2 = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = z^2$. Se trata de la recta $u = -1$. Dicha recta se grafica dos veces, primero de manera convergente al punto $(-1,0)$, y posteriormente de forma divergente a partir de dicho punto.

Por otro lado, si $a_1 = 0$, entonces las ecuaciones generales de la transformación se reducen a las ecuaciones particulares:

$$u = -2a_2xy$$
$$v = a_2\left(x^2 - y^2\right)$$

Como $y^2 - x^2 = c$, entonces tenemos las ecuaciones equivalentes:

$$u = -2a_2xy \qquad \textbf{(2.39)}$$
$$v = -a_2 c \qquad \textbf{(2.40)}$$

De aquí se sigue que la imagen de una hipérbola vertical cuando $a_1 = 0$, es la recta vertical $v = -a_2 c$. Análogamente al caso anterior concluimos que dicha recta se recorre en dos ocasiones, primero de manera convergente al punto $(0,-a_2c)$, y posteriormente de manera divergente a partir de dicho punto. Este resultado podemos expresarlo mediante el siguiente Teorema.

Teorema 34. La imagen de la hipérbola horizontal $y^2 - x^2 = c$, con $c > 0$, bajo la transformación $w = ia_2z^2$, con $a_2 \neq 0$, es la recta horizontal $v = -a_2c$, la cual se recorre en dos ocasiones, primero de manera convergente al punto $(0,-a_2c)$, y posteriormente de manera divergente a partir de dicho punto.

Ejemplo 5.14 Determine cuál es la imagen de la hipérbola vertical $y^2 - x^2 = 1$ bajo la transformación $w = iz^2$.

Solución. Para este caso tenemos que $a = i$, por lo tanto $a_2 = 1$, además $c = 1$, de tal manera que sustituyendo estos datos en la expresión (2.40) obtenemos la ecuación $v = -1$, además mediante la calculadora se obtienen los siguientes resultados.

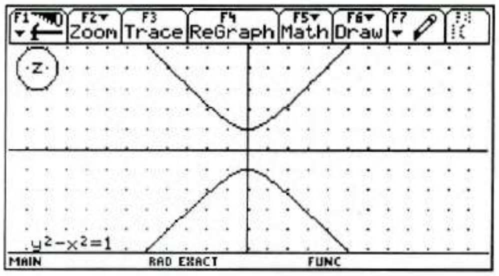


Fig. 5.14(a) Hipérbola vertical $y^2 - x^2 = 1$ en el plano original z.

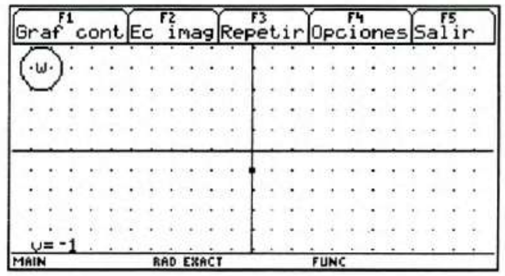


Fig. 5.14(b) Gráfica puntual de la imagen de la hipérbola vertical $y^2 - x^2 = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la recta $v = -1$. Dado que la imagen de los puntos $(-x, \pm y)$ y $(x, \pm y)$ es la misma, entonces en la figura no se distingue la imagen de tal recta, esto es debido a que la calculadora primero grafica la imagen de los puntos $(-x, \pm y)$ avanzando sobre la recta $v = -1$ en direcciones convergentes, y después la de los puntos $(x, \pm y)$, avanzando de nueva cuenta sobre la recta $v = -1$ en direcciones divergentes, para así borrar los puntos ya graficados.

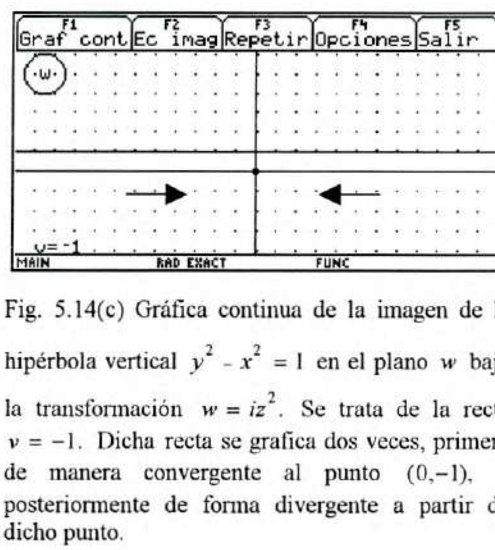


Fig. 5.14(c) Gráfica continua de la imagen de la hipérbola vertical $y^2 - x^2 = 1$ en el plano w bajo la transformación $w = iz^2$. Se trata de la recta $v = -1$. Dicha recta se grafica dos veces, primero de manera convergente al punto $(0, -1)$, y posteriormente de forma divergente a partir de dicho punto.

Conclusiones

Con el fin de ilustrar la relevancia del trabajo que hemos realizado, en este apartado procedemos a consignar aquellos aspectos que, en nuestra opinión, constituyen sus principales aportaciones.

1. La combinación de los dos enfoques gráficos para la representación de las funciones de variable compleja: el enfoque analítico-gráfico global y el enfoque puntual. Aunque aquí hemos aplicado sólo a las funciones cuadráticas del tipo $w = az^2$, está claro que se puede extender al resto de las funciones básicas de variable compleja. La utilidad de esta combinación de enfoques es que permite descubrir una serie de características específicas de cada caso particular, tales como el recorrido que se hace sobre la imagen, y a los cuales se le presta escasa o nula atención en los enfoques tradicionales centrados exclusivamente en el tratamiento analítico.

2. La obtención de fórmulas generales para la transformación de rectas horizontales, verticales y oblicuas bajo la función cuadrática $w = az^2$. En los libros de texto que se han consultado y que aparecen en las referencias bibliográficas, se consignan estas fórmulas para el caso particular de la función cuadrática $w = z^2$. En concreto, se trata de las fórmulas 2.5, 2.14 y 2.23.

3. La formulación de una serie de propiedades específicas importantes, de la transformación $w = az^2$, que en este trabajo han sido presentadas como teoremas. En particular, se trata de los Teoremas 1, 4, 7, 8, 11, 14, 15, 16, 19 y 24.

4. La observación y consignación de una serie de características específicas de transformaciones cuadráticas particulares, relativas al carácter concreto de la imagen y al recorrido que se hace sobre ella, y a los cuales se presta escasa o nula atención en los cursos tradicionales que privilegian el enfoque analítico. Estas características singulares están consignadas en las observaciones al pie de las figuras 1.3(c), 1.4(c), 1.5(c), 1.6(c), 1.9(c),1.10(c), 2.3(c), 2.4(c), 2.5(c), 2.6(c), 2.9(c), 2.10(c), 3.4(c), 3.5(c), 3.6(c), 3.7(c), 3.8(c), 3.9(c), 3.10(c), 3.11(c) y 3.12(c).

5. Por supuesto, el paquete de programas que hemos tenido que desarrollar para materializar el enfoque analítico-gráfico y llevarlo hasta sus últimas consecuencias. Este paquete de programas puede ser usado como auxiliar didáctico que posibilita la visualización de las funciones cuadráticas de variable compleja $w = az^2$, consideradas como mapeos o transformaciones de ciertas regiones del plano complejo especialmente elegidas.

Referencias Bibliográficas

- Churchill Ruel V. (1992). Variable Compleja y Aplicaciones. Madrid, España: Mc Graw Hill.
- Levinson Norman (1990). Curso de Variable Compleja, Barcelona, España: Reverte.
- Hauser Arthur A. (1973). Variable Compleja, Bogota, Colombia: Fondo Educativo Interamericano.
- Spiegel Murray R. (1993). Variable Compleja, México, D.F: Mc Graw Hill.
- Volkovyski L. I. (1972-1984). Problemas sobre la Teoría de Funciones de Variable Compleja, Moscú, URSS: Mir.
- Polya Goerge (1976). Variable Compleja, México, D.F: Limusa.
- Krasnov Mikhail Leontevich (1983). Funciones de Variable Compleja, Cálculo Operacional, Teoría de la Estabilidad, Moscú, URSS: Mir.
- Ahlfors Lars V. (1953). Complex Analysis an Introduction to the Theory of Analytic-Functions of one Complex Variable, New York: Mc Graw Hill.
- Curtiss David Raymond (1948). Analytic Functions of a Complex Variable, Illinois, Chicago: Mathematical Association of A.
- Cartan Henri Paul (1963). Elementary Theory of Analitic Functions of one or several Complex Variables, París, Francia: Scientifiques Hermann.
- James Graham James O. (1973). Un Primer Curso de Funciones Complejas, México, D.F: CECSA.
- Gunning Robert C. (1965). Analytic Functions of Several Complex Variables, Englewood, Cliffs: Prentice-Hall.
- Heins Maurice (1968). Complex Function Theory, New York: Random House.
- Hörmander Lafs (1966). An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Princeton, N.J: D. Van Nostran.
- Boas Ralph Philip (1987). Invitation to Complex Analysis, New York: Random House.
- Pennisi Louis L. (1967). Elements of Complex Variables, New York: Holt, Rinehar and Winston.

APÉNDICE

PAQUETE DE PROGRAMAS

PARA LA

CALCULADORA SIMBOLICA

TI-92Plus

Apéndice

Subprograma auxiliar PARG1( ). Este programa se utiliza para calcular el argumento del número complejo a. Ocupa una memoria de 237 bytes.

```
()
Prgm
If a1=0 Then
  If a2>0 Then
  π/2→argu
  Else
  ⁻π/2→argu
  EndIf
ElseIf a1>0 Then
  If a2=0 Then
  0→argu
  Else
  tan⁻¹(a2/a1)→argu
  EndIf
ElseIf a1<0 Then
  If a2=0 Then
  π→argu
  ElseIf a2<0 Then
  tan⁻¹(a2/a1)-π→argu
  ElseIf a2>0 Then
  tan⁻¹(a2/a1)+π→argu
  EndIf
EndIf
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar PERHVIFC( ): Determina la ecuación de rectas horizontales y verticales, ocupando una memoria de 43 bytes.

```
()
Prgm
p[k]|x=u→st
string(st)→stv
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar PFCRI( ): Almacena y procesa los datos de una recta oblicua. Ocupa una memoria de 190 bytes.

```
()
Prgm
expr(rinc)→g(x)
g(x)→t[k]
t[k]|x=0→cc[k]
(t[k]|x=1)-cc[k]→m[k]
(1-m[k]^2)*a2+2*a1*m[k]→n[k]
(1-m[k]^2)*a1-2*a2*m[k]→d[k]
n[k]*x/(d[k])→h(x)
h(x)→p[k]
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar PGCHE( ): Traza la gráfica continua de la imagen de una hipérbola equilátera. Ocupa una memoria de 92 bytes.

```
()
Prgm
For  j,xmin,xmax,Δx/2
If  j=0
Goto  sig
j+i*(t[k]|x=j)→z
progcona()
Lbl  sig
EndFor
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar PGCHH( ): Traza la gráfica continua de la imagen de una hipérbola horizontal. Ocupa una memoria de 283 bytes.

```
()
Prgm
For  j,xmin,xmax,Δx
If abs(j)<√(cc[k]) Then
approx(√(cc[k]))→j
Goto  ab
EndIf
j+i*(t[k]|x=j)→z
proga()
If j=xmin Then
u→u0
v→v0
Goto  aa
EndIf
Line  u0,v0,u,v
u→u0
v→v0
j-i*(t[k]|x=j)→z
proga()
Line  uu,vv,u,v
u→uu
v→vv
Lbl  aa
j-i*(t[k]|x=j)→z
proga()
u→uu
v→vv
Lbl  ab
EndFor
Circle a1*cc[k],a2*cc[k],1/10
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar PGCHV( ): Traza la gráfica continua de la imagen de una hipérbola vertical. Ocupa una memoria de 235 bytes.

```
()
Prgm
For  j,xmin,xmax,Δx
j+i*(t[k]|x=j)→z
proga()
If j=xmin Then
u→u0
v→v0
Goto  aa
EndIf
Line  u0,v0,u,v
u→u0
v→v0
j-i*(t[k]|x=j)→z
proga()
Line  uu,vv,u,v
u→uu
v→vv
Lbl  aa
j-i*(t[k]|x=j)→z
proga()
u→uu
v→vv
EndFor
Circle -a1*cc[k],-a2*cc[k],1/10
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar PGHE( ): Traza la gráfica puntual de la imagen de una hipérbola equilátera. Ocupa una memoria de 85 bytes.

```
()
Prgm
For  j,xmin,xmax,Δx
If  j=0
Goto  sig
j+i*(t[k]|x=j)→z
proga()
Lbl  sig
EndFor
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar PGHH( ): Traza la gráfica puntual de la imagen de una hipérbola horizontal. Ocupa una memoria de 134 bytes.

```
()
Prgm
For  j,xmin,xmax,Δx
If abs(j)<√(cc[k]) Then
approx(√(cc[k]))→j
```

```
Goto  bb
EndIf
j+i*(t[k]|x=j)→z
proga()
j-i*(t[k]|x=j)→z
proga()
Lbl  bb
EndFor
Circle a1*cc[k],a2*cc[k],1/10
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar `PGHV()`: Traza la gráfica puntual de la imagen de una hipérbola vertical. Ocupa una memoria de 86 bytes.

```
()
Prgm
For  j,xmin,xmax,Δx
j+i*(t[k]|x=j)→z
proga()
j-i*(t[k]|x=j)→z
proga()
EndFor
Circle -a1*cc[k],-a2*cc[k],1/10
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar `POPC()` : Presenta un menú de opciones para graficar cualquier tipo de rectas. Ocupa una memoria de 135 bytes.

```
()
Prgm
Disp  "F1: Una recta"
Disp  "F2: Dos rectas"
Disp  "F3: Tres rectas"
Disp  "F4: Opciones"
Disp  "F5: Inicio"
Disp  "F6: Salir"
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar `PPECFC()`. Determina la ecuación de la imagen de una circunferencia con centro en el origen. Ocupa una memoria de 313 bytes.

```
()
Prgm
"u²+v²"→stuvw
string(aa)→staa
string(rr[k])→str
If aa=1 and rr[k]=1 Then
string(1)→strw
ElseIf aa=1 Then
"("&str&")"&"^4"→strw
ElseIf rr[k]=1 Then
"("&staa&")"&"²"→strw
ElseIf aa≠1 and rr[k]≠1 Then
```

```
"("&staa&")"&"²"&"("&str&")"&"^4"→strw
EndIf
stuvw&"="&strw→strwi
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar **PPPW( ):** Escribe el nombre del plano imagen en la gráfica. Ocupa una memoria de 65 bytes.

```
()
Prgm
Circle  -10.5,4,1
PtText  "w",-10.8,4.4
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar PPTCFC( ): Almacena y procesa los datos de una circunferencia con centro en el origen a transformar. Ocupa una memoria de 109 bytes.

```
()
Prgm
0→zø[k]
0→høw[k]
0→køw[k]
expr(rd)→rr[k]
√(a1^2+a2^2)*rr[k]^2→rrw[k]
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar **PPTRHVFC( ): Al**macena y procesa los datos de una recta horizontal o vertical a transformar. Ocupa una memoria de 62 bytes.

```
()
Prgm
expr(rhrz)→cc[k]
a2*x/a1→h(x)
h(x)→p[k]
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar **PROGA( ):** Obtiene las coordenadas de un punto imagen y cambia su estado. Ocupa una memoria de 49 bytes.

```
()
Prgm
w(z)→ww
real(ww)→u
imag(ww)→v
PtChg  u,v
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar PROGCONA( ): Une dos puntos consecutivos de la imagen de una figura cualquiera. Ocupa una memoria de 80 bytes.

```
()
Prgm
proga()
If  j=xmin
Goto  aa
Line  u0,v0,u,v
Lbl  aa
u→u0
v→v0
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar GRAGGRAC( ): Traza la gráfica puntual de la imagen de una circunferencia. Ocupa una memoria de 80 bytes.

```
()
Prgm
For  ϕ,0,2*π,π/48
zø[k]+rr[k]*e^(i*ϕ)→z
progn()
EndFor
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar GRAGGRCC( ): Traza la gráfica continua de la imagen de una circunferencia con centro en el origen. Ocupa una memoria de 157 bytes.

```
()
Prgm
zø[k]+rr[k]→zi
w(zi)→wi
real(wi)→ui
imag(wi)→vi
Circle  ui,vi,1/10
Circle  høw[k],køw[k],1/10
Circle  høw[k],køw[k],rrw[k]
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar PROGN( ): Obtiene las coordenadas de un punto imagen y si no esta iluminado lo ilumina. Ocupa una memoria de 49 bytes.

```
()
Prgm
w(z)→ww
real(ww)→u
imag(ww)→v
PtOn  u,v
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar `PROGQ()`: Ayuda a determinar la ecuación de la imagen de cualquier tipo de recta. Ocupa una memoria de 1283 bytes.

```
()
Prgm
If  aa1=0
Goto  eci
If aa1=1 Then
"u²"→ste1
Else
string(aa1)→saa1
saa1&"u²"→ste1
EndIf

Lbl  eci
If bb1=0 Then
ste1→ste2
Goto  eci1
ElseIf bb1=1 Then
  If aa1=0 Then
  "v²"→ste2
  Else
  ste1&"+v²"→ste2
  EndIf
ElseIf bb1≠1 Then
string(bb1)→stab
  If aa1=0 Then
  stab&"v²"→ste2
  Else
  ste1&"+"&stab&"v²"→ste2
  EndIf
EndIf

Lbl  eci1
If gg1=0 Then
ste2→ste3
Goto  eci2
ElseIf gg1<0 Then
  If gg1=-1 Then
  ste2&"-uv"→ste3
  Else
  abs(gg1)→ac
  string(ac)→stac
  ste2&"-"&stac&"uv"→ste3
  EndIf
ElseIf gg1>0 Then
  If gg1=1 Then
  ste2&"+uv"→ste3
  Else
  string(gg1)→stac
  ste2&"+"&stac&"uv"→ste3
  EndIf
EndIf

Lbl  eci2
If dd1=0 Then
ste3→ste4
Goto  eci3
```

```
ElseIf dd1<0 Then
  If dd1=⁻1 Then
  ste3&"-u"→ste4
  Else
  abs(dd1)→ad
  string(ad)→stad
  ste3&"-"&stad&"u"→ste4
  EndIf
ElseIf dd1>0 Then
  If dd1=1 Then
  ste3&"+u"→ste4
  Else
  string(dd1)→stad
  ste3&"+"&stad&"u"→ste4
  EndIf
EndIf

Lbl  eci3
If ee1=0 Then
ste4→ste5
Goto  eci4
ElseIf ee1<0 Then
  If ee1=⁻1 Then
  ste4&"-v"→ste5
  Else
  abs(ee1)→ae
  string(ae)→stae
  ste4&"-"&stae&"v"→ste5
  EndIf
ElseIf ee1>0 Then
  If ee1=1 Then
  ste4&"+v"→ste5
  Else
  string(ee1)→stae
  ste4&"+"&stae&"v"→ste5
  EndIf
EndIf

Lbl  eci4
If ff1=0 Then
ste5&"=0"→ste6
Else
string(ff1)→staf
ste5&"-"&staf&"=0"→ste6
EndIf

EndPrgm
```

Subprograma auxiliar `PROGQRH()`: Determina la ecuación de la imagen de una recta horizontal. Ocupa una memoria de 187 bytes.

```
()
Prgm
a2^2→aa1
a1^2→bb1
-2*a1*a2→gg1
-4*a1*aa^2*cc[k]^2→dd1
```

```
-4*a2*aa^2*cc[k]^2→ee1
4*aa^4*cc[k]^4→ff1
progq()
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar `PROGQRI()`: Determina la ecuación de la imagen de una recta oblicua. Ocupa una memoria de 273 bytes.

```
()
Prgm
a2*(1-m[k]^2)+2*a1*m[k]→ch1
a1* (1-m[k]^2)-2*a2*m[k]→ch2
ch1^2→aa1
ch2^2→bb1
-2*ch1*ch2→gg1
-4*cc[k]^2*aa^2*ch2→dd1
-4*cc[k]^2*aa^2*ch1→ee1
4*cc[k]^4*aa^4→ff1
progq()
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar `PROGQRV()`: Determina la ecuación de la imagen de una recta vertical. Ocupa una memoria de 187 bytes.

```
()
Prgm
a2^2→aa1
a1^2→bb1
-2*a1*a2→gg1
4*a1*aa^2*cc[k]^2→dd1
4*a2*aa^2*cc[k]^2→ee1
4*aa^4*cc[k]^4→ff1
progq()
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar `PROGRH1()`: Traza la gráfica puntual de la imagen de una recta horizontal. Ocupa una memoria de 58 bytes.

```
()
Prgm
For  j,xmin,xmax,Δx
j+i*cc[k]→z
proga()
EndFor
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar **PROGRH22( ):** Traza la gráfica continua de la imagen de una recta horizontal. Ocupa una memoria de 80 bytes.

```
()
Prgm
DelVar  u0,v0,u,v
For  j,xmin,xmax,Δx/2
j+i*cc[k]→z
progcona()
EndFor
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar **PROGRI1( ):** Traza la gráfica puntual de la imagen de una recta oblicua. Ocupa una memoria de 59 bytes.

```
()
Prgm
For  j,xmin,xmax,Δx
j+i*(t[k]|x=j)→z
proga()
EndFor
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar **PROGRI22( ):** Traza la gráfica continua de la imagen de una recta oblicua. Ocupa una memoria de 73 bytes.

```
()
Prgm
DelVar  u,v
For  j,xmin,xmax,Δx/2
j+i*(t[k]|x=j)→z
progcona()
EndFor
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar **PROGRV1( ):** Traza la gráfica puntual de la imagen de una recta vertical. Ocupa una memoria de 58 bytes.

```
()
Prgm
For  j,ymin,ymax,Δy
cc[k]+i*j→z
proga()
EndFor
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar PROGRV22( ): Traza la gráfica continua de la imagen de una recta vertical. Ocupa una memoria de 132 bytes.

```
()
Prgm
DelVar  u0,v0,u,v
For  j,ymin,ymax,Δy/2
cc[k]+i*j→z
progn()
If  j=ymin
Goto  bb
Line  u0,v0,u,v
Lbl  bb
u→u0
v→v0
EndFor
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar PROGT1( ): Pregunta si desea transformar una recta. Ocupa una memoria de 63 bytes.

```
()
Prgm
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea transformar una recta?"
EndDlog
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar PROGT2( ): Pregunta si desea transformar dos rectas. Ocupa una memoria de 64 bytes.

```
()
Prgm
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea transformar dos rectas?"
EndDlog
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar PROGT3( ): Pregunta si desea transformar tres rectas. Ocupa una memoria de 65 bytes.

```
()
Prgm
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea transformar tres rectas?"
EndDlog
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar `PTHE()`: Almacena y procesa los datos de una hipérbola equilátera a transformar. Ocupa una memoria de 103 bytes.

```
()
Prgm
expr(ht)→cc[k]
cc[k]/x→f(x)
f(x)→t[k]
a2*u/a1+2*(abs(a_))^2*cc[k]/a1→p[k]
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar `PTHH()`: Almacena y procesa los datos de una hipérbola horizontal a transformar. Ocupa una memoria de 106 bytes.

```
()
Prgm
expr(ht)→cc[k]
√(-cc[k]+x^2)→f(x)
f(x)→t[k]
-a1*u/a2+(abs(a_))^2*cc[k]/a2→p[k]
EndPrgm
```

Subprograma auxiliar `PTHV()`: Almacena y procesa los datos de una hipérbola vertical a transformar. Ocupa una memoria de 105 bytes.

```
()
Prgm
expr(ht)→cc[k]
√(cc[k]+x^2)→f(x)
f(x)→t[k]
-a1*u/a2-(abs(a_))^2*cc[k]/a2→p[k]
EndPrgm
```

Programa `PROG2()`: Es el programa principal sirve para transformar rectas, circunferencias e hipérbolas, por lo cual ejecuta todos los programas auxiliares descritos anteriormente. Ocupa una memoria de 26816 bytes.

```
()
Prgm

ClrIO
FnOff
PlotsOff
ClrGraph
ClrDraw
setMode("Exact/Approx","Exact")
setGraph("Axes","On")
setGraph("Grid","On")
```

```
ZoomDec

Lbl  ww
ClrIO
Dialog
Title  "Función cuadrática compleja"
Request  "a=",inst
EndDlog

expr(inst)→a_

If  abs(a_)=0
Goto  w

real(a_)→a1
imag(a_)→a2
√(a1^2+a2^2)→absa

parg1()

getNum(argu)→numa
getDenom(argu)→denoma
If denoma≠1 Then
string(numa)→stnuma
string(denoma)→stdenoma
stnuma&"/"&stdenoma→arge
Else
numa→arge
EndIf

ClrIO
Disp  "             MODULO de a"
Output  15,85,"|a|="
Output  15,110,absa
Disp  ""
Disp  "           ARGUMENTO de a"
Output  60,75,"arg a="
Output  60,115,arge
Disp  ""
Disp  "  Presione ENTER para continuar . . ."
Pause

abs(a_)→aa

a_*z^2→w(z)
Goto  uno

Lbl  w
ClrIO
Disp  "          ¡ A T E N C I O N !"
Disp  ""
Disp  "             a=0 no es válido"
Disp  "      introducir un nuevo valor"
Disp  ""
Disp  "     presione ENTER para continuar"
Pause
Goto  ww

Lbl  uno
ClrIO
Disp  "      O P C I O N E S"
```

```
Disp  "F1: Rectas horizontales"
Disp  "F2: Rectas verticales"
Disp  "F3: Rectas oblicuas"
Disp  "F4: Circunferencias"
Disp  "F5: Hipérbolas"
Disp  "F6: Inicio"
Disp  "F7: Salir"

Toolbar
Title  "Hrz",horiz
Title  "Vrt",vert
Title  "Inc",incl
Title  "Crc",circ
Title  "Hpr",hiper
Title  "Ini",ww
Title  "Fin",fin
EndTBar

Lbl  horiz
ClrIO
Disp  "      RECTAS HORIZONTALES"
popc()

Toolbar
Title  "1 rec",unarh
Title  "2 rec",dosrh
Title  "3 rec",tresrh
Title  "Opciones",uno
Title  "Inicio",ww
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  unarh
progt1()
If  ok=0
Goto  horiz

ClrIO
Disp  "          UNA RECTA HORIZONTAL"
Dialog
Title  "Recta horizontal"
Request  "y=",rhrz
EndDlog
1→k
pptrhvfc()
Goto  grafy

Lbl  dosrh
progt2()
If  ok=0
Goto  horiz

ClrIO
Disp  "         DOS RECTAS HORIZONTALES"
Dialog
Title  "Recta horizontal 1"
Request  "y1=",rhrz
EndDlog
1→k
pptrhvfc()
```

```
ClrIO
Disp "          DOS RECTAS HORIZONTALES"
Dialog
Title "Recta horizontal 2"
Request "y2=",rhrz
EndDlog
2→k
pptrhvfc()
Goto grafy2

Lbl tresrh
progt3()
If ok=0
Goto horiz

ClrIO
Disp "         TRES RECTAS HORIZONTALES"
Dialog
Title "Recta horizontal 1"
Request "y1=",rhrz
EndDlog
1→k
pptrhvfc()

ClrIO
Disp "         TRES RECTAS HORIZONTALES"
Dialog
Title "Recta horizontal 2"
Request "y2=",rhrz
EndDlog
2→k
pptrhvfc()

ClrIO
Disp "         TRES RECTAS HORIZONTALES"
Dialog
Title "Recta horizontal 3"
Request "y3=",rhrz
EndDlog
3→k
pptrhvfc()
Goto grafy3

Lbl grafy
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progrh1()
Goto hmenu

Lbl grafy2
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progrh1()

2→k
progrh1()
Goto hmenu2

Lbl grafy3
```

```
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progrh1()

2→k
progrh1()

3→k
progrh1()
Goto  hmenu3

Lbl  hmenu
Toolbar
Title  "Graf cont",contv
Title  "Ec imag",hecua
Title  "Repetir",grafy
Title  "Opciones",horiz
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  hmenu2
Toolbar
Title  "Graf cont",contv2
Title  "Ec imag",hecua2
Title  "Repetir",grafy2
Title  "Opciones",horiz
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  hmenu3
Toolbar
Title  "Graf cont",contv3
Title  "Ec imag",hecua3
Title  "Repetir",grafy3
Title  "Opciones",horiz
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  contv
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progrh22()
Goto  hmenu

Lbl  contv2
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progrh22()

2→k
progrh22()
Goto  hmenu2

Lbl  contv3
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progrh22()
```

```
2→k
progrh22()

3→k
progrh22()
Goto  hmenu3

Lbl  hecua
DelVar  u,v
1→k
If  cc[k]=0
Goto  hecuav
progqrh()
PtText  ste6,⁻11,⁻4.5
pppw()
Goto  hmenu

Lbl  hecua2
DelVar  u,v
1→k
If  cc[k]=0
Goto  hecuav2
progqrh()
PtText  ste6,⁻11,⁻3.5

Lbl  hecua2a
2→k
If  cc[k]=0
Goto  hecuav2a
progqrh()
PtText  ste6,⁻11,⁻4.5
pppw()
Goto  hmenu2

Lbl  hecua3
DelVar  u,v
1→k
If  cc[k]=0
Goto  hecuav3
progqrh()
PtText  ste6,⁻11,⁻2.5

Lbl  hecua3a
2→k
If  cc[k]=0
Goto  hecuav3a
progqrh()
PtText  ste6,⁻11,⁻3.5

Lbl  hecua3b
3→k
If  cc[k]=0
Goto  hecuav3b
progqrh()
PtText  ste6,⁻11,⁻4.5
pppw()
Goto  hmenu3

Lbl  hecuav
If  a1=0
```

```
Goto  hecuau
perhvifc()
"v="&stv→strv
PtText  strv,-11,-4.5
pppw()
Goto  hmenu

Lbl  hecuav2
If  a1=0
Goto  hecuau2
perhvifc()
"v1="&stv→strv
PtText  strv,-11,-3.5
Goto  hecua2a

Lbl  hecuav2a
If  a1=0
Goto  hecuau2a
perhvifc()
"v2="&stv→strv
PtText  strv,-11,-4.5
pppw()
Goto  hmenu2

Lbl  hecuav3
If  a1=0
Goto  hecuau3
perhvifc()
"v1="&stv→strv
PtText  strv,-11,-2.5
Goto  hecua3a

Lbl  hecuav3a
If  a1=0
Goto  hecuau3a
perhvifc()
"v2="&stv→strv
PtText  strv,-11,-3.5
Goto  hecua3b

Lbl  hecuav3b
If  a1=0
Goto  hecuau3b
perhvifc()
"v3="&stv→strv
PtText  strv,-11,-4.5
pppw()
Goto  hmenu3

Lbl  hecuau
"u=0"→stru
PtText  stru,-11,-4.5
pppw()
Goto  hmenu

Lbl  hecuau2
"u1=0"→stru
PtText  stru,-11,-3.5
Goto  hecua2a

Lbl  hecuau2a
```

```
"u2=0"→stru
PtText  stru,-11,-4.5
pppw()
Goto  hmenu2

Lbl  hecuau3
"u1=0"→stru
PtText  stru,-11,-2.5
Goto  hecua3a

Lbl  hecuau3a
"u2=0"→stru
PtText  stru,-11,-3.5
Goto  hecua3b

Lbl  hecuau3b
"u3=0"→stru
PtText  stru,-11,-4.5
pppw()
Goto  hmenu3

Lbl  vert
ClrIO
Disp  "          RECTAS VERTICALES"
popc()

Toolbar
Title  "1 rec",unarv
Title  "2 rec",dosrv
Title  "3 rec",tresrv
Title  "Opciones",uno
Title  "Inicio",ww
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  unarv
progt1()
If  ok=0
Goto  vert

ClrIO
Disp  "             UNA RECTA VERTICAL"
Dialog
Title  "Recta vertical"
Request  "x=",rhrz
EndDlog
1→k
pptrhvfc()
Goto  grafx

Lbl  dosrv
progt2()
If  ok=0
Goto  vert

ClrIO
Disp  "           DOS RECTAS VERTICALES"
Dialog
Title  "Recta vertical 1"
Request  "x1=",rhrz
EndDlog
```

```
1→k
pptrhvfc()

ClrIO
Disp "          DOS RECTAS VERTICALES"
Dialog
Title "Recta vertical 2"
Request "x2=",rhrz
EndDlog
2→k
pptrhvfc()
Goto grafx2

Lbl tresrv
progt3()
If ok=0
Goto vert
ClrIO
Disp "          TRES RECTAS VERTICALES"
Dialog
Title "Recta vertical 1"
Request "x1=",rhrz
EndDlog
1→k
pptrhvfc()

ClrIO
Disp "          TRES RECTAS VERTICALES"
Dialog
Title "Recta vertical 2"
Request "x2=",rhrz
EndDlog
2→k
pptrhvfc()

ClrIO
Disp "          TRES RECTAS VERTICALES"
Dialog
Title "Recta vertical 3"
Request "x3=",rhrz
EndDlog
3→k
pptrhvfc()
Goto grafx3

Lbl grafx
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progrv1()
Goto vmenu

Lbl grafx2
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progrv1()

2→k
progrv1()
Goto vmenu2
```

```
Lbl  grafx3
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progrv1()

2→k
progrv1()

3→k
progrv1()
Goto  vmenu3

Lbl  vmenu
Toolbar
Title  "Graf cont",contx
Title  "Ec imag",vecua
Title  "Repetir",grafx
Title  "Opciones",vert
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  vmenu2
Toolbar
Title  "Graf cont",contx2
Title  "Ec imag",vecua2
Title  "Repetir",grafx2
Title  "Opciones",vert
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  vmenu3
Toolbar
Title  "Graf cont",contx3
Title  "Ec imag",vecua3
Title  "Repetir",grafx3
Title  "Opciones",vert
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  contx
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progrv22()
Goto  vmenu

Lbl  contx2
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progrv22()

2→k
progrv22()
Goto  vmenu2

Lbl  contx3
ClrDraw
ClrGraph
```

```
1→k
progrv22()

2→k
progrv22()

3→k
progrv22()
Goto vmenu3

Lbl vecua
DelVar u,v
1→k
If cc[k]=0
Goto vecuav
progqrv()
PtText ste6,-11,-4.5
pppw()
Goto vmenu

Lbl vecua2
DelVar u,v
1→k
If cc[k]=0
Goto vecuav2
progqrv()
PtText ste6,-11,-3.5

Lbl vecua2a
2→k
If cc[k]=0
Goto vecuav2a
progqrv()
PtText ste6,-11,-4.5
pppw()
Goto vmenu2

Lbl vecua3
DelVar u,v
1→k
If cc[k]=0
Goto vecuav3
progqrv()
PtText ste6,-11,-2.5

Lbl vecua3a
2→k
If cc[k]=0
Goto vecuav3a
progqrv()
PtText ste6,-11,-3.5

Lbl vecua3b
3→k
If cc[k]=0
Goto vecuav3b
progqrv()
PtText ste6,-11,-4.5
pppw()
Goto vmenu3
```

```
Lbl  vecuav
If  a1=0
Goto  vecuau
perhvifc()
"v="&stv→strv
PtText  strv,⁻11,⁻4.5
pppw()
Goto  vmenu

Lbl  vecuav2
If  a1=0
Goto  vecuau2
perhvifc()
"v1="&stv→strv
PtText  strv,⁻11,⁻3.5
Goto  vecua2a

Lbl  vecuav2a
If  a1=0
Goto  vecuau2a
perhvifc()
"v2="&stv→strv
PtText  strv,⁻11,⁻4.5
pppw()
Goto  vmenu2

Lbl  vecuav3
If  a1=0
Goto  vecuau3
perhvifc()
"v1="&stv→strv
PtText  strv,⁻11,⁻2.5
Goto  vecua3a

Lbl  vecuav3a
If  a1=0
Goto  vecuau3a
perhvifc()
"v2="&stv→strv
PtText  strv,⁻11,⁻3.5
Goto  vecua3b

Lbl  vecuav3b
If  a1=0
Goto  vecuau3b
perhvifc()
"v3="&stv→strv
PtText  strv,⁻11,⁻4.5
pppw()
Goto  vmenu3

Lbl  vecuau
"u=0"→stru
PtText  stru,⁻11,⁻4.5
pppw()
Goto  vmenu

Lbl  vecuau2
"u=0"→stru
PtText  stru,⁻11,⁻3.5
Goto  vecua2a
```

```
Lbl  vecuau2a
"u=0"→stru
PtText  stru,-11,-4.5
pppw()
Goto  vmenu2

Lbl  vecuau3
"u=0"→stru
PtText  stru,-11,-2.5
Goto  vecua3a

Lbl  vecuau3a
"u=0"→stru
PtText  stru,-11,-3.5
Goto  vecua3b

Lbl  vecuau3b
"u=0"→stru
PtText  stru,-11,-4.5
pppw()
Goto  vmenu3

Lbl  incl
ClrIO
Disp  "           RECTAS INCLINADAS"
popc()

Toolbar
Title  "1 rec",unari
Title  "2 rec",dosri
Title  "3 rec",tresri
Title  "Opciones",uno
Title  "Inicio",ww
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  unari
progt1()
If  ok=0
Goto  incl
ClrIO
Disp  "           UNA RECTA INCLINADA"
Dialog
Title  "Recta inclinada"
Request  "y=",rinc
EndDlog
1→k
pfcri()
Goto  grafyi

Lbl  dosri
progt2()
If  ok=0
Goto  incl
ClrIO
Disp  "           DOS RECTAS INCLINADAS"
Dialog
Title  "Recta inclinada 1"
Request  "y1=",rinc
EndDlog
```

```
1→k
pfcri()

ClrIO
Disp "          DOS RECTAS INCLINADAS"
Dialog
Title "Recta inclinada 2"
Request "y2=",rinc
EndDlog
2→k
pfcri()
Goto grafyi2

Lbl tresri
progt3()
If ok=0
Goto incl
ClrIO
Disp "          TRES RECTAS INCLINADAS"
Dialog
Title "Recta inclinada 1"
Request "y1=",rinc
EndDlog
1→k
pfcri()

ClrIO
Disp "          TRES RECTAS INCLINADAS"
Dialog
Title "Recta inclinada 2"
Request "y2=",rinc
EndDlog
2→k
pfcri()

ClrIO
Disp "          TRES RECTAS INCLINADAS"
Dialog
Title "Recta inclinada 3"
Request "y3=",rinc
EndDlog
3→k
pfcri()
Goto grafyi3

Lbl grafyi
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progri1()
Goto imenu

Lbl grafyi2
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progri1()

2→k
progri1()
Goto imenu2
```

```
Lbl  grafyi3
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progri1()

2→k
progri1()

3→k
progri1()
Goto  imenu3

Lbl  imenu
Toolbar
Title  "Graf cont",conti
Title  "Ec imag",iecua
Title  "Repetir",grafyi
Title  "Opciones",incl
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  imenu2
Toolbar
Title  "Graf cont",conti2
Title  "Ec imag",iecua2
Title  "Repetir",grafyi2
Title  "Opciones",incl
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  imenu3
Toolbar
Title  "Graf cont",conti3
Title  "Ec imag",iecua3
Title  "Repetir",grafyi3
Title  "Opciones",incl
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  conti
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progri22()
Goto  imenu

Lbl  conti2
ClrDraw
ClrGraph
1→k
progri22()

2→k
progri22()
Goto  imenu2

Lbl  conti3
ClrDraw
ClrGraph
```

```
1→k
progri22()

2→k
progri22()

3→k
progri22()
Goto imenu3

Lbl iecua
DelVar u,v
1→k
If cc[k]=0
Goto iecuav
progqri()
PtText ste6,-11,-4.5
pppw()
Goto imenu

Lbl iecua2
DelVar u,v
1→k
If cc[k]=0
Goto iecuav2
progqri()
PtText ste6,-11,-3.5

Lbl iecua2a
2→k
If cc[k]=0
Goto iecuav2a
progqri()
PtText ste6,-11,-4.5
pppw()
Goto imenu2

Lbl iecua3
DelVar u,v
1→k
If cc[k]=0
Goto iecuav3
progqri()
PtText ste6,-11,-2.5

Lbl iecua3a
2→k
If cc[k]=0
Goto iecuav3a
progqri()
PtText ste6,-11,-3.5

Lbl iecua3b
3→k
If cc[k]=0
Goto iecuav3b
progqri()
PtText ste6,-11,-4.5
pppw()
Goto imenu3
```

```
Lbl iecuav
If d[k]=0
Goto iecuau
perhvifc()
"v="&stv→strv
PtText strv,-11,-4.5
pppw()
Goto imenu

Lbl iecuav2
If d[k]=0
Goto iecuau2
perhvifc()
"v1="&stv→strv
PtText strv,-11,-3.5
Goto iecua2a

Lbl iecuav2a
If d[k]=0
Goto iecuau2a
perhvifc()
"v2="&stv→strv
PtText strv,-11,-4.5
pppw()
Goto imenu2

Lbl iecuav3
If d[k]=0
Goto iecuau3
perhvifc()
"v1="&stv→strv
PtText strv,-11,-2.5
Goto iecua3a

Lbl iecuav3a
If d[k]=0
Goto iecuau3a
perhvifc()
"v2="&stv→strv
PtText strv,-11,-3.5
Goto iecua3b

Lbl iecuav3b
If d[k]=0
Goto iecuau3b
perhvifc()
"v3="&stv→strv
PtText strv,-11,-4.5
pppw()
Goto imenu3

Lbl iecuau
string(d[k])→stu
"u="&stu→stru
PtText stru,-11,-4.5
pppw()
Goto imenu

Lbl iecuau2
string(d[k])→stu
"u1="&stu→stru
```

```
PtText  stru,-11,-3.5
Goto  iecua2a

Lbl  iecuau2a
string(d[k])→stu
"u2="&stu→stru
PtText  stru,-11,-4.5
pppw()
Goto  imenu2

Lbl  iecuau3
string(d[k])→stu
"u1="&stu→stru
PtText  stru,-11,-2.5
Goto  iecua3a

Lbl  iecuau3a
string(d[k])→stu
"u2="&stu→stru
PtText  stru,-11,-3.5
Goto  iecua3b

Lbl  iecuau3b
string(d[k])→stu
"u3="&stu→stru
PtText  stru,-11,-4.5
pppw()
Goto  imenu3

Lbl  circ
ClrIO
Disp  "            CIRCUNFERENCIAS"
Disp  "F1:Circunferencias con C(0,0)"
Disp  "F2:Circunferencias con C(h,k)"
Disp  "F3:Opciones"
Disp  "F4:Salir"

Toolbar
Title  "x²+y²=r²",circo
Title  "(x-h)²+(y-k)²=r²",circhk
Title  "Opciones",uno
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  circo
ClrIO
Disp  "      CIRCUNFERENCIAS CON C(0,0)"
Disp  "F1: Una circunferencia"
Disp  "F2: Dos circunferencias"
Disp  "F3: Tres circunferencias"
Disp  "F4: Opciones"
Disp  "F5: Inicio"
Disp  "F6: Salir"

Toolbar
Title  "1 circ",unac
Title  "2 circ",dosc
Title  "3 circ",tresc
Title  "Ops",circ
Title  "Inicio",ww
Title  "Salir",fin
```

```
EndTBar

Lbl  unac
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea transformar una circunferencia?"
EndDlog
If  ok=0
Goto  circo

ClrIO
Disp  "               UNA CIRCUNFERENCIA"
Dialog
Title  "Una circunferencia"
Request  "Radio",rd
EndDlog
1→k
pptcfc()
Goto  grafc

Lbl  dosc
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea transformar 2 circunferencias?"
EndDlog
If  ok=0
Goto  circo

ClrIO
Disp  "               DOS CIRCUNFERENCIAS"
Dialog
Title  "circunferencia 1"
Request  "Radio",rd
EndDlog
1→k
pptcfc()

ClrIO
Disp  "               DOS CIRCUNFERENCIAS"
Dialog
Title  "circunferencia 2"
Request  "Radio",rd
EndDlog
2→k
pptcfc()
Goto  grafc2

Lbl  tresc
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea transformar 3 circunferencias?"
EndDlog
If  ok=0
Goto  circo

ClrIO
Disp  "               TRES CIRCUNFERENCIAS"
Dialog
Title  "circunferencia 1"
Request  "Radio",rd
EndDlog
```

```
1→k
pptcfc()

ClrIO
Disp "             TRES CIRCUNFERENCIAS"
Dialog
Title "circunferencia 2"
Request "Radio",rd
EndDlog
2→k
pptcfc()

ClrIO
Disp "             TRES CIRCUNFERENCIAS"
Dialog
Title "circunferencia 3"
Request "Radio",rd
EndDlog
3→k
pptcfc()
Goto grafc3

Lbl grafc
ClrGraph
ClrDraw
1→k
proggrac()
Goto cmenu

Lbl grafc2
ClrGraph
ClrDraw
1→k
proggrac()

2→k
proggrac()
Goto cmenu2

Lbl grafc3
ClrGraph
ClrDraw
1→k
proggrac()

2→k
proggrac()

3→k
proggrac()
Goto cmenu3

Lbl cmenu
Toolbar
Title "Graf cont",contc
Title "Ec imag",cecua
Title "Repetir",grafc
Title "Opciones",circo
Title "Salir",fin
EndTBar
```

```
Lbl  cmenu2
Toolbar
Title  "Graf cont",contc2
Title  "Ec imag",cecua2
Title  "Repetir",grafc2
Title  "Opciones",circo
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  cmenu3
Toolbar
Title  "Graf cont",contc3
Title  "Ec imag",cecua3
Title  "Repetir",grafc3
Title  "Opciones",circo
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  contc
ClrGraph
ClrDraw
1→k
proggrcc()
Goto  cmenu

Lbl  contc2
ClrDraw
ClrGraph
1→k
proggrcc()

2→k
proggrcc()
Goto  cmenu2

Lbl  contc3
ClrDraw
ClrGraph
1→k
proggrcc()

2→k
proggrcc()

3→k
proggrcc()
Goto  cmenu3

Lbl  cecua
DelVar  u,v
1→k
ppecfc()
PtText  strwi,-11,-4.5
pppw()
Goto  cmenu

Lbl  cecua2
DelVar  u,v
1→k
ppecfc()
PtText  strwi,-11,-3.5
```

```
2→k
ppecfc()
PtText  strwi,-11,-4.5
pppw()
Goto  cmenu2

Lbl  cecua3
DelVar  u,v
1→k
ppecfc()
PtText  strwi,-11,-2.5

2→k
ppecfc()
PtText  strwi,-11,-3.5

3→k
ppecfc()
PtText  strwi,-11,-4.5
pppw()
Goto  cmenu3

Lbl  circhk
ClrIO
Disp  "      CIRCUNFERENCIAS CON C(h,k)"
Disp  "F1: Una circunferencia"
Disp  "F2: Dos circunferencias"
Disp  "F3: Tres circunferencias"
Disp  "F4: Opciones"
Disp  "F5: Inicio"
Disp  "F6: Salir"

Toolbar
Title  "1 circ",unachk
Title  "2 circ",doschk
Title  "3 circ",treschk
Title  "Ops",circ
Title  "Inicio",ww
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  unachk
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea transformar una circunferencia?"
EndDlog
If  ok=0
Goto  circhk

ClrIO
Disp  "             UNA CIRCUNFERENCIA"
Dialog
Title  "Una circunferencia"
Request  "Centro",cent
Request  "Radio",rd
EndDlog
1→k
expr(cent)→zø[k]
expr(rd)→rr[k]
Goto  grafchk
```

```
Lbl  grafchk
ClrGraph
ClrDraw
1→k
proggrac()
Goto  cmenuhk

Lbl  cmenuhk
Toolbar
Title  "Graf cont",contchk
Title  "Ec imag",cecuahk
Title  "Repetir",grafchk
Title  "Opciones",circhk
Title  "Salir",fin
EndTBar


Lbl  hiper
ClrIO
Disp  "              HIPERBOLAS"
Disp  "F1:Hipérbolas equiláteras"
Disp  "F2:Hipérbolas no-equiláteras horizontales"
Disp  "F3:Hipérbolas no-equiláteras verticales"
Disp  "F4:Opciones"
Disp  "F5:Inicio"
Disp  "F6:Salir"

Toolbar
Title  "xy=C",hipere
Title  "x²-y²=C",hipernh
Title  "y²-x²=C",hipernv
Title  "Opciones",uno
Title  "Ini",ww
Title  "Fin",fin
EndTBar

Lbl  hipere
ClrIO
Disp  "    HIPERBOLAS EQUILATERAS"
Disp  "F1: Una hipérbola"
Disp  "F2: Dos hipérbolas"
Disp  "F3: Tres hipérbolas"
Disp  "F4: Opciones"
Disp  "F5: Inicio"
Disp  "F6: Salir"

Toolbar
Title  "1 hip",unahip
Title  "2 hip",doship
Title  "3 hip",treship
Title  "Opciones",hiper
Title  "Inicio",ww
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  unahip
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea transformar una hipérbola?"
EndDlog
```

```
If  ok=0
Goto  hipere

ClrIO
Disp  "              UNA HIPERBOLA"
Dialog
Title  "Hipérbola equilátera"
Request  "xy=",ht
EndDlog
1→k
pthe()
Goto  grafhe

Lbl  doship
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea transformar dos hipérbolas?"
EndDlog
If  ok=0
Goto  hipere

ClrIO
Disp  "            DOS HIPERBOLAS"
Dialog
Title  "Hipérbola equilátera 1"
Request  "xy=",ht
EndDlog
1→k
pthe()

ClrIO
Disp  "            DOS HIPERBOLAS"
Dialog
Title  "Hipérbola equilátera 2"
Request  "xy=",ht
EndDlog
2→k
pthe()
Goto  grafhe2

Lbl  treship
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea transformar tres hipérbolas?"
EndDlog
If  ok=0
Goto  hipere

ClrIO
Disp  "            TRES HIPERBOLAS"
Dialog
Title  "Hipérbola equilátera 1"
Request  "xy=",ht
EndDlog
1→k
pthe()

ClrIO
Disp  "            TRES HIPERBOLAS"
Dialog
Title  "Hipérbola equilátera 2"
```

```
Request  "xy=",ht
EndDlog
2→k
pthe()

ClrIO
Disp  "          TRES HIPERBOLAS"
Dialog
Title  "Hipérbola equilátera 3"
Request  "xy=",ht
EndDlog
3→k
pthe()
Goto  grafhe3

Lbl  grafhe
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pghe()
Goto  hemenu

Lbl  grafhe2
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pghe()

2→k
pghe()
Goto  hemenu2

Lbl  grafhe3
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pghe()

2→k
pghe()

3→k
pghe()
Goto  hemenu3

Lbl  hemenu
Toolbar
Title  "Graf cont",conthe
Title  "Ec imag",ecuahe
Title  "Repetir",grafhe
Title  "Opciones",hipere
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  hemenu2
Toolbar
Title  "Graf cont",conthe2
Title  "Ec imag",ecuahe2
Title  "Repetir",grafhe2
Title  "Opciones",hipere
Title  "Salir",fin
```

```
EndTBar

Lbl  hemenu3
Toolbar
Title  "Graf cont",conthe3
Title  "Ec imag",ecuahe3
Title  "Repetir",grafhe3
Title  "Opciones",hipere
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  conthe
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pgche()
Goto  hemenu

Lbl  conthe2
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pgche()

2→k
pgche()
Goto  hemenu2

Lbl  conthe3
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pgche()

2→k
pgche()

3→k
pgche()
Goto  hemenu3

Lbl  ecuahe
DelVar  u,v
1→k
If a1=0 Then
string(-2*a2*cc[k])→sth
"u="&sth→strh
PtText  strh,-11,-4.5
pppw()
Else
DelVar  u,v
perhvifc()
"v="&stv→strh
PtText  strh,-11,-4.5
pppw()
EndIf
Goto  hemenu

Lbl  ecuahe2
DelVar  u,v
1→k
```

```
If a1=0 Then
string(-2*a2*cc[k])→sth
"u1="&sth→strh
PtText  strh,-11,-3.5
Else
DelVar  u,v
perhvifc()
"v1="&stv→strh
PtText  strh,-11,-3.5
EndIf

2→k
If a1=0 Then
string(-2*a2*cc[k])→sth
"u2="&sth→strh
PtText  strh,-11,-4.5
pppw()
Else
DelVar  u,v
perhvifc()
"v2="&stv→strh
PtText  strh,-11,-4.5
pppw()
EndIf
Goto  hemenu2

Lbl  ecuahe3
DelVar  u,v
1→k
If a1=0 Then
string(-2*a2*cc[k])→sth
"u1="&sth→strh
PtText  strh,-11,-2.5
Else
DelVar  u,v
perhvifc()
"v1="&stv→strh
PtText  strh,-11,-2.5
EndIf

2→k
If a1=0 Then
string(-2*a2*cc[k])→sth
"u2="&sth→strh
PtText  strh,-11,-3.5
Else
DelVar  u,v
perhvifc()
"v2="&stv→strh
PtText  strh,-11,-3.5
EndIf

3→k
If a1=0 Then
string(-2*a2*cc[k])→sth
"u3="&sth→strh
PtText  strh,-11,-4.5
pppw()
Else
DelVar  u,v
perhvifc()
```

```
"v3="&stv→strh
PtText  strh,-11,-4.5
pppw()
EndIf
Goto  hemenu3

Lbl  hipernh
ClrIO
Disp  "     HIPER NO-EQUI HORIZONTALES"
Disp  "F1: Una hipérbola"
Disp  "F2: Dos hipérbolas"
Disp  "F3: Tres hipérbolas"
Disp  "F4: Opciones"
Disp  "F5: Inicio"
Disp  "F6: Salir"

Toolbar
Title  "1 hip",unahiph
Title  "2 hip",doshiph
Title  "3 hip",treshiph
Title  "Opciones",hiper
Title  "Ini",ww
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  unahiph
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea transformar una hipérbola?"
EndDlog
If  ok=0
Goto  hipernh

ClrIO
Disp  "              UNA HIPERBOLA"
Dialog
Title  "Hipérbola no-equilátera horizontal"
Request  "x²-y²=",ht
EndDlog
1→k
pthh()
Goto  grafhh

Lbl  doshiph
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea transformar dos hipérbolas?"
EndDlog
If  ok=0
Goto  hipernh

ClrIO
Disp  "              DOS HIPERBOLAS"
Dialog
Title  "Hipérbola no-equilátera horizontal 1"
Request  "x²-y²=",ht
EndDlog
1→k
pthh()

ClrIO
```

```
Disp "                DOS HIPERBOLAS"
Dialog
Title "Hipérbola no-equilátera horizontal 2"
Request "x²-y²=",ht
EndDlog
2→k
pthh()
Goto grafhh2

Lbl treshiph
ClrIO
Dialog
Text "¿Desea Transformar tres hipérbolas?"
EndDlog
If ok=0
Goto hipernh

ClrIO
Disp "                TRES HIPERBOLAS"
Dialog
Title "Hipérbola no-equilátera horizontal 1"
Request "x²-y²=",ht
EndDlog
1→k
pthh()

ClrIO
Disp "                TRES HIPERBOLAS"
Dialog
Title "Hipérbola no-equilátera horizontal 2"
Request "x²-y²=",ht
EndDlog
2→k
pthh()

ClrIO
Disp "                TRES HIPERBOLAS"
Dialog
Title "Hipérbola no-equilátera horizontal 3"
Request "x²-y²=",ht
EndDlog
3→k
pthh()
Goto grafhh3

Lbl grafhh
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pghh()
Goto imenuh

Lbl grafhh2
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pghh()

2→k
pghh()
Goto imenuh2
```

```
Lbl  grafhh3
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pghh()

2→k
pghh()

3→k
pghh()
Goto  imenuh3

Lbl  imenuh
Toolbar
Title  "Graf cont",conthh
Title  "Ec imag",iecuah
Title  "Repetir",grafhh
Title  "Opciones",hipernh
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  imenuh2
Toolbar
Title  "Graf cont",conthh2
Title  "Ec imag",iecuah2
Title  "Repetir",grafhh2
Title  "Opciones",hipernh
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  imenuh3
Toolbar
Title  "Graf cont",conthh3
Title  "Ec imag",iecuah3
Title  "Repetir",grafhh3
Title  "Opciones",hipernh
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  conthh
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pgchh()
Goto  imenuh

Lbl  conthh2
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pgchh()

2→k
pgchh()
Goto  imenuh2

Lbl  conthh3
ClrDraw
ClrGraph
```

```
1→k
pgchh()

2→k
pgchh()

3→k
pgchh()
Goto imenuh3

Lbl iecuah
DelVar u,v
1→k
If a2=0 Then
string(a1*cc[k])→sth
"u="&sth→strh
PtText strh,-11,-4.5
pppw()
Else
perhvifc()
"v="&stv→strh
PtText strh,-11,-4.5
pppw()
EndIf
Goto imenuh

Lbl iecuah2
DelVar u,v
1→k
If a2=0 Then
string(a1*cc[k])→sth
"u1="&sth→strh
PtText strh,-11,-3.5
Else
perhvifc()
"v1="&stv→strh
PtText strh,-11,-3.5
EndIf

2→k
If a2=0 Then
string(a1*cc[k])→sth
"u2="&sth→strh
PtText strh,-11,-4.5
pppw()
Else
perhvifc()
"v2="&stv→strh
PtText strh,-11,-4.5
pppw()
EndIf
Goto imenuh2

Lbl iecuah3
DelVar u,v
1→k
If a2=0 Then
string(a1*cc[k])→sth
"u1="&sth→strh
PtText strh,-11,-2.5
Else
```

```
perhvifc()
"v1="&stv→strh
PtText  strh,-11,-2.5
EndIf

2→k
If a2=0 Then
string(a1*cc[k])→sth
"u2="&sth→strh
PtText  strh,-11,-3.5
Else
perhvifc()
"v2="&stv→strh
PtText  strh,-11,-3.5
EndIf

3→k
If a2=0 Then
string(a1*cc[k])→sth
"u3="&sth→strh
PtText  strh,-11,-4.5
pppw()
Else
perhvifc()
"v3="&stv→strh
PtText  strh,-11,-4.5
pppw()
EndIf
Goto  imenuh3


Lbl  hipernv
ClrIO
Disp  "    HIPER NO-EQUI VERTICALES"
Disp  "F1: Una hipérbola"
Disp  "F2: Dos hipérbolas"
Disp  "F3: Tres hipérbolas"
Disp  "F4: Opciones"
Disp  "F5: Inicio"
Disp  "F6: Salir"

Toolbar
Title  "1 hip",unahipv
Title  "2 hip",doshipv
Title  "3 hip",treshipv
Title  "Opciones",hiper
Title  "Ini",ww
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  unahipv
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea transformar una hipérbola?"
EndDlog
If  ok=0
Goto  hipernv

ClrIO
Disp  "             UNA HIPERBOLA"
Dialog
```

```
Title  "Hipérbola no-equilátera vertical"
Request  "y²-x²=",ht
EndDlog
1→k
pthv()
Goto  grafhv

Lbl  doshipv
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea transformar dos hipérbolas?"
EndDlog
If  ok=0
Goto  hipernv

ClrIO
Disp  "                DOS HIPERBOLAS"
Dialog
Title  "Hipérbola no-equilátera vertical 1"
Request  "y²-x²=",ht
EndDlog
1→k
pthv()

ClrIO
Disp  "                DOS HIPERBOLAS"
Dialog
Title  "Hipérbola no-equilátera vertical 2"
Request  "y²-x²=",ht
EndDlog
2→k
pthv()
Goto  grafhv2

Lbl  treshipv
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea transformar tres hipérbolas?"
EndDlog
If  ok=0
Goto  hipernv

ClrIO
Disp  "               TRES HIPERBOLAS"
Dialog
Title  "Hipérbola no-equilátera vertical 1"
Request  "y²-x²=",ht
EndDlog
1→k
pthv()

ClrIO
Disp  "               TRES HIPERBOLAS"
Dialog
Title  "Hipérbola no-equilátera vertical 2"
Request  "y²-x²=",ht
EndDlog
2→k
pthv()

ClrIO
```

```
Disp  "                TRES HIPERBOLAS"
Dialog
Title  "Hipérbola no-equilátera vertical 3"
Request  "y²-x²=",ht
EndDlog
3→k
pthv()
Goto  grafhv3

Lbl  grafhv
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pghv()
Goto  imenuv

Lbl  grafhv2
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pghv()

2→k
pghv()
Goto  imenuv2

Lbl  grafhv3
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pghv()

2→k
pghv()

3→k
pghv()
Goto  imenuv3

Lbl  imenuv
Toolbar
Title  "Graf cont",conthv
Title  "Ec imag",iecuav
Title  "Repetir",grafhv
Title  "Opciones",hipernv
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  imenuv2
Toolbar
Title  "Graf cont",conthv2
Title  "Ec imag",iecuav2
Title  "Repetir",grafhv2
Title  "Opciones",hipernv
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  imenuv3
Toolbar
Title  "Graf cont",conthv3
Title  "Ec imag",iecuav3
```

```
Title  "Repetir",grafhv3
Title  "Opciones",hipernv
Title  "Salir",fin
EndTBar

Lbl  conthv
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pgchv()
Goto  imenuv

Lbl  conthv2
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pgchv()

2→k
pgchv()
Goto  imenuv2

Lbl  conthv3
ClrDraw
ClrGraph
1→k
pgchv()

2→k
pgchv()

3→k
pgchv()
Goto  imenuv3

Lbl  iecuav
DelVar  u,v
1→k
If a2=0 Then
string(-a1*cc[k])→sth
"u="&sth→strh
PtText  strh,-11,-4.5
pppw()
Else
perhvifc()
"v="&stv→strh
PtText  strh,-11,-4.5
pppw()
EndIf
Goto  imenuv

Lbl  iecuav2
DelVar  u,v
1→k
If a2=0 Then
string(-a1*cc[k])→sth
"u1="&sth→strh
PtText  strh,-11,-3.5
Else
perhvifc()
"v1="&stv→strh
```

```
PtText  strh,-11,-3.5
EndIf

2→k
If a2=0 Then
string(-a1*cc[k])→sth
"u2="&sth→strh
PtText  strh,-11,-4.5
pppw()
Else
perhvifc()
"v2="&stv→strh
PtText  strh,-11,-4.5
pppw()
EndIf
Goto  imenuv2

Lbl  iecuav3
DelVar  u,v
1→k
If a2=0 Then
string(-a1*cc[k])→sth
"u1="&sth→strh
PtText  strh,-11,-2.5
Else
perhvifc()
"v1="&stv→strh
PtText  strh,-11,-2.5
EndIf

2→k
If a2=0 Then
string(-a1*cc[k])→sth
"u2="&sth→strh
PtText  strh,-11,-3.5
Else
perhvifc()
"v2="&stv→strh
PtText  strh,-11,-3.5
EndIf

3→k
If a2=0 Then
string(-a1*cc[k])→sth
"u3="&sth→strh
PtText  strh,-11,-4.5
pppw()
Else
perhvifc()
"v3="&stv→strh
PtText  strh,-11,-4.5
pppw()
EndIf
Goto  imenuv3

Lbl  fin
ClrIO
Dialog
Text  "¿Desea salir del programa?"
EndDlog
```

```
If ok=0
Goto uno

Lbl ffin
DelVar
a_,a1,a2,aa,aa1,absa,ac,ad,ae,argu,arge,bb1,cc,ch1,ch2,cc1,cc2,cc3,cent,d,dd
1,denoma,ee1,f,ff1,g,gg1,h,høw,ht,inst,j,k,køw,m,n,numa,p,rd,rhrz,rinc,rr,rr
w,stru,strv,strw,strwi,stuvw,stu,stv,st,str,staa,stab,stac,stad,stae,staf,st
rh,sth,saa1,ste1,ste2,ste3,ste4,ste5,ste6,stnuma,stdenoma,t,u,uu,u0,ui,v,vi,
vv,v0,w,wi,ww,z,zi,zø,φ

Disp ""
Disp "      Presione ? Q para volver"
Disp "              a Home"

EndPrgm
```