Caracterización del Conjunto de Discontinuidades de Funciones Reales

Jesús Ernesto Cruz Lugo

Tesis presentada para obtener el título de
Licenciado en Matemáticas

Directora de tesis: Dra. M. Guadalupe Ávila Godoy

"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
México

17 de Diciembre de 2013

SINODALES

Dra. M. Guadalupe Ávila Godoy
Universidad de Sonora.

Dr. Agustín Brau Rojas
Universidad de Sonora.

Dr. Fernando Luque Vásquez
Universidad de Sonora.

Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa
Universidad de Sonora.

Dedicatoria

A mis padres

A mis hermanos

A mis sobrinas Renata y Gretel

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a mis padres, María Hilda Lugo Chang y Rafael Cruz Romero, por apoyarme incondicionalmente en todas mis decisiones durante mis estudios y por ser un verdadero ejemplo a seguir.

Quiero agradecer a mi directora de tesis, Dra. M. Guadalupe Ávila Godoy, quien fue mi profesora casi desde el inicio de mi carrera, y desde entonces ha sido una guía y me ha brindado todo su apoyo para cumplir mis metas en mi formación universitaria. Gracias por eso y por todo el tiempo dedicado a la preparación y revisión de esta tesis.

También agradezco a mis sinodales, Dr. Agustín Brau Rojas, Dr. Fernando Luque Vásquez y Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa, por su valioso tiempo invertido en la revisión y corrección de este trabajo.

Jesús Ernesto Cruz Lugo.
Hermosillo, Sonora
Diciembre 2013

Índice general

1 Introducción

Uno de los temas centrales del análisis real es la continuidad de funciones. Se puede decir mucho sobre este tema, y en este trabajo de tesis se estudian principalmente propiedades de los conjuntos de continuidad y discontinuidad tanto de funciones reales en general como de funciones que son límite puntual de una sucesión de funciones continuas.

Primeramente, en el capítulo 2 se dan algunas definiciones y resultados básicos sobre numerabilidad de conjuntos y topología de $\mathbb{R}$, los cuales serán las bases para estudiar las propiedades de numerabilidad y topológicas de los conjuntos de puntos de continuidad y discontinuidad de una función.

En el capítulo 3 se hace una clasificación de los tipos de discontinuidad de una función, se define la oscilación de una función y se muestra su relación con la continuidad. Además, se hace un análisis de la numerabilidad de ciertos subconjuntos del conjunto de puntos de discontinuidad de una función, los cuales se definen a través de la clasificación de discontinuidades hecha. También se presentan algunas propiedades topológicas del conjunto de puntos de discontinuidad de una función.

Finalmente, en el capítulo 4 se trata el tema de límites de sucesiones de funciones y se analiza la continuidad de la función límite y de las funciones de la sucesión. Este análisis nos llevará a los conceptos de convergencia quasi-uniforme y funciones Baire I. Los principales resultados que involucran estos conceptos son dar una condición necesaria y suficiente para que la función límite de una sucesión de funciones continuas sea también continua, y describir el conjunto de puntos de discontinuidad de una función que es límite puntual de una sucesión de funciones continuas.

2 Definiciones y resultados sobre numerabilidad y topología

En este capítulo se presenta una serie de conceptos y resultados muy conocidos sobre numerabilidad (sección 2.1) y topología de $\mathbb{R}$ (sección 2.2), con el fin de establecer las bases que necesitaremos para abordar los temas de los capítulos posteriores.

2.1 Definiciones y resultados sobre numerabilidad

Comenzaremos definiendo qué es un conjunto numerable, para después probar algunos resultados básicos que involucran este concepto, entre ellos, un útil principio que nos permitirá probar la numerabilidad de conjuntos de una manera relativamente sencilla, ejemplificando esto al probar a través de este principio que el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales es numerable, y mostrando su interés teórico al utilizarlo para probar que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable. También se probará el conocido resultado de que un intervalo es no numerable.

Definición 2.1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se dice que:

(i) A es *finito* si $A = \emptyset$ o si para algún $n \in \mathbb{N}$ existe una función biyectiva $f : A \to \{1, 2, ..., n\}$.

(ii) A es *infinito numerable* si existe una función biyectiva $f : A \to \mathbb{N}$.

(iii) A es *numerable* si es finito o infinito numerable.

(iv) A es *no numerable* si no es finito ni infinito numerable.

Lema 2.2. *Un subconjunto de un conjunto finito es finito.*

Prueba. Sea $B \subset \mathbb{R}$ finito, y sea $A \subset B$. Si $B = \emptyset$, entonces su único subconjunto es $\emptyset$, así que $A = \emptyset$, el cual es un conjunto finito. Si $B \neq \emptyset$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y una función biyectiva $f : B \to \{1, 2, ..., n\}$. Supongamos que $A \neq \emptyset$ (si $A = \emptyset$, entonces A es finito y ya acabamos), y sea $\{i_1, i_2, ..., i_m\} = f(A)$. Definamos $g : A \to \{1, 2, ..., m\}$ como $g(x) = j$, donde $f(x) = i_j$. Dado que f es biyectiva, es claro que g también es biyectiva, y entonces A es finito. $\square$

Teorema 2.3. *Un subconjunto de un conjunto numerable es numerable.*

Prueba. Sea $B \subset \mathbb{R}$ numerable, y sea $A \subset B$. Si A es finito, ya acabamos. Supongamos que A es infinito. Entonces, por el Lema 2.2, B también es infinito, así que B es infinito numerable (pues es numerable por hipótesis). Luego, existe una función biyectiva $f : \mathbb{N} \to B$, por lo que podemos enlistar los elementos de B como

$$\{x_1, x_2, x_3, ...\},$$

donde $f(n) = x_n$. Sea

$$S = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\}.$$

Sea $n_1 = \min S$. Sean $n_2 = \min S \backslash \{n_1\}$, $n_3 = \min S \backslash \{n_1, n_2\}$, y en general, para $k \in \mathbb{N}$, habiendo elegido $n_1, ..., n_{k-1}$, tomamos $n_k = \min S \backslash \{n_1, ..., n_{k-1}\}$. Definiendo $g : \mathbb{N} \to A$ como $g(k) = x_{n_k}$, obtenemos una función biyectiva de $\mathbb{N}$ en A, por lo que A es infinito numerable.

$\square$

A continuación se presenta un principio de numerabilidad y se ilustra cómo puede ser aplicado para probar la numerabilidad de conjuntos, como los conjuntos $\mathbb{Z}$ de números enteros y $\mathbb{Q}$ de números racionales. También se muestra el interés teórico de este principio, usándolo para probar que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

Los conceptos utilizados en el enunciado del siguiente teorema son: un conjunto fijo y finito llamado *alfabeto*, a cuyos elementos llamaremos *letras*, y las *palabras* que pueden ser formadas yuxtaponiendo letras del alfabeto, formando así una cadena de longitud finita. Las palabras pueden tener letras repetidas.

Teorema 2.4 (Principio de numerabilidad). *Sea S el conjunto de todas las palabras que pueden ser formadas usando letras de un alfabeto finito A. Entonces S es infinito numerable. Así, cualquier conjunto de palabras que pueden formarse con letras de A es numerable.*

Prueba. Supongamos que A contiene k letras, $k \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea S_n el subconjunto de S de las palabras de longitud n. Se tiene que $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$. Como S_n es un conjunto finito que consta de k^n palabras, existe una función $f_1 : S_1 \to \{1, 2, ..., k\}$ biyectiva, una función $f_2 : S_2 \to$

$\{k+1, k+2, \ldots, k+k^2\}$ biyectiva, etcétera. Para cada $n \geq 2$ existe una función biyectiva

$$f_n : S_n \to \{k+k^2+\cdots k^{n-1}+1, k+k^2+\cdots k^{n-1}+2, \ldots, k+k^2+\cdots k^{n-1}+k^n\}$$

Sea $f : S \to \mathbb{N}$ definida por $f(s) = f_n(s)$, si $s \in S_n$. f es una función biyectiva, ya que hereda las propiedades de las funciones f_n. Consecuentemente, S es infinito numerable. Además, si $T \subset S$, el Teorema 2.3 implica que T es numerable. □

En los siguientes corolarios se muestra la utilidad de este principio de numerabilidad, probando resultados que se presentan habitualmente en cursos introductorios al análisis, pero de una manera mucho más sencilla.

Corolario 2.5. *El conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros es numerable.*

Prueba. Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -\}$. Cada elemento de $\mathbb{Z}$ puede ser representado como una palabra formada utilizando palabras del alfabeto A. Es decir, el conjunto $\mathbb{Z}$ puede ser identificado como un subconjunto de todas las palabras que pueden formarse con letras de A. Por lo tanto, por el Principio de numerabilidad (Teorema 2.4) $\mathbb{Z}$ es numerable. □

Corolario 2.6. *El conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales es numerable.*

Prueba. Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, /, -\}$. Los elementos del conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales son de la forma a/b, donde a y b son enteros, $b \neq 0$. Así, $\mathbb{Q}$ puede ser identificado como un subconjunto de todas las palabras que pueden formarse con letras de A. Por ejemplo, el número racional $\frac{3}{4}$ puede ser representado por la palabra "3/4". Así, el Principio de numerabilidad (Teorema 2.4) implica que $\mathbb{Q}$ es numerable. □

Corolario 2.7. *La unión de una colección numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Prueba. Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una colección numerable de conjuntos infinitos numerables. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ biyectiva. Cualquier elemento de $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ puede ser expresado como $f_k(m)$ para $k \in \mathbb{N}$ (el menor índice) y algún $m \in \mathbb{N}$. Así, cada uno de tales elementos es identificable con una palabra que puede ser formada usando letras del alfabeto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (,)\}$. Por tanto, el Principio de numerabilidad (Teorema 2.4) asegura que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es numerable. El caso finito es similar. □

Teorema 2.8. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Si $f : A \to B$ es inyectiva y B es numerable, entonces A también es numerable.*

Prueba. Como $f : A \to B$ es inyectiva, se tiene que $f : A \to f(A)$ es biyectiva. Además, dado que B es numerable y $f(A) \subset B$, el Teorema 2.3 implica que $f(A)$ es numerable, así que existe $g : f(A) \to \mathbb{N}$ biyectiva. Luego, $g \circ f : A \to f(A) \to \mathbb{N}$ es biyectiva. Por lo tanto, A es numerable. $\square$

Lema 2.9. *El intervalo $(0, 1)$ es no numerable.*

Prueba. Supongamos que $(0, 1)$ es numerable. Entonces podemos enlistar los elementos de $(0, 1)$ como

$$\{x_1, x_2, x_3, ...\}.$$

Cada elemento de $(0, 1)$ tiene una expansión decimal infinita, así que podemos escribirlos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots, \\ x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots, \\ x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

donde cada $a_{ij} \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Ahora construimos un número $c = 0.c_1c_2c_3\cdots$ definiendo

$$c_i = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad a_{ii} \neq 4, \\ 5 & \text{si} \quad a_{ii} = 4. \end{cases}$$

Este número no puede ser igual a alguno de los números $x_1, x_2, x_3, \ldots$, ya que c y x_i difieren en la i-ésima posición de sus expansiones decimaes. Esto nos lleva a una contradicción, lo que prueba que $(0, 1)$ es no numerable. $\square$

Definición 2.10. A un intervalo de la forma $[a, a]$, $a \in \mathbb{R}$ se le llama *intervalo degenerado*. A un intervalo que no es degenerado, se le llama *intervalo no degenerado*.

Teorema 2.11. *Ningún intervalo no vacío y no degenerado es numerable.*

Prueba. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Definamos la función $f : (0, 1) \to (a, b)$ como $f(t) = (1 - t)a + tb$. Claramente, f es una función biyectiva. Esto nos dice que no existe una función $g : (a, b) \to \mathbb{N}$ biyectiva, ya que si existiera tal función, $g \circ f$ sería una función biyectiva de $(0, 1)$ en $\mathbb{N}$, lo cual no es posible ya que $(0,1)$ es no numerable (Lema 2.9). Se sigue que (a,b) es no numerable. Como (a,b) es un subconjunto de los intervalos $(a,b], [a,b), [a,b], (a,\infty), [a,\infty), (-\infty,b)$ y $(-\infty,b]$, el Teorema 2.3 implica que estos intervalos son no numerables. $\square$

En lo sucesivo supondremos que todos los intervalos son no vacíos y no degenerados, a menos que se especifique lo contrario.

2.2 Definiciones y resultados de topología de $\mathbb{R}$

En esta sección se presentan algunas definiciones topológicas de $\mathbb{R}$, así como resultados básicos y no tan básicos, los cuales serán de suma importancia para el desarrollo de la teoría de los capítulos posteriores. Se incluyen desde las definiciones de supremo e ínfimo de un conjunto, hasta resultados sobre conjuntos $\mathcal{G}_\delta$ y $\mathcal{F}_\sigma$, pasando por la Propiedad Arquiemediana de $\mathbb{R}$, la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, resultados sobre conjuntos cerrados, abiertos, densos, densos en ninguna parte, de primera categoría, de segunda categoría y residuales, el Teorema de Categoría de Baire y sus equivalencias, entre otros.

Definición 2.12. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Si A está acotado superiormente, entonces la mínima cota superior de A se llama el *supremo* de A y se denota por $\sup A$. Así, $s = \sup A$ si y sólo si

(i) $s \geq x$, para todo $x \in A$, y

(ii) si $s' < s$, entonces existe $x \in A$ tal que $x > s'$.

Si A está acotado inferiormente, entonces la máxima cota superior de A se llama el *ínfimo* de A y se denota por $\inf A$. Así, $t = \inf A$ si y sólo si

(i) $t \leq x$, para todo $x \in A$, y

(ii) si $t' > t$, entonces existe $x \in A$ tal que $x < t'$.

Axioma de Completez de $\mathbb{R}$. Todo subconjunto A no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene una mínima cota superior. Esto es, $\sup A$ existe y es un número real.

Teorema 2.13 (Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$). *El conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales no está acotado superiormente.*

Prueba. Supongamos que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente. Entonces, por el Axioma de Completez de $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ tiene una mínima cota superior, digamos $\sup \mathbb{N} = m$. Como m es la mínima cota superior, $m-1$ no es una cota superior de $\mathbb{N}$, pues $m-1 < m$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > m-1$. Pero entonces $n_0 + 1 > m$, y como $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, esto contradice el hecho de que m es una cota superior de $\mathbb{N}$. □

Teorema 2.14. *Los siguientes enunciados son equivalentes a la Propiedad Arquimediana:*

(i) *Para cada $z \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > z$.*

(ii) *Para cada $x > 0$ y para cada $y \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.*

(iii) *Para cada $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n < x$.*

Prueba. Probaremos que Teorema 2.13 $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ Teorema 2.12.

Teorema 2.13 $\Rightarrow$ (i): Supongamos que (i) no se cumple. Entonces, existe $z_0 \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq z_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, z_0 es una cota superior de $\mathbb{N}$, lo cual contradice el Teorema 2.12. Así, la Propiedad Arquimediana implica (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $z = y/x$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > y/x$, esto es, $nx > y$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea $y = 1$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > 1$, esto es, $1/n < x$. Además, como $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, así que $1/n > 0$.

(iii) $\Rightarrow$ Teorema 2.13: Supongamos que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente por un número real, digamos m. Esto es, $n \leq m$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $1/n \geq 1/m$, para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual contradice (iii) con $x = 1/m$. Por tanto, (iii) implica el Teorema 2.13. □

Definición 2.15. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.

(i) Un punto $x \in A$ es un *punto interior* de A si existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset A$. Al conjunto de todos los puntos interiores de A se le llama el *interior* de A, y se denota por A°.

(ii) Un punto $x \in A$ es un *punto aislado* de A si existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A = \{x\}$.

(iii) Un punto $x \in \mathbb{R}$ es *punto de acumulación* de A si para todo $\epsilon > 0$, el intervalo $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ contiene al menos un punto de A distinto de x. El conjunto de puntos de acumulación de A se denota por A'.

(iv) Un punto $x \in \mathbb{R}$ es *punto frontera* de A si para todo $\epsilon > 0$, se tiene que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap (\mathbb{R}\backslash A) \neq \emptyset$. El conjunto de puntos frontera de A se denota por ∂A.

(v) A se dice ser *cerrado* si todo punto de acumulación de A pertenece a A, esto es, si $A' \subset A$.

(vi) La *cerradura* de A se define como $A \cup A'$, y se denota por $\overline{A}$

(vii) A se dice ser *abierto* si todo punto de A es un punto interior de A, esto es, si $A \subset A^{\circ}$.

(viii) Una *vecindad* de un punto $x \in \mathbb{R}$ es un intervalo abierto que contiene a x.

Teorema 2.16. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. A es abierto si y sólo si $\mathbb{R}\backslash A$ es cerrado.*

Prueba. Supongamos primero que A es abierto. Probaremos que $\mathbb{R}\backslash A$ es cerrado, es decir, $(\mathbb{R}\backslash A)' \subset \mathbb{R}\backslash A$. Sea $x \in (\mathbb{R}\backslash A)'$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$, el conjunto $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ contiene al menos un punto de $\mathbb{R}\backslash A$ distinto de x. Luego, $x \notin A^{\circ}$. Como A es abierto, $A = A^{\circ}$, así que $x \notin A$. De aquí que $x \in \mathbb{R}\backslash A$, por lo que $\mathbb{R}\backslash A$ es cerrado.

Supongamos ahora que $\mathbb{R}\backslash A$ es cerrado. Probaremos que A es abierto, es decir, $A \subset A^{\circ}$. Sea $x \in A$. Entonces $x \notin \mathbb{R}\backslash A$. Como $\mathbb{R}\backslash A$ es cerrado, $(\mathbb{R}\backslash A)' \subset \mathbb{R}\backslash A$, así que $x \notin (\mathbb{R}\backslash A)'$. Así, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap (\mathbb{R}\backslash A) = \emptyset$. Luego, $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset A$, por lo que $x \in A^{\circ}$. Por lo tanto, A es abierto. $\square$

Teorema 2.17. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.*

Prueba. Supongamos que A es cerrado. Se tiene que $A \subset A \cup A' = \overline{A}$. Además, como A es cerrado, $A' \subset A$, así que $\overline{A} = A \cup A' \subset A$. Por tanto, $A = \overline{A}$.

Supongamos ahora que $A = \overline{A}$. Entonces $A' \subset A \cup A' = \overline{A} = A$. Por tanto, A es cerrado. $\square$

Lema 2.18. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Si A es cerrado, entonces $\partial A \subset A$.*

Prueba. Sea $x \in \partial A$, y supongamos que $x \notin A$. Como para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $x \notin A$, entonces $x \in A'$. Luego $A' \subsetneq A$, lo cual contradice la hipótesis de que A es cerrado. Por tanto, $x \in A$, y $\partial A \subset A$. $\square$

Teorema 2.19. *La intersección de cualquier colección numerable anidada de conjuntos no vacíos, cerrados y acotados es no vacía.*

Prueba. Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una colección numerable de conjuntos no vacíos, cerrados y acotados tales que $A_n \supset A_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Debemos encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sean $a_n = \inf A_n$ y $b_n = \sup A_n$. Como A_n es acotado, se tiene que $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, y como A_n es cerrado, el Lema 2.18 nos dice que $a_n, b_n \in A_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$I_n = [a_n, b_n].$$

Como $A_j \subset A_i$ para $j > i$, se tiene que $a_i \leq a_j$ y $b_j \leq b_i$, por lo que $I_j \subset I_i$ para $j > i$. De aquí,

$$I_j \cap I_i \neq \emptyset. \tag{1}$$

Además, $A_n \subset I_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $a_n \geq a_m$ para $n > m$, $\{a_n\}$ es una sucesión no decreciente. Además, se tiene que $a_n \leq b_1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, así que b_1 es una cota superior para la sucesión $\{a_n\}$. Como $\{a_n\}$ es no decreciente y acotada superiormente, el Axioma de Completez de $\mathbb{R}$ asegura la existencia de

$$x = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

Para probar que $x \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, mostraremos primero que $x \in I_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Para esto, debemos probar que $a_n \leq x \leq b_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. La primera desigualdad se cumple por la definición de supremo. Para probar la segunda, supongamos que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $b_i < x$. Como $x = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $b_i < a_j \leq x$. Luego,

$$a_i \leq b_i < a_j \leq b_j.$$

De aquí se tiene que

$$I_j \cap I_i = \emptyset,$$

lo cual contradice (1). Así, hemos probado que $x \in I_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, probaremos que $x \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si $x = a_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces $x \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, pues $x = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_k$. Por otra parte, si $x \notin \{a_n\}$, entonces $a_n < x$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo y para todo $\epsilon > 0$, el intervalo $(x - \epsilon, x)$ debe contener algún punto de A_n (ya que $a_n < x$). Así, x debe ser un punto de acumulación de A_n, y como A_n es cerrado, x es un punto de A_n. Por lo tanto $x \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Corolario 2.20. *Sea $I_1, I_2, I_3, \ldots$ una colección numerable anidada de intervalos cerrados y acotados cuya longitud tiende a cero, esto es $I_n \supset I_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $l(I_n) \to 0$. Entonces*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\},$$

para algún $x \in \mathbb{R}$.

Prueba. Por el Teorema 2.19, sabemos que la intersección de los I_n's es no vacía. Supongamos que dicha intersección contiene al menos dos puntos $x_1 < x_2$. Esto significa que $[x_1, x_2] \subset I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero como $l(I_n) \to 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $l([x_1, x_2]) > l(I_n)$, para todo $n \geq N$, lo cual es imposible. Por tanto, x_1 y x_2 no pueden ser ambos puntos en la intersección numerable de los I_n's, lo que prueba lo que queríamos. □

Definición 2.21. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es *denso* en $\mathbb{R}$ si para todo intervalo abierto I se tiene $A \cap I \neq \emptyset$.

Teorema 2.22. *El conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales es denso en $\mathbb{R}$.*

Prueba. Sea $I = (a, b)$, con $a < b$. Buscamos $r \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$. Primero supongamos que $a \geq 0$. Como $b - a > 0$, por la Propiedad Arquimediana (Teorema 2.14 (iii)), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b - a > 1/n$. Sea

$$A = \{k \in \mathbb{N} : b \leq k/n\}.$$

A es no vacío por la Propiedad Arquimediana (Teorema 2.13 (i)) (con $z = bn$). Luego, A tiene un elemento mínimo, digamos $\min A = m$. Así, $m \in A$ y $m - 1 \notin A$, así que $(m-1)/n < b \leq m/n$, y entonces

$$a = b - (b - a) < m/n - 1/n = (m-1)/n.$$

Por tanto, $a < (m-1)/n < b$, y $r := (m-1)/n \in \mathbb{Q} \cap (a,b)$.

Si $a < 0$, entonces $-a > 0$, y por la Propiedad Arquimediana (Teorema 2.14 (i)), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > -a$, esto es, $n + a > 0$. Luego, por lo que acabamos de probar, existe $r \in \mathbb{Q} \cap (n+a, n+b)$, y entonces $r - n \in \mathbb{Q} \cap (a,b)$.

Por lo tanto, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. $\square$

Corolario 2.23. *El conjunto $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ de números irracionales es denso en $\mathbb{R}$.*

Prueba. Sea $I = (a,b)$, con $a < b$. Buscamos $i \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap (a,b)$. Por el Teorema 2.22, existe $r \in \mathbb{Q} \cap (a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$. Como $\sqrt{2}$ es irracional, $r\sqrt{2}$ también lo es, así que $i := r\sqrt{2} \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap (a,b)$. Por lo tanto, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. $\square$

Definición 2.24. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Se dice que es A *denso* en B si todo intervalo abierto que intersecta a B también intersecta a A.

Teorema 2.25. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. A es denso en B si y sólo si $\overline{A} \supset B$.*

Prueba. Supongamos que A es denso en B. Probaremos que $\overline{A} \supset B$. Sea $x \in B$. Si $x \in A$, entonces $x \in A \cup A' = \overline{A}$ y ya acabamos. Supongamos que $x \notin A$. Dado $\epsilon > 0$, se tiene que $B \cap (x-\epsilon, x+\epsilon) \neq \emptyset$. Luego, como A es denso en B, $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Dado que $x \notin (x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A \neq \emptyset$, x es un punto de acumulación de A, esto es, $x \in A'$. Por lo tanto $x \in A \cup A' = \overline{A}$. Así, $\overline{A} \supset B$.

Supongamos ahora que $\overline{A} \supset B$. Probaremos que A es denso en B. Sea I un intervalo abierto tal que $B \cap I \neq \emptyset$. Debemos probar que $A \cap I \neq \emptyset$. Como $\overline{A} \supset B$, se tiene que $\overline{A} \cap I \neq \emptyset$. Sea $x \in \overline{A} \cap I$. Si $x \in A$, entonces $x \in A \cap I$, y ya acabamos. Supongamos que $x \notin A$. Entonces $x \in A'$. Además, como I es abierto, $x \in I^\circ$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset I$. Como $x \in A'$, $A \cap (x-\epsilon, x+\epsilon) \neq \emptyset$. Luego, $A \cap I \neq \emptyset$, y por lo tanto, A es denso en B. $\square$

Definición 2.26. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es *denso en ninguna parte* en $\mathbb{R}$ si todo intervalo abierto I contiene un subintervalo abierto J tal que $A \cap J = \emptyset$.

Definición 2.27. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. A es *denso en ninguna parte* en B si todo intervalo abierto I que intersecta a B contiene un subintervalo abierto J que no intersecta a A.

Observación 2.28. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$ si y sólo si para cualquier intervalo abierto I se tiene que A no es denso en I.*

Prueba. Supongamos primero que A es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Sea I un intervalo abierto. Existe un subintervalo abierto $J \subset I$ tal que $A \cap J = \emptyset$. Así, J es un intervalo que intersecta a I pero que no intersecta a A. Por tanto, A no es denso en I.

Recíprocamente, sea I un intervalo abierto y supongamos que A no es denso en I. Entonces existe un intervalo abierto L tal que $I \cap L \neq \emptyset$ y $A \cap L = \emptyset$. Sea $J = I \cap L$. Entonces J es abierto, $J \subset I$ y $A \cap J = \emptyset$. Por tanto, A es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. □

Teorema 2.29. *La unión de cualquier colección finita de conjuntos densos en ninguna parte en $\mathbb{R}$ es también un conjunto denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$.*

Prueba. Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ una colección finita de conjuntos densos en ninguna parte en $\mathbb{R}$, y sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Buscamos un intervalo abierto $J \subset I$ tal que $(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \cap J = \emptyset$. Como A_1 es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$, existe un intervalo abierto $I_1 \subset I$ tal que $A_1 \cap I_1 = \emptyset$. Como A_2 también es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$, existe un intervalo abierto $I_2 \subset I_1$ tal que $A_2 \cap I_2 = \emptyset$. Procediendo de esta manera se obtienen intervalos abiertos

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n$$

tales que para $k = 1, ..., n$, $A_k \cap I_k = \emptyset$. Como $I_n \subset I_k$ para $k = 1, ..., n$, se tiene que $A_k \cap I_n \subset A_k \cap I_k = \emptyset$, por lo que $A_k \cap I_n = \emptyset$ para $k = 1, ..., n$. Luego,

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \cap I_n = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap I_n) = \bigcup_{k=1}^{n} \emptyset = \emptyset,$$

así que $J = I_n$ es el invervalo que buscábamos. □

Teorema 2.30. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R} \backslash A$. Entonces A es cerrado y denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$ si y sólo si B es abierto y denso en $\mathbb{R}$.*

Prueba. Supongamos que A es cerrado y denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Probaremos que B es abierto y denso en $\mathbb{R}$. Por el Teorema 2.16, B es abierto. Sea I un intervalo abierto. Como A es denso en ninguna parte, existe un subintervalo abierto $J \subset I$ tal que $A \cap J = \emptyset$. Esto significa que $J \subset \mathbb{R} \backslash A$, es decir $J \subset B$. Luego, $B \cap J \neq \emptyset$, y como $J \subset I$, se tiene que $B \cap I \neq \emptyset$. Por lo tanto, B es denso en $\mathbb{R}$.

Inversamente, supongamos que B es abierto y denso en $\mathbb{R}$. Probaremos que A es cerrado y denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. De nuevo por el Teorema 2.16, se tiene que A es cerrado. Sea I un intervalo abierto. Como B es denso en $\mathbb{R}$, $B \cap I \neq \emptyset$. Sea $J = B \cap I$. J es abierto, pues B e I lo son. Además, $J \subset B = \mathbb{R} \backslash A$, así que $A \cap J = \emptyset$. Por lo tanto, A es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. □

Teorema 2.31. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. A denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$ si y sólo si $\overline{A}$ no contiene intervalos. Esto es, $(\overline{A})^\circ = \emptyset$.*

Prueba. Supongamos que A es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Si existiera un intervalo $I \subset \overline{A}$, esto contradiría el hecho de que A es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $\overline{A}$ no contiene intervalos.

Supongamos ahora que $\overline{A}$ no contiene intervalos y que A no es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Entonces existe un intervalo abierto I con $A \cap I \neq \emptyset$ tal que para todo subintervalo abierto $J \subset I$ se tiene que $A \cap J \neq \emptyset$. Se sigue que $A \cap I$ es denso en I. En efecto, si K es cualquier intervalo abierto tal que $I \cap K \neq \emptyset$, entonces, como $I \cap K \subset I$, se tiene que $A \cap I \cap K \neq \emptyset$, así que $A \cap I$ es denso en I. Luego, por el Teorema 2.25,

$$\overline{A} \supset \overline{A \cap I} \supset I.$$

Así, $\overline{A}$ contiene al intervalo I, lo que contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, A es denso en ninguna parte. □

Lema 2.32. *Sea $x \in \mathbb{R}$. El conjunto $\{x\}$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$.*

Prueba. El conjunto $\overline{\{x\}} = \{x\}$ tiene un solo elemento, por lo que no puede contener un intervalo, así que el Teorema 2.31 nos dice que $\{x\}$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. □

Definición 2.33. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.

(i) A es de *primera categoría* si puede ser expresado como la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte en $\mathbb{R}$.

(ii) A es de *segunda categoría* si no es de primera categoría.

(iii) A es *residual* en $\mathbb{R}$ si su complemento $\mathbb{R} \backslash A$ es de primera categoría.

Teorema 2.34. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ numerable. Entonces A es de primera categoría.*

Prueba. Como A es numerable, podemos enlistar sus elementos de la siguiente forma:

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$

Por el Lema 2.32, $\{x_n\}$ es un conjunto denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, A puede ser expresado como la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte en $\mathbb{R}$:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}.$$

Por lo tanto, A es de primera categoría. $\square$

Teorema 2.35. *La unión de cualquier colección numerable de conjuntos de primera categoría es también un conjunto de primera categoría.*

Prueba. Sea $A_1, A_2, A_3, \dots$ una colección numerable de conjuntos de primera categoría. Como A_1 es de primera categoría, puede ser expresado como $A_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{1k}$, donde A_{1k} es un conjunto denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. De la misma manera, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto A_n puede expresarse como $A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk}$, donde A_{nk} es un conjunto denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Luego, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk} = \bigcup_{n,k=1}^{\infty} A_{nk}$, donde $\bigcup_{n,k=1}^{\infty} A_{n,k}$ es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es de primera categoría. $\square$

Teorema 2.36. *La intersección de cualquier colección numerable de conjuntos residuales es también un conjunto residual.*

Prueba. Sea $A_1, A_2, A_3, \dots$ una colección numerable de conjuntos residuales. Entonces $\mathbb{R}\backslash A_1, \mathbb{R}\backslash A_2, \mathbb{R}\backslash A_3, \dots$ es una colección numerable de conjuntos de primera categoría, y por el Teorema 2.35, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}\backslash A_n$ es también de primera categoría. Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}\backslash A_n = \mathbb{R}\backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto residual. $\square$

Definición 2.37. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Una función biyectiva $f : A \to B$ se dice ser un *homeomorfismo* si f y f^{-1} son continuas. Si tal función existe, decimos que A y B son *homeomorfos.*

Lema 2.38. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo. Entonces A es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$ si y sólo si $f(A)$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$.*

Prueba. Notemos primero que como f es un homeomorfismo, $x \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de A si y sólo si $f(x)$ es un punto de acumulacón de $f(A)$. Luego,

$$\overline{f(A)} = f(\overline{A}).$$

Supongamos que A es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$ y que $f(A)$ no lo es. Entonces, por el Teorema 2.31, existe un intervalo abierto I tal que

$$I \subset \overline{f(A)} = f(\overline{A}).$$

Aplicando f^{-1} obtenemos

$$f^{-1}(I) \subset \overline{A}.$$

Como f es continua, $f^{-1}(I)$ es abierto. Luego, A es denso en el intervalo abierto $f^{-1}(I)$, lo que contradice el hecho de que A es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Por tanto, $f(A)$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$.

Inversamente, supongamos que $f(A)$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$ y que A no lo es. Entonces, por el Teorema 2.31, existe un intervalo abierto I tal que

$$I \subset \overline{A}.$$

Aplicando f obtenemos

$$f(I) \subset f(\overline{A}) = \overline{f(A)}.$$

Como f^{-1} es continua, $f(I)$ es abierto. Luego, $f(A)$ es denso en el intervalo abierto $f(I)$, lo que contradice el hecho de que $f(A)$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Por tanto, A es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. $\square$

Lema 2.39. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo. Entonces A es de primera categoría si y sólo si $f(A)$ es de primera categoría.*

Prueba. Supongamos primero que A es de primera categoría. Entonces existe una colección numerable $A_1, A_2, A_3, \ldots$ de conjuntos densos en ninguna parte en $\mathbb{R}$ tal que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Así, tenemos que

$$f(A) = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n).$$

Por el Lema 2.38, $f(A_n)$ es denso en ninguna parte para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, hemos expresado $f(A)$ como la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $f(A)$ es de primera categoría.

Inversamente, supongamos que $f(A)$ es de primera categoría. Entonces existe una colección numerable $B_1, B_2, B_3, \ldots$ de conjuntos densos en ninguna parte en $\mathbb{R}$ tal que

$$f(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Así, tenemos que

$$A = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n).$$

Por el Lema 2.38, $f^{-1}(B_n)$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, hemos expresado A como la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Por lo tanto, A es de primera categoría. $\square$

Ahora presentaremos cinco versiones del Teorema de Categoría de Baire y la prueba de sus equivalencias. Primero probaremos una de estas versiones, la cual se enuncia como sigue:

Teorema 2.40 (Teorema de Categoría de Baire). *Todo conjunto residual es denso en $\mathbb{R}$.*

Prueba. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto residual. Entonces $\mathbb{R} \backslash A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde A_n es un conjunto denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\mathbb{R} \backslash (\mathbb{R} \backslash A) = \mathbb{R} \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, es decir,

$$A = \mathbb{R} \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Sea I un intervalo cerrado. Como A_1 es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$, existe un intervalo cerrado $I_1 \subset I$ tal que $I_1 \cap A_1 = \emptyset$. Por el Teorema 2.29, la unión $A_1 \cup A_2$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$, así que existe un intervalo cerrado $I_2 \subset I_1$ tal que $I_2 \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$. De la misma manera, para cada $n \geq 2$, existe un intervalo cerrado $I_n \subset I_{n-1}$ tal que

$$I_n \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \emptyset$$

con

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n.$$

Se tiene entonces que

$$\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\Big) \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \emptyset.$$

Pero por el Teorema 2.19, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$, pues es la intersección de una sucesión de intervalos cerrados anidados. Como $(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n) \subset I$, se tiene que

$$\emptyset \neq \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\Big) \cap \Big(\mathbb{R} \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \subset I \cap \Big(\mathbb{R} \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big),$$

de aquí que,

$$I \cap A \neq \emptyset$$

Por lo tanto, A debe contener un punto del intervalo J, y entonces, un punto de cualquier intervalo, así que A es denso en $\mathbb{R}$. □

A continuación presentamos cinco versiones del Teorema de Categoría de Baire y probaremos su equivalencia. Nótese que la versión ya presentada también se incluye, como la versión (1).

Teorema 2.41. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *Todo conjunto residual es denso en* $\mathbb{R}$.

(ii) *Todo intervalo* $[a, b]$ *es un conjunto de segunda categoría.*

(iii) $\mathbb{R}$ *es de segunda categoría.*

(iv) *La unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío tiene interior vacío.*

(v) *La intersección numerable de conjuntos abiertos y densos en* $\mathbb{R}$ *es un conjunto denso en* $\mathbb{R}$.

Prueba. **(i) $\Rightarrow$ (ii)** Supongamos que existe un intervalo $I = [a, b]$ de primera categoría. Entonces $\mathbb{R} \backslash I$ es residual, así que por hipótesis es denso en $\mathbb{R}$.

Luego, $(\mathbb{R}\backslash I) \cap I \neq \emptyset$ (contradicción). Por lo tanto todo intervalo es de segunda categoría.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supongamos que $\mathbb{R}$ es de primera categoría. Entonces podemos escribir

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

donde cada A_n es denso en ninguna parte. Luego, cualquier intervalo $I = [a, b]$ puede ser expresado como

$$I = \mathbb{R} \cap I = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) \cap I = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap I).$$

Cada uno de los conjuntos $A_n \cap I$ es denso en ninguna parte, por lo que hemos escrito I como la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte, concluyendo entonces que I es de primera categoría, y contradiciendo así nuestra hipótesis. Por lo tanto $\mathbb{R}$ es de segunda categoría.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que existe un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ el cual es residual pero no denso en $\mathbb{R}$. Entonces existe un intervalo $I = [a, b]$ tal que $A \cap I = \emptyset$. Como A es residual, $\mathbb{R}\backslash A$ es de primera categoría, así que podemos expresar $\mathbb{R}\backslash A$ como

$$\mathbb{R}\backslash A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

donde cada B_n es denso en ninguna parte. Como $I \subset \mathbb{R}\backslash A$, podemos escribir

$$I = (\mathbb{R}\backslash A) \cap I = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Big) \cap I = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap I).$$

Cada uno de los conjuntos $B_n \cap I$ es denso en ninguna parte, por lo que I es de primera categoría. Ahora probremos que si un intervalo es de primera categoría, entonces todo $\mathbb{R}$ es de primera categoría.

Primero probaremos que si $I = [a, b]$ es de primera categoría, entonces cualquier intervalo $[c, d]$ es de primera categoría. Sea $\Phi_{a,b} : [a, b] \to [0, 1]$ definida por

$$\Phi_{a,b}(x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

$\Phi_{a,b}$ es una función biyectiva y continua con inversa continua $\Phi_{a,b}^{-1} : [0,1] \to [a,b]$ definida por

$$\Phi_{a,b}^{-1}(x) = x(b-a) + a.$$

Esto quiere decir que $\Phi_{a,b}$ es un homeomorfismo.

Dado cualquier intervalo $[c,d]$, la composición $\Phi_{c,d}^{-1} \circ \Phi_{a,b}$ es un homeomorfismo de $[a,b]$ en $[c,d]$. Como $[a,b]$ es de primera categoría, el Lema 2.39 implica que $[c,d]$ también es de primera categoría. Así, cualquier intervalo $[c,d]$ es de primera categoría.

Finalmente, como $\mathbb{R}$ puede ser expresado como

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n,n],$$

y todo intervalo $[-n,n]$ es de primera categoría, entonces, por el Teorema 2.35, $\mathbb{R}$ es de primera categoría. Pero esto contradice (iii). Por lo tanto, todo conjunto residual es denso en $\mathbb{R}$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una colección numerable de conjuntos abiertos y densos en $\mathbb{R}$, y sea

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = \mathbb{R} \backslash A_n$, y sea $B = \mathbb{R} \backslash A$. Por las leyes de De Morgan se tiene que

$$B = \mathbb{R} \backslash A = \mathbb{R} \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R} \backslash A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Como los A_n's son conjuntos abiertos y densos en $\mathbb{R}$, el Teorema 2.30 nos dice que los B_n's son conjuntos cerrados y densos en ninguna parte, y por el Teorema 2.31, tienen interior vacío. Luego, por (iv), B tiene interior vacío. Supongamos que A no es denso en $\mathbb{R}$. Entonces existe un intervalo I tal que $A \cap I = \emptyset$. Luego, $I \subset B$, lo que contradice el hecho de que B tiene interior vacío. Por lo tanto, A es denso en $\mathbb{R}$.

(v) $\Rightarrow$ (iv) Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una colección numerable de conjuntos cerrados con interior vacío, y sea

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = \mathbb{R}\backslash A_n$, y sea $B = \mathbb{R}\backslash A$. por las leyes de De Morgan se tiene que

$$B = \mathbb{R}\backslash A = \mathbb{R}\backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}\backslash A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Como los A_n's son conjuntos cerrados y densos en ninguna parte, entonces tienen interior vacío por el Teorema 2.31, y el Teorema 2.30 nos dice que los B_n's son conjuntos abiertos y densos en $\mathbb{R}$. Luego, por (v), B es denso en $\mathbb{R}$. Supongamos que A no tiene interior vacío. Entonces existe un intervalo $I \subset A$. Luego, $B \cap I = \emptyset$, lo que contradice el hecho de que B es denso en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, A tiene interior vacío.

(i) $\Rightarrow$ (v) Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una colección numerable de conjuntos abiertos y densos en $\mathbb{R}$, y sea

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Por el Teorema 2.30, los conjuntos $\mathbb{R}\backslash A_n$ son cerrados y densos en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Se tiene además que

$$\mathbb{R}\backslash A = \mathbb{R}\backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}\backslash A_n$$

así que $\mathbb{R}\backslash A$ es de primera categoría, y entonces A es un conjunto residual. De (i) se sigue que A es denso en $\mathbb{R}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto residual. Entonces $B = \mathbb{R}\backslash A$ es de primera categoría. Luego, existe una colección numerable $B_1, B_2, B_3, \ldots$ de conjuntos densos en ninguna parte tal que

$$B = \mathbb{R}\backslash A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Por el Teorema 2.31 sabemos que $(\overline{B_n})^\circ = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, por (iv), el conjunto

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n$$

tiene interior vacío. Como $B \subset H$, B también tiene interior vacío. Luego, si I es un intervalo, se tiene que $I \not\subseteq B$, por lo que $A \cap I \neq \emptyset$. Por lo tanto A es denso en $\mathbb{R}$. $\square$

Corolario 2.42. *Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una colección numerable de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Supongamos que existe un intervalo I tal que $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y un subintervalo $J \subset I$ tal que A_{n_0} es denso en J.*

Prueba. Tenemos que

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap I).$$

Por el Teorema de Categoría de Baire (Teorema 2.41 (ii)) I es de segunda categoría, así que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_{n_0} \cap I$ no es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Así, por la Observación 2.28, $A_{n_0} \cap I$ es denso en algún intervalo $J \subset I$. Así, A_{n_0} también es denso en J. $\square$

Definición 2.43. Un subconjunto G de $\mathbb{R}$ es de *tipo* $\mathcal{G}_\delta$ (o un *conjunto* $\mathcal{G}_\delta$) si puede ser expresado como la intersección numerable de conjuntos abiertos; esto es, si existen conjuntos abiertos $G_1, G_2, G_3, \ldots$ tales que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

Teorema 2.44. *Todo conjunto abierto y todo conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ es de tipo $\mathcal{G}_\delta$.*

Prueba. Sea G un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Es claro que G es de tipo $\mathcal{G}_\delta$. Mostraremos que G puede ser expresado como la unión numerable de conjuntos cerrados. Expresemos G en la forma

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

donde los intervalos (a_n, b_n) son disjuntos por pares. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existen sucesiones $\{c_{n_k}\}$ y $\{d_{n_k}\}$ tales que la sucesión $\{c_{n_k}\}$ decrece a a_n, la sucesión $\{d_{n_k}\}$ crece a b_n y $c_{n_k} < d_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego

$$(a_n, b_n) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [c_{n_k}, d_{n_k}].$$

Hemos expresado cada intervalo componente de G como la unión numerable de conjuntos cerrados. Se sigue que

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} [c_{n_k}, d_{n_k}] = \bigcup_{k,n=1}^{\infty} [c_{n_k}, d_{n_k}],$$

esto es, G es también la unión numerable de conjuntos cerrados. Ahora tomemos los complementos. Esto muestra que $\mathbb{R} \backslash G$ puede ser expresado como la untersección numerable de conjuntos abiertos (usando las leyes de De Morgan). Como todo conjunto cerrado F puede ser escrito como

$$F = \mathbb{R} \backslash G$$

para algún conjunto abierto G, hemos probado que cualquier conjunto cerrado es de tipo $\mathcal{G}_\delta$. □

Teorema 2.45. *Sea $G \subset \mathbb{R}$ de tipo $\mathcal{G}_\delta$ y denso en $\mathbb{R}$. Entonces G es residual.*

Prueba. Escribamos

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_n$$

donde cada conjunto G_n es abierto. Como G es denso en $\mathbb{R}$ por hipótesis y $G \subset G_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, cada conjunto G_n es también denso en $\mathbb{R}$. Entonces, por el Teorema 2.30, $\mathbb{R} \backslash G_n$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que cada G_n es residual. Así, por el Teorema 2.36, G es residual. □

Observación 2.46. El conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales no es de tipo $\mathcal{G}_\delta$, ya que si lo fuera, entonces, como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, el Teorema 2.45 implicaría que $\mathbb{Q}$ es residual, pero como $\mathbb{Q}$ es numerable, $\mathbb{Q}$ es de primera categoría (Teorema 2.34).

Definición 2.47. Un subconjunto F de $\mathbb{R}$ es de *tipo $\mathcal{F}_\sigma$* (o un *conjunto $\mathcal{F}_\sigma$*) si puede ser expresado como la unión numerable de conjutos cerrados; esto es, si existen conjuntos cerrados $F_1, F_2, F_3, ...$ tales que $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Teorema 2.48. *Un conjunto es de tipo $\mathcal{G}_\delta$ si y sólo si su complemento es de tipo $\mathcal{F}_\sigma$.*

Prueba. Sea $G \subset \mathbb{R}$ de tipo $\mathcal{G}_\delta$. Escribamos

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

donde cada conjunto G_n es abierto. Entonces

$$\mathbb{R}\backslash G = \mathbb{R}\backslash \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R}\backslash G_n)$$

donde cada conjunto $\mathbb{R}\backslash G_n$ es cerrado. Por lo tanto $\mathbb{R}\backslash G$ es de tipo $\mathcal{F}_\sigma$. Inversamente, sea $g \subset \mathbb{R}$ tal que su complemento $\mathbb{R}\backslash g$ es de tipo $\mathcal{F}_\sigma$. Escribamos

$$\mathbb{R}\backslash G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

donde cada conjunto F_n es cerrado. Entonces

$$G = \mathbb{R}\backslash(\mathbb{R}\backslash G) = \mathbb{R}\backslash \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R}\backslash F_n)$$

donde cada conjunto $\mathbb{R}\backslash F_n$ es abierto. Por lo tanto G es de tipo $\mathcal{G}_\delta$. □

Teorema 2.49. *Todo conjunto abierto y todo conjunto cerrado en* $\mathbb{R}$ *es tanto de tipo* $\mathcal{G}_\delta$ *como de tipo* $\mathcal{F}_\sigma$.

Prueba. En la prueba del Teorema 2.44 se mostró explícitamente cómo expresar cualquier conjunto abierto como uno de tipo $\mathcal{F}_\sigma$. Así, los conjuntos abiertos son tanto de tipo $\mathcal{G}_\delta$ como de tipo $\mathcal{F}_\sigma$. En dicha prueba también se mostró que todo conjunto cerrado es de tipo $\mathcal{G}_\delta$. Además, es evidente que todo conjunto cerrado es también de tipo $\mathcal{F}_\sigma$. □

3 Conjunto de puntos de discontinuidad de una función

Como su nombre lo dice, este capítulo trata sobre el conjunto de puntos de discontinuidad de una función real. Comenzaremos haciendo en la sección 3.1 una clasificiación de los tipos de discontinuidad que se pueden presentar en un punto del dominio de una función, obteniendo así una partición del conjunto de puntos de discontinuidad. En la sección 3.2, definiremos lo que es la oscilación de una función y veremos su relación con la continuidad de una función en un punto. En la sección 3.3, combinaremos lo visto en las dos secciones anteriores para estudiar la numerabilidad y no numerabilidad de los subconjuntos del conjunto de discontinuidad de una función que forman una partición de este último, los cuales se obtuvieron a través de la clasificación hecha en la primera sección. Finalmente, en la sección 3.4, se verá un teorema que dice que el conjunto de puntos de continuidad de una función es de tipo $\mathcal{G}_\delta$ y el conjunto de puntos de discontinuidad es de tipo $\mathcal{F}_\sigma$, y que si G es un conjunto de tipo $\mathcal{G}_\delta$, entonces existe una función cuyo conjunto de puntos de continuidad es G.

Comencemos recordando que una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en un punto aislado o un punto de acumulación de A, $x_0 \in A$, si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

o equivalentemente, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

para todo $x \in A$ tal que $|x - x_0| < \delta$.

Basándonos en lo anterior, que una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sea *discontinua* en $x_0 \in A$ significa que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ no existe (esto incluye las posibilidades $+\infty$ y $-\infty$.) o bien, que este límite existe pero

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Notemos que f no puede ser discontinua en un punto aislado de A.

En lo sucesivo, denotaremos por C_f al conjunto de puntos donde f es continua, y por D_f al conjunto de puntos de discontinuidad de f.

3.1 Clasificación de discontinuidades de una función

Podemos hacer una clasificación de las discontinuidades de una función definiendo los siguientes tipos de discontinuidad:

Definición 3.1. Sea f una función real definida en un intervalo I, y sea $x_0 \in I$. Diremos que:

(i) f tiene una discontinuidad *removible* en x_0 si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = L, \text{ pero } L \neq f(x_0).$$

(ii) f tiene una discontinuidad de *salto* en x_0 si existen $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = L_1, \lim_{x \to x_o^-} f(x) = L_2, \text{ pero } L_1 \neq L_2.$$

(iii) f tiene una discontinuidad *esencial* en x_0 si $\lim_{x \to x_o^+} f(x)$ no existe o si $\lim_{x \to x_o^-} f(x)$ no existe.

Para acortar la notación, en lo sucesivo denotaremos como $f(x_0^-)$ a $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ y como $f(x_0^+)$ a $\lim_{x \to x_0+} f(x)$. Además, consideraremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
R &= \{x_0 \in I : f \text{ tiene una discontinuidad } \textit{removible} \text{ en } x_0\}.\\
J &= \{x_0 \in I : f \text{ tiene una discontinuidad de } \textit{salto} \text{ en } x_0\}.\\
E &= \{x_0 \in I : f \text{ tiene una discontinuidad } \textit{esencial} \text{ en } x_0\}.\\
E_1 &= \{x_0 \in I : f(x_0^-) \text{ no existe y } f(x_0^+) \text{ no existe}\}.\\
E_2 &= \{x_0 \in I : f(x_0^-) \text{ existe y } f(x_0^+) \text{ no existe}\}.\\
E_3 &= \{x_0 \in I : f(x_0^-) \text{ no existe y } f(x_0^+) \text{ existe}\}.
\end{aligned}$$

Definición 3.2. Si $x_0 \in E_1$ se dice que x_0 es una *discontinuidad esencial de tipo 1* y si $x_0 \in E_2 \cup E_3$ se dice que x_0 es una *discontinuidad esencial de tipo 2.*

Observación 3.3. Notemos que:

(i) $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$.

(ii) $D_f = R \cup J \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$ y los conjuntos R, J, E_1, E_2 y E_3 son disjuntos por pares, es decir, estos conjuntos forman una partición de D_f.

3.2 Oscilación de una función

En esta sección definiremos lo que es la osclación de una función en un intervalo y en un punto. El resultado central que probaremos es que una función es continua en un punto si y sólo si la oscilación de la función en dicho punto es cero.

Definición 3.4. Sea f una función real definida en un intervalo I y sea $x_0 \in I$. Si x_0 es un punto interior de I, f es acotada en una vecindad de x_0, y $h > 0$ es lo suficientemente pequeño de modo que el intervalo $[x_0-h, x_0+h]$ esté contenido en dicha vecindad, llamaremos a

$$W_f[x_0-h, x_0+h] = \sup_{x\in[x_0-h,x_0+h]} f(x) - \inf_{x\in[x_0-h,x_0+h]} f(x).$$

la *oscilación de f en* $[x_0-h, x_0+h]$, y a $\omega_f(x_0) = \lim_{h\to 0^+} W_f[x_0-h, x_0+h]$, la *oscilación de f en* x_0. Si f es no acotada en toda vecindad de x_0, diremos que $\omega_f(x_0) = +\infty$.

Observación 3.5. Con respecto a la definición anterior:

(i) Se hacen las modificaciones necesarias si x_0 es un punto extremo de I.

(ii) Como (para f acotada cerca de x_0) $W_f[x_0-h, x_0+h]$ es una función no negativa, no decreciente de h, $\omega_f(x_0)$ está bien definida y es no negativa.

Teorema 3.6. Si f es acotada en $[a, b]$, entonces

$$W_f[a,b] = \sup_{x,y\in[a,b]} |f(x) - f(y)|.$$

Prueba. Para todo $x, y \in [a, b]$ se tiene que

$$\inf_{w\in[a,b]} f(w) - \sup_{z\in[a,b]} f(z) \le f(x) - f(y) \le \sup_{z\in[a,b]} f(z) - \inf_{w\in[a,b]} f(w),$$

es decir,

$$|f(x) - f(y)| \le \sup_{z\in[a,b]} f(z) - \inf_{w\in[a,b]} f(w) = W_f[a,b].$$

De aquí que

$$\sup_{x,y\in[a,b]} |f(x) - f(y)| \le W_f[a,b].$$

Además,

$$\begin{aligned}
\sup_{x,y\in[a,b]} |f(x)-f(y)| &\geq \sup_{x,y\in[a,b]} f(x)-f(y)\\
&= \sup_{x\in[a,b]} f(x) + \sup_{y\in[a,b]} -f(y)\\
&= \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{y\in[a,b]} f(y)\\
&= W_f[a,b].
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$W_f[a,b] = \sup_{x,y\in[a,b]} |f(x)-f(y)|.$$

□

Teorema 3.7. Sea f una función real definida en un intervalo I y sea $x_0 \in I$. Entonces f es continua en x_0 si y sólo si $\omega_f(x_0) = 0$.

Prueba. Supongamos que f está definida en una vecindad de x_0 y que f es continua en x_0. Sea $\epsilon > 0$. Como f es continua en x_0, existe $h_0 > 0$ tal que $|x - x_0| < h_0$ implica

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/2.$$

Sean $y, z \in (x_0 - h_0, x_0 + h_0)$. Se tiene que

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(z)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Como $y, z \in (x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ son arbitrarios,

$$\sup\{|f(y) - f(z)| : y, z \in (x_0 - h_0, x_0 + h_0)\} \leq \epsilon.$$

Si $0 < h < h_0$, entonces $[x_0 - h, x_0 + h] \subset (x_0 - h_0, x_0 + h_0)$, por lo que

$$\sup_{y,z\in[x_0-h,x_0+h]} |f(y) - f(z)| \leq \sup_{y,z\in(x_0-h_0,x_0+h_0)} |f(y) - f(z)| \leq \epsilon.$$

Luego, por el Teorema 3.6, se tiene que

$$W_f[x_0 - h, x_0 + h] \leq \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario,

$$W_f[x_0 - h, x_0 + h] = 0.$$

Así,
$$\omega_f(x_0) = \lim_{h\to 0^+} W_f[x_0 - h, x_0 + h] = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0.$$
Para probar la implicación inversa, supongamos ahora que $\omega_f(x_0) = 0$. Sea $\epsilon > 0$. Sea $h > 0$ tal que
$$W_f[x_0 - h, x_0 + h] < \epsilon.$$
Como
$$\{|f(x) - f(x_0)| : x \in (x_0 - h, x_0 + h)\} \subset \{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_0 - h, x_0 + h]\}$$
entonces, por el Teorema 3.6,
$$\sup\{|f(x) - f(x_0)| : x \in (x_0 - h, x_0 + h)\} \leq W_f[x_0 - h, x_0 + h] < \epsilon.$$
De aquí que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ siempre que $|x - x_0| < h$. Por lo tanto f es continua en x_0. □

Teorema 3.8. Sea f una función real definida en un intervalo cerrado I (puede ser todo $\mathbb{R}$). Sea $r > 0$. Entonces el conjunto
$$\{x : \omega_f(x) < r\}$$
es abierto, y el conjunto
$$\{x : \omega_f(x) \geq r\}$$
es cerrado.

Prueba. Sea $A = \{x : \omega_f(x) < r\}$ y sea $x_0 \in A$. Queremos encontrar un número real $h_0 > 0$ tal que $(x_0 - h_0, x_0 + h_0) \subset A$, esto es, tal que $\omega_f(x) < r$ para todo $x \in (x_0 - h_0, x_0 + h_0)$. Sea $\omega_f(x_0) = \alpha < r$ y sea $\beta \in (\alpha, r)$. Como
$$\omega_f(x_0) = \lim_{h\to 0^+} W_f[x_0 - h, x_0 + h] = \lim_{h\to 0^+} \sup_{u,v\in[x_0-h,x_0+h]} |f(u) - f(v)| < \beta,$$
existe $h_0 > 0$ tal que
$$\sup_{u,v\in[x_0-h_0,x_0+h_0]} |f(u) - f(v)| \leq \beta,$$
así que
$$|f(u) - f(v)| \leq \beta$$

para todo $u, v \in (x_0 - h_0, x_0 + h_0)$. Sea $x \in (x_0 - h_0, x_0 + h_0)$. Como $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ es abierto, existe $h_1 < h_0$ tal que

$$(x - h_1, x + h_1) \subset (x_0 - h_0, x_0 + h_0).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \omega_f(x) &\leq \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in (x - h_1, x + h_1)\} \\ &\leq \sup\{|f(u) - f(v)| : u, v \in (x_0 - h_0, x_0 + h_0)\} \leq \beta < r, \end{aligned}$$

así que $x \in A$. Esto prueba que A es abierto. Luego, el complemento de A en I, el conjunto

$$\{x : \omega_f(x) \geq r\},$$

es cerrado. □

3.3 Cardinalidad del conjunto de puntos de discontinuidad de una función

En esta sección veremos algunas propiedades de numerabilidad de los conjuntos de discontinuidades removibles, de salto y esenciales de tipo 1 y 2 de una función, a saber: los conjuntos de discontinuidades removibles, de salto y esenciales de tipo 2 son numerables, mientras que el conjunto de discontuidades esenciales de tipo 1 no necesariamente es numerable, dando el siguiente ejemplo para probar esta última afirmación:

Ejemplo 3.9. En el intervalo $[0, 1]$, consideremos la función indicadora de los números racionales $\chi_{\mathbb{Q}}$ introducida por Dirichlet y definida por

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Se tiene que $E = E_1 = [0, 1]$. Así, E_1 es no numerable.

Este ejemplo muestra que, en general, no podemos "contar" las discontinuidades esenciales de tipo 1 de una función real definida en un intervalo.

Lema 3.10. Sea f una función real definida en un intervalo I. Si para algún $x \in I$ se tiene que $\lim_{y \to x^+} f(y) \in \mathbb{R}$ y existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{y \to x^+} f(y) > r > f(x),$$

entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(y) > r > f(x)$$

siempre que $y \in (x, x + 1/m)$.

Prueba. Sea $L = \lim_{y \to x^+} f(y)$. Tenemos que $L - r > 0$. Por definición de límite lateral derecho, existe $\delta > 0$ tal que $|f(y) - L| < L - r$ siempre que $y \in (x, x + \delta)$. De aquí se tiene que $-L + r < f(y) - L$, es decir,

$$f(y) > r$$

siempre que $y \in (x, x + \delta)$. Por la Propiedad Arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/m < \delta$, así que

$$f(y) > r > f(x)$$

siempre que $y \in (x, x + 1/m)$. $\square$

Lema 3.11. Sea f una función real definida en un intervalo I. Si para algún $x \in I$ se tiene que $\lim_{y \to x^+} f(y)$ y $\lim_{y \to x^-} f(y)$ existen como números reales, y existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{y \to x^+} f(y) > r > \lim_{y \to x^-} f(y),$$

entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(z) > r > f(y)$$

siempre que $y \in (x - 1/m, x)$ y $z \in (x, x + 1/m)$.

Prueba. Sean $L_1 = \lim_{y \to x^+} f(y)$ y $L_2 = \lim_{y \to x^-} f(y)$. Se tiene que $L_1 - r > 0$ y $r - L_2 > 0$. Por definición de límite lateral derecho, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(z) - L_1| < L_1 - r$ siempre que $z \in (x, x + \delta_1)$. De aquí se tiene que $-L_1 + r < f(z) - L_1$, es decir,

$$f(z) > r$$

siempre que $z \in (x, x + \delta_1)$. De la misma manera, por definición de límite lateral izquierdo, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(y) - L_2| < r - L_2$ siempre que $y \in (x - \delta_2, x)$. De aquí se tiene que $f(y) - L_2 < r - L_2$, es decir,

$$r > f(y)$$

siempre que $y \in (x - \delta_2, x)$. Por la Propiedad Arquimediana, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $1/k_1 < \delta_1$ y $1/k_2 < \delta_2$. Sea $m = \max\{k_1, k_2\}$. Entonces $1/m < \delta_1$ y $1/m < \delta_2$, así que

$$f(z) > r > f(y)$$

siempre que $y \in (x - 1/m, x)$ y $z \in (x, x + 1/m)$. $\square$

Teorema 3.12. *Sea f una función real definida en un intervalo I. Entonces el conjunto R de discontinuidades removibles de f es numerable.*

Prueba. Notemos que $R = R_1 \cup R_2$, donde

$$R_1 = \{x \in I : \lim_{y \to x^+} f(y) = \lim_{y \to x^-} f(y) > f(x)\}$$

y

$$R_2 = \{x \in I : \lim_{y \to x^+} f(y) = \lim_{y \to x^-} f(y) < f(x)\}.$$

(tomando en cuenta que $\lim_{y \to x^+} f(y) \in \mathbb{R}$). Probaremos primero que R_1 es numerable construyendo un conjunto U que sea numerable y que contenga a R_1. Para cada $q \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}$, sea

$$R_{qn} = \{x \in I : f(y) > q > f(x) \text{ siempre que } y \in (x, x + 1/n)\}$$

Mostraremos que este conjunto es numerable. Para ello, supongamos que existen $u, v, w \in J_{qn}$ con $u < v < w$, $v - u < 1/n$ y $w - v < 1/n$. Como $u \in J_{qn}$ y $v \in (u, u + 1/n)$, se tiene que $f(v) > q$. Además, como $v \in J_{qn}$ y $w \in (v, v + 1/n)$, se tiene también que $f(v) < q$, lo cual es imposible, por lo que tales números u, v y w no pueden existir. En particular, Si $w - u \leq 1/n$, entonces $v - u < 1/n$ y $w - v < 1/n$, así que J_{qn} no puede contener tres puntos u, v, w tales que $u < v < w \leq u + 1/n$. En otras palabras, si $u, w \in R_{qn}$ y existe un punto $v \in R_{qn}$ entre u y w, entonces $|u - w| > 1/n$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea

$$I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right].$$

Cada intervalo I_k tiene longitud $1/n$, así que a lo más contiene dos puntos de R_{qn}, por lo que $I_k \cap R_{qn}$ es finito para toda $k \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$R_{qn} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (I_k \cap R_{qn})$$

es numerable. Sea

$$U = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{qn}$$

Se sigue que U es numerable. Para ver que $R_1 \subset U$, notemos que si $x \in R_1$, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\lim_{y\to x^+} f(y) > r > f(x),$$

y por el Lema 3.10, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(y) > r > f(x)$$

siempre que $y \in (x, x + 1/m)$. Así, $x \in R_{rm}$, y por tanto $x \in U$. Luego, el Teorema 2.3 nos asegura que R_1 es numerable. Similarmente, se prueba que R_2 también es numerable. Por lo tanto $R = R_1 \cup R_2$ es numerable. □

Teorema 3.13. *Sea f una función real definida en un intervalo I. Entonces el conjunto J de discontinuidades de salto de f es numerable.*

Prueba. Notemos que $J = J_1 \cup J_2$, donde

$$J_1 = \{x \in I : \lim_{y\to x^+} f(y) > \lim_{y\to x^-} f(y)\}$$

y

$$J_2 = \{x \in I : \lim_{x\to x^+} f(y) < \lim_{y\to x^-} f(y)\}.$$

(tomando en cuenta que $\lim_{y\to x^+} f(y)$ y $\lim_{y\to x^-} f(y)$ existen como números reales). Probaremos primero que J_1 es numerable construyendo un conjunto U que sea numerable y que contenga a J_1. Para cada $q \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}$, sea

$$J_{qn} = \{x \in I : f(z) > q > f(y) \text{ siempre que } y \in (x-1/n, x) \text{ y } z \in (x, x+1/n)\}$$

Mostraremos que este conjunto es numerable. Para ello, supongamos que existen $u, v, w \in J_{qn}$ con $u < v < w$, $v - u < 1/n$ y $w - v < 1/n$. Como $u \in J_{qn}$ y $v \in (u, u + 1/n)$, se tiene que $f(v) > q$. Además, como $w \in J_{qn}$ y $v \in (w - 1/n, w)$, se tiene también que $f(v) < q$, lo cual es imposible, por lo que tales números u, v y w no pueden existir. En particular, Si $w - u \leq 1/n$, entonces $v-u < 1/n$ y $w-v < 1/n$, así que J_{qn} no puede contener tres puntos u, v, w tales que $u < v < w \leq u + 1/n$. En otras palabras, si $u, w \in J_{qn}$ y existe un punto $v \in J_{qn}$ entre u y w, entonces $|u - w| > 1/n$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea

$$I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right].$$

Cada intervalo I_k tiene longitud $1/n$, así que a lo más contiene dos puntos de J_{qn}, por lo que $I_k \cap J_{qn}$ es finito para toda $k \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$J_{qn} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (I_k \cap J_{qn})$$

es numerable. Sea

$$U = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \bigcup_{n=1}^{\infty} J_{qn}$$

Se sigue que U es numerable. Para ver que $J_1 \subset U$, notemos que si $x \in J_1$, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\lim_{y \to x^+} f(y) > r > \lim_{y \to x^-} f(y),$$

y por el Lema 3.11, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(z) > r > f(y)$$

siempre que $y \in (x - 1/m, x)$ y $z \in (x, x + 1/m)$. Así, $x \in J_{rm}$, y por tanto $x \in U$. Luego, el Teorema 2.3 nos asegura que J_1 es numerable. Similarmente, se prueba que J_2 también es numerable. Por lo tanto $J = J_1 \cup J_2$ es numerable. $\square$

Observación 3.14. Los Teoremas 3.12 y 3.13 nos dicen que si f es una función real definida en un intervalo I, entonces $R \cup J$ es numerable.

Lema 3.15. *Sea f una función real monótona definida en un intervalo I. Si x_0 es un punto interior de I, entonces ambos límites laterales $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existen.*

Prueba. Supongamos que f es no decreciente (el caso en el que f es no creciente se sigue del hecho de que $-f$ es una función no decreciente). Sea $\{x_n\}$ una sucesión creciente de puntos en I tal que $x_n \to x_0$ (por ejemplo, la sucesión de puntos $x_0 - 1/n$ contenidos en I). Entonces la sucesión $\{f(x_n)\}$

es no decreciente y está acotada por arriba por $f(x_0)$. Luego, por el Principio de Convergencia Monótona, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_n) \to L$.
Para $x_n < x < x_0$,

$$f(x_n) \leq f(x) \leq L.$$

Sea $\epsilon > 0$. Como $f(x_n) \to L$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$L - f(x_n) < \epsilon$$

siempre que $n \geq N$. Para x tal que $x_N \leq x \leq x_0$ tenemos entonces

$$L - f(x) \leq L - f(x_N) < \epsilon.$$

Se sigue que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L,$$

así que f tiene un límite lateral izquierdo en x_0. Un argumento similar muestra que f también tiene un límite lateral derecho en x_0.

□

Lema 3.16. *Sea f una función real definida en un intervalo I. Si f es monótona en I, entonces $D_f = J$.*

Prueba. Por el Lema 3.15, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existen. Dado que f es monótona, claramente se tiene que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Así, la única posibilidad de que f tenga una discontinuidad en el punto x_0 es si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) - \lim_{x \to x_0^+} f(x) > 0,$$

de donde

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x),$$

por lo que dicha continuidad debe ser de salto. □

Teorema 3.17. El conjunto de discontinuidades de una función monótona es numerable.

Prueba. Del Lema 3.16 se tiene que $D_f = J$, así que por Teorema 3.13, D_f es numerable. $\square$

Teorema 3.18. *Sea f una función real definida en un intervalo I. Entonces $R \cup J \cup E_2$ es numerable.*

Prueba. Sea $A = R \cup J \cup E_2$. Entonces

$$A = \{x_0 \in I : f(x_0^-) \text{ existe y } f \text{ es discontinua en } x_0\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$A_n = \{x_0 \in A : \omega_f(x_0) > 1/n\}.$$

Si $x_0 \in A$, entonces (por el Teorema 3.7) $\omega_f(x_0) > 0$. Si $\omega_f(x_0)$ es finito, de acuerdo con la Propiedad Arquimediana, existe un número natural k tal que $k \cdot \omega_f(x_0) > 1$. Si $\omega_f(x_0) = +\infty$, esta misma desigualdad se cumple para cualquier número natural k. Entonces $x_0 \in A_k$ para algún k y, entonces, $x_0 \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Así, $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, y como claramente $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A$, se tiene que $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Si mostramos que cada A_n es numerable, entonces A será también numerable. Para ello, sea n fijo y sea $x_0 \in A_n$. Probaremos que x_0 es el extremo derecho de un intervalo abierto disjunto de A_n y usaremos este hecho para probar la numerabilidad de A_n. Como $x_0 \in A_n$, $f(x_0^-)$ existe y entonces hay un número positivo $\delta_n(x_0)$ tal que

$$|f(x) - f(x_0^-)| < 1/2n$$

siempre que $x_0 - \delta_n(x_0) < x < x_0$. Observemos que f es entonces necesariamente acotada en $(x_0 - \delta_n(x_0), x_0)$ y que si $x, y \in (x_0 - \delta_n(x_0), x_0)$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(x_0^-) + f(x_0^-) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f(x_0^-)| + |f(x_0^-) - f(y)| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

De aquí que si $a, b \in (x_0 - \delta_n(x_0), x_0)$ y $a < b$, entonces (por el Teorema 3.6)

$$W_f[a, b] \leq 1/n.$$

Así que si $z \in (x_0 - \delta_n(x_0), x_0)$ y h es suficientemente pequeño para que $[z - h, z + h] \subset (x_0 - \delta_n(x_0), x_0)$, entonces

$$W_f[z - h, z + h] \leq 1/n$$

y entonces

$$\omega_f(z) = \lim_{h \to 0+} W_f[z-h, z+h] \leq 1/n.$$

Haciendo $I_n(x_0) = (x_0 - \delta_n(x_0), x_0)$, se tiene entonces que

$$I_n(x_0) \cap A_n = \emptyset$$

y entonces cada $x_0 \in A_n$ es el extremo derecho de un intervalo disjunto de A_n. Finalmente, si $x_0 \in A_n$, sea $q_n(x_0)$ un número racional tal que $q_n(x_0) \in I_n(x_0)$ y definamos la función $F : A_n \to \mathbb{Q}$ por

$$F(x_0) = q_n(x_0).$$

Para ver que F es inyectiva, sean $x_0, z_0 \in A_n$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $x_0 < z_0$. Entonces

$$I_n(x_0) \cap I_n(z_0) = \emptyset.$$

Si no, se tendría $x_0 \in I_n(z_0)$ (ya que x_0 es el extremo derecho de $I_n(x_0)$) y entonces

$$I_n(z_0) \cap A_n \neq \emptyset,$$

lo que contradice la construcción de $I_n(z_0)$. Como $I_n(x_0) \cap I_n(z_0) = \emptyset$, $q_n(x_0) \neq q_n(z_0)$ y F es inyectiva. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, el Teorema 2.8 implica que A_n es numerable. $\square$

Corolario 3.19. *Sea f una función real definida en un intervalo I. Entonces E_3 es numerable.*

Prueba. Recordemos que $E_3 = \{x_0 \in I : f(x_0^+) \text{ existe y } f(x_0^-) \text{ no existe}\}$ y sea $\mathcal{F} = \{x : -x \in I\}$. En $\mathcal{F}$, sea $g(x) = f(-x)$. Entonces $E_3(f) = E_2(g)$. Aplicando el Teorema 3.18 a g en $\mathcal{F}$ y usando el Teorema 2.3 obtenemos que $E_2(g)$ es numerable y entonces también lo es $E_3(f)$. $\square$

Corolario 3.20. *Sea f una función real definida en un intervalo I. Entonces $R \cup J \cup E_2 \cup E_3$ es numerable.*

Prueba. El resultado se sigue directamente del Teorema 3.18 y el Corolario 3.19. $\square$

El Ejemplo 3.9 y el Corolario 3.20 nos dicen que sólo el conjunto E_1 de discontinuidades esenciales de tipo 1 no es necesariamente numerable.

3.4 Propiedades topológicas del conjunto de puntos de discontinuidad de una función

Teorema 3.21. *Sea f una función real definida en un intervalo cerrado I (puede ser todo $\mathbb{R}$). Entonces el conjunto C_f de puntos de continuidad de f es de tipo $\mathcal{G}_\delta$, y el conjunto D_f de puntos de discontinuidad de f es de tipo $\mathcal{F}_\sigma$. Inversamente, si G es un conjunto de tipo $\mathcal{G}_\delta$, entonces existe una función f real definida en $\mathbb{R}$ tal que $C_f = G$.*

Prueba. Para probar la primera parte, sea $f : I \to \mathbb{R}$. Por el Teorema 3.7, debemos mostrar que el conjunto

$$C_f = \{x \in I : \omega_f(x) = 0\}$$

es de tipo $\mathcal{G}_\delta$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$B_n = \{x \in I : \omega_f(x) \geq 1/n\}.$$

Por el Teorema 3.8, cada conjunto B_n es cerrado. Así que el conjunto

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

es de tipo $\mathcal{F}_\sigma$. Por el Teorema 3.7, $D_f = B$. Entonces, $C_f = I \backslash B$. Como el complemento de un $\mathcal{F}_\sigma$ es un $\mathcal{G}_\delta$, el conjunto C_f es un $\mathcal{G}_\delta$, y por la misma razón, D_f es un $\mathcal{F}_\sigma$. Inversamente, sea G un subconjunto de $\mathbb{R}$ de tipo $\mathcal{G}_\delta$. Entonces G puede ser expresado de la forma

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

con cada conjunto G_n abierto. Podemos suponer sin pérdida de generailidad que $G_1 = \mathbb{R}$ y que $G_i \supset G_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sean $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ dos sucesiones de números positivos, cada una convergente a cero, con

$$\alpha_n > \beta_n > \alpha_{n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in G \\ \alpha_n & \text{si} \quad x \in (G_n \backslash G_{n+1}) \cap \mathbb{Q} \\ \beta_n & \text{si} \quad x \in (G_n \backslash G_{n+1}) \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Mostraremos que f es continua en cada punto de G y discontinua en cada punto de $\mathbb{R}\backslash G$.
Sea $x_0 \in G$ y sea $\epsilon > 0$. Elegimos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_k < \epsilon$. Como

$$x_0 \in G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

vemos que $x_0 \in G_k$. El conjunto G_k es abierto, así que existe $\delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset G_k$. De la definición de f en G_k, vemos que

$$0 \leq f(x) \leq \alpha_k < \epsilon$$

si $|x - x_0| < \delta$, así que f es continua en x_0.
Ahora sea $x_0 \in \mathbb{R}\backslash G$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que x_0 pertenece al conjunto $G_n\backslash G_{n+1}$. Luego $f(x_0) = \alpha_n$ o $f(x_0) = \beta_n$. Supongamos que $f(x_0) = \alpha_n$. Si x_0 es un punto interior de $G_n\backslash G_{n+1}$, entonces x_0 es un punto límite de

$$\{x \in I : x \in (G_n\backslash G_{n+1}) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\} = \{x \in I : f(x) = \beta_n\}.$$

así que f es discontinua en x_0.
El argumento es similar si x_0 es un punto frontera de $G_n\backslash G_{n+1}$. De nuevo, supongamos que $f(x_0) = \alpha_n$. Arbitrariamente cerca de x_0 hay puntos del conjunto

$$\mathbb{R}\backslash(G_n\backslash G_{n+1}).$$

En estos puntos, f toma valores en el conjunto

$$S = \{0\} \cup \bigcup_{i \neq n} \alpha_i \cup \bigcup_{j \neq n} \beta_j.$$

El único punto de acumulación de este conjunto es cero así que S es cerrado. En particular, α_n no es un punto de acumulación de este conjunto y no pertenece a él. Sea ϵ la mitad de la distancia del punto α_n al conjunto cerrado S; esto es, sea

$$\epsilon = \frac{1}{2} d(\alpha_n, S) = \frac{1}{2} \min\{|\alpha_n - s| : s \in S\}.$$

Arbitrariamente cerca de x_0 hay puntos x tales que $f(x) \in S$. Para un tal punto,

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - \alpha_n| > \epsilon,$$

así que f es discontinua en x_0. $\square$

Observación 3.22. El Teorema 3.21 implica que no existe una función real que sea continua sólo en $\mathbb{Q}$, ya que por la Observación 2.46, $\mathbb{Q}$ no es $\mathcal{G}_\delta$.

4 Continuidad y límite de sucesiones de funciones

Este capítulo trata sobre funciones que son límite de una sucesión de funciones, y se analiza tanto la continuidad de la función límite como la continuidad de las funciones de la sucesión. Más precisamente, en la sección 4.1 daremos una condición necesaria y suficiente para que la función límite de una sucesión de funciones continuas sea continua a través del concepto de convergencia quasi-uniforme. En la sección 4.2, presentamos algunos resultados y propiedades de funciones que son límite puntual de funciones continuas, y veremos también una caracterización del conjunto de puntos de discontinuidad de esta clase de funciones, a las cuales llamaremos funciones Baire I.

4.1 Cuándo es continua una función límite

4.1.1 Convergencia puntual y uniforme

Comenzaremos definiendo lo que es la convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones y veremos algunos ejemplos para ilustrar estas dos definiciones, en los cuales analizaremos la continuidad de la función límite.

Definición 4.1. Se dice que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ *converge puntualmente* a f en un intervalo I si $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in I$, o más precisamente, si para cada $x \in I$ y cada $\epsilon > 0$ existe un entero positivo $N(\epsilon, x)$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para toda $n \geq N$.

Notemos que el entero positivo K dependerá tanto de x como de ϵ. Si podemos encontrar un entero K que sólo dependa de ϵ y no de x, decimos que la convergencia de $\{f_n\}$ a f es uniforme en I.

Definición 4.2. Se dice que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ *converge uniformemente* a f en un intervalo I si para cada $\epsilon > 0$ existe un entero positivo K tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para toda $x \in I$ y para toda $n \geq N$.

Observación 4.3. Si una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en un intervalo I, entonces $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en I.

El siguiente teorema será útil para probar que la convergencia de una sucesión de funciones es o no es uniforme.

Teorema 4.4. *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en un intervalo I si y sólo si* $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$.

Prueba. Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $s_n=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$. Supongamos primero que $\{f_n\}$ converge a f uniformemente. Dado $\epsilon>0$ existe un entero positivo N tal que

$$|f_n(x)-f(x)|<\epsilon/2$$

para toda $x\in I$ y para toda $n\geq N$. Luego,

$$|s_n|=s_n=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\leq\epsilon/2<\epsilon$$

para toda $n\geq N$. De aquí que $\lim_{n\to\infty}s_n=0$.
Inversamente, supongamos que $\lim_{n\to\infty}s_n=0$. Entonces, dado $\epsilon>0$, existe un entero positivo N tal que $|s_n|<\epsilon$ para toda $n\geq N$. Pero entonces

$$|f_n(x)-f(x)|\leq|s_n|<\epsilon$$

para toda $x\in I$ y para toda $n\geq N$. Por lo tanto $\{f_n\}$ converge a f uniformemente.

□

Consideremos las funciones definidas en el intervalo $[0,1]$ de los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4.5. $f_n(x)=(x-1/n)^2;\quad f(x)=x^2.$

Para cada $x\in[0,1]$ fija, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}f_n(x) &= \lim_{n\to\infty}(x-1/n)^2=\lim_{n\to\infty}(x-1/n)(x-1/n)\\ &= \lim_{n\to\infty}(x-1/n)\lim_{n\to\infty}(x-1/n)=x\cdot x=x^2,\end{aligned}$$

así que $f_n \to f$ puntualmente en $[0,1]$. Más aún, como

$$\begin{aligned}
0 \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |(x-1/n)^2 - x^2| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |x^2 - 2x/n + 1/k^2 - x^2| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |1/n^2 - 2x/n| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} (1/n^2 + 2x/n) \\
&= \lim_{n\to\infty} (1/n^2 + 2/n) = 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

se tiene entonces que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

así que el Teorema 4.4 implica que $f_n \to f$ uniformemente en $[0,1]$.

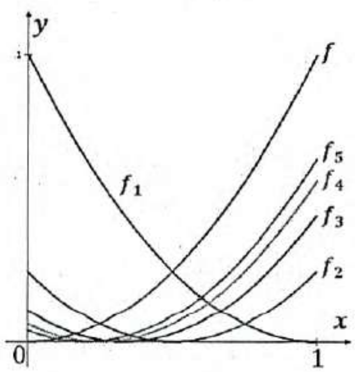

Figura 1: Ejemplo 4.5

Ejemplo 4.6. $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$; $\quad f(x) = 0$.

Para cada $x \in [0,1]$ fija, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{x/n+1} = \frac{0}{0+1} = 0,$$

así que $f_n \to f$ puntualmente en $[0,1]$. Además,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{n\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{1}{x+n} - 0 \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{x+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} 1/n = 0,
\end{aligned}$$

así que por el Teorema 4.4, $f_n \to f$ uniformemente en $[0,1]$.

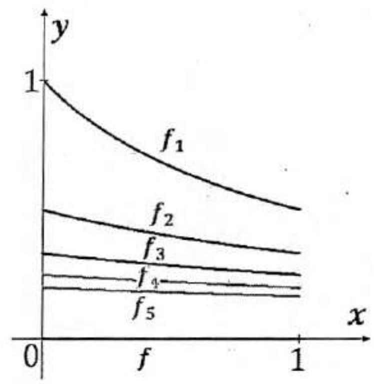

Figura 2: Ejemplo 4.6

Ejemplo 4.7. $f_n(x) = x - x^n$; $\quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Si $0 \le x < 1$, $x - x^n \to x$, y si $x = 1$, entonces $x - x^n \to 0$. Así, $f_k \to f$ puntualmente. Sin embargo, esta convergencia no es uniforme, ya que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1)} |x - x^n - x| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1)} x^n = \lim_{n\to\infty} 1^n \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0,
\end{aligned}$$

y por el Teorema 4.4, se sigue que la convergencia no es uniforme.
Este ejemplo muestra que el límite puntual de una sucesión de funciones continuas puede ser una función discontinua. En este caso, f es discontinua

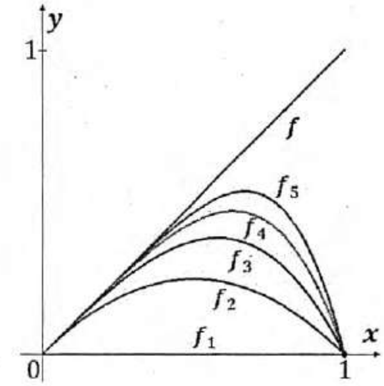

Figura 3: Ejemplo 4.7

en $x = 1$. Así, la convergencia puntual no es una condición suficiente para garantizar la continuidad de la función límite.

Ejemplo 4.8. $f_n(x) = x^n; \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$

Al igual que en el ejemplo anterior, se tiene que $f_n \to f$ puntualmente en $[0, 1]$, pero esta convergencia no es uniforme. Además la función límite f tampoco es continua en $[0, 1]$, ya que es discontinua en $x = 1$. Para ver que la convergencia es puntual, notemos que si $x = 1$, entonces $f_n(x) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Además, para cada $0 \leq x < 1$ fija, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

por lo que $f_n \to f$ puntualmente en $[0, 1]$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |x^n - f(x)| \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |1 - 0| \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0, \end{aligned}$$

el Teorema 4.4 implica que $f_n \to f$ uniformemente en $[0, 1]$.

Ejemplo 4.9. $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n; \quad f(x) = 0.$

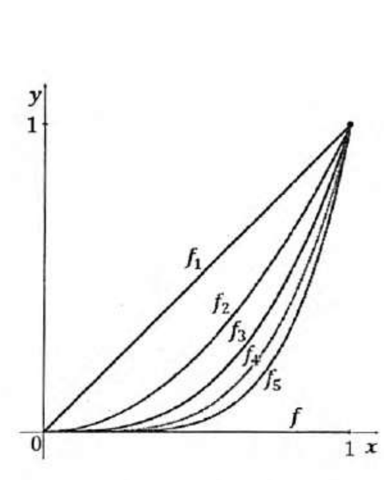

Figura 4: Ejemplo 4.8

En este ejemplo, $f_n \to f$ puntualmente en $[0,1]$. Para ver esto, notemos que si $x \in \{0,1\}$ es evidente que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Para cada $0 < x < 1$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(f_n(x)) = \ln(n^2 x(1-x^2)^n) = \ln n^2 + \ln x + n\ln(1-x^2).$$

En esta expresión, $\ln x$ es un número fijo y $\ln(1-x^2)$ es un número fijo negativo. Como n tiende a ∞ más rápido que $\ln n$, se tiene que $\lim_{n\to\infty}\ln(f_n(x)) = -\infty$, lo que es equivalente a decir que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Sin embargo, esta convergencia no es uniformemente. Para probar esto, notemos que

$$f_n'(x) = n^2(1-x^2)^n - 2n^3x^2(1-x^2)^{n-1} = n^2(1-x^2)^{n-1}(1-(1+2n)x^2)$$

Luego, haciendo $f_k'(x) = 0$, se tiene que

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+2n}}.$$

Así, el valor máximo de f_n en $[0,1]$ es

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+2n}}\right) = \frac{n^2}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^n.$$

Pero $\frac{n^2}{\sqrt{2n+1}} \to \infty$ y $(\frac{2n}{1+2n})^n \to 1/\sqrt{e}$, así que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |n^2x(1-x^2)^k - 0| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} n^2x(1-x^2)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^n = \infty,
\end{aligned}$$

El Teorema 4.4 nos dice entonces que la convergencia no es uniforme. Este ejemplo ilustra que la función límite puede ser continua incluso si la convergencia no es uniforme.

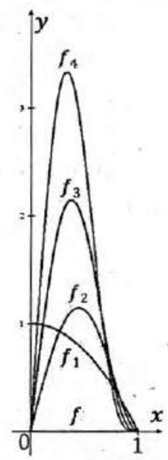

Figura 5: Ejemplo 4.9

El siguiente teorema, el cual se estudia en los cursos introductorios de análisis real, se incluye aquí para analizar una desigualdad clave utilizada en su prueba, la cual nos llevará a la definición de convergencia quasi-uniforme.

Teorema 4.10. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converge puntualmente a una función f en un intervalo I. Supongamos que cada f_n es continua en $x_0 \in I$. Si $f_n \to f$ uniformemente, entonces f es continua en x_0.*

Prueba. Sea $\epsilon > 0$. Como $f_n \to f$ uniformemente, existe un entero positivo N tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para toda $x \in I$ y para toda $n \geq N$. Sea $m \geq N$

un entero fijo. Entonces $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon/3$. Como cada f_n es continua en x_0, en particular f_m lo es, así que existe $\delta > 0$ tal que $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \epsilon/3$ siempre que $|x - x_0| < \delta$ y $x \in I$. Luego, para $x \in I$ con $|x - x_0| < \delta$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto f es continua en x_0. □

4.1.2 Convergencia quasi-uniforme

El Teorema 4.10 asegura que la convergencia uniforme es una condición suficiente para la continuidad de la función límite. Por otro lado, el Ejemplo 4.9 muestra que puede ocurrir que la función límite sea continua incluso si la convergencia no es uniforme. De aquí que la convergencia uniforme no es una condición necesaria para la continuidad de la función límite. Esto puede verse analizando la desigualdad clave

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)|.$$

El último término puede hacerse pequeño por la convergencia puntual en x_0. El término de en medio puede hacerse pequeño para x cerca de x_0 por la continuidad de f_m en x_0. El primer término también debe ser pequeño para toda x cerca de x_0 (aquí es donde se requiere algo más fuerte que la convergencia puntual). Sin embargo, no se necesita que $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ para toda $n \geq N$ y para toda $x \in I$. Sólo se neceita que $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ cuando $n = m$ y para toda $x \in I$ cerca de x_0. Esto lleva a la siguiente definición:

Definición 4.11. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo I, tal que $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función f definida en I. La sucesión $\{f_n\}$ *converge quasi-uniformemente* a f en el punto $x_0 \in I$ si para cada $\epsilon > 0$ y cada entero positivo N, existe $\delta > 0$ y un entero positivo $m \geq N$ tal que $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$ para toda $x \in I$ que satisface $|x - x_0| < \delta$.

Puede probarse que en el Ejemplo 4.9, la convergencia es quasi-uniforme en cada punto de $[0, 1]$.

Como veremos en el siguiente teorema, la convergencia quasi-uniforme es una condición necesaria y suficiente para garantizar la continuidad de la función límite.

Teorema 4.12. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converge puntualmente a una función f en un intervalo I. Supongamos que cada f_n es continua en $x_0 \in I$. Entonces $\{f_n\}$ converge quasi-uniformemete a f en x_0 si y sólo si f es continua en x_0.*

Prueba. Supongamos que $\{f_n\}$ converge quasi-uniformemente a f en x_0. Sea $\epsilon > 0$. Como $f_n(x_0) \to f(x_0)$ (pues $f_n \to f$ puntualmente en I) existe N tal que $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon/3$ para toda $n \geq N$. Como $\{f_n\}$ converge quasi-uniformemente a f en x_0, existe $\delta > 0$ y un entero positivo $m \geq N$ tal que $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon/3$ para toda $x \in I$ con $|x - x_0| < \delta$. Como f_m es continua en c, existe $0 < \delta_1 < \delta$ tal que $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \epsilon/3$ para toda $x \in I$ con $|x - x_0| < \delta_1$. Así, para $x \in I$ con $|x - x_0| < \delta_1$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función f es continua en x_0.

Inversamente, supongamos que f es continua en x_0. Sean $\epsilon > 0$ y N un entero positivo. Como $f_n(x_0) \to f(x_0)$, existe un entero $m \geq N$ tal que $|f_m(x_0) - f(x_0)| < \epsilon/3$. Como f_m es continua en c, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \epsilon/3$ siempre que $|x - x_0| < \delta_1$ y $x \in I$, y como f es continua en x_0, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/3$ siempre que $|x - x_0| < \delta_2$ y $x \in I$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, para toda $x \in I$ con $|x - x_0| < \delta$,

$$|f_m(x) - f_m(x_0)| < \epsilon/3 \qquad \text{y} \qquad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon/3.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f(x)| &\leq |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_0)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

para toda $x \in I$ que satisface $|x - x_0| < \delta$. Por tanto, la sucesión $\{f_n\}$ converge quasi-uniformemente a f en x_0. □

4.2 ¿Qué tan discontinua es una función límite?

4.2.1 Funciones Baire I

El resultado central de esta sección es mostrar que el límite puntual de una sucesión de funciones continuas es una función continua excepto en un conjunto de primera categoría

Definición 4.13. Se dice que una función f definida en un intervalo I es una *función Baire I* si existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas que converge puntualmente a f en I.

Los Ejemplos del 4.5 al 4.9 son ejemplos de funciones Baire I, ya que las f_n's son funciones continuas y convergen puntualmente a f en $[0, 1]$.

Observación 4.14. Toda función continua f es Baire I, ya que haciendo $f_n = f + 1/n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces cada f_n es continua, y se tiene además que para cada x en el dominio de f,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x) + 1/n) = f(x) + 0 = f(x).$$

Los Ejemplos 4.7 y 4.8 muestran que una función puede ser Baire I incluso si es discontinua en un punto.

Teorema 4.15. *Supongamos que f y g son funciones Baire I definidas en un intevalo I. Entonces*

(a) *$f + g$ es Baire I.*

(b) *fg es Baire I.*

(c) *cf es Baire I, para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Prueba. Como f y g son Baire I, existen sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ de funciones continuas definidas en I que convergen puntualmente a f y g, respectivamente. Luego, se sigue de las propiedades de sucesiones convergentes y de continuidad de funciones, que $\{f_n + g_n\}$, $\{f_n g_n\}$ y $\{cf_n\}$ son sucesiones de funciones continuas que convergen a $f + g$, fg y cf puntualmente en I, respectivamente. Esto nos dice $f + g$, fg y cf son Baire I. □

Definición 4.16. Sea f una función definida en un intervalo I, y sea $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset I$ finito, con $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. La *curva lineal por piezas* $\Phi(f, S)$ es la función definida en $[x_1, x_n]$ por

$$\Phi(f,S)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in S, \\ (f(x_{i+1}) - f(x_i))\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right) + f(x_i) & \text{si} \quad x \in (x_i, x_{i+1}), \end{cases}$$

donde $= 1, 2, \ldots, n-1$.

La gráfica de $\Phi(f, S)$ es la curva lineal por piezas que conecta a los puntos $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \ldots, n$. Claramente, $\Phi(f, S)$ es una función continua de $[x_1, x_n]$ en $\mathbb{R}$. En la Figura 5 se muestra un ejemplo de la gráfica de $\Phi(f, S)$ para f y S dados.

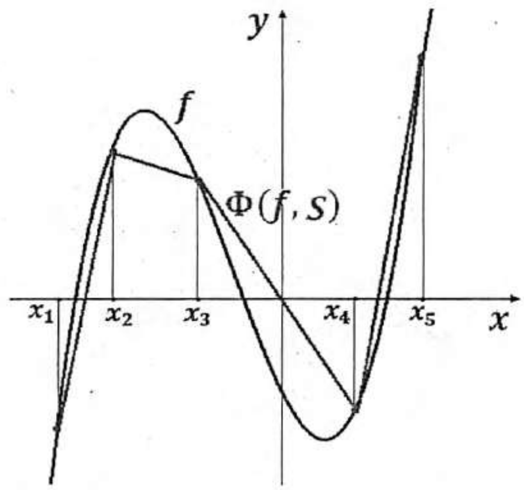

Figura 6: Curva lineal $\Phi(f, S)$.

Teorema 4.17. *Sea f una función definida en un intervalo $I = [a, b]$, y supongamos que el conjunto D_f de discontinuidades de f es finito. Entonces f es Baire I.*

Prueba. Podemos escribir $D_f = \{x_2, x_3, ..., x_{k-1}\}$, con $x_2 < x_3 < \cdots < x_{k-1}$. Sean $x_1 = a$ y $x_k = b$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$S_n = \{x_1, \ldots, x_k, x_1 + \delta/n, \ldots, x_{k-1} + \delta/n, x_2 - \delta/n, \ldots, x_k - \delta/n\},$$

donde δ se define como

$$\delta = \min\left\{\frac{x_{i+1} - x_i}{4} : i = 1, 2, \ldots, k-1\right\}.$$

Notemos que

$$x_i < x_i + \delta/n < x_{i+1} - \delta/n < x_{i+1}, \tag{2}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, k-1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea f_n la función definida en I por

$$f_n(x) = \begin{cases} \Phi(f, S_n)(x) & \text{si} \quad x \in I \cap (\cup_{i=1}^{k}[x_i - \delta/n, x_i + \delta/n]), \\ f(x) & \text{si} \quad x \in I \setminus (\cup_{i=1}^{k}[x_i - \delta/n, x_i + \delta/n]), \end{cases}$$

En la Figura 6 se muestran algunas gráficas de las funciones f_n's alrededor de algún x_i.

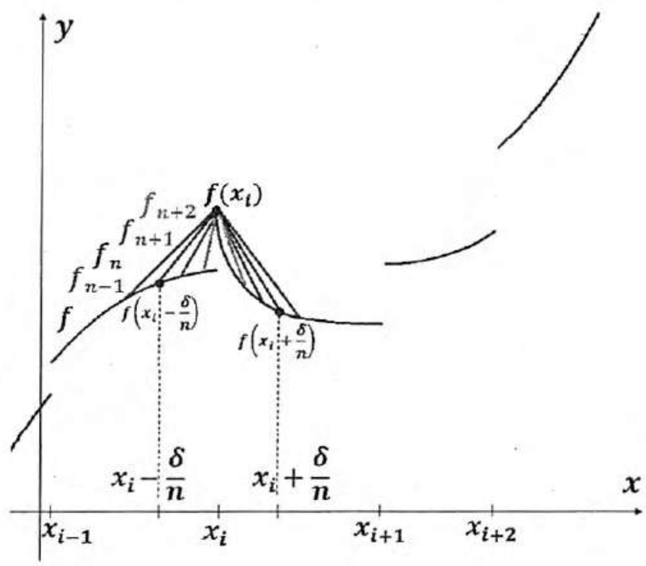

Figura 7: Gráficas de las funciones f_n's alrededor de x_i.

Es claro que f_n es una función continua para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que $\Phi(f, S_n)$ y f lo son.

Ahora probaremos que $f_n \to f$ puntualmente en I. Si $x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, entonces $x = x_i$ para algún i. Luego,

$$f_n(x) = f_n(x_i) = f(x_i) = f(x),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, si $x_j < x < x_{j+1}$ para algún $j = 1, 2, \ldots, k-1$, sea

$$r = \min\{x - x_j, x_{j+1} - x\}.$$

Entonces, para cualquier $n > \delta/r$ se tiene que

$$x_j + \delta/n < x < x_{j+1} - \delta/n.$$

Así,

$$x \notin [x_j - \delta/n, x_j + \delta/n] \quad \text{y} \quad x \notin [x_{j+1} - \delta/n, x_{j+1} + \delta/n].$$

Luego, por (2),

$$x \notin [x_i - \delta/n, x_i + \delta/n],$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, es decir

$$x \in I \backslash (\cup_{i=1}^{k} [x_i - \delta/n, x_i + \delta/n]).$$

Por tanto, $f_n(x) = f(x)$ para todo $n > \delta/r$. Así, $f_n \to f$ puntualmente en I, como queríamos probar. □

Corolario 4.18. *Sea f una función definida en un intervalo I. Supongamos que f es escalonada. Entonces f es Baire I.*

Prueba. Se sigue directamente del Teorema 4.17, ya que una función escalonada tiene sólo un número finito de discontinuidades. □

Definición 4.19. Sea $[a, b]$ un intervalo en $\mathbb{R}$.

(i) Una *partición* $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos $\{x_0, x_1, , , , .x_n\}$ tal que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

(ii) La *norma* de la partición $\mathcal{P}$ se define como $\max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, ..., n\}$, y se denota por $||\mathcal{P}||$.

Teorema 4.20. *Sea f una función definida en un intervalo I, y supongamos que el conjunto D_f de puntos de discontinuidad de f es numerable. Entonces f es Baire I.*

Prueba. Se tiene que C_f, el conjunto de puntos de continuidad de f, es no numerable y denso en I. Para ver esto, notemos que si C_f fuera numerable, entonces $I = C_f \cup D_f$ también sería numerable, lo cual no es posible, ya que ningún intervalo es numerable. Así, C_f debe ser no numerabe. Sea J un intervalo abierto que interseca a I. Si se tuviera que $J \subset D_f$, el Teorema 2.3 implicaría que J es numerable, lo cual es imposible. Luego, $J \cap C_f \neq \emptyset$, y C_f es denso en I. Así, para cada $r, s \in \mathbb{Q} \cap I$, con $r < s$, podemos elegir un punto $z_{rs} \in (r,s) \cap C_f$. A través de estos puntos, se define

$$E = \{z_{rs} : r, s \in \mathbb{Q} \cap I, r < s\}.$$

Claramente, E es un subconjunto numerable de C_f. Además, si J es un intervalo abierto que interseca a I, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existen $u, v \in \mathbb{Q} \cap J$, con $u < v$. Luego, existe $z_{uv} \in J \cap E$, por lo que $E \cap J \neq \emptyset$, así que E es denso en I. Sean a y b los puntos extremos izquierdo y derecho de I, respectivamente. Sea $S = E \cup D_f \cup \{a, b\}$. Entonces, S es numerable, así que podemos hacer una lista de sus elementos:

$$S = \{s_1, s_2, s_3, ...\}.$$

S es denso en I, pues E lo es. Supongamos sin pérdida de generalidad que $s_1 = a$ y $s_2 = b$. Sea

$$\mathcal{P}_1 = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_{j_1}^{(1)}\}$$

una partición de I con $||\mathcal{P}_1|| < 1/2^2$. Podemos encontrar

$$s_{t_1^{(1)}} \in (x_0^{(1)}, x_1^{(1)}) \cap S$$

$$s_{t_2^{(1)}} \in (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \cap S$$

$$\vdots$$

$$s_{t_{j_1}^{(1)}} \in (x_{j_1-1}^{(1)}, x_{j_1}^{(1)}) \cap S.$$

Sea $m_1 = \max\{t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, ..., t_{j_1}^{(1)}\}$, y sea $S_1 = \{s_1, s_2, s_3, ..., s_{m_1}\}$. Si J es cualquier intervalo en I con $l(J)$ (longitud de J) mayor que $1/2$, podemos encontrar $y \in S_1$ tal que $y \in J$, y entonces $J \cap S_1 \neq \emptyset$. Sea

$$\mathcal{P}_2 = \{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_{j_2}^{(2)}\}$$

una partición de I con $||\mathcal{P}_2|| < 1/2^3$. Podemos encontrar

$$s_{t_1^{(2)}} \in (x_0^{(2)}, x_1^{(2)}) \cap (S \backslash S_1)$$

$$s_{t_2^{(2)}} \in (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \cap (S \backslash S_1)$$

$$\vdots$$

$$s_{t_{j_2}^{(2)}} \in (x_{j_2-1}^{(2)}, x_{j_2}^{(2)}) \cap (S \backslash S_1).$$

Sea $m_2 = \max\{t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, ..., t_{j_2}^{(2)}\}$. Notemos que $m_2 > m_1$. Sea $S_2 = \{s_1, s_2, s_3, ..., s_{m_2}\}$. Si J es cualquier intervalo en I con $l(J) \geq 1/2^2$, podemos encontrar $y \in S_2$ tal que $y \in J$, y entonces $J \cap S_2 \neq \emptyset$. Sea

$$\mathcal{P}_3 = \{x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, ..., x_{j_3}^{(3)}\}$$

una partición de I con $||\mathcal{P}_3|| < 1/2^4$. Podemos encontrar

$$s_{t_1^{(3)}} \in (x_0^{(3)}, x_1^{(3)}) \cap (S \backslash (S_1 \cup S_2))$$

$$s_{t_2^{(3)}} \in (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) \cap (S \backslash (S_1 \cup S_2))$$

$$\vdots$$

$$s_{t_{j_3}^{(3)}} \in (x_{j_3-1}^{(3)}, x_{j_3}^{(3)}) \cap (S \backslash (S_1 \cup S_2)).$$

Sea $m_3 = \max\{t_1^{(3)}, t_2^{(3)}, ..., t_{j_3}^{(3)}\}$. Notemos que $m_3 > m_2$. Sea $S_3 = \{s_1, s_2, s_3, ..., s_{m_3}\}$. Si J es cualquier intervalo en I con $l(J) \geq 1/2^3$, podemos encontrar $y \in S_3$ tal que $y \in J$, y entonces $J \cap S_3 \neq \emptyset$

Realizando este mismo procedimiento para cada entero positivo n, podemos construir $S_n = \{s_1, s_2, ..., s_{m_n}\}$, con $m_n > m_{n-1}$, tal que para cualquier intervalo J en I con $l(J) \geq 1/2^n$, exista $y \in S_n$ tal que $y \in J$, y entonces $J \cap S_n \neq \emptyset$.

Se tiene que

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n. \tag{1}$$

En efecto, la sucesión $\{m_1, m_2, m_3, ...\} \subset \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, así que si $s_i \in S$, debe existir $m_p \geq i$ y entonces $s_i \in S_q$, para toda $q \geq p$. Así, $S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Además, por construcción, $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \subset S$.

Para cada entero positivo n, sea f_n la función continua descrita por la curva lineal $\Phi(f, S_n)$. Probaremos que f_n converge puntualmente a f.

Sea $x \in I$. Si $x \in S$, entonces, por (1), $x \in S_i$ para algún entero positivo i. Así, para cualquier $n \geq i$, se tiene que

$$f_n(x) = f(x).$$

Si $x \notin S$, entonces f es continua en x, así que para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ siempre que $|x - y| < \delta$. Sea $N = \frac{\ln(1/\delta)}{\ln(2)}$, y sea $n > N$. Entonces $\delta > 1/2^n$. Como $l(x - \delta, x) = l(x, x + \delta) = \delta > 1/2^n$, se tiene que

$$(x - \delta, x) \cap S_n \neq \emptyset$$
$$(x, x + \delta) \cap S_n \neq \emptyset.$$

Sean

$$s' = \max((x - \delta, x) \cap S_n)$$
$$s'' = \min((x, x + \delta) \cap S_n).$$

s' y s'' están bien definidos ya que S_n es finito. De esta manera,

$$x - \delta < s' < x < s'' < x + \delta,$$

y no hay elementos de S_n en el intervalo (s', s''). Como $|x - s'| < \delta$ y $|x - s''| < \delta$, se tiene que

$$|f(x) - f_n(s')| = |f(x) - f(s')| < \epsilon/3. \tag{2}$$

y

$$|f(x) - f_n(s'')| = |f(x) - f(s'')| < \epsilon/3. \tag{3}$$

Como f_n es lineal en el intervalo $[s', s'']$, de (1) y (2) obtenemos

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(s')| &\leq |f_n(s'') - f_n(s')| = |f(s'') - f(s')| \\ &< |f(s'') - f(x)| + |f(x) - f(s')| < \epsilon/3 + \epsilon/3 = 2\epsilon/3. \end{aligned} \tag{4}$$

Luego, de (2) y (4),

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(s')| + |f_n(s') - f(x)| < 2\epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.$$

Como x es un punto arbitrario de I, $\{f_n\}$ converge a f puntualmente en I. Por lo tanto, f es Baire I. $\square$

Corolario 4.21. *Sea f una función real definida en un intervalo I, y supongamos que f es monótona. Entonces f es Baire I*

Prueba. El resultado se sigue directamente de los Teoremas 3.17 y 4.20. $\square$

Teorema 4.22. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Entonces f', la derivada de f, es Baire I.*

Prueba. Sabemos que la función derivada de f está definida como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Notemos que una forma equivalente de expresar la derivada de f es

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}.$$

Así, haciendo

$$f_n(x) = \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos una sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde cada f_n es continua (pues f lo es ya que es derivable), la cual converge a f' puntualmente. Esto nos dice que f' es Baire I. $\square$

Ejemplo 4.23. Consideremos la siguiente función f y la sucesión de funciones $\{f_k\}$ definidas en el intervalo $[0, 1]$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1/n, \\ 1/x & \text{si} \quad 1/n \leq x \leq 1. \end{cases} \quad \text{y} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ 1/x & \text{si} \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

La sucesión $\{f_n\}$ converge a f puntualmente, ya que si $x = 0$, entonces $f_n(x) = 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$, y si $0 < x \leq 1$, por la Propiedad Arquiemdiana (Teorema 2.13 (iii)) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < x$, entonces $f_n(x) = 1/x = f(x)$ para toda $n \geq N$, ya que $1/n \leq 1/N < x$, así que $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ para toda $x \in [0, 1]$. Luego, como cada una de las f_n's es continua, se tiene que f es Baire I.
Nótese que una manera más sencilla de probar que esta función es Baire I, es utilizar el Teorema 4.17, ya que en este caso, $D_f = \{0\}$ es finito.

El Ejemplo 4.23 muestra que una función Baire I no es necesariamente acotada.

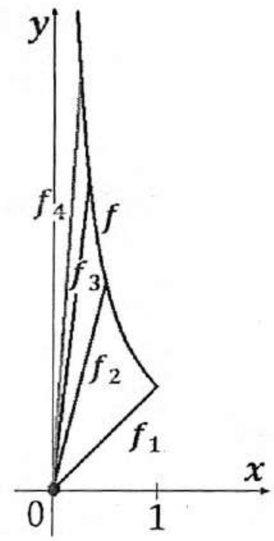

Figura 8: Ejemplo 4.17

Lema 4.24. *Sea f una función Baire I definida en un intervalo I. Supongamos que f está acotada por M. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas acotadas también por M, que converge puntualmente a f en I.*

Prueba. Como f es Baire I, existe una sucesión $\{g_n\}$ de funciones continuas, la cual converge puntualmente a f en I. Supongámos que M es una cota para f.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la función f_n por

$$f_n(x) = \max\{\min\{g_n(x), M\}, -M\} = \begin{cases} -M & \text{si} \quad g_n(x) < -M, \\ g_n(x) & \text{si} \quad -M \leq g_n(x) \leq M, \\ M & \text{si} \quad g_n(x) > M. \end{cases}$$

Es claro que $|f_n(x)| \leq M$ para toda $x \in [0,1]$, esto es, M es una cota para f_n en I. Además, como las funciones max y min de cualesquiera dos funciones F y G están definidas por

$$\max\{F,G\} = \frac{(F+G)+|F-G|}{2} \quad \text{y} \quad \min\{F,G\} = \frac{(F+G)-|F-G|}{2},$$

y como g_n es continua, se tiene que f_n es continua. Sabemos también que M es una cota para f en I, es decir, $-M \leq f(x) \leq M$ para toda $x \in I$.

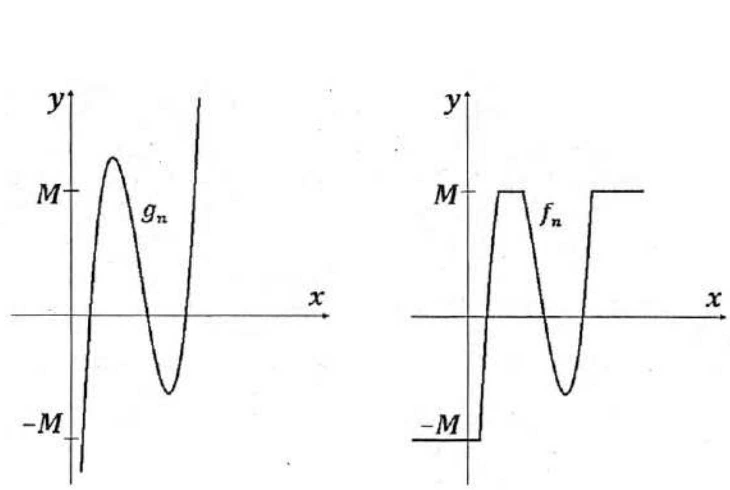

Figura 9: Lema 4.18

Sea $x \in I$ fija. Tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \max\{\min\{g_n(x), M\}, -M\} \\ &= \max\{\min\{\lim_{n\to\infty} g_n(x), M\}, -M\} \\ &= \max\{\min\{f(x), M\}, -M\} \\ &= \max\{f(x), -M\} \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas acotadas por M que converge a f puntualmente en I. $\square$

Lema 4.25. *Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones Baire I definidas en un intervalo I, y sea $\{M_k\}$ una sucesión de números reales positivos tal que*

$$|f_k(x)| \leq M_k, \quad \textit{para toda } x \in I \textit{ y para toda } k \in \mathbb{N}.$$

Si $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge, entonces la función $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ es Baire I.

Prueba. Como cada f_k es una función Baire I acotada por M_k, el Lema 4.24 implica que para cada entero positivo k existe una sucesión $\{g_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones continuas que converge puntualmente a f_k en I tal que $|g_{kn}(x)| \leq M_k$ para toda $x \in I$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} g_{kn}.$$

Cada h_n es una función continua, ya que es la suma finita de funciones contnuas. Probaremos que $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f puntualmente en I. Sea $x \in I$ fija y sea $\epsilon > 0$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge, existe un entero positivo K tal que

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} M_k = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} M_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^{m} M_k \right| < \epsilon/4,$$

para toda $m \geq K$. En particular, para $m = K$, se tiene que

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} M_k < \epsilon/4.$$

Como $\{g_{kn}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f_k(x)$ para toda k, en particular converge para $k = 1, 2, ..., K$, así que para cada $k = 1, 2, ..., K$, existe un entero positivo $N_k > K$ tal que

$$|g_{kn}(x) - f_k(x)| < \frac{\epsilon}{2K},$$

para toda $n \geq N_k$. Sea $N = \max\{N_1, N_2, ..., N_K\}$. Entonces $N > K$ y

$$|g_{kn}(x) - f_k(x)| < \frac{\epsilon}{2K},$$

para toda $n \geq N$ y para toda $k = 1, 2, ..., K$. Luego, para toda $n \geq N$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|h_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} g_{kn}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} g_{kn}(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^{n} \left(g_{kn}(x) - f_k(x) \right) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |g_{kn}(x) - f_k(x)| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\
&= \sum_{k=1}^{K} |g_{kn}(x) - f_k(x)| + \sum_{k=K+1}^{n} |g_{kn}(x) - f_k(x)| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{K} |g_{kn}(x) - f_k(x)| + \sum_{k=K+1}^{n} |g_{kn}(x)| + \sum_{k=K+1}^{n} |f_k(x)| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{K} |g_{kn}(x) - f_k(x)| + \sum_{k=K+1}^{n} |g_{kn}(x)| + \sum_{k=K+1}^{\infty} |f_k(x)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{K} |g_{kn}(x) - f_k(x)| + \sum_{k=K+1}^{\infty} |g_{kn}(x)| + \sum_{k=K+1}^{\infty} |f_k(x)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{K} |g_{kn}(x) - f_k(x)| + 2 \sum_{k=K+1}^{\infty} M_k \\
&< \sum_{k=1}^{K} \frac{\epsilon}{2K} + 2(\epsilon/4) = K\left(\frac{\epsilon}{2K}\right) + \epsilon/2 \\
&= \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f puntualmente en I. □

Teorema 4.26. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones Baire I definidas en un intervalo I. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en I, entonces f es Baire I.*

Prueba. Como $f_n \to f$ uniformemente en I, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $|f_{n_k}(x) - f(x)| < 2^{-k}$ para todo $x \in I$ y para todo $k \in \mathbb{N}$. Consideremos la sucesión $\{f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\}$. El Teorema 4.15 nos dice que ésta es una sucesión de funciones Baire I. Para toda $x \in I$ y todo entero positivo k, tenemos que

$$
\begin{aligned}
|(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})(x)| &= |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \\
&\leq |f_{n_{k+1}}(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n_k}(x)| \\
&\leq 2^{-(k+1)} + 2^{-k} \\
&= \frac{1}{2}(2^{-k}) + 2^{-k} = \left(\frac{3}{2}\right)2^{-k}.
\end{aligned}
$$

Sea $M_k = (3/2)2^{-k}$. Entonces $|(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})(x)| \leq M_k$ para toda $x \in I$ y todo entero postivo k. Además, $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ es una serie geométrica convergente.

Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N} f_{n_{k+1}}(x) - \sum_{k=1}^{N} f_{n_k}(x)\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}(f_{n_{N+1}}(x) - f_{n_1}(x)) \\
&= f(x) - f_{n_1}(x) = (f - f_{n_1})(x),
\end{aligned}$$

así que por el Lema 4.25, $\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f - f_{n_1}$ es Baire I. Como f_{n_1} es Baire I, se tiene por el Teorema 4.15 que $f = (f - f_{n_1}) + f_{n_1}$ es Baire I. □

Lema 4.27. *Sea f una función Baire I definida en un intervalo I, y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas que converge a f puntualmente en I. Para todo $r \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$\{x \in I : f(x) < r\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x \in I : f_n(x) \leq r - \frac{1}{k}\right\}$$

y

$$\{x \in I : f(x) > r\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x \in I : f_n(x) \geq r + \frac{1}{k}\right\}.$$

Prueba. Probaremos que

$$\{x \in I : f(x) < r\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x \in I : f_n(x) \leq r - \frac{1}{k}\right\}. \tag{5}$$

Notemos que

$$\{x \in I : f(x) < r\} = \bigcup_{p=1}^{\infty}\left\{x \in I : f(x) \leq r - \frac{1}{p}\right\}.$$

Así, probar (5) es equivalente a probar

$$\bigcup_{p=1}^{\infty}\left\{x \in I : f(x) \leq r - \frac{1}{p}\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x \in I : f_n(x) \leq r - \frac{1}{k}\right\},$$

para toda $p \in \mathbb{N}$.

Sea $y \in \bigcup_{p=1}^{\infty}\{x \in I : f(x) \leq r - \frac{1}{p}\}$. Entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f(y) \leq r - \frac{1}{p} < r - \frac{1}{2p}$. De aquí que $r - \frac{1}{2p} - f(y) > 0$. Luego, como $\lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$, existe un entero positivo m tal que

$$f_n(y) - f(y) \leq |f_n(y) - f(y)| < r - \frac{1}{2p} - f(y)$$

para toda $n \geq m$, por lo que, $f_n(y) \leq r - \frac{1}{2p}$ para toda $n \geq m$. Así,

$$y \in \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x \in I : f_n(x) \leq r - \frac{1}{2p}\right\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x \in I : f_n(x) \leq r - \frac{1}{k}\right\}.$$

Ahora, supongamos que $y \in \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x \in I : f_n(x) \leq r - \frac{1}{k}\right\}$. Entonces existen un enteros positivos k y m tales que

$$f_n(y) \leq r - \frac{1}{k},$$

para toda $n \geq m$. Luego,

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(y) \leq \lim_{n\to\infty}\left(r - \frac{1}{k}\right) = r - \frac{1}{k},$$

así que

$$y \in \{x \in I : f(x) \leq r - \frac{1}{k}\} \subset \bigcup_{p=1}^{\infty}\{x \in I : f(x) \leq r - \frac{1}{p}\}.$$

Esto prueba lo que queríamos.

La prueba de que

$$\{x \in I : f(x) > r\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x \in I : f_n(x) \geq r + \frac{1}{k}\right\}$$

es similar. □

Lema 4.28. *Sea f una función Baire I definida en un intervalo I. Para cualquier $r \in \mathbb{R}$, los conjuntos*

$$\{x \in I : f(x) > r\} \quad y \quad \{x \in I : f(x) < r\}$$

son de tipo $\mathcal{F}_\sigma$.

Prueba. Como f es Baire I, existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas que converge puntualmente a f en I. Por el Lema 4.27, sabemos que

$$\{x \in I : f(x) < r\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x \in I : f_n(x) \leq r - \frac{1}{k}\right\}.$$

Como cada f_n es continua, el conjunto

$$f_n^{-1}\big((-\infty, r - 1/k]\big) = \left\{x \in I : f_n(x) \leq r - \frac{1}{k}\right\}$$

es cerrado, ya que es la imagen inversa de un conjunto cerrado. Luego, para cada $m \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x \in I : f_n(x) \leq r - \frac{1}{k}\right\}.$$

es cerrado, ya que la intersección numerable de conjuntos cerrados es cerrado. De esta manera, el conjunto $\{x \in I : f(x) < r\}$ es de tipo $\mathcal{F}_\sigma$, pues es la unión numerable de conjuntos cerrados.

Similarmente, el Lema 4.27 nos dice que

$$\{x \in I : f(x) > r\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x \in I : f_n(x) \geq r + \frac{1}{k}\right\}.$$

Como cada f_n es continua, el conjunto

$$f_n^{-1}\big([r + 1/k, \infty)\big) = \left\{x \in I : f_n(x) \geq r + \frac{1}{k}\right\}$$

es cerrado, pues es la imagen inversa de un conjunto cerrado. Luego, para cada $m \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x \in I : f_n(x) \geq r + \frac{1}{k}\right\}.$$

es cerrado, ya que la intersección numerable de conjuntos cerrados es cerrado. Así, el conjunto $\{x \in I : f(x) < r\}$ es de tipo $\mathcal{F}_\sigma$, pues es la unión numerable de conjuntos cerrados. $\square$

Teorema 4.29. *Sea f una función Baire I definida en un intervalo I. Entonces C_f, el conjunto de puntos de continuidad de f, es un conjunto denso en I de tipo $\mathcal{G}_\delta$.*

Prueba. C_f es de tipo $\mathcal{G}_\delta$ por el Teorema 3.21. Supongamos que C_f no es denso en I. Entonces existe un intervalo abierto L tal que $I \cap L \neq \emptyset$ y $C_f \cap L = \emptyset$. Sea $J = I \cap L$. Se tiene que $C_f \cap J \subset C_f \cap L = \emptyset$, así que $C_f \cap J = \emptyset$, y como $J \subset I$, se tiene que $J \subset D_f$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$E_n = \{x \in J : \omega_f(x) \geq 1/n\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto E_n es cerrado por el Teorema 3.8. Por el Teorema 3.7, sabemos que f es continua en un punto $x \in I$ si y sólo si $\omega_f(x) = 0$, por lo que $x \in D_f$ si y sólo si $\omega_f(x) > 0$. Así, como $J \subset D_f$, $\omega_f(x) > 0$ para todo $x \in J$. Luego,

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Por el Corolario 2.42, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y un subintervalo $H \subset J$ tal que E_{n_0} es denso en H.

Si $\hat{H}$ es cualquier subintervalo de H, entonces $E_{n_0} \cap \hat{H} \neq \emptyset$, pues E_{n_0} es denso en H. Sea $x_0 \in E_{n_o} \cap \hat{H}$. Sea $h > 0$ suficientemente pequeño de modo que $[x_0 - h, x_0 + h] \subset \hat{H}$ (se hacen las modificaciones necesarias si x_0 es un punto extremo de $\hat{H}$). Por el Teorema 3.6,

$$\begin{aligned}
\sup\{|u - v| : u, v \in f(\hat{H})\} &= \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in \hat{H}\} \\
&\geq \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_0 - h_0, x_0 + h_0]\} \\
&= W_f[x_0 - h_0, x_0 + h_0] \\
&\geq \lim_{h \to 0^+} W_f[x_0 - h, x_0 + h] \\
&= \omega_f(x_0) \geq 1/n_0.
\end{aligned}$$

Así, el intervalo H tiene la propiedad de que f mapea todo subintervalo de H en un conjunto con diámetro mayor o igual que $1/n_0$. Ahora probaremos que esto no es posible para f, un límite puntual de funciones continuas.

Sea $\{I_k = (a_k, b_k)\}$ una sucesión de intervalos, cada uno de longitud menor que $1/n_0$, tal que

$$f(H) \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea

$$H_k = f^{-1}(I_k) \cap H.$$

Entonces $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$, pero ninguno de los conjuntos H_k puede contener un intervalo, pues si algún H_k contuviera un intervalo L, se tendría lo siguiente:

(i) Como $L \subset H_k \subset H$, entonces

$$\sup\{|u - v| : u, v \in f(L)\} \geq 1/n_0,$$

(ii) y como $f(L) \subset f(H_k) \subset I_k$, y $l(I_k) < 1/n_0$, entonces

$$\begin{aligned}\sup\{|u - v| : u, v \in f(L)\} &\leq \sup\{|u - v| : u, v \in f(H_k)\} \\ &\leq \sup\{|u - v| : u, v \in I_k\} \\ &= l(I_k) < 1/n_0,\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Ahora,

$$H_k = \{x \in H : f(x) < b_k\} \cap \{x \in H : f(x) > a_k\}.$$

Por el Lema 4.28, cada uno de estos conjuntos es de tipo $\mathcal{F}_\sigma$, así que $H_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_{kj}$, con cada uno de los conjuntos H_{kj} cerrado. Se sigue que

$$H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} H_{kj}.$$

El intervalo H es expresado como la unión numerable de conjuntos cerrados. Se sigue del Teorema de Categoría de Baire (Teorema 2.41 (ii)) que al menos uno de los conjuntos H_{kj} no es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$, y por el Corolario 2.42, H_{kj} es denso en algún intervalo $K \subset H$. Como H_{kj} es cerrado,

$$H_{kj} = \overline{H_{kj}} \supset K.$$

Pero esto implica que $H_k \supset K$, y ya vimos que esto no es posible (pues H_k no contiene intervalos). Esta contradicción completa la prueba. Por lo tanto, C_f es denso en I. □

Lema 4.30. *Sea f una función Baire I definida en un intervalo cerrado I. Sea $r > 0$. Entonces el conjunto*

$$\{x \in I : \omega_f(x) \geq r\}$$

es cerrado y denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$.

Prueba. Sea $E = \{x \in I : \omega_f(x) \geq r\}$. Sabemos por el Teorema 3.8 que E es cerrado. Supongamos que E no es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Entonces, por el Teorema 2.28, existe un intervalo $J \subset \overline{E}$. Como E es cerrado, $E = \overline{E}$, así que $J \subset E$.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas que converge a f en I. Dado $0 < \epsilon < r/16$, y un punto arbitrario $x_0 \in J^\circ$, por la convergencia puntual de $\{f_n\}$ a f, existe un entero positivo n_0 tal que

$$|f(x_0) - f_{n_0}(x_0)| < \epsilon. \tag{6}$$

Como f_{n_0} es continua en x_0, existe una vecindad cerrada $J_0 \subset J$ de x_0, tal que

$$x \in J_0 \implies |f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x)| < \epsilon. \tag{7}$$

Por (6) y (7) tenemos que

$$x \in J_0 \implies |f(x_0) - f_{n_0}(x)| < 2\epsilon. \tag{8}$$

Como $x_0 \in J_0 \subset E$, existe otro punto $x_1 \in J_0^\circ$ tal que

$$|f(x_0) - f(x_1)| \geq r/2. \tag{9}$$

Repetimos el mismo razonamiento anterior con el punto x_1. Como $\{f_n\}$ converge puntualmente a f, existe $n_1 > n_0$ tal que

$$|f(x_1) - f_{n_1}(x_1)| < \epsilon. \tag{10}$$

Como f_{n_1} es continua en x_1, existe una vecindad cerrada $J_1 \subset J_0$ de x_1, tal que $l(J_1) < l(J_0)/2$ y

$$x \in J_1 \implies |f_{n_1}(x_1) - f_{n_1}(x)| < \epsilon. \tag{11}$$

Por (10) y (11) tenemos que

$$x \in J_1 \implies |f(x_1) - f_{n_1}(x)| < 2\epsilon. \tag{12}$$

Así, si $x \in J_1$, entonces

$$\begin{aligned} r/2 &\leq |f(x_0) - f(x_1)| \\ &\leq |f(x_0) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f(x_1)| \\ &< 2\epsilon + |f_{n_0}(x) - f_{n_1}(x)| + 2\epsilon, \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue de (9) y la última desigualdad de (8) y (12). Luego,

$$x \in J_1 \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_1}(x)| > r/2 - 4\epsilon > r/2 - r/4 = r/4. \tag{13}$$

Ahora porcedemos por inducción. Supongamos que para algún índice $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$J_0 \supset J_1 \supset \cdots \supset J_{k-1} \supset J_k \tag{14}$$

$$x_0 \in J_0^\circ, x_1 \in J_1^\circ, ..., x_{k-1} \in J_{k-1}^\circ, x_k \in J_k^\circ \tag{15}$$

$$f_{n_0}, f_{n_1}, ..., f_{n_{k-1}}, f_{n_k}, \tag{16}$$

tales que

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \geq r/2 \tag{17}$$

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| < \epsilon \tag{18}$$

$$x \in J_k \implies |f_{n_k}(x) - f(x_k)| < 2\epsilon. \tag{19}$$

Como $J_k \subset E$, existe un punto $x_{k+1} \in J_k^\circ$ tal que

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \geq r/2. \tag{20}$$

Esto satisface la hipótesis de inducción (17). Como $\{f_n\}$ converge puntualmente a f, existe $n_{k+1} > n_k$ tal que

$$|f_{n_{k+1}}(x_{k+1}) - f(x_{k+1})| < \epsilon. \tag{21}$$

Esto satisface la hipótesis de inducción (18). Como $f_{n_{k+1}}$ es continua en x_{k+1}, existe una vecindad cerrada $J_{k+1} \subset J_k$ de x_{k+1}, tal que

$$l(J_{k+1}) < l(J_k)/2 \tag{22}$$

$$x_{k+1} \in J_{k+1}^\circ \tag{23}$$

$$x \in J_{k+1} \implies |f_{n_{k+1}}(x_{k+1}) - f_{n_{k+1}}(x)| < \epsilon. \tag{24}$$

De (21) y (24) se tiene que

$$x \in J_{k+1} \implies |f_{n_{k+1}}(x) - f(x_{k+1})| < 2\epsilon. \tag{25}$$

Por (25), se satisface la hipótesis de inducción (19) para $n + 1$. Además, para cada paso de inducción, utilizamos (21) y (24), junto con la hipótesis de inducción (19) para deducir

$$x \in J_{k+1} \implies |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| > r/2 - 4\epsilon > r/4. \tag{26}$$

Como $J_0, J_1, J_2, \ldots$ es una colección anidada de intervalos cerrados cuya longitud tiende a cero, el Corolario 2.20 implica que

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} J_k = \{x\},$$

para algún $x \in \mathbb{R}$. Así, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos

$$|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| > r/4. \tag{27}$$

Pero implica que $\{f_{n_k}\}$ diverge en x. Luego, bajo la hipóteis hecha, $\{f_n\}$ no puede converger en I. Por lo tanto $\overline{E}$ no puede contener algún intervalo, y entonces E es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. $\square$

Teorema 4.31. *Sea f una función Baire I definida en un intervalo cerrado I. Entonces D_f, el conjunto de puntos de discontinuidad de f, es un conjunto de primera categoría.*

Prueba. Se define

$$E_n = \{x \in I : \omega_f(x) \geq 1/n, \text{para todo } x \in I\}.$$

Por el Lema 4.30, cada E_n es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$. Notemos que si $x \in D_f$, entonces

$$\omega_f(x) = r > 0.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $r > 1/n$. Entonces $x \in E_n$. Así,

$$D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Por lo tanto, D_f es de primera categoría. $\square$

5 Referencias

[1] I. Bergman, *Baire Cathegory Theorem*. Faculty of Technology and Science, Karlstads Universitet.

[2] R. A. Gordon, *When is a Limit Function Continuous?*. Mathematics Magazine, Vol. 72, No. 4 (Oct. 1998), pp. 306-308.

[3] J. Hu, *Baire One Functions*. Department of Mathematics, Whitman College.

[4] R. Kantrowitz, *A Principle of Countability*. Mathematics Magazine, Vol. 73, No. 1 (Feb. 2000), pp. 40-42.

[5] J. Klippert, *Advanced Calculus: Counting the Discontinuities of a Real-Valued Function with Interval Domain*. Mathematics Magazine, Vol. 62, No. 1 (Feb. 1989), pp. 43-48.

[6] B. Thomson, J. Bruckner, A. Bruckner, *Elementary Real Analysis* (2nd ed.), Prentice Hall (2008).