



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

---

---

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciado en Matemáticas

Clasificación de los espacios euclidianos  
en dimensiones 2 y 3

## T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Armando Esparza Hernández

Director de Tesis: Dr. Rubén Flores Espinoza

Hermosillo, Sonora, México.      4 de noviembre de 2015

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess



## SINODALES

Dr. Rubén Flores Espinoza

Dr. Guillermo Dávila Rascón

Dr. Rafael Ramos Figueroa

M. C. Carlos Robles Corbalá



## Agradecimientos

Primeramente quiero agradecerle a Dios por este logro, por ser Él el motor por el cual me levanto todos los días, por las bendiciones que me regala cada instante, y por los dones que me ha otorgado para poder lograr cada objetivo que me he propuesto.

También quiero agradecerle a mi familia, en especial a Armando Esparza Acuña y María Auxiliadora Hernández Moreno, mis padres, por todo su apoyo, por sus palabras de aliento y sus consejos en los momentos más complicados, como también en acompañarme en los momentos de alegría.

A mis compañeros, pues sin su apoyo, sin sus regaños, las risas que en mí provocaron y aquellas tardes en la biblioteca, esta experiencia no habría sido igual, seguramente no sería la persona que en estos momentos soy.

A esos amigos, que aunque no fueron mis compañeros de clase, estuvieron ahí para apoyarme y aconsejarme cuando lo necesité, y con son un motivo de alegría en mi vida.

Quiero agradecerle a cada uno de los profesores que estuvieron presentes en mi formación como licenciado en matemáticas, al Dr. Ramiro Ávila por haber sido como un padre para mí estos cuatro años, por sus consejos y por hacerme ver que una amistad no depende de si es mi profesor o mi compañero, solo depende de la confianza que se crea con la convivencia. A la Dra. Marysol Navarro, por acompañar a mi generación de principio a fin y vernos crecer tanto como alumnos, así como personas, y también al Dr. Martín Gildardo García, por siempre apoyarnos como Coordinador de la carrera y estar al pendiente de nuestras necesidades.

Además agradezco al grupo de sinodales por el tiempo que invirtieron conmigo, por sus consejos y por su participación como mis profesores en clase, en especial al Dr. Rubén Flores, por dirigir mi tesis y guiarme en esta etapa final como estudiante de la licenciatura.

Por último, quiero agradecerle al Dr. Georgy Omelianov Medvedey por su apoyo con el proyecto 178690, financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.



# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Clasificación de isometrías euclidianas en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>3</b>
1.1 Isometrías euclidianas en $\mathbb{R}^n$	3
1.2 Clasificación de isometrías euclidianas en $\mathbb{R}^2$	6
1.2.1 Fórmulas explícitas de las isometrías euclidianas en el plano	7
1.3 Clasificación de isometrías euclidianas en $\mathbb{R}^3$	8
1.3.1 Fórmulas explícitas de las isometrías euclidianas en el espacio	8
<b>2 Grupos uniformemente discontinuos de isometrías euclidianas</b>	<b>9</b>
2.1 Grupos uniformemente discontinuos	9
2.2 Clasificación de grupos uniformemente discontinuos de isometrías euclidianas en el plano	10
2.3 Simetrías de retículas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$	11
2.3.1 Simetrías de retículas bi-dimensionales	11
2.3.2 Simetrías de retículas tri-dimensionales	13
2.4 Clasificación de grupos uniformemente discontinuos de isometrías euclidianas en el espacio tridimensional	14
<b>3 Espacios localmente euclidianos</b>	<b>19</b>
3.1 Propiedades de los espacios localmente euclidianos	19
3.2 Espacios cociente	20
3.2.1 Ejemplos de espacios localmente euclidianos	22
3.3 Teorema de clasificación de espacios euclidianos	26
3.3.1 La función cubriente	26
<b>Conclusiones</b>	<b>31</b>





# Introducción

Tomando en cuenta nuestra experiencia de las características geométricas del espacio que nos rodea, una pregunta importante es: ¿cuál es la forma que globalmente tiene el espacio tridimensional si alrededor de cada uno de sus puntos es localmente euclidiano?. ¿Cuales son las características topológicas del universo?, ¿es nuestro universo un espacio acotado, simplemente conexo, es orientado, etc.?. Estas preguntas son cuestiones fundamentales de la filosofía y la ciencia. En este trabajo daremos respuesta a algunas de estas interrogantes con los medios que nos ofrece el pensamiento y las teorías matemáticas.

El problema que se aborda en este trabajo es clasificación de los espacios localmente euclidianos, es decir, de aquellos espacios que poseen una geometría que es en una vecindad de cada uno de sus puntos igual a la geometría euclidiana. Esta clasificación la presentamos para los espacios de dimensión dos y tres. En este trabajo, con métodos y técnicas elementales del álgebra lineal y topología, mostramos que todo espacio localmente euclidiano se obtiene a partir de la acción de un subgrupo de isometrías euclidianas uniformemente discontinuos sobre el plano euclidiano o sobre el espacio respectivamente. Mostramos que globalmente los espacios euclidianos se representan como el espacio cociente formado por las órbitas de la acción del grupo. En este sentido la clasificación de los espacios euclidianos se reduce a la clasificación de los sub-grupos uniformemente discontinuos de isometrías euclidianas en el plano o en el espacio.

En esta intruducción hacemos un breve resumen de cada uno de los capítulos de este trabajo, para después presentar el contenido del mismo y por último anexar las conclusiones obtenidas después de finalizado el proyecto. Las principales fuentes de consulta e información utilizadas se encuentran para el caso de superficies euclidianas en el texto de J. Stillwell titulado "Geometry of Surfaces" [1] y para el caso de espacios euclidianos tri-dimensionales en el texto "Geometries and Groups" (Geometrii i Gruppy) de V. V. Nikulin & I. R. Shafarevich [2].

En la primer sección de este trabajo presentamos el concepto de isometría euclidiana como aquellas transformaciones que preservan la distancia euclidiana. Caracterizamos estas transformaciones para el caso del plano y del espacio tri-dimensional. En particular mostramos que el conjunto de isometrías euclidianas constituyen un grupo de transformaciones bajo la operación de composición cuyos elementos se obtienen como composiciones de traslaciones, rotaciones y reflexiones. La caracterización de las isometrías euclidianas se hace a través de la forma canónica de Jordan para operadores lineales.

En el segundo capítulo, titulado "Grupos Uniformemente Discontinuos de Isometrías Euclidianas", se define el concepto de sub-grupo de isometrías euclidianas uniformemente discontinuo  $\Gamma$ , como aquellos grupos de isometrías euclidianas tales que la distancia entre un punto y su imagen bajo esas simetrías se encuentra siempre a una distancia no menor que un número dado. Esta característica hace que los elementos de cada grupo uniformemente discontinuo distinto de la identidad no posean puntos fijos. En el caso del plano este último hecho elimina a las rotaciones como posibles elementos de un grupo uniformemente discontinuo y en el caso del espacio a las rotaciones seguidas de traslaciones perpendiculares al eje de rotación.

La clasificación de los grupos de isometrías uniformemente discontinuos se hace en base a los sub-grupos de traslaciones que contienen y las isometrías lineales que preservan la retícula que define la órbita del origen bajo el sub-grupo de traslaciones.

Para el caso del plano, los sub-grupos uniformemente discontinuos tiene uno o dos generadores que pueden ser traslaciones o reflexiones seguidas de traslaciones. Estas últimas se denominan reflexiones con deslizamiento. Para el espacio, la situación es un poco más variada y se pueden tener uno, dos o tres generadores entre traslaciones, rotaciones con torcimiento y reflexiones con deslizamiento. En particular se demuestra que en el plano se tienen 4 grupos uniformemente discontinuos de isometrías euclidianas y en el espacio tridimensional se tienen 18. Se dan también para cada uno de ellos el conjunto de sus generadores.

En el último capítulo se introduce el concepto de espacio localmente euclidiano como aquellos espacios topológicos que dotados de una métrica son localmente isométricos a una vecindad cerrada de radio constante del espacio vectorial euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Además supondremos propiedad de conexidad para estos espacios. La importancia de estos espacios radica en que se pueden introducir y generalizar de manera natural objetos geométricos de la geometría euclidiana usual como segmentos de línea, rectas, ángulos, poligonales, etc. Aquí se presentan ejemplos de estos espacios en dimensión dos denominadas superficies euclidianas y en dimensión tres denominados espacios euclidianos tri-dimensionales. Los ejemplos presentados corresponden a espacios cocientes definidos mediante relaciones de equivalencia entre puntos del plano o del espacio asociadas a acciones de sub-grupos uniformemente discontinuos. Por ejemplo se muestra que el Cilindro, el Toro, la Botella de Klein y La Banda de Möbius son espacios que admiten una métrica localmente isométrica con la euclidiana. Así también en el caso de tres dimensiones se muestran ejemplos de espacios euclidianos que son generalizaciones de los de dos dimensiones como toros tridimensionales, especies de bandas y botellas con torcimientos, etc.

Finalmente, en el último capítulo se introducen los conceptos que nos permitirán probar el llamado Teorema de Clasificación de espacios euclidianos debido a los grandes matemáticos H. Hopf (19 Noviembre 1894 - 3 Junio 1971) [3] y Killing (10 Mayo 1847 - 11 Febrero 1923) [4]. Este teorema afirma que un espacio euclidiano  $M$  es isométrico al espacio de órbitas correspondiente a la acción de un grupo uniformemente discontinuo de isometrías euclidianas del espacio  $\mathbb{R}^n$ . Este grupo es el grupo de transformaciones se asocia una función especial  $p$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $M$  que se construye asociando a cada segmento de recta por el origen de  $\mathbb{R}^n$ , un segmento de recta en  $M$  que parte de un punto inicial arbitrario de  $M$ . Esa función resulta ser una función suprayectiva y tiene la propiedad de ser una función cubriente, es decir cada punto de  $M$  posee una vecindad cuya imagen inversa bajo la función  $p$  esta formada de abiertos ajenos sobre los cuales  $p$  es una isometría. Se introduce enseguida sobre  $\mathbb{R}^n$  la relación de equivalencia  $\sim$  cuyas clases se forman con los puntos de  $\mathbb{R}^n$  que bajo la función cubriente  $p$  tienen una misma imagen en  $M$  y se considera el espacio cociente  $\mathbb{R}^n / \sim$  y se muestra que dichas clases corresponden a las órbitas de un grupo uniformemente discontinuo de isometrías euclidianas de  $\mathbb{R}^n$  asociado a la función  $p$  y que se denomina el grupo cubriente. Enseguida se observa que  $M$  y el espacio cociente  $\mathbb{R}^n / \sim$  son isométricos, lo que concluye la prueba.

En cuanto a la originalidad de este trabajo podemos decir que consiste en el hecho de presentar en forma completa y rigurosa los distintos conceptos y resultados sobre la clasificación de los espacios localmente euclidianos. Los materiales que en español se tiene sobre el problema de clasificación que nos ocupa generalmente se reducen al caso bi-dimensional. Aquí nosotros presentamos los resultados en su mayor generalidad y en particular mostramos la lista completa de los espacios en tres dimensiones que son localmente euclidianos.

# Capítulo 1

## Clasificación de isometrías euclidianas en $\mathbb{R}^n$

En este capítulo presentamos los conceptos básicos relativos a la métrica euclidiana y sus isometrías. Se recomienda para una mayor información los textos: "Foundations of Linear Algebra" [5] y "Linear Algebra and Geometry" [6].

### 1.1 Isometrías euclidianas en $\mathbb{R}^n$

Consideremos el espacio vectorial  $n$ -dimensional

$$\mathbb{R}^n = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

dotado del producto interior euclidiano dado por

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Esta estructura define una métrica en  $\mathbb{R}^n$  denominada métrica euclidiana, definida mediante

$$d_{\mathbb{R}^n}(X, Y) = \sqrt{(X - Y) \cdot (X - Y)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Recordemos que para cada vector  $X$  en  $\mathbb{R}^n$  el producto interior euclidiano define su llamada norma euclidiana mediante  $\|X\| = \sqrt{X \cdot X}$

**Definición 1.1** Una Isometría Euclidiana es una función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que preserva la métrica euclidiana, es decir,

$$d_{\mathbb{R}^n}(F(X), F(Y)) = d_{\mathbb{R}^n}(X, Y), \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$$

De la definición es claro ver que las isometrías son funciones inyectivas, pues si  $F(X) = F(Y)$  entonces,  $d_{\mathbb{R}^n}(F(X), F(Y)) = 0$ , pero como  $F$  es isometría, entonces  $d_{\mathbb{R}^n}(X, Y) = 0$ , por lo tanto  $X = Y$ .

**Proposición 1.1.1** Las isometrías de  $\mathbb{R}^n$  son cerradas bajo la operación de composición de funciones.

*Demostración.* Sean  $F_1, F_2$  isometrías de  $\mathbb{R}^n$ . Sean  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^n}(F_1 \circ F_2(X), F_1 \circ F_2(Y)) &= d_{\mathbb{R}^n}(F_1(F_2(X)), F_1(F_2(Y))) \\ &= d_{\mathbb{R}^n}(F_1(X), F_1(Y)) \\ &= d_{\mathbb{R}^n}(X, Y) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $I_1 \circ I_2$  es una isometría en  $\mathbb{R}^n$ . ■

Toda isometría euclidiana  $F$  se puede descomponer de manera única en la forma  $F = T_\alpha \circ G$ , y  $T_\alpha$  es la isometría dada por la traslación  $T_\alpha(X) = X + \alpha$ , con  $\alpha = F(O)$ . Note que  $G = T_{-\alpha} \circ F$  es una isometría tal que  $G(O) = O$  ( $O$  denota el origen), es decir deja fijo el origen.

**Teorema 1.1.2** *Una función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $F(O) = O$  es isometría, si y solo si, preserva el producto interior euclidiano, es decir  $F(X) \cdot F(Y) = X \cdot Y$ ,  $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Primero probaremos que si una función preserva la norma euclidiana entonces es una isometría euclidiana que transforma el origen en el origen y recíprocamente, si  $F$  es una isometría euclidiana que transforma el origen en el origen entonces preserva la norma, a partir de esto probaremos que entonces preserva el producto interior.

$F$  preserva la norma, esto quiere decir que para cada  $X$ ,  $\|F(X)\| = \|X\|$ , claramente esto significa que manda el origen en el origen. Por otro lado, si  $X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$d_{\mathbb{R}^n}(X, Y) = \|X - Y\|$$

y entonces

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^n}(F(X), F(Y)) &= \|F(X) - F(Y)\| \\ &= \|X - Y\| \\ &= d_{\mathbb{R}^n}(X, Y) \end{aligned}$$

y por lo tanto  $F$  resulta ser una isometría euclidiana. Recíprocamente si  $F$  es una isometría euclidiana y  $F(O) = O$ , entonces para cada  $X \in \mathbb{R}^n$  se tiene

$$\begin{aligned} \|X\| &= d_{\mathbb{R}^n}(X, O) \\ &= d_{\mathbb{R}^n}(F(X), F(O)) \\ &= d_{\mathbb{R}^n}(F(X), O) \\ &= \|F(X)\| \end{aligned}$$

lo cual prueba que  $F$  preserva la norma.

Ahora probaremos que si una función preserva la norma euclidiana entonces preserva el producto interior euclidiano y recíprocamente.

Supongamos que  $F$  preserva la norma. Tomemos dos puntos  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  y calculemos  $F(X) \cdot F(Y)$ . De las propiedades del producto punto se tiene

$$\begin{aligned} F(X) \cdot F(Y) &= \frac{1}{2}[F(X) \cdot F(X) + F(Y) \cdot F(Y) - \|F(X) - F(Y)\|^2] \\ &= \frac{1}{2}[\|F(X)\|^2 + \|F(Y)\|^2 - \|F(X) - F(Y)\|^2] \\ &= \frac{1}{2}[\|X\|^2 + \|Y\|^2 - \|X - Y\|^2] \\ &= \frac{1}{2}[X \cdot X + Y \cdot Y - \|X - Y\|^2] \\ &= X \cdot Y \end{aligned}$$

Recíprocamente si  $F$  preserva el producto interior veamos que preserva la norma. Sea  $X \in \mathbb{R}^n$ , luego

$$\begin{aligned}\|X\|^2 &= X \cdot X \\ &= F(X) \cdot F(X) \\ &= \|F(X)\|^2\end{aligned}$$

Demostrando así que toda isometría euclidiana que manda el origen en el origen preserva el producto interior. ■

Ahora probaremos que toda isometría euclidiana  $F$  que transforma el vector cero en el vector cero es una función lineal. Primero veremos que transforma rectas en rectas.

**Lema 1.1.3** *Toda isometría euclidiana  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que  $F(O) = O$ , transforma rectas en rectas.*

*Demostración.* Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  isometría euclidiana que deja fijo el origen. Sea  $\lambda$  la recta formada por los puntos  $X = P + \lambda Q$  con  $\lambda$  un número real,  $P, Q \in \mathbb{R}^n$ . Probaremos que  $F(X) = F(P) + \lambda F(Q)$ , es decir transforma la recta generada por  $P$  y  $Q$  en la recta generada por  $F(P)$  y  $F(Q)$ . Basta observar

$$d_{\mathbb{R}^n}(F(P + \lambda Q), F(P) + \lambda F(Q)) = 0, \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^n$$

Para esta demostración usaremos fuertemente el teorema anterior.

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{R}^n}(F(P + \lambda Q), F(P) + \lambda F(Q)) &= \|F(P + \lambda Q) - F(P) - \lambda F(Q)\|^2 \\ &= (P + \lambda Q) \cdot (P + \lambda Q) + P \cdot P + \lambda^2(Q \cdot Q) - 2(P + \lambda Q) \cdot P \\ &\quad - 2\lambda(P + \lambda Q) \cdot Q + 2\lambda(P \cdot Q) = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $F(P + \lambda Q) = F(P) + \lambda F(Q)$  y  $F$  transforma rectas en rectas. ■

Como toda isometría es la composición de una traslación y una isometría que fija el origen, entonces podemos decir que toda isometría transforma rectas en rectas ya que toda traslación también envía rectas en rectas.

**Teorema 1.1.4** *Las isometrías  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $F(O) = O$  son transformaciones lineales.*

*Demostración.* Aplicando directamente el resultado anterior se tiene que si  $P, Q \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda$  real, entonces  $F(P + \lambda Q) = F(P) + \lambda F(Q)$ , es decir  $F$  es una transformación lineal. ■

Con lo probado anteriormente concluimos que las isometrías  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que mandan el cero en el cero son suprayectivas, pues estas isometrías son transformaciones lineales inyectivas, y además  $\mathbb{R}^n$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ , y la isometría manda valores de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Como, por el argumento anterior, las isometrías euclidianas que dejan fijo el cero son sobrees, y además las traslaciones también lo son, entonces las isometrías euclidianas formadas por la composición de estas dos también lo son. Ahora, como toda isometría euclidiana se puede

descomponer como la composición de una traslación con una isometría euclidiana que fija el origen, entonces toda isometría euclidiana es una función biyectiva. De lo anterior tenemos que toda isometría euclidiana tiene inversa que es también una isometría euclidiana.

De los resultados anteriores podemos asegurar que el conjunto de isometrías euclidianas forman un grupo de transformaciones bajo la operación composición.

## 1.2 Clasificación de isometrías euclidianas en $\mathbb{R}^2$

Tomando en cuenta que toda isometría euclidiana es de la forma  $T_\alpha R$ , con  $R$  isometría lineal, la clasificación de las isometrías euclidianas se reduce a la clasificación de isometrías euclidianas lineales.

En el caso del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^2$ , si  $F$  es una isometría euclidiana lineal, su valores propios son en general dos números complejos  $\lambda_1, \lambda_2$ , ambos de norma uno y entonces se tienen las siguientes casos para el espectro de  $F$ :

a)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$

b)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

c)  $\lambda_1 = e^{i\theta}, \lambda_2 = e^{-i\theta}$

En el primer caso,  $R$  es la isometría identidad.

En el segundo caso,  $R$  tiene dos vectores propios,  $v_1, v_2$ , con  $R(v_1) = v_1, R(v_2) = -v_2$ , además como es isometría euclidiana

$$\begin{aligned} R(v_1) \cdot R(v_2) &= v_1 \cdot v_2 \\ &= v_1 \cdot (-v_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

es decir,  $v_1$  es perpendicular a  $v_2$  y entonces  $R$  es una reflexión sobre la recta generada por  $v_1$ . Esta isometría euclidiana la denotaremos por  $S^v$ , donde  $v$  es el vector generador de la recta de reflexión.

En el tercer caso,  $R$  es una rotación alrededor del origen con un ángulo  $\theta$ . Denotaremos a esta isometría como  $R_\theta$ .

Por lo tanto, si  $F$  es una isometría euclidiana entonces será de la forma:

Caso	Notación	Isometría
a)	$F = T_\alpha$	Traslación
b)	$F = T_\alpha S^v$	Reflexión con deslizamiento
c)	$F = T_\alpha R_\theta$	Rotación seguida de una traslación

**Lema 1.2.1** *Todo punto en el plano esta determinado por su distancia a tres puntos no colineales  $A, B, C$ .*

*Demostración.* Esto tiene que ser así, pues si no lo fuera, entonces podríamos tomar dos puntos  $P$  y  $Q \in \mathbb{R}^2$ ,  $P \neq Q$ , tales que  $d_{\mathbb{R}^2}(P, Q) = d_{\mathbb{R}^2}(Q, A)$ ,  $d_{\mathbb{R}^2}(P, B) = d_{\mathbb{R}^2}(Q, B)$  y  $d_{\mathbb{R}^2}(P, C) = d_{\mathbb{R}^2}(Q, C)$ , entonces los puntos  $A, B, C$ , tendrían que estar en la mediatriz de  $P$  y  $Q$ , pero antes dijimos que  $A, B, C$  no son colineales, por lo tanto  $P = Q$ . ■

**Lema 1.2.2** *Cualquier isometría  $F$  de  $\mathbb{R}^2$  es determinada por las imágenes  $F(A), F(B), F(C)$ , de tres puntos  $A, B, C$  no colineales.*

*Demostración.* Basta demostrar que para cada  $P \in \mathbb{R}^2$  distinto de  $A, B, C$  el punto  $F(P)$  esta totalmente determinado. Esto es así, pues, por el lema anterior, solo puede existir un punto  $F(P)$  tal que  $d_{\mathbb{R}^2}(F(P), F(A)) = d_{\mathbb{R}^2}(P, A)$ ,  $d_{\mathbb{R}^2}(F(P), F(B)) = d_{\mathbb{R}^2}(P, B)$  y  $d_{\mathbb{R}^2}(F(P), F(C)) = d_{\mathbb{R}^2}(P, C)$ . ■

### 1.2.1 Fórmulas explícitas de las isometrías euclidianas en el plano

- Reflexión sobre una recta  $L$  de la forma  $y = mx$ .

$$S^L(x, y) = \left( \frac{2my + (1 - m^2)x}{1 + m^2}, \frac{2mx - (1 - m^2)y}{1 + m^2} \right)$$

La reflexión también se puede calcular como

$$S_{(p,L)}(\mathbf{X}) = 2((\mathbf{X}-\mathbf{p} \cdot L)L) - \mathbf{X}-\mathbf{p}$$

donde  $p$  es el punto donde pasa el eje de reflexión paralelo al vector unitario  $L$ .

- Traslación por un vector  $(\alpha, \beta)$ .

$$T_{(\alpha,\beta)}(x, y) = (x + \alpha, y + \beta)$$

La traslación también se puede calcular como

$$T_{\alpha}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \alpha$$

donde  $\alpha$  es el vector de traslación.

- Rotación con el origen como centro y por un ángulo  $\theta$ .

$$R_{\theta}(x, y) = (x\cos\theta - y\sen\theta, x\sen\theta + y\cos\theta)$$

- Rotación con un punto  $p$  arbitrario como centro y por un ángulo  $\theta$ . Estas rotaciones son de la forma  $R_{\theta,p} = T_p \circ R_{\theta} \circ T_{-p}$ , con  $T_p$  y  $T_{-p}$  traslaciones y  $R_{\theta}$  una rotación con centro en el origen. La rotación  $R_{\theta,p}$  es también una isometría, pues las isometrías son cerradas bajo la operación composición.



### 1.3 Clasificación de isometrías euclidianas en $\mathbb{R}^3$

Sea  $F$  una isometría euclidiana lineal en  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{X}$  un vector en  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $F(\mathbf{X}) = A\mathbf{X}$ ,  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  matriz invertible.

Denotemos por  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  los valores propios de  $F$  los cuales deberán tener como números complejos norma unitaria. Entonces para el espectro de  $F$  tendremos los siguientes casos:

- a)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1 \rightarrow$  Identidad
- b)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1 \rightarrow$  Reflexión sobre el plano generado por los vectores propios asociados a 1
- c)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = e^{i\theta}, \lambda_3 = e^{-i\theta} \rightarrow$  Rotación por un ángulo  $\theta$  alrededor del vector propio asociado a  $\lambda_1$
- d)  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = e^{i\theta}, \lambda_3 = e^{-i\theta} \rightarrow$  Rotación por un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $V$ , donde  $V$  es el vector propio asociado a  $\lambda_1$ , en seguida de una reflexión sobre el plano generado por los vectores propios asociados a  $\lambda_2, \lambda_3$

#### 1.3.1 Fórmulas explícitas de las isometrías euclidianas en el espacio

- Reflexión sobre el plano con vector normal  $N$  y que pasa por el origen.

$$S^N(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - 2(N \cdot \mathbf{X})N$$

- Traslación por un vector  $\alpha \in \mathbb{R}^3$

$$T_\alpha(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \alpha$$

- Rotación con eje  $L$ ,  $|L| = 1$ , y ángulo  $\theta$

$$R_{L,\theta}(\mathbf{X}) = (1 - \cos\theta)(\mathbf{X} \cdot L)\mathbf{X} + (\cos\theta)L + (\mathbf{X} \times L)\text{sen}\theta$$

- Rotación con un punto  $p$  arbitrario como centro y por un ángulo  $\theta$ . Estas rotaciones, al igual que en el caso del plano, son de la forma  $R_{\theta,p} = T_p \circ R_\theta \circ T_{-p}$ , con  $T_p$  y  $T_{-p}$  traslaciones y  $R_\theta$  una rotación con centro en el origen. La rotación  $R_{\theta,p}$  es también una isometría, pues las isometrías son cerradas bajo la operación composición.

## Capítulo 2

### Grupos uniformemente discontinuos de isometrías euclidianas

En este capítulo presentamos el concepto de grupo uniformemente discontinuo de isometrías euclidianas, así como algunas de sus propiedades que nos permitirán clasificarlos para el caso de isometrías en el plano y posteriormente en el espacio.

#### 2.1 Grupos uniformemente discontinuos

**Definición 2.1** *Un subgrupo  $\Gamma$  de isometrías del espacio se dice uniformemente discontinuo si existe un número real  $r > 0$  tal que si  $X \in \mathbb{R}^n$  y  $G \in \Gamma$  con  $X \neq G(X)$ ; se tiene que  $d_{\mathbb{R}^n}(X, G(X)) \geq r$ .*

Como propiedades más importantes de los grupos uniformemente discontinuos de isometrías se tienen las siguientes dos:

**Proposición 2.1.1** *Sea  $\Gamma$  un grupo uniformemente discontinuo de isometrías del espacio  $\mathbb{R}^n$ ; entonces: Si  $G \in \Gamma$  con  $G \neq \text{Identidad}$ ; no existe  $X \in \mathbb{R}^n$  tal que  $G(X) = X$ . Es decir, ningún elemento de  $\Gamma$  distinto de la identidad puede dejar puntos fijos.*

*Demostración.* Supongamos que para un elemento  $G \in \Gamma$  con  $G$  distinto de la identidad exista  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  con  $G(X_0) = X_0$ . Siendo  $G$  una función continua, dada una bola abierta  $B_{G(X_0)}$  con centro en  $G(X_0)$  y radio igual a  $\frac{r}{3}$  existe una bola abierta  $B_\delta(X_0)$  con centro en  $X_0$  de radio  $\delta < \frac{r}{3}$  tal que  $G(B_\delta(X_0)) \subset B_{\frac{r}{3}}(G(X_0))$ . Siendo  $G(X_0) = X_0$ , se tendría que la imagen de cada punto  $X$  de  $B_\delta(X_0)$  bajo  $G$  estaría a una distancia menor que  $\frac{r}{3}$  de dicho punto  $X$ . Como  $G$  no es la identidad, la distancia entre  $X$  y  $G(X)$  debe ser mayor o igual a  $r$ , lo cual no se daría para al menos un punto de  $B_\delta(X_0)$ , contradiciéndose la propiedad de  $\Gamma$  de ser uniformemente discontinuo. ■

**Lema 2.1.2** *Para cada elemento  $T_\rho R$  con  $R$  isometría lineal de un grupo  $\Gamma$  uniformemente discontinuo de isometrías, el conjunto definido por la órbita del origen bajo el subgrupo  $\Gamma^*$  de traslaciones del grupo  $\Gamma$ , es invariante bajo el operador  $R$ .*

*Demostración.* Efectivamente, si  $T_\alpha \in \Gamma^*$  y  $T_\rho R \in \Gamma$  con  $R$  isometría lineal, se tiene  $T_\rho R \circ T_\alpha = T_{R(\alpha)} \circ T_\rho R$ , luego,  $T_{R(\alpha)} = T_\rho R \circ T_\alpha \circ (T_\rho R)^{-1} \in \Gamma$  y entonces la traslación  $T_{R(\alpha)} \in \Gamma^*$ . Es decir, si  $T_\alpha \in \Gamma^*$  y  $T_\rho R \in \Gamma$ , entonces  $T_{R(\alpha)} \in \Gamma^*$ . ■

Las propiedades anterior nos permite clasificar los posibles grupos uniformemente discontinuos de isometrías. Por ejemplo, en el plano, los posibles elementos de un grupo uniformemente

discontinuo solo pueden ser traslaciones o elementos de la forma  $T_\alpha S^v$  con  $S^v$  una reflexión sobre una recta generada por el vector  $v$  y que pasa por el origen. Note que un grupo uniformemente discontinuo de isometrías en el plano no puede tener elementos de la forma  $T_\alpha R$  con  $R = R_\theta$  una rotación con  $\theta \neq k\pi$ ,  $k$  un número entero, ya que teniendo en cuenta que  $R_\theta - I$  es una matriz invertible si  $\theta \neq k\pi$  entonces existiría  $X$  tal que  $T_\alpha R(X) = X$  lo cual no es posible para ningún elemento de un grupo uniformemente discontinuo. Tomando en cuenta que con  $R_{k\pi}$  es una reflexión si  $k$  es impar y es la identidad si  $k$  es par, podemos afirmar que  $\Gamma$  solo tiene traslaciones o reflexiones sobre rectas con deslizamiento.

**Proposición 2.1.3** *Todo grupo uniformemente discontinuo de isometrías del plano  $\Gamma$  solo puede ser generado por una o dos traslaciones o una reflexión con deslizamiento o una traslación y una reflexión con deslizamiento en una dirección con componente no nula sobre el eje de reflexión.*

Análogamente, en la siguiente proposición presentamos los tipos de isometrías que pueden ser parte de un grupo uniformemente discontinuo de isometrías del espacio tridimensional.

**Proposición 2.1.4** *Los elementos de un grupo unif. discontinuo de isometrías euclidianas en el espacio solo pueden ser traslaciones  $T_\alpha$ , torcimientos  $T_\alpha R_{l,\theta}$  donde  $\alpha \cdot l \neq 0$  y reflexiones con deslizamientos  $T_\alpha S^\Pi$  donde  $\alpha$  es un vector cuya componente a lo largo del plano de reflexión  $\Pi$  es distinta de cero.*

*Demostración.* Tomando en cuenta que toda isometría es de la forma  $T_\alpha R$  con  $T_\alpha$  una traslación y  $R$  una isometría lineal, basta observar que las distintas formas que puede tomar  $R$  estan dadas por sus posibles formas de Jordan. Como el polinomio característico  $p(x)$  de  $R$  es de grado tres y  $R$  es isometría, cada valor propio debe tener norma 1. Lo anterior nos lleva a los siguientes posibles conjuntos de raíces para  $p(x)$ : a)  $(1, 1, 1)$  que corresponde a la Identidad, b)  $(1, 1, -1)$  corresponde a una reflexión sobre un plano que pasa por el origen; c)  $(1, e^{i\theta}, e^{-i\theta})$  corresponde a una rotación con ángulo  $\theta$  alrededor de un eje; c)  $(-1, e^{i\theta}, e^{-i\theta})$  corresponde a una rotación con ángulo  $\theta$  alrededor de un eje seguido de una reflexión sobre el plano que pasa por el origen y es perpendicular a ese eje. Note que el caso  $(1, -1, -1)$  es una rotación con un ángulo  $\pi$  y que  $(-1, -1, -1)$  es una reflexión central y esta incluida en el caso c). Finalmente note que de las isometrías de la forma  $T_\alpha R$  con  $\alpha \neq 0$ , aquellas de la forma  $T_\alpha R_{l,\theta} S^\Pi$  donde el eje de rotación  $l$  es paralelo a la normal al plano de reflexión  $\Pi$  dejan siempre un punto fijo y por lo tanto no puede ser elemento de algun grupo uniformemente discontinuo. ■

## 2.2 Clasificación de grupos uniformemente discontinuos de isometrías euclidianas en el plano

Observemos primero que en el plano las únicas isometrías que no dejan punto fijo son las traslaciones y las isometrías de la forma  $T_\alpha S^v$  donde  $S^v$  denota la reflexión sobre la recta generada por el vector  $v$  que pasa por el origen. Note que las isometrías de la forma  $T_\alpha R_\theta$  donde  $R_\theta$  denota la rotación alrededor del origen por un ángulo  $\theta = k\pi$ ,  $k$  entero, siempre tienen punto fijo y por lo tanto se excluyen de todo grupo uniformemente discontinuo de isometrías euclidianas.

Existen en el plano cuatro posibilidades para un grupo uniformemente discontinuo  $\Gamma$  y su subgrupo de traslaciones  $\Gamma^*$ . A saber se tienen los siguientes casos:

- 1)  $\Gamma = Id$   $\Gamma^* = Id$
- 2)  $\Gamma \neq Id$   $\Gamma^* = Id$
- 3)  $\Gamma \neq Id$   $\Gamma^* = \langle t_{n\alpha} \rangle$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
- 4)  $\Gamma \neq Id$   $\Gamma^* = \langle t_{n\alpha+m\beta} \rangle$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$

El caso 1) es el caso trivial, y el espacio cociente resulta equivalente topológicamente al plano euclidiano.

El caso 2) nunca se presenta ya que si  $\Gamma$  no contiene traslaciones salvo la identidad, podría entonces solo tener isometrías de la forma  $T_\alpha S^v$  con  $\alpha$  un vector que tiene componente no nula sobre la recta de reflexión generada por el vector  $v$ . En ese caso  $T_\alpha S^v \circ T_\alpha S^v = T_{\alpha+S^v(\alpha)} = T_{2\alpha}$  y como supusimos que  $\Gamma^* = Id$ , se tendría que  $\alpha = 0$ , lo cual nos llevaría a que  $S^v \in \Gamma$  lo cual no es posible ya que  $S^v$  deja fija toda una recta y esto no es posible para elementos de un grupo uniformemente discontinuo.

Para el caso 3), se tienen dos posibles subcasos: el primer subcaso es que  $\Gamma = \Gamma^* = T_{n\alpha}$ , aquí el grupo  $\Gamma$  está generado por la isometrías  $G_n(x, y) = (x+n, y)$  para toda  $n$  entera, en este caso el espacio cociente es topológicamente equivalente al cilindro.

El segundo subcaso es que  $\Gamma$  tenga elementos que no sean traslaciones, luego tendrían que ser reflexiones con deslizamiento, es decir, serían isometrías euclidianas de la forma  $T_\rho S^v$  con  $\rho$  tal que tiene componente a lo largo de la recta generada por  $v$ . Pero como  $T_\rho S^v \circ T_\rho S^v = T_{2\rho}$ , tomando  $\rho = \frac{\alpha}{2}$ , el subgrupo  $\langle T_{n\alpha} \rangle$  se generaría mediante  $(T_\rho S^v)^{2n} = T_{n\alpha}$  y el grupo  $\Gamma$  estaría generado por una reflexión con deslizamiento de la forma  $T_{\frac{\alpha}{2}} S^v$ . Tomando  $v = e_1$  y  $\alpha = (\frac{1}{2}, 0)$ , el grupo  $\Gamma$  estaría generado por la isometría  $I(x, y) = (x+1, -y)$  y todos sus elementos serían de la forma  $G_n(x, y) = (x+n, (-1)^n y)$  para  $n \in \mathbb{Z}$ . En este caso el espacio cociente es topologicamente equivalente a la banda de Möbius.

En el caso 4), tenemos también dos posibles subcasos: el primer subcaso se da cuando  $\Gamma$  solo contiene las traslaciones  $T_{n\alpha, m\beta}$  donde supondremos que  $\alpha = (1, 0)$  y  $\beta = (0, 1)$ . En este subcaso el grupo  $\Gamma$  estaría generado por las isometrías  $g_n(x, y) = (x+n, y)$  y  $h_m(x, y) = (x, y+m)$  con  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Aquí el espacio cociente resulta ser topológicamente equivalente al toro.

El segundo subcaso se tiene cuando  $\Gamma$  contiene reflexiones con deslizamiento  $T_\rho S^v$  donde  $v$  es el vector generador de una recta que es paralela a alguno de los vectores  $\alpha$  o  $\beta$  (digamos  $\alpha$ ). Ahora el grupo  $\Gamma$  es generado por  $T_{\frac{\alpha}{2}} S^v$  y  $T_\beta$ , o por  $T_{\frac{\beta}{2}} S^u$  y  $T_\alpha$  con  $u$  vector paralelo a  $\beta$ . Si tomamos  $\alpha = e_1$  y  $\beta = e_2$ , los elementos del grupo  $\Gamma$  son de la forma  $g_{n,m} = (T_{\frac{e_1}{2}} S^v)^n \circ T_{e_2}^m(x, y) = (T_{\frac{e_1}{2}} S^v)^n(x, y+m) = (x + \frac{n}{2}, (-1)^n(y+m))$  (note que  $g_{2n,0} = T_{n\alpha}$  y  $g_{0,m} = T_{m\beta}$ ). En este caso el espacio cociente resulta ser topológicamente equivalente a la botella de Klein.

## 2.3 Simetrías de retículas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Tomando en cuenta que la isometría lineal que corresponde a cada elemento de un grupo discontinuo de isometrías  $\Gamma$  preserva la órbita del cero bajo el subgrupo de traslaciones  $\Gamma^*$  abordamos aquí el problema de la clasificación de las retículas en dos y tres dimensiones.

### 2.3.1 Simetrías de retículas bi-dimensionales

Para clasificar los grupos uniformemente discontinuos en el espacio presentamos primero la clasificación de las simetrías de retículas en el plano.

Sea  $\mathcal{L}$  la retícula bi-dimensional generada por los vectores  $\alpha$  y  $\beta$  con  $\alpha \times \beta \neq 0$ . Supondremos sin pérdida de generalidad que  $\alpha = e_1$  y  $\beta \cdot e_3 = 0$ . La retícula  $\mathcal{L}$  viene dada por,

$$\mathcal{L} = \{ne_1 + m\beta, \text{ con } n, m \in \mathbb{Z}\}$$

Las isometrías del espacio tridimensional que dejan invariante la retícula bidimensional  $\mathcal{L}$  son rotaciones alrededor del eje de las zetas y reflexiones sobre planos perpendiculares al plano  $xy$ , esto nos permite decir que el estudio de las isometrías de una retícula bi-dimensional se reduce al estudio de simetrías del plano que dejan fijo una retícula del mismo plano. Si denotamos por  $M$  la  $2 \times 2$ -matriz cuyas columnas son  $e_1$ ,  $\beta$  y  $R$  es una rotación del plano  $xy$  alrededor del origen con un ángulo  $\theta$  que deja invariante  $\mathcal{L}$  se tendrá

$$RM = ME$$

donde  $E$  es una matriz cuyas entradas son números enteros. Luego,  $R = MEM^{-1}$  y la matriz  $E$  tendrá por determinante 1 y traza igual  $2\cos\theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo de rotación. Siendo  $E$  con entradas enteras, tendremos para la traza de  $R$

$$2\cos\theta \in \mathbb{Z}$$

y entonces los posibles valores para  $\cos\theta$  son  $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$  y los ángulos de rotación permitidos son  $\theta = \pi, \theta = \frac{2\pi}{3}, \theta = \frac{4\pi}{3}, \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{3\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}, \theta = \frac{5\pi}{3}, \theta = 0$ . Note que si  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  entonces  $\mathcal{L}$  es una retícula cuadrada, si  $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$  la retícula está formada de triángulos equiláteros, si  $\theta = 0, \pi$  entonces la retícula es arbitraria.

En cuanto a las simetrías que son reflexiones  $R$  sobre planos perpendiculares al de la retícula  $\mathcal{L}$  y la preservan, si  $L$  es la recta intersección del plano de reflexión con el plano de la retícula, entonces si  $\rho = n\alpha + m\beta \in \mathcal{L}$  se tiene que  $\rho - R(\rho) \in \mathcal{L}$ ;  $\rho + R(\rho) \in L$  y  $(\rho - R(\rho)) \cdot (\rho + R(\rho)) = 0$ . Note que el punto  $\rho + R(\rho)$  forma con  $\rho$  y el origen un triángulo isósceles con base sobre  $L$ . Luego, la sub-retícula sobre  $L$  estará generada por el vector  $\alpha + R(\alpha)$  más cercano al origen y entonces los puntos de  $\mathcal{L}$  se encuentran dispuestos sobre rectas paralelas entre sí y perpendiculares a  $L$  separadas sobre  $L$  en una distancia igual a la mitad de la norma del generador de la sub-retícula sobre  $L$  o igual a la norma del generador de la sub-retícula en el caso de que el generador de  $\mathcal{L}$  más cercano al origen se encuentra sobre  $L$ .

Lo anterior nos lleva a que  $\mathcal{L}$  es una retícula rectangular generada por dos vectores  $\alpha$  y  $\beta$  perpendiculares o es una retícula formada de rombos. En este último caso, el eje de reflexión coincide con la recta que pasa por el origen y el centro del rombo cuyo vértice es el origen.

En este último caso los ejes de reflexión que dejan invariante la retícula  $\mathcal{L}$  son las rectas que pasan por el centro del rombo o coincide, en el caso de que el rombo sea un cuadrado, pasan por los lados o el centro del rombo con vértice en el origen.

De acuerdo a los grupos de isometrías euclidianas lineales del espacio bajo las cuales puede ser invariante una retícula bi-dimensional, las formas posibles de retículas con simetrías son las siguientes:

**Proposición 2.3.1** (a) *Todas las retículas bi-dimensionales son invariantes bajo la identidad, la reflexión sobre el plano de la retícula y las rotaciones por un ángulo  $\pi$  alrededor de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la retícula.*

(b) *Las retículas que son invariantes bajo las rotaciones con ángulos  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ , son generadas por dos vectores de la misma norma y perpendiculares entre sí. Ver Figura 2.1.*

(c) *Las retículas invariantes bajo las rotaciones por  $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ , son las generadas por dos vectores de la misma norma que hacen un ángulo de  $\frac{\pi}{3}$ .*

- (d) *Las retículas que son invariantes bajo la reflexión sobre una recta  $L$  que parte del origen, son aquellas generadas por dos vectores independientes con la misma magnitud tales que forman un mismo ángulo con la recta  $L$  o son generadas por dos vectores perpendiculares donde uno de ellos descansa sobre la recta  $L$ . Ver Figura 2.2.*

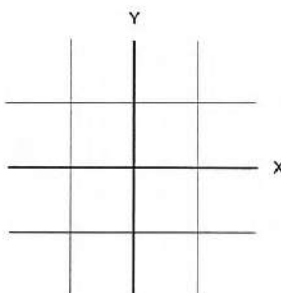


Figura 2.1: Retícula cuadrangular

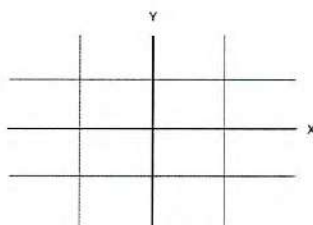


Figura 2.2: Retícula rectangular

### 2.3.2 Simetrías de retículas tri-dimensionales

Sea  $\mathcal{L}$  la retícula en  $\mathbb{R}^3$  generada por los vectores  $\alpha, \beta$ , y  $\gamma$ , con  $(\alpha \times \beta) \cdot \gamma \neq 0$

$$\mathcal{L} = \{n\alpha + m\beta + p\gamma, \text{ con } n, m, p \in \mathbb{Z}\}.$$

Sea  $R$  una isometría lineal que deja invariante a  $\mathcal{L}$ . En este apartado clasificaremos las retículas en  $\mathbb{R}^3$  que tienen simetrías euclidianas lineales. Distinguiremos dos casos:

Primero cuando la retícula tiene una isometría dada por una rotación y después cuando la retícula tenga una reflexión sobre algún plano como una de sus isometrías.

Si  $R$  es una rotación con un ángulo  $\theta \neq \pi$  entre los vectores  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  que generan a  $\mathcal{L}$ . Supongamos que  $\alpha$  es de norma mínima que no coincida con el eje de rotación, entonces  $R(\alpha)$  será también un vector de la retícula con la misma norma que  $\alpha$ , luego tendrá que coincidir con alguno de los otros dos restantes, digamos que  $R(\alpha) = \beta$  y por lo tanto, el sub-espacio  $P$  generado por  $\alpha$  y  $\beta$  quedara invariante y también la sub-retícula  $\mathcal{J} = \{n\alpha + m\beta, \text{ con } n, m \in \mathbb{Z}\}$  quedara invariante. Entonces tendremos que  $\mathcal{J}$  es una retícula bi-dimensional y  $R$  restringida al plano  $P$  será una isometría de  $\mathcal{J}$ , y tomando en cuenta el análisis hecho arriba para isometrías de retículas bi-dimensionales tendremos entonces que el ángulo de rotación  $\theta$  será tal que  $2\cos(\theta) \in \mathbb{Z}$ . En cuanto al otro generador  $\gamma$  que se encuentra fuera del plano  $P$ , lo podremos tomar normal al

plano  $P$ , ya que si no fuera normal a  $P$  se puede expresar en la forma  $\gamma = \rho + \sigma$  con  $\rho$  normal a  $P$  y  $\sigma$  tangente a  $P$ . Por otro lado  $R$  deja invariante al plano trasladado  $D = \rho + P$ . Entonces los puntos de la retícula  $\sigma + n\alpha + m\beta$  sobre el plano  $\rho + P$  deberían también quedar invariante bajo la rotación, esto obliga a que  $\sigma$  sea de la forma  $n_0\alpha + m_0\beta$ , con  $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}$ . Luego, podremos tomar como generadores de este tipo de retículas  $\alpha, \beta$  y  $\rho$  con  $(\rho \times \alpha) \times \beta = 0$ ,  $\|\alpha\| = \|\beta\|$  y  $2\frac{\alpha \cdot \beta}{\|\alpha\|^2} \in \mathbb{Z}$ .

Ahora veremos como deben ser las retículas tri-dimensionales generadas por tres vectores  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  que admiten isometrías lineales dadas por reflexiones  $S^\Pi$  sobre un plano  $\Pi$ . Supongamos que  $\alpha \notin \Pi$  y es de longitud mínima, luego  $\alpha$  y  $S^\Pi(\alpha)$  serán independientes. Supongamos que  $\beta = S^\Pi(\alpha)$  y consideremos el plano  $P$  perpendicular a  $\Pi$ , entonces la sub-retícula bi-dimensional  $\mathcal{J}$  generada por esos vectores es invariante bajo la reflexión sobre la recta  $Q$  que es la intersección de  $\Pi$  y  $P$ . Según lo demostrado para retículas bi-dimensionales, la sub-retícula  $\mathcal{J}$  deberá estar generada por  $\alpha$  y  $\beta = S^\Pi(\alpha)$  con  $\alpha \cdot \beta = 0$ , es decir será una retícula formada por rectángulos o tendrá que ser generada por un vector  $\alpha$  y un vector  $\beta$  tales que la proyección de  $\alpha$  sobre  $\beta$  es igual a un medio la longitud de  $\beta$ , es decir, la retícula está formada de rombos. Finalmente podemos ver que para que la retícula inicial  $\mathcal{L}$  será invariante bajo  $S^\Pi$  el tercer generador  $\gamma$  tiene que encontrarse sobre el plano  $\Pi$  y perpendicular al plano  $P$ .

## 2.4 Clasificación de grupos uniformemente discontinuos de isometrías euclidianas en el espacio tridimensional

De acuerdo al subgrupo de traslaciones  $\Gamma^*$  que pueda contener un grupo uniformemente discontinuo  $\Gamma$  de isometrías euclidianas en el espacio tri-dimensional, se tienen las siguientes posibilidades para  $\Gamma$  y  $\Gamma^*$ .

- 1)  $\Gamma = Id, \quad \Gamma^* = Id.$
- 2)  $\Gamma \neq Id, \quad \Gamma^* = Id$  o  $\Gamma^* = \langle T_{n\alpha} \rangle, \text{ con } n \in \mathbb{Z}$
- 3)  $\Gamma \neq Id, \quad \Gamma^* = \langle T_{n\alpha+m\beta} \rangle, \text{ con } \alpha \times \beta \neq 0, n, m \in \mathbb{Z}$
- 4)  $\Gamma \neq Id, \quad \Gamma^* = \langle T_{n\alpha+m\beta+q\gamma} \rangle, \text{ con } (\alpha \times \beta) \cdot \gamma \neq 0, n, m, q \in \mathbb{Z}$

Para la clasificación de los grupos de isometrías euclidianas del espacio uniformemente discontinuos tomaremos en cuenta: Primero, la clase de isometrías que pueden ser elementos de un grupo uniformemente discontinuo. Recordemos por ejemplo, que en el espacio un grupo discontinuo no puede tener isometrías euclidianas que dejen fijo algún punto. Y segundo, toda isometría de  $\Gamma$  de la forma  $T_\alpha R$  debe ser tal que la parte lineal  $R$  debe preservar la retícula generada por  $\Gamma^*$ .

Los elementos que generan un grupo de isometrías euclidianas  $\Gamma$  uniformemente discontinuo solo pueden ser de tres tipos: traslaciones  $T_\alpha$ , torcimientos  $T_\alpha R_{l,\theta}$  con  $\alpha \cdot l \neq 0$  y reflexiones con deslizamientos  $T_\alpha S^\Pi$  donde  $\alpha$  tiene componente distinta de cero a lo largo del plano  $\Pi$ .

Procedamos a la clasificación para cada uno de los casos de la tabla anterior:

El caso 1) es el llamado caso trivial. El grupo de isometrías solo consta de la identidad. Denotaremos a ese grupo por  $\Gamma_{1,1}$ . En este caso el espacio definido por las órbitas de la acción del grupo coincide con  $\mathbb{R}^3$ .

El caso 2) contempla dos subcasos: 2.1)  $\Gamma \neq Id, \Gamma^* = Id$ . Aquí  $\Gamma$  no puede tener reflexiones con deslizamiento pues éstas generan grupos no triviales de traslaciones. Luego,  $\Gamma$  solo puede ser generado por un torcimiento de la forma  $T_\alpha R_{l,\theta}$  con  $\theta \neq 0, l \times \alpha = 0$ . Si  $\frac{2\pi}{\theta}$  es un número

irracional, entonces  $\Gamma^* = Id$ . Si  $\frac{2\pi}{\theta}$  es un número racional entonces  $\Gamma$  posee un subgrupo de traslaciones generado por un elemento no trivial. Por lo tanto, en este subcaso 2.1) el grupo

$$\Gamma_{2,1} = \{g_n = (T_\alpha R_{l,\theta})^n, \text{ con } \frac{2\pi}{\theta} \in \mathbb{I}, l \times \alpha \neq 0, n \in \mathbb{Z}\}.$$

En el subcaso 2.2)  $\Gamma \neq Id$  y  $\Gamma^* = \langle T_{n\alpha} \rangle$ . Aquí, si  $R$  es una isometría lineal no trivial, que deja invariante la retícula  $\{n\alpha, n \in \mathbb{Z}\}$  se tienen dos casos: 2.2.1)  $R(\alpha) = \alpha$  y 2.2.2)  $R(\alpha) = -\alpha$ , y entonces se tienen para  $R$  las siguientes posibilidades:

Para el caso 2.2.1) tenemos otras dos posibilidades para  $R$ , a saber la posibilidad 2.2.1.1) con  $R = R_{\frac{\alpha}{\|\alpha\|}, \theta}$  y una segunda 2.2.1.2) con  $R = S^\Pi$  con  $\alpha$  sobre el plano  $\Pi$ . Para estas dos posibilidades los grupos correspondientes son

$$\Gamma_{2,2} = \{g_n = (T_{\frac{\alpha}{k} R_{\frac{\alpha}{\|\alpha\|}, \frac{2\pi}{k}}})^n, \text{ con } k, n \in \mathbb{Z}\},$$

y el caso 2.2.1.2) con

$$\Gamma_{2,3} = \{g_n = (T_{\frac{\alpha}{2}} S^\Pi)^n, \text{ con } n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \Pi\}.$$

Análogamente, para el caso 2.2.2) tenemos el subcaso 2.2.2.1) con  $R = S^\Pi$  con  $\alpha$  normal a  $\Pi$  y el subcaso 2.2.2.2)  $R = R_{l,\pi}$  con eje  $l$  perpendicular a  $\alpha$ . En estos dos últimos casos para  $R$ , no pueden formar parte de elementos de un grupo uniformemente discontinuo, ya que todas las isometrías de la forma  $T_\rho S^\Pi$  con  $\alpha$  normal a  $\Pi$  o  $T_\rho R_{l,\pi}$  con eje  $l$  perpendicular a  $\alpha$  no pueden generar el subgrupo  $\Gamma^*$ .

Para el caso 3) consideremos  $\Gamma \neq Id$ ,  $\Gamma^* = \langle T_{n\alpha+m\beta} \rangle$  con  $\alpha \times \beta \neq 0$  y  $(\alpha \times \beta) \times e_3 = 0$ . Note que en este caso las isometrías lineales  $R$  del espacio que preservan la retícula no pueden incluir rotaciones alrededor del eje  $e_3$  pues una isometría de la forma  $T_\rho R_{e_3, \theta}$  no puede generar traslaciones por vectores perpendiculares a  $e_3$  sin tener puntos fijos. Luego, los casos posibles para la isometría lineal  $R$  de los elementos de  $\Gamma$  con  $\Gamma^* = \langle T_{n\alpha+m\beta} \rangle$  son:

a) Si  $R = Id$ , se tiene

$$\Gamma = \Gamma_{3,1} = \{g_{n,m} = (T_\alpha)^n \circ (T_\beta)^m, \text{ con } n, m \in \mathbb{Z}\};$$

b) Si  $R = S^\Pi$ , entonces se tienen dos casos: uno con  $\beta \in \Pi$  y  $\alpha \notin \Pi$  cuyo grupo

$$\Gamma = \Gamma_{3,2} = \{g_{n,m} = (T_\alpha)^n \circ (T_\beta S^\Pi)^m, \text{ con } n, m \in \mathbb{Z}\},$$

en el otro caso  $\alpha, \beta \in \Pi$  y entonces se tiene el grupo

$$\Gamma = \Gamma_{3,3} = \{g_{n,m} = (T_\alpha S^\Pi)^n \circ (T_\beta S^\Pi)^m, \text{ con } n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Finalmente el caso c)  $R = R_{\frac{\beta}{\|\beta\|}, \pi}$ , se tienen entonces los grupos

$$\Gamma = \Gamma_{3,4} = \{g_{n,m} = (T_\alpha)^n \circ (T_{\frac{\beta}{2}} R_{\frac{\beta}{\|\beta\|}, \pi})^m, \text{ con } n, m \in \mathbb{Z}\},$$

y

$$\Gamma = \Gamma_{3,5} = \{g_{n,m} = (T_{\frac{\alpha}{2}} S^\Pi)^n \circ (T_{\frac{\beta}{2}} R_{\frac{\beta}{\|\beta\|}, \pi})^m, \text{ con } n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

En el caso 4), para determinar los grupos en el espacio tridimensional cuyo subgrupo  $\Gamma^*$  de traslaciones sea de la forma  $\Gamma^* = \langle T_{n\alpha+m\beta+q\gamma} \rangle$  con  $(\alpha \times \beta) \cdot \gamma \neq 0$  dividiremos los posibles casos en cuatro grupos:



- a) el grupo  $\Gamma$  que tiene como generadores tres generadores de  $\Gamma^*$
- b) el grupo  $\Gamma$  que tiene entre sus generadores dos de los generadores de  $\Gamma^*$
- c) el grupo  $\Gamma$  que tiene entre sus generadores uno de los generadores de  $\Gamma^*$
- d) el grupo  $\Gamma$  que no tiene entre sus generadores a ninguno de los generadores de  $\Gamma^*$ .

En el caso a) se tiene solo el grupo  $\Gamma_{4,1} = \langle T_\alpha, T_\beta, T_\gamma \rangle$ .

En el caso b) supongamos que  $T_\alpha = T_{e_1}$  y  $T_\beta$  con  $\beta$  en el plano  $xy$  son los generadores de  $\Gamma^*$  que se incluyen entre los generadores de  $\Gamma$ . Aquí se tienen 4 subcasos:

b.1) Si  $\Gamma_{4,2} = \langle T_\alpha, T_\beta, T_{\frac{\gamma}{2}} R_{\gamma,\pi} \rangle$  con  $\gamma \times (\alpha \times \beta) = 0$ ;

b.2) Si  $\gamma \times (\alpha \times \beta) = 0$  y  $\|\alpha\| = \|\beta\|$ , los posibles grupos son  $\Gamma_{4,3} = \langle T_\alpha, T_\beta, T_{\frac{\gamma}{2}} R_{\gamma,\frac{\pi}{2}} \rangle$  si  $\alpha \cdot \beta = 0$  (la retícula  $\mathcal{L}$  es cuadrada);  $\Gamma_{4,4} = \langle T_\alpha, T_\beta, T_{\frac{\gamma}{6}} R_{\gamma,\frac{\pi}{3}} \rangle$  si el ángulo entre  $\alpha$  y  $\beta$  es  $\frac{\pi}{3}$ , y  $\Gamma_{4,5} = \langle T_\alpha, T_\beta, T_{\frac{\gamma}{6}} R_{\gamma,\frac{2\pi}{3}} \rangle$ , si el ángulo entre  $\alpha$  y  $\beta$  es  $\frac{2\pi}{3}$ , es decir  $\mathcal{L}$  es triangular;

b.3) Si  $\alpha \cdot \beta = 0$ ,  $\alpha \times \beta \in \Pi$  y  $\gamma \in \Pi$ , se tiene  $\Gamma_{4,6} = \langle T_\alpha, T_\beta, T_\gamma S^\Pi \rangle$ ;

b.4) Si  $\alpha \times \beta \in \Pi$ ,  $\frac{\alpha \cdot \beta}{\|\alpha\|} = \frac{1}{2}$  y  $\gamma \in \Pi$ , entonces se tiene  $\Gamma_{4,7} = \langle T_\alpha, T_\beta, T_\gamma S^\Pi \rangle$ .

Enseguida tenemos para el caso c) el grupo  $\Gamma_{4,8} = \langle T_\alpha, T_\beta S^\Pi, T_{\frac{\gamma}{2}} R_{\gamma,\pi} \rangle$  si  $\alpha \cdot \gamma = 0$ ,  $\alpha \times \gamma \in \Pi$  y  $\Pi$  contiene a  $\beta$ .

Note que el caso  $\langle T_\alpha, T_\beta S^\Pi, T_\gamma S^\Pi \rangle$  donde  $\Pi$  contiene a  $\beta$  y  $\gamma$  no corresponde a este caso c) ya que  $T_\beta S^\Pi \circ T_\gamma S^\Pi = T_{\beta+\gamma}$  y tendríamos dos traslaciones entre los generadores de  $\Gamma$ . También observamos que el grupo  $\langle T_\alpha, T_{\frac{\beta}{2}} R_{\beta,\pi}, T_{\frac{\gamma}{2}} R_{\gamma,\pi} \rangle$  no corresponde a un grupo uniformemente discontinuo, ya que  $T_{\frac{\beta}{2}} R_{\beta,\pi} \circ T_{\frac{\gamma}{2}} R_{\gamma,\pi}$  resulta tener puntos fijos.

Finalmente consideramos los casos correspondientes al inciso d) y tenemos los casos  $\gamma \times (\alpha \times \beta) = 0$  y  $\alpha, \beta \in \Pi$  donde se tiene el grupo  $\Gamma_{4,9} = \langle T_\beta S^\Pi, T_{\gamma+\frac{1}{2}\alpha} R_{\gamma,\pi} \rangle$  que no contiene traslaciones como generadores y el grupo  $\Gamma_{4,10} = \langle T_\alpha R_{\alpha,\pi}, T_{\gamma+\beta} R_{\beta,\pi} \rangle$ . Note que  $T_{\gamma+\beta} R_{\beta,\pi} \circ T_\alpha R_{\alpha,\pi} = T_{\gamma+\beta-\alpha} R_{\gamma,\pi}$ .

Note en el caso 4,9, los elementos de  $\Gamma$  tienen la forma  $g_{n,m} = (T_{\frac{1}{2}\beta+\gamma} R_{\gamma,\pi})^n (T_\alpha S^\Pi)^m$ . Los subgrupos de traslaciones son obtenidos de la siguiente manera:  $g_{2n,0} = (T_{\beta+\gamma} R_{\gamma,\pi})^{2n} = T_{n\gamma}$ ,  $g_{0,m} = T_{m\alpha}$  y  $g_{n,n} = T_{2n\gamma+n\beta}$ . Note que  $R_{l,\theta} \circ T_c S^\Pi$  con  $l, c \in \Pi$  no tiene puntos fijos.

Tipo	Grupo de Isometrías Euclidianas
1,1	$\Gamma = Id$
2,1	$\Gamma = \langle T_{\frac{\alpha}{k}} R_{l,\theta} \rangle, \frac{2\pi}{\theta} \in \mathbb{I}, l \times \alpha \neq 0, n \in \mathbb{Z}$
2,2	$\Gamma = \langle T_{\frac{\alpha}{k}} R_{\frac{\alpha}{\ \alpha\ }, \frac{2\pi}{k}} \rangle, k \in \mathbb{Z}$
2,3	$\Gamma = \langle T_{\frac{\alpha}{2}} S^{\Pi} \rangle, \alpha \in \Pi$
3,1	$\Gamma = \langle T_{\alpha}, T_{\beta} \rangle, \alpha \times \beta \neq 0$
3,2	$\Gamma = \langle T_{\alpha}, T_{\beta} S^{\Pi} \rangle, \alpha \perp \Pi, \beta \in \Pi$
3,3	$\Gamma = \langle T_{\alpha} S^{\Pi}, T_{\beta} S^{\Pi} \rangle, \alpha, \beta \in \Pi, \alpha \times \beta \neq 0$
3,4	$\Gamma = \langle T_{\alpha}, T_{\frac{\beta}{2}} R_{\frac{\beta}{\ \beta\ }, \pi} \rangle, \alpha \cdot \beta = 0$
3,5	$\Gamma = \langle T_{\frac{\alpha}{2}} S^{\Pi}, T_{\frac{\beta}{2}} R_{\frac{\beta}{\ \beta\ }, \pi} \rangle, \alpha \in \Pi, \beta \perp \Pi$
4,1	$\Gamma = \langle T_{\alpha}, T_{\beta}, T_{\gamma} \rangle, (\alpha \times \beta) \cdot \gamma \neq 0$
4,2	$\Gamma = \langle T_{\alpha}, T_{\beta}, T_{\frac{\gamma}{2}} R_{\frac{\gamma}{\ \gamma\ }, \pi} \rangle, \gamma \times (\alpha \times \beta) = 0$
4,3	$\Gamma = \langle T_{\alpha}, T_{\beta}, T_{\frac{\gamma}{4}} R_{\frac{\gamma}{\ \gamma\ }, \frac{\pi}{2}} \rangle, \alpha \cdot \beta = 0, \ \alpha\  = \ \beta\ $
4,4	$\Gamma = \langle T_{\alpha}, T_{\beta}, T_{\frac{\gamma}{6}} R_{\frac{\gamma}{\ \gamma\ }, \frac{\pi}{3}} \rangle, \ \alpha\  = \ \beta\ , \frac{\alpha \cdot \beta}{\ \alpha\ ^2} = \frac{1}{2}$
4,5	$\Gamma = \langle T_{\alpha}, T_{\beta}, T_{\frac{\gamma}{3}} R_{\frac{\gamma}{\ \gamma\ }, \frac{2\pi}{3}} \rangle, \ \alpha\  = \ \beta\ , \frac{\alpha \cdot \beta}{\ \alpha\ ^2} = -\frac{1}{2}$
4,6	$\Gamma = \langle T_{\alpha}, T_{\beta}, T_{\gamma} S^{\Pi} \rangle, \alpha \cdot \beta = 0, \alpha \times \beta \in \Pi, \gamma \in \Pi$
4,7	$\Gamma = \langle T_{\alpha}, T_{\beta}, T_{\gamma} S^{\Pi} \rangle, \alpha \times \beta \in \Pi, \frac{\alpha \cdot \beta}{\ \alpha\ ^2} = \frac{1}{2}, \gamma \in \Pi$
4,8	$\Gamma = \langle T_{\alpha}, T_{\beta} S^{\Pi}, T_{\frac{\gamma}{2}} R_{\gamma, \pi} \rangle, \alpha \cdot \gamma = 0, \alpha \times \gamma \in \Pi, \beta \in \Pi$
4,9	$\Gamma = \langle T_{\beta} S^{\Pi}, T_{\frac{1}{2}\alpha + \gamma} R_{\gamma, \pi} \rangle, \alpha \cdot \gamma = 0, \alpha, \gamma \in \Pi \text{ y } \beta \perp \Pi$
4,10	$\Gamma = \langle T_{\alpha} R_{\alpha, \pi}, T_{\gamma + \beta} R_{\beta, \pi} \rangle, \gamma \times (\alpha \times \beta) = 0$

Tabla 2.1: Clasificación de grupos de isometrías uniformemente discontinuos en el espacio



## Capítulo 3

### Espacios localmente euclidianos

#### 3.1 Propiedades de los espacios localmente euclidianos

Una estructura métrica sobre un conjunto  $M$  viene dada mediante una función  $d_M : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que satisface las siguientes condiciones:

Para todo  $x, y, z \in M$  se tiene

- $d_M(x, y) \geq 0$  (Positiva definida)
- $d_M(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d_M(x, y) = d_M(y, x)$  (Simetría)
- $d_M(x, y) \leq d_M(x, z) + d_M(z, y)$  (Desigualdad del triángulo)

En el espacio métrico  $M$  al conjunto  $D_\varepsilon(a) = \{b \in M \mid d_M(a, b) < \varepsilon\}$  se le denomina la bola abierta con centro en  $a$  y radio  $\varepsilon$ . Análogamente, se define la bola cerrada con centro en  $a$  y radio  $\varepsilon$  como el conjunto  $\overline{D_\varepsilon(a)} = \{b \in M \mid d_M(a, b) \leq \varepsilon\}$ . Todo espacio métrico es un espacio topológico con la topología generada por la familia de las bolas abiertas, es decir un conjunto  $A$  se dice abierto si para cada punto  $a \in A$  existe una bola abierta con centro en ese punto totalmente contenido en el conjunto. Obviamente todo subconjunto de un espacio métrico es un espacio métrico con la misma función métrica.

Dados dos espacios métricos  $(M, d_M), (N, d_N)$ , una función  $F : M \rightarrow N$  se llama una isometría si  $F$  es uno a uno y sobre y además preserva las distancias.

$$d_N(F(x), F(y)) = d_M(x, y), \forall x, y \in M$$

Como ejemplo importante de espacio métrico tenemos el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  con la métrica euclidiana ( $d_{\mathbb{R}^n}$ ) definida mediante  $d_{\mathbb{R}^n}(X, Y) = \|X - Y\|$ . A la bola abierta con centro en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y radio  $\varepsilon$  la denotaremos como  $B_\varepsilon(x_0)$ .

**Definición 3.1** *Un espacio localmente euclidiano, es un espacio métrico  $(M, d_M)$ , tal que existe  $r > 0$ , donde para cada  $a \in M$  existe  $\phi : \overline{D_r(a)} \rightarrow \overline{B_r(\phi(a))}$  tal que*

$$d_M(x, y) = d_{\mathbb{R}^n}(\phi(x), \phi(y)), \forall x, y \in \overline{D_r(a)} \subset M$$

Sobre un espacio localmente euclidiano, se puede definir y construir algunos de los conceptos de la geometría euclidiana como veremos a continuación. En particular podemos definir el ángulo de intersección entre dos curvas sobre un espacio euclidiano  $M$  como la magnitud del ángulo de intersección que en  $\mathbb{R}^n$  hacen sus imágenes bajo la isometría local definida alrededor del punto de intersección.

Recordemos ahora que un segmento de recta en  $\mathbb{R}^n$  es la imagen de una curva  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de la forma  $C(t) = p + tv$  con  $p, v \in \mathbb{R}^n$  y una trayectoria poligonal en  $\mathbb{R}^n$  es una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua tal que existen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , donde  $a = a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ , tales que  $\gamma(a_i, a_{i+1})$  es un segmento de recta para  $i = 1, \dots, n-1$ . Tomando en cuenta las definiciones anteriores tenemos:

**Definición 3.2** Una trayectoria poligonal en un espacio localmente euclidiano  $M$  es una curva  $\gamma$ , tal que en cada punto de ella  $\gamma(t)$  la isometría local definida en  $\overline{D_r}(\gamma(t))$  mapea  $\gamma \cap \overline{D_r}(\gamma)$  en una trayectoria poligonal en  $\mathbb{R}^n$ . Análogamente, una poligonal define un segmento de recta en  $M$  si  $\gamma \cap \overline{D_r}(\gamma)$  es mapeado en un segmento de recta en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 3.3** Un espacio euclidiano  $M$  se dice conexo por trayectorias poligonales si para cada par de puntos  $a, b \in M$  existe una trayectoria poligonal en  $M$  que los une.

Supondremos de ahora en adelante que  $M$  es un espacio localmente euclidiano conexo por trayectorias poligonales. Mostraremos enseguida que cada segmento de recta en  $M$  se puede extender indefinidamente dando lugar al concepto de recta en  $M$ .

Sea  $L$  un segmento de recta en  $M$  dado por la curva  $\delta : [a, b] \rightarrow M$ . Tomando en el extremo  $\delta(b)$  la isometría local  $(\overline{D_r}(\delta(b)), \phi_1)$ , que existe en virtud de ser  $M$  localmente euclidiano, la imagen bajo  $\phi_1$  de los puntos de  $\delta(t)$  en  $\overline{B_r}(\phi_1(\delta(b)))$  definen un segmento de recta en  $\mathbb{R}^n$  con punto final  $\phi_1(\delta(b))$  y que se puede extender en  $\mathbb{R}^n$  como segmento de recta hasta un único punto  $Q$  de la frontera de  $\phi_1(\overline{D_r}(\delta(b)))$ . El segmento  $\overline{\phi_1^{-1}(\delta(b))Q}$  en  $\mathbb{R}^n$  es transformado bajo  $\phi^{-1}$  en un segmento de recta en  $M$  que es extensión de  $L$  y tiene una magnitud mayor en  $r$  unidades que la de  $L$ . Repitamos este proceso para el segmento extendido y para el extremo  $\phi_1^{-1}(Q)$ . De esta manera obtenemos en cada paso una extensión del segmento anterior con longitud mayor en  $r$  unidades. De esta manera obtenemos la recta en  $M$  que contiene al segmento inicial  $L$ .

## 3.2 Espacios cociente

En este apartado mostraremos como construir espacios localmente euclidianos a partir de la acción de grupos discontinuos de isometrías euclidianas actuando sobre el mismo espacio  $\mathbb{R}^n$ . Posteriormente mostraremos que este procedimiento agota a todos los espacios localmente euclidianos.

**Definición 3.4** Sea  $\Gamma$  un grupo uniformemente discontinuo de isometrías euclidianas. Definimos una acción de  $\Gamma$  sobre  $\mathbb{R}^n$  como una función:

$$\Phi : \Gamma \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\Phi(G, X) = G(X), \quad \forall G \in \Gamma, X \in \mathbb{R}^n$$

Notese que

$$\Phi(G \circ G', X) = \phi(G, \phi(G', X)), \quad \forall G, G' \in \Gamma$$

Para la acción de  $\Gamma$  sobre  $\mathbb{R}^n$  anterior, se tiene la siguiente relación de equivalencia. Si  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  diremos que están  $\Gamma$ -relacionados si existe  $G \in \Gamma$  tal que  $Y = G(X)$ . A las clases de equivalencia correspondientes las llamaremos órbitas de la acción de  $\Gamma$  sobre  $\mathbb{R}^n$  y al conjunto de todas las órbitas le llamaremos el espacio cociente asociado a la acción dada, y lo denotaremos  $\mathbb{R}^n/\Gamma$ . A la órbita que contiene al punto  $X \in \mathbb{R}^n$  la denotaremos como  $O_X$ .

Consideremos la función proyección  $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$  que asocia a cada punto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  la órbita a la cual pertenece, es decir  $\Pi(X) = O_X$ . Sobre el espacio de órbitas  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  definimos la topología cuyos abiertos son aquellos conjuntos  $A$  de  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  tales que  $\Pi^{-1}(A)$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . A esta topología se le llama la topología cociente.

Para dar una métrica para el espacio de órbitas tenemos las siguientes definiciones,

**Definición 3.5** Sean  $O_X, O_Y \in \mathbb{R}^n/\Gamma$ , se define su distancia como:

$$d_{\mathbb{R}^n/\Gamma}(O_X, O_Y) = \min\{d_{\mathbb{R}^n}(X', Y') \mid X' \in O_X, Y' \in O_Y\}$$

donde  $d_{\mathbb{R}^n}$  denota la distancia euclidiana en  $\mathbb{R}^n$ .

Nótese que esta definición de métrica es local y no global. Para mostrar que la definición anterior de distancia es correcta, tenemos la siguiente proposición,

**Proposición 3.2.1** Para la acción de  $\Gamma$  sobre  $\mathbb{R}^n$  dada en la definición anterior se tiene: a) Cada órbita  $O_X = \{G(X), \forall G \in \Gamma\}$  no posee puntos de acumulación; b) Si  $Y \notin O_X$ ; entonces la distancia de  $O_X$  a  $O_Y$  es mayor que cero.

*Demostración.* a) Sea  $r$  el número real asociado a la propiedad de ser  $\Gamma$  un grupo uniformemente discontinuo. Si  $X_0$  fuera un punto de acumulación de la órbita  $O_X$ , entonces en la bola abierta  $B_{\frac{r}{3}}(X_0)$  con centro  $X_0$  y radio  $\frac{r}{3}$  existirían puntos distintos de la forma  $G(X)$  y  $H(X)$  con  $G, H \in \Gamma$ . Tomando en cuenta que  $\Gamma$  es grupo de isometrías euclidianas, tenemos  $d_{\mathbb{R}^n}(G(X), H(X)) = d_{\mathbb{R}^n}(X, G^{-1}H(X)) < \frac{2r}{3}$ ; lo cual contradice la propiedad de discontinuidad de  $\Gamma$ .

b) Si dos órbitas distintas  $O_X$  y  $O_Y$  no estuvieran separadas por una distancia mayor que 0, tendríamos dos sucesiones  $g_n(X)$  y  $g_m(Y)$  tales que  $d_{\mathbb{R}^n}(g_n(X), g_m(Y)) = d_{\mathbb{R}^n}(X, g_n^{-1}g_m(Y)) \rightarrow 0$ , lo cual implicaría que  $X$  es un punto de acumulación de  $O_Y$ , lo cual no es posible. ■

**Definición 3.6** Una Región Fundamental de la acción de un grupo  $\Gamma$  de isometrías euclidianas en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto  $\mathfrak{F}$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que los subconjuntos  $G(\mathfrak{F})$  con  $G \in \Gamma$  definen una partición de  $\mathbb{R}^n$ , es decir se cumplen las siguientes dos propiedades:

- $G(\mathfrak{F}) \cap G'(\mathfrak{F}) = \emptyset$  si  $G \neq G'$ ,
- $\bigcup_{G \in \Gamma} G(\mathfrak{F}) = \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 3.2.2** Sea  $\Gamma$  un grupo uniformemente discontinuo de isometrías euclidianas de  $\mathbb{R}^n$  y  $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$  el espacio de órbitas bajo la acción de  $\Gamma$  y  $d_M(O_X, O_Y) = \min\{d_{\mathbb{R}^n}(X', Y') \mid X' \in O_X, Y' \in O_Y\}$  entonces  $(M, d_M)$  es un espacio localmente euclidiano.

*Demostración.* Sea  $X \in \mathbb{R}^n$ , y  $\overline{B}_{\frac{r}{4}}(X) \subset \mathbb{R}^n$  la bola abierta con centro en  $X$  y radio  $\frac{r}{4}$ , donde  $r$  es el número asociado al grupo  $\Gamma$ . Sea  $\phi : \overline{B}_{\frac{r}{4}}(X) \rightarrow \overline{D}_{\frac{r}{4}}(O_X)$  tal que si  $Y \in \overline{B}_{\frac{r}{4}}(X)$  se define  $\phi(Y) = O_Y$ . Claramente  $d_M(O_X, O_Y) < \frac{r}{4}$  y  $\phi$  es además isometría euclidiana en  $\overline{B}_{\frac{r}{4}}(X)$  ya que

si  $W, Z \in \overline{B}_{\frac{r}{4}}(X)$ , entonces  $G(W), H(Z)$  con  $G, H \in \Gamma$ , con  $G \neq H$ , son elementos de  $O_W$  y  $O_Z$  respectivamente, y entonces

$$d_{\mathbb{R}^n}(G(W), H(Z)) = d_{\mathbb{R}^n}(W, G^{-1}H(Z))$$

Por otro lado, en todo espacio métrico se tiene la fórmula  $d(x, y) \geq d(x, z) - d(z, y)$ , y entonces

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^n}(W, G^{-1}H(Z)) &\geq d_{\mathbb{R}^n}(W, G^{-1}H(W)) - d_{\mathbb{R}^n}(G^{-1}H(W), G^{-1}H(Z)) \\ &> r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} \end{aligned}$$

luego como  $d_{\mathbb{R}^n}(W, Z) < \frac{r}{2}$ , se tiene

$$d_M(O_W, O_Z) = d_{\mathbb{R}^n}(W, Z)$$

es decir

$$d_M(\phi(W), \phi(Z)) = d_{\mathbb{R}^n}(W, Z), \forall W, Z \in \overline{B}_{\frac{r}{4}}(X)$$

Por lo tanto  $\phi$  es una isometría euclidiana en  $\overline{B}_{\frac{r}{4}}(X)$  y  $M$  es espacio localmente euclidiano. ■

### 3.2.1 Ejemplos de espacios localmente euclidianos

Como ejemplos de superficies localmente euclidianas presentamos:

- Cilindro.

Sea  $C = \mathbb{R}^2/\Gamma$ , donde  $\Gamma = \{T_{(n,0)} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

La  $\Gamma$ -órbita de un punto  $(x, y) \in C$  es el conjunto de la forma

$$O_{(x,y)} = \{(x+n, y) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Este espacio cociente tiene como región fundamental cualquier conjunto de la forma

$$\mathfrak{F}_C = \{(x, y) \mid x \in (a, a+1], a \in \mathbb{R}\}.$$

La distancia entre dos  $\Gamma$ -órbitas se definirá de la siguiente manera.

Sean  $O_{(x,y)}$  y  $O_{(w,z)}$   $\Gamma$ -órbitas de  $C$ . Denotaremos como  $[x]$  a la parte entera de  $x$ .

La distancia entre dos órbitas  $O_{(x,y)}, O_{(w,z)}$  se calcula (para los cálculos tomemos la región fundamental con  $a = 0$ ):

$$\begin{aligned} d_C(O_{(x,y)}, O_{(w,z)}) &= \{d((x, y)', (w, z)') \mid (x, y)' \in O_{(x,y)} \cap \mathfrak{F}_C, (w, z)' \in O_{(w,z)} \cap \mathfrak{F}_C\} \\ &= d((x - [x], y), (w - [w], z)) \end{aligned}$$

- Banda de Möbius.

Sea  $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$ , donde  $\Gamma = \{T_{(n,0)} \circ S \mid n \in \mathbb{Z}, S \text{ es la reflexión sobre } y = 0\}$ .

La  $\Gamma$ -órbita de un punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  es el conjunto

$$O_{(x,y)} = \{(x+n, (-1)^n y) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Este espacio cociente tiene como región fundamental cualquier conjunto de la forma

$$\mathfrak{F}_M = \{(x, y) \mid x \in (a, a+1], a \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

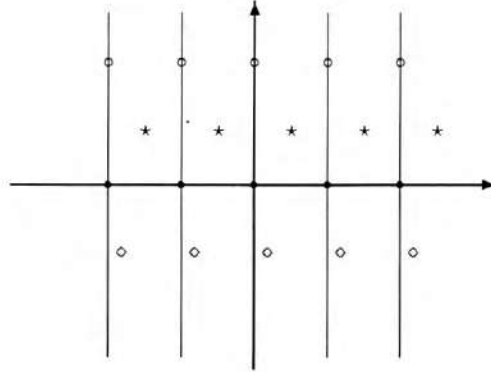


Figura 3.1: Órbitas en un cilindro

La distancia entre dos  $\Gamma$ -órbitas se calcula de la siguiente manera.

Sean  $O_{(x,y)}$  y  $O_{(w,z)}$   $\Gamma$ -órbitas de  $M$ . Denotaremos como  $[x]$  a la parte entera de  $x$ .

La distancia entre dos órbitas  $O_{(x,y)}$ ,  $O_{(w,z)}$  se calcula (para los cálculos tomemos la región fundamental con  $a = 0$ ):

$$\begin{aligned} d_M(O_{(x,y)}, O_{(w,z)}) &= \{d((x, y)', (w, z)') \mid (x, y)' \in O_{(x,y)} \cap \mathfrak{F}_M, (w, z)' \in O_{(w,z)} \cap \mathfrak{F}_M\} \\ &= d((x - [x], (-1)^{[x]}y), (w - [w], (-1)^{[w]}z)) \end{aligned}$$

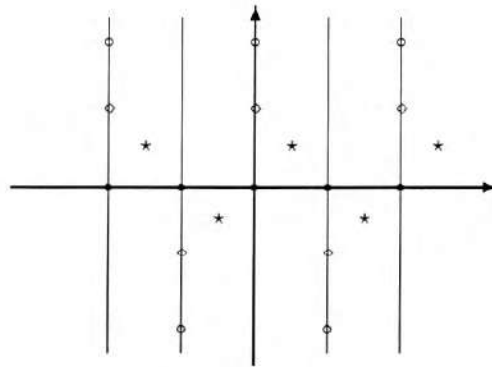


Figura 3.2: Órbitas en la banda de Möbius

- Toro.

Sea  $T = \mathbb{R}^2/\Gamma$ , donde  $\Gamma = \{t_{(n,m)} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ .

La  $\Gamma$ -órbita de un punto  $(x, y) \in T$  es el conjunto

$$O_{(x,y)} = \{(x + n, y + m) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Este espacio cociente tiene como región fundamental cualquier conjunto de la forma

$$\mathfrak{F}_T = \{(x, y) \mid x \in (a, a + 1], y \in (b, b + 1], a, b \in \mathbb{R}\}.$$



La distancia entre dos  $\Gamma$ -órbitas se definirá de la siguiente manera.

Sean  $O_{(x,y)}$  y  $O_{(w,z)}$   $\Gamma$ -órbitas de  $T$ . Denotaremos como  $[x]$  a la parte entera de  $x$ .

La distancia entre dos órbitas  $O_{(x,y)}, O_{(w,z)}$  se calcula (para los cálculos tomemos la región fundamental con  $a = 0$ ):

$$\begin{aligned} d_T(O_{(x,y)}, O_{(w,z)}) &= \{d((x, y)', (w, z)') \mid (x, y)' \in O_{(x,y)} \cap \mathfrak{F}_T, (w, z)' \in O_{(w,z)} \cap \mathfrak{F}_T\} \\ &= d((x - [x], y - [y]), (w - [w], z - [z])) \end{aligned}$$

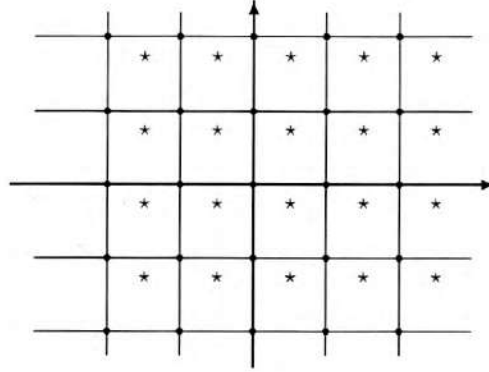


Figura 3.3: Órbitas en un toro

- Botella de Klein.

Sea  $K = \mathbb{R}^2/\Gamma$ , donde  $\Gamma = \{t_{(n,0)} \circ S \mid n \in \mathbb{Z}, S \text{ es una reflexión sobre } L, \text{ donde } L \text{ es la mediatriz entre } (n, m) \text{ y } (n, m + 1), m \in \mathbb{Z}\}$ .

La  $\Gamma$ -órbita de un punto  $(x, y) \in K$  es el conjunto de la forma

$$O_{(x,y)} = \{(x + n, (-1)^n y + m) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Este espacio cociente tiene como región fundamental cualquier conjunto de la forma

$$\mathfrak{F}_K = \{(x, y) \mid x \in (a, a + 1], y \in (b, b + 1], a, b \in \mathbb{R}\}.$$

La distancia entre dos  $\Gamma$ -órbitas se definirá de la siguiente manera.

Sean  $O_{(x,y)}$  y  $O_{(w,z)}$   $\Gamma$ -órbitas de  $K$ . Denotaremos como  $[x]$  a la parte entera de  $x$ .

La distancia entre dos órbitas  $O_{(x,y)}, O_{(w,z)}$  se calcula (para los cálculos tomemos la región fundamental con  $a = 0$ ):

$$\begin{aligned} d_K(O_{(x,y)}, O_{(w,z)}) &= \{d((x, y)', (w, z)') \mid (x, y)' \in O_{(x,y)} \cap \mathfrak{F}_K, (w, z)' \in O_{(w,z)} \cap \mathfrak{F}_K\} \\ &= d((x - [x], (-1)^{[x]}(y - [y])), (w - [w], (-1)^{[w]}(z - [z]))) \end{aligned}$$

Note que si la región fundamental de un subgrupo discontinuo es acotada entonces el espacio cociente es también acotado en el sentido de que la distancia entre cualquier par de puntos u órbitas es menor que un cierto número. Análogamente, si la región fundamental es no acotada, podemos siempre encontrar pares de puntos cuya distancia sea tan grande como se quiera. Tomando en cuenta lo anterior observamos que en el caso de grupos de isometrías del plano, el toro y la botella de Klein son espacios acotados, mientras que el plano, el cilindro y la banda de Möbius son no acotados.

Como ejemplos de espacios tri-dimensionales localmente euclidianos presentamos los siguientes:

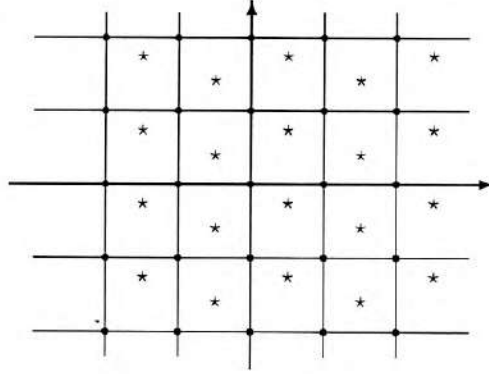


Figura 3.4: Órbitas en una botella de Klein

- $M = \mathbb{R}^3/\Gamma = BM \times \mathbb{R}$   
 $\Gamma = \langle T_{\frac{1}{2}}S^{\Pi} \rangle$  con  $\alpha$  paralelo a  $\Pi$

Supongamos que  $\alpha = e_1$  y  $\Pi$  es el plano  $XY$ .

$$F_n(x, y, z) = (T_{\frac{1}{2}}S^{\Pi})^n(x, y, z) = (x + n(\frac{1}{2}), y, (-1)^n z), \text{ con } n \in \mathbb{Z}$$

Este espacio cociente tiene como región fundamental cualquier conjunto de la forma

$$\mathfrak{F} = \{(x, y, z) \mid x \in (a, a + 1], a \in \mathbb{R}, y, z \in \mathbb{R}\}$$

- $M = \mathbb{R}^3/\Gamma$   
 $\Gamma = \langle T_{\alpha}S^{\Pi}, T_{\beta}S^{\Pi} \rangle$  con  $\alpha, \beta \in \Pi$  y  $\alpha \times \beta \neq 0$   
 Supongamos que  $\alpha = e_1$  y  $\beta = e_2$ .

$$F_{n,m}(x, y, z) = (T_{\alpha}S^{\Pi})^n(T_{\beta}S^{\Pi})^m(x, y, z) = (x + n, y + m, (-1)^{n+m}z), \text{ con } n, m \in \mathbb{Z}$$

Este espacio cociente tiene como región fundamental cualquier conjunto de la forma

$$\mathfrak{F} = \{(x, y, z) \mid x \in (a, a + 1], y \in (b, b + 1], z \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}\}$$

- $M = \mathbb{R}^3/\Gamma$   
 $\Gamma = \langle T_{\alpha}, T_{\beta}, T_{\gamma}S^{\Pi} \rangle$  con  $\pi$  generado por  $\alpha$  y  $\beta$ , y  $\gamma$  perpendicular.  
 Supongamos que  $\alpha = e_1$ ,  $\beta = e_2$  y por lo tanto  $\gamma = e_3$ .

$$F_{n,m,q}(x, y, z) = (T_{\alpha})^n(T_{\beta})^m(T_{\gamma}S^{\Pi})^q(x, y, z) = (x+n, y+m, (-1)^q z + \frac{1}{2}(1+(-1)^{q+1})), \text{ con } n, m, q \in \mathbb{Z}$$

Este espacio cociente tiene como región fundamental cualquier conjunto de la forma

$$\mathfrak{F} = \{(x, y, z) \mid x \in (a, a + 1], y \in (b, b + 1], z \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}\}$$

### 3.3 Teorema de clasificación de espacios euclidianos

Ahora mostraremos que los espacios localmente euclidianos de dimensión  $n$  son siempre espacios cocientes asociados a la acción de subgrupos uniformemente discontinuos de isometrías euclidianas sobre el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ .

Este es el contenido del Teorema de clasificación de ese tipo de espacios y que nos permite dar una respuesta matemática a las posibles formas que globalmente puede tener el espacio en el cual vivimos. Veremos dado un espacio euclidiano arbitrario como obtener el subgrupo de isometrías correspondiente mediante la introducción de los conceptos de función cubriente e isometría cubriente.

#### 3.3.1 La función cubriente

Ahora demostraremos que el espacio vectorial euclidiano  $\mathbb{R}^n$  cubre a cada espacio localmente euclidiano y conexo por trayectorias poligonales  $M$  en el sentido de que podemos establecer una función  $F$  del espacio  $\mathbb{R}^n$  en el espacio  $M$  que sea sobre (es decir, cubre al espacio) y que además esta función es tal que cada punto del espacio  $M$  posee una vecindad tal que su imagen inversa bajo la función es una unión ajena de abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y la función  $F$  restringida a cada uno de estos abiertos en  $\mathbb{R}^n$  es una isometría euclidiana. A este tipo de funciones se les denomina "funciones cubrientes".

Consideremos la aplicación  $\mathcal{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow M$  construida en la siguiente manera. Fijemos en  $M$  un punto arbitrario  $o$  y la isometría local  $(\overline{D}_r(o), \phi)$  con  $\phi(o) = O \in \mathbb{R}^n$ , ( $O$  el origen). Sea ahora  $X \in \mathbb{R}^n$  y consideremos el segmento de recta  $l$  que une  $X$  con el origen  $O$  de  $\mathbb{R}^n$  y consideremos la recta  $L$  en  $M$  generada por el segmento de recta definido por la intersección de la imagen de  $l$  bajo  $\mathcal{P}$  con el bola  $\overline{B}_r(O)$ . Sea  $\mathcal{P}(X)$  el punto que se encuentra sobre  $L$  a una distancia del punto  $o$  igual a  $d_{\mathbb{R}^n}(X, O)$ . La aplicación  $\mathcal{P}$  está bien definida sobre todo  $\mathbb{R}^n$ . A esta aplicación la llamaremos el función cubriente de  $M$  generado por la isometría local  $(\overline{D}_r(o), \phi)$ .

**Definición 3.7** *A la función arriba construida le llamaremos una función cubriente o la función cubriente asociada a la isometría  $\phi$ .*

La función  $\mathcal{P}$  tiene las siguientes propiedades:

**Proposición 3.3.1** *La función cubriente  $\mathcal{P}$  tiene las siguientes propiedades: a) Si  $A, B \in \mathbb{R}^n$  con  $d_{\mathbb{R}^n}(A, B) < \frac{r}{2}$ , entonces  $d_M(\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)) = d_{\mathbb{R}^n}(A, B)$ , y entonces  $\mathcal{P}$  es una isometría local; b)  $\mathcal{P}$  es sobre.*

*Demostración.* Para probar a) distinguiremos dos casos. 1)  $A$  y  $B$  se encuentran sobre una recta que pasa por  $O$ . En este caso, como  $\mathcal{P}$  transforma isométricamente segmentos de recta emergiendo del origen en  $\mathbb{R}^n$  en rectas en  $M$  con punto inicial  $O$ , se tiene por construcción que  $d_M(\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)) = d_{\mathbb{R}^n}(A, B)$ .

2) Ahora supongamos que  $d_{\mathbb{R}^n}(A, B) < \frac{r}{2}$  pero  $A, B$  no son colineales con el origen. Sean sobre el segmento  $\overline{OA}$  los puntos  $R_1, R_2, \dots, R_k = A$  situados consecutivamente con  $d_{\mathbb{R}^n}(R_i, R_{i+1}) = \frac{r}{4}$   $i = 1, \dots, k-1$ , y análogamente sobre  $\overline{OB}$  los puntos  $S_1, S_2, \dots, S_k = B$  con  $d_{\mathbb{R}^n}(S_i, S_{i+1}) = \frac{r}{4}$  para  $i = 1, \dots, k-1$  como se observa en la Figura 3.5. Consideremos en  $\mathbb{R}^n$  los cuadriláteros  $W_i$  de vértices  $R_i S_i S_{i+1} R_{i+1}$  para  $i = 1, \dots, k-1$  (ver Figura 3.6) y el triángulo inicial  $OS_1 R_1$ . Vemos primeramente que el primer cuadrilátero  $R_1 S_1 S_2 R_2$  está contenido en  $\overline{B}_r(O)$  y por lo tanto la función  $\mathcal{P}$  preserva sus dimensiones, es decir  $d_{\mathbb{R}^n}(R_i, S_j) = d_M(\mathcal{P}(R_i), \mathcal{P}(S_j))$  para  $i, j = 1, 2$ ,

así como también,  $d_{\mathbb{R}^n}(S_1, S_2) = d_M(\mathcal{P}(S_1), \mathcal{P}(S_2))$  y  $d_{\mathbb{R}^n}(R_1, R_2) = d_M(\mathcal{P}(R_1), \mathcal{P}(R_2))$ . Demostraremos ahora por inducción que si las distancias entre los vertices del cuadrilátero  $W_i$  se preservan bajo  $\mathcal{P}$  lo mismo se cumple para  $W_{i+1}$ . Observemos primeramente en  $W_{i+1}$  que estando  $R_{i+1}$  y  $R_{i+2}$ , y  $S_{i+1}$  y  $S_{i+2}$  sobre rectas que salen del origen, se tiene por 1) que  $d_{\mathbb{R}^n}(R_{i+1}, R_{i+2}) = d_M(\mathcal{P}(R_{i+1}), \mathcal{P}(R_{i+2}))$  y  $d_{\mathbb{R}^n}(S_{i+1}, S_{i+2}) = d_M(\mathcal{P}(S_{i+1}), \mathcal{P}(S_{i+2}))$ , y por hipótesis de inducción  $d_{\mathbb{R}^n}(S_{i+1}, R_{i+1}) = d_M(\mathcal{P}(S_{i+1}), \mathcal{P}(R_{i+1}))$ . Nos falta comprobar que  $\mathcal{P}$  preserva la longitud de los segmentos  $R_{i+1}S_{i+2}$  y  $S_{i+1}R_{i+2}$  y  $R_{i+2}, S_{i+2}$ . Para esto observamos que  $W_i$  y  $W_{i+1}$  están contenidos en la bola  $\overline{B}_r(S_{i+1})$  y entonces existe una isometría  $(\overline{D}_r(\mathcal{P}(S_{i+1})), \phi)$  con  $\phi(\overline{D}_r(\mathcal{P}(S_{i+1}))) = \overline{B}_r(S_{i+1})$  y  $\phi(\mathcal{P}(S_{i+1})) = S_{i+1}$  y entonces por ser  $M$  localmente euclidiano existe una isometría  $\phi : \overline{D}_r(\mathcal{P}(S_{i+1})) \rightarrow \overline{B}_r(S_{i+1})$  y  $\phi(\mathcal{P}(S_{i+1})) = S_{i+1}$ . Como los conjuntos  $\mathcal{P}(W_i \cup W_{i+1})$  están contenidos en  $\overline{D}_r(\mathcal{P}(S_{i+1}))$  entonces  $\phi \circ \mathcal{P}(W_i \cup W_{i+1})$  forman en  $\mathbb{R}^n$  un par de cuadrilateros sobre el plano generado por las imagenes bajo  $\phi \circ \mathcal{P}$  de las rectas determinadas por  $S_i S_{i+2}$  y  $R_i R_{i+2}$ . Componiendo  $\phi$  con una isometría apropiada podemos hacer coincidir los vertices de los cuadrilateros  $W_i \cup W_{i+1}$  con los vertices de los cuadrilateros de  $\mathcal{P} \circ \phi(W_i \cup W_{i+1})$  y entonces  $d_{\mathbb{R}^n}(R_{i+2}, S_{i+2}) = d_{\mathbb{R}^n}(\phi \circ \mathcal{P}(R_{i+2}), \phi \circ \mathcal{P}(S_{i+2}))$  y como  $\phi$  es isometría de  $M$  en  $\mathbb{R}^n$  tenemos entonces  $d_{\mathbb{R}^n}(R_{i+2}, S_{i+2}) = d_M(\mathcal{P}(R_{i+2}), \mathcal{P}(S_{i+2}))$ , con esto hemos probado que el cuadrilátero  $W_{i+1}$  es también transformado por  $\mathcal{P}$  isométricamente con lo que se concluye la valides del paso de inducción y entonces podemos afirmar que  $\mathcal{P}$  transforma puntos de  $M$  cuya distancia es menor que  $\frac{r}{2}$  en puntos de  $\mathbb{R}^n$  con la misma distancia. Es decir, el mapero  $\mathcal{P}$  es una isometría local.

b) Ahora probaremos que cada punto  $q \in M$  es la imagen bajo  $\mathcal{P}$  de algún punto de  $\mathbb{R}^n$ . Primeramente notemos que la función cubriente  $\mathcal{P}$  transforma segmentos de línea en segmentos de línea ya que si  $l$  es un segmento de línea en  $\mathbb{R}^n$  podemos cubrirlo con un número finito de bolas  $\overline{B}_{\frac{r}{2}}$  sobre las cuales  $\mathcal{P}$  es una isometría local. Luego su imagen estará formada de segmentos de línea que hacen un ángulo  $\pi$  con el anterior ya que toda isometría local preserva ángulos y los subintervalos en que se descompone  $l$  hacen en sus puntos de intersección un ángulo  $\pi$ . Luego  $\mathcal{P}(l)$  es un segmento de línea en  $M$ .

Para demostrar que  $\mathcal{P}$  es sobre, tomemos un punto  $p \in M$ . Por ser  $M$  conexa existe una trayectoria poligonal  $G$  con vertices  $o, p_1, p_2, \dots, p_k = p$ . Sea  $\phi_1 : \overline{D}_{\frac{r}{2}}(o) \rightarrow \overline{B}_{\frac{r}{2}}(O)$  isometría, entonces  $\phi(\overline{op_1} \cap \overline{D}_{\frac{r}{2}}(o))$  determina un segmento de recta en  $\mathbb{R}^n$  que parte del origen  $O$  a un punto  $r_1$  en la frontera de  $\overline{B}_{\frac{r}{2}}(O)$ . Extendamos ese segmento de recta hasta el punto  $q_1$  tal que  $\mathcal{P}(q_1) = p_1$ . Consideremos ahora la bola  $\overline{B}_{\frac{r}{2}}(q_1)$ , el segmento de recta  $\overline{r_1 q_1}$  es transformado en el segmento de recta  $\overline{\mathcal{P}(r_1) p_1}$ . Consideremos ahora el segmento de recta  $\overline{p_1 p_2}$  en  $M$  que hace un ángulo  $\alpha_1$  con el primer segmento de recta  $\overline{op_1}$  y entonces  $\mathcal{P}^{-1}(\overline{p_1 p_2} \cap \overline{D}_{\frac{r}{2}}(p_1))$  determinara un segmento  $\overline{q_1 r_2}$  en la bola  $\overline{B}_{\frac{r}{2}}(q_1)$  que hara un ángulo  $\alpha_1$  con el segmento de recta  $\overline{o q_1}$ .

Repitiendo esta ultima construcción, tomando  $\overline{B}_{\frac{r}{2}}(r_2)$  y la correspondiente bola  $\overline{D}_{\frac{r}{2}}(\mathcal{P}(r_2))$ , la imagen inversa  $\mathcal{P}^{-1}(\overline{\mathcal{P}(r_2) p_2} \cap \overline{D}_{\frac{r}{2}}(\mathcal{P}(r_2)))$  nos determinara un segmento de recta que continua al segmento  $\overline{q_1 r_2}$  en  $\mathbb{R}^n$  y de esa manera, despues de un número finito de pasos se alcanzara el punto  $q_2$  tal que  $\mathcal{P}(q_2) = p_2$ . Con este procedimiento podemos encontrar el punto  $q$  que bajo  $\mathcal{P}$  va a dar a  $p$  y entonces habremos demostrado que  $\mathcal{P}$  es sobre. ■

### El grupo de isometrías cubriente

Ahora construiremos a partir de la función cubriente  $\mathcal{P}$  un grupo uniformemente discontinuo  $\Gamma$  de isometrías euclidianas en  $\mathbb{R}^n$  para las cuales el espacio  $M$  es equivalente al espacio de órbitas de la acción de ese grupo sobre  $\mathbb{R}^n$ . A ese grupo lo llamaremos el grupo de isometrías cubriente asociado a la función cubriente  $\mathcal{P}$ .

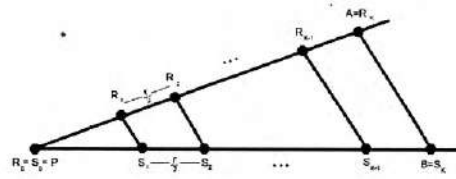


Figura 3.5:

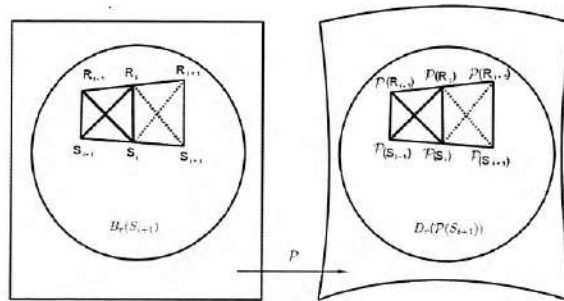


Figura 3.6:

**Definición 3.8** Diremos que una isometría euclidiana  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una *Isometría Cubriente asociada al cubriente*  $\mathcal{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ , si  $\mathcal{P} \circ H = \mathcal{P}$  para todo  $P \in \mathbb{R}^n$ .

El conjunto de las isometrías cubrientes  $S_{\mathcal{P}}$  forman un subgrupo de isometrías euclidianas ya que si  $H_1, H_2 \in S_{\mathcal{P}}$ , se tiene  $\mathcal{P} \circ H_1 \circ H_2 = \mathcal{P} \circ H_2 = \mathcal{P}$ .

De la definición de subgrupo cubriente vemos que cada órbita de  $S_{\mathcal{P}}$  es transformada bajo  $\mathcal{P}$  en un único punto de  $M$  y así  $M$  se corresponde al espacio de órbitas de la acción de  $S_{\mathcal{P}}$  sobre  $\mathbb{R}^n$ .

Tomando en cuenta que la función cubriente  $\mathcal{P}$  no es uno-a-uno, cabe preguntarse si al tomar dos puntos  $P, Q \in \mathbb{R}^n$  con  $\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(Q)$  entonces la órbita del punto  $P$  coincide con la órbita del punto  $Q$ . Si esto se prueba, entonces  $M$  coincide con el espacio de órbitas bajo el grupo cubriente.

**Lema 3.3.2** Si  $q = \mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(Q)$ , entonces existe una isometría cubriente  $G$  tal que  $G(P) = Q$ .

*Demostración.* Supongamos  $P \neq Q$ . De la proposición anterior sabemos que existen bolas abiertas ajenas  $B_{\frac{r}{2}}(P)$  y  $B_{\frac{r}{2}}(Q)$  donde  $\mathcal{P}$  es isometría sobre  $D_{\frac{r}{2}}(q)$ . Luego, la aplicación que a cada

punto  $X \in B_{\frac{r}{2}}(P)$  le asocia el punto  $Y$  de  $B_{\frac{r}{2}}(Q)$  tal que  $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Y)$  define una isometría  $G$  de  $B_{\frac{r}{2}}(P)$  en  $B_{\frac{r}{2}}(Q)$ . Como  $B_{\frac{r}{2}}(P)$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , la aplicación  $G$  se extiende de manera única como isometría a todo  $\mathbb{R}^n$ . Claramente  $Q = G(P)$ . Ahora mostraremos que  $G$  es una isometría cubriente. Probaremos que el conjunto  $D$  de puntos  $R$  tales que  $\mathcal{P} \circ G(R) \neq \mathcal{P}(R)$  es vacío. En primer lugar  $S$  es cerrado pues si  $Z \in D^c$  entonces  $G(Z) = Z$  y existirían abiertos  $B_{\frac{r}{2}}(G(Z))$  y  $B_{\frac{r}{2}}(Z)$  isométricos bajo  $\mathcal{P}$  a una misma bola  $D_{\frac{r}{2}}(\mathcal{P}(Z))$  y como antes,  $G$  sería una isometría entre  $B_{\frac{r}{2}}(G(Z))$  y  $B_{\frac{r}{2}}(Z)$  y todos los puntos  $W \in B_{\frac{r}{2}}(Z)$  serán tales que  $\mathcal{P} \circ G(W) = \mathcal{P}(W)$  y entonces  $D^c$  es abierto y por lo tanto  $D$  es cerrado. Ahora como  $D$  es cerrado y  $P$  no está en  $D$ , existirá un punto  $W$  de  $D$  más cercano a  $P$  y habrá una sucesión de puntos  $V_i$ ,  $i = 1, \dots$  de  $D^c$  tales que  $\lim_{i \rightarrow \infty} V_i = W$  y  $\mathcal{P} \circ G(V_i) = \mathcal{P}(V_i)$ , luego por continuidad de  $\mathcal{P}$  y  $G$  se tendrá  $\mathcal{P} \circ G(W) = \mathcal{P}(W)$  y  $W \in D^c$ , lo cual no es posible pues  $W \in D$ . Por lo tanto  $D = \emptyset$  y  $G$  es una isometría cubriente. ■

**Lema 3.3.3** *El grupo de isometrías cubriente asociado a  $\mathcal{P}$  es un grupo uniformemente discontinuo.*

*Demostración.* Observando que la órbita de un punto  $X \in \mathbb{R}^n$  bajo el grupo de isometrías cubriente coincide con la imagen inversa bajo la función cubriente  $\mathcal{P}$  del punto  $\mathcal{P}(X) \in M$  y tomando en cuenta que  $\mathcal{P}$  es una isometría en la bola abierta  $B_{\frac{r}{2}}(X)$  de  $X$ , entonces en esa bola no puede haber dos puntos distintos de una misma órbita. Lo anterior también implica que la imagen de  $B_{\frac{r}{2}}(X)$  bajo los elementos del subgrupo de isometrías cubriente son bolas abiertas ajenas todas de radio  $\frac{r}{2}$ . Ahora probaremos que  $\Gamma$  es un subgrupo de isometrías uniformemente discontinuo, es decir si  $G \in \Gamma$  y  $P \neq G(P)$ , como  $\mathcal{P}$  es isometría en bolas de radio  $\frac{r}{2}$  y  $\mathcal{P}(P) = \mathcal{P} \circ G(P)$ , entonces  $d_{\mathbb{R}^n}(P, G(P)) > \frac{r}{2}$  pues en caso contrario  $d(\mathcal{P}(P), \mathcal{P}G(P)) = d(P, G(P))$  y  $\mathcal{P}(P) \neq \mathcal{P} \circ G(P)$ . Luego el subgrupo de isometrías cubriente es uniformemente discontinuo. ■

A partir de los resultados anteriores, hemos entonces probado que todo espacio localmente euclidiano es isométrico al espacio cociente formado por las órbitas de la acción de un grupo uniformemente discontinuo de isometrías sobre el espacio vectorial euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . En este caso, el grupo uniformemente discontinuo de isometrías es el grupo de isometrías cubrientes asociadas a la función cubriente  $\mathcal{P}$ . Resumiendo, enunciamos el celebre Teorema de clasificación:

**Teorema 3.3.4 (Killing-Hopf)** *Si  $M$  es un espacio localmente euclidiano de dimensión  $m$  y  $\mathcal{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow M$  la función cubriente asociada a  $M$ , entonces  $M$  es isométrico al espacio cociente formado por las órbitas de la acción sobre  $\mathbb{R}^n$  del grupo de isometrías cubriente asociadas a la función cubriente  $\mathcal{P}$  y dotado de la métrica dada en la Definición 4.0.1.6.*

Por último anexamos dos cuadros con las diferentes posibilidades de espacios localmente euclidianos de dimensión dos como de dimensión tres.

Para el caso del plano tenemos:

Grupo de Isometrías	Tipo Topológico
$F(x, y, z) = (x, y, z)$	$\mathbb{R}^2$ Plano (no acotado)
$F_n = (x + n, y)$ , con $n \in \mathbb{Z}$	$S^1 \times \mathbb{R}$ Cilindro (no acotado)
$F_{n,m} = (x + n, y + m)$ , con $n, m \in \mathbb{Z}$	$S^1 \times S^1$ 2-Toro (acotado)
$F_n = (x + n, (-1)^n y)$ , con $n \in \mathbb{Z}$	BM Banda de Möbius (no acotado)
$F_{n,m} = (x + n, (-1)^n y + m)$ , con $n, m \in \mathbb{Z}$	BK Botella de Klein (acotado)

Para el caso del espacio tri-dimensional tenemos:

Caso	Grupo de Isometrías	Tipo Topológico
1.1	$F(x, y, z) = (x, y, z)$	$\mathbb{R}^3$
2.1	$F_n(x, y, z) = (x \cos(n\theta) - y \operatorname{sen}(n\theta), x \operatorname{sen}(n\theta) + y \cos(n\theta), z + n),$ con $n \in \mathbb{Z}, \frac{2\pi}{\theta} \in \mathbb{I}$	
2.2	$F_n(x, y, z) = (x \cos(n\frac{2\pi}{k}) - y \operatorname{sen}(n\frac{2\pi}{k}), x \operatorname{sen}(n\frac{2\pi}{k}) + y \cos(n\frac{2\pi}{k}), z + n),$ con $n, k \in \mathbb{Z}$	
2.3	$F_n(x, y, z) = (x + n, y, (-1)^n z),$ con $n \in \mathbb{Z}$	$BM \times \mathbb{R}$
3.1	$F_{n,m}(x, y, z) = (x + n, y + m, z),$ con $n, m \in \mathbb{Z}$	$S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}$
3.2	$F_{n,m}(x, y, z) = (x + m, y, (-1)^m z + n),$ con $n, m \in \mathbb{Z}$	$BK \times \mathbb{R}$
3.3	$F_{n,m}(x, y, z) = (x + n, y + m, (-1)^{n+m} z),$ con $n, m \in \mathbb{Z}$	
3.4	$F_{n,m}(x, y, z) = ((-1)^n x + m, y + \frac{1}{2}n, (-1)^n z),$ con $n, m \in \mathbb{Z}$	
3.5	$F_{n,m}(x, y, z) = ((-1)^m x + \frac{1}{2}n, y + \frac{1}{2}m, (-1)^{m+n} z),$ con $n, m \in \mathbb{Z}$	
4.1	$F_{n,m,q}(x, y, z) = (x + n, y + m, z + q),$ con $n, m, q \in \mathbb{Z}$	$S^1 \times S^1 \times S^1$
4.2	$F_{n,m,q}(x, y, z) = ((-1)^q x + n, (-1)^q y + m, z + \frac{1}{2}q),$ con $n, m, q \in \mathbb{Z}$	
4.3	$F_{n,m,q}(x, y, z) = (T_{e_1})^n (T_{e_2})^m (T_{\frac{\pi}{4}} R_{e_3, \frac{\pi}{2}})(x, y, z),$ con $n, m, q \in \mathbb{Z}$	
4.4	$F_{n,m,q}(x, y, z) = (T_{e_1})^n (T_{\beta})^m (T_{\frac{\pi}{6}} R_{e_3, \frac{\pi}{3}})(x, y, z),$ con $n, m, q \in \mathbb{Z}$ y $\beta = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$	
4.5	$F_{n,m,q}(x, y, z) = (T_{e_1})^n (T_{\beta})^m (T_{\frac{\pi}{3}} R_{e_3, \frac{2\pi}{3}})(x, y, z),$ con $n, m, q \in \mathbb{Z}$ y $\beta = (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$	
4.6	$F_{n,m,q}(x, y, z) = (x + n, (-1)^q y + m, z + q),$ con $n, m, q \in \mathbb{Z}$	$S^1 \times BK$
4.7	$F_{n,m,q}(x, y, z) = (x + (n + \frac{1}{2}m), (-1)^q y + m, z + q),$ con $n, m, q \in \mathbb{Z}$	$S^1 \times BK$
4.8	$F_{n,m,q}(x, y, z) = ((-1)^{q+m} x + n, (-1)^q y + m, z + \frac{q}{2}),$ con $n, m, q \in \mathbb{Z}$	
4.9	$F_{n,m}(x, y, z) = (x + m, (-1)^m y + n, (-1)^{n+m} z + (-1)^n m),$ con $n, m \in \mathbb{Z}$	
4.10	$F_{n,m}(x, y, z) = ((-1)^m x + n, (-1)^n (y + m), (-1)^{n+m} z + (-1)^n m),$ con $n, m \in \mathbb{Z}$	

Tabla 3.1: Acciones de los grupos de isometrías uniformemente discontinuos en el espacio

## Conclusiones

Tomando en cuenta lo anterior podemos concluir que la geometría del espacio determina la topología del espacio, en el caso particular de la geometría euclidiana las formas topológicas del espacio se determinan a partir de la acción del grupo de isometrías que caracterizan a la geometría euclidiana. Mas aun vemos que en el plano existen solo cuatro tipos de espacios topológicos y en el espacio 18 tipos que pueden admitir la existencia de métricas localmente euclidianas.

Me parece sorprendente como una herramienta tan fácil de entender como es una isometría, y la cual podemos encontrar en cualquier momento de nuestra vida cotidiana, como puede ser una traslación al mover una taza en nuestra mesa, una reflexión al ver nuestro reflejo, válgame la redundancia, en un charco de agua o una rotación al girar en el momento de disfrutar de un baile escuchando tu pieza musical favorita, puede ser utilizada para dar la explicación tan sorprendente como el hecho de que el espacio en que vivimos tenga, de manera global, la forma de alguna de las superficies presentadas.

Nuestros antepasados pensaban que la tierra era plana, lo cual es entendible, puesto que las mediciones que se realizan localmente son, por decirlo de alguna manera, como se realizan en el plano, bastaron algunos siglos para darnos cuenta de que ese pensar era incorrecto y así ver nuestro mundo, de manera global, con volumen y casi esférico. Entonces, creo que esto se presta para hacer la siguiente pregunta: si nos damos cuenta que la tierra realmente no es plana, sino que posee volumen y hasta conocemos su forma real, ¿cómo será el espacio donde vivimos?. Con estos resultados, quizá nos es imposible imaginarnos la forma física de nuestro espacio viéndolo de manera global, pero al menos podemos darle una interpretación y respuesta matemática a esa problemática, a ese cuestionamiento, y como lo dije anteriormente, utilizando solamente una herramienta tan "trivial" como son las isometrías, claro, haciendo uso también de otras herramientas, que esta ciencia tan romántica, como lo es la matemática, nos otorga para trabajar con la base de axiomas y una lógica exacta, pero con la motivación que nos da la imaginación y las ganas de entender el universo que nos rodea. Solo queda agradecer a estos dos matemáticos por ofrecernos estos extraordinarios resultados para que la gente, común y corriente, pueda entender un poco más de todo aquello que nos rodea y conocer el lugar donde nos desarrollamos como personas y como individuos.





## Bibliografía

- [1] John Stillwell, *Geometry of Surfaces*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1992.
- [2] V. V. Nikulin & I. R. Shafarevich, *Geometries and Groups (Geometrii i Gruppy)*, Springer Series in Soviet Mathematics, 1994.
- [3] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hopf.html>
- [4] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Killing.html>
- [5] Mal'cev , A. I., *Foundations of Linear Algebra*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1963.
- [6] Kostrikin, A. I., Manin, Yu. I., *Linear Algebra and Geometry*, Gordon and Breach Science Publish., Amsterdam, 1997.